

# 算法设计与分析

## 课后作业

任课教师: 陈宇

### 1 算法分析技术

1.1 假设  $f$  和  $g$  是定义在自然数集合上的函数, 若对某个其他函数  $h$  有  $f = O(h)$  和  $g = O(h)$  成立, 那么证明  $f + g = O(h)$

1.2 设  $x$  为实数,  $n, a, b$  为整数, 证明下述性质:

$$\left\lceil \frac{\left\lceil \frac{n}{a} \right\rceil}{b} \right\rceil = \left\lceil \frac{n}{ab} \right\rceil, \left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor}{b} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{ab} \right\rfloor$$

1.3 对于下面每个函数  $f(n)$ , 用  $\Theta$  符号表示成  $f(n) = \Theta(g(n))$  的形式, 其中  $g(n)$  要尽可能简洁. 比如  $f(n) = n^2 + 2n + 3$  可以写成  $f(n) = \Theta(n^2)$ . 然后按照阶递增的顺序将这些函数进行排列:

$$(n-2)!, 5 \log(n+100)^{10}, 2^{2n}, 0.001n^4 + 3n^3 + 1, (\ln n)^2, n^{1/3} + \log n, 3^n, \log(n!), \log(n^{n+1}), 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

1.4 求解以下递推方程:

$$\begin{cases} T(n) = T(n-1) + n^2 \\ T(1) = 1 \end{cases}$$

1.5 求解以下递推方程:

$$\begin{cases} T(n) = 9T(n/3) + n \\ T(1) = 1 \end{cases}$$

1.6 求解以下递推方程:

$$\begin{cases} T(n) = T(\frac{n}{2}) + T(\frac{n}{4}) + cn, c \text{ 为常数} \\ T(1) = 1 \end{cases}$$

## 2 排序类算法

2.1 设  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ,  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$  是整数集合, 其中  $m = O(\log n)$ . 设计一个算法找出集合  $C = A \cup B$ . 要求给出算法伪码描述和复杂度分析. 设计一个算法重新排列数组中的数, 使得负数都排在正数前面.

2.2 设  $A$  是  $n$  个数构成的数组, 其中出现次数最多的数称为众数. 设计一个算法求  $A$  的众数, 给出伪码和最坏情况下的复杂度.

## 3 分治算法

3.1 设  $A$  是  $n$  个非 0 实数构成的数组, 设计一个算法重新排列数组中的数, 使得负数都排在正数前面. 要求算法使用  $O(n)$  的时间和  $O(1)$  的空间.

3.2 设  $S$  是  $n$  个不等的正整数集合,  $n$  为偶数, 给出一个算法将  $S$  划分为子集  $S_1$  和  $S_2$ , 使得  $|S_1| = |S_2| = n/2$ , 且  $|\sum_{x \in S_1} x - \sum_{x \in S_2} x|$  达到最大, 即使得两个子集元素之和的差达到最大.

3.3 设  $A$  和  $B$  都是从小到大已经排好序的  $n$  个不等的整数构成的数组, 如果把  $A$  和  $B$  合并后的数组记作  $C$ , 设计一个算法找出  $C$  的中位数并给出复杂度分析.

## 4 贪心算法

4.1 若在 0-1 背包问题中, 各物品依重量递增排列时, 其价值恰好依递减序排列. 对于这个特殊的 0-1 背包问题, 设计一个有效算法找出最优解, 并说明算法的正确性.

4.2 将最优装载问题的贪心算法推广到两艘船的情形, 贪心算法仍然能产生最优解么? 若能, 给出证明. 若不能, 请给出反例.

4.3 设  $\Gamma = \{1, \dots, n\}$  是  $n$  个字符的集合. 证明关于  $\Gamma$  的任何最优前缀码可以表示长度为  $2n - 1 + n \lceil \log n \rceil$  位的编码序列. (提示: 先考虑树结构的编码, 再考虑叶结点对应字符的编码)

## 5 动态规划

5.1 图书馆大门前有  $n$  级台阶, 你每次跨上 1 级或者 2 级, 请问等上  $n$  级台阶总共有多少种不同的方法? 设计一个算法求解上述问题, 尝试写出公式, 说明算法设计思想和时间复杂度.

**5.2**  $n$  种币值  $x_1, x_2, \dots, x_n$  和总钱数  $M$  都是正整数. 如果每种币值的钱币至多使用 1 次, 问: 对于  $M$  是否可以有一种找零钱的方法? 设计一个算法求解上述问题. 说明算法设计思想, 分析算法最坏情况下的时间复杂度.

**5.3** 设  $P$  是一台高性能服务器,  $T = \{1, 2, \dots, n\}$  是  $n$  个计算任务集合,  $a_i$  表示任务  $i$  所申请的计算资源. 已知服务器的最大计算资源是正整数  $K$ . 请确定  $T$  的一个子集  $S$ , 使得  $\sum_{i \in S} a_i \leq K$ , 且  $K - \sum_{i \in S} a_i$  的值达到最小. 请设计一个算法求解  $S$ , 并分析最坏情况下的时间复杂度.