Proof of Master Theorem: (311551059 陳昱丞)

將規模為 n 的問題轉換為 a 個規模 $\frac{n}{b}$ 的子問題。

則時間複雜度公式為 $T(n) = a \times T\left(\frac{n}{b}\right) + n^d$,

$a>1, b>1, d>0$. n^d 代表合併這些子問題需要 $O(n^d)$ 時間。

接著分析各層遞迴狀況:

第0層: 1個規模 n 的問題, 合併花費 n^d.

第1層: a 個規模 $\frac{n}{b}$ 的子問題, 合併花費 $a \cdot \left(\frac{n}{b}\right)^d$.

第2層: a^2 個規模 $\frac{n}{b^2}$ 的子問題, 合併花費 $a^2 \cdot \left(\frac{n}{b^2}\right)^d$.

⋮

第k層: a^k 個規模 $\frac{n}{b^k}$ 的子問題, 合併花費 $a^k \left(\frac{n}{b^k}\right)^d$.

而在第k層中每個子問題規模為1, 所以 k-1 層就為 b, k-2 層為 b^2, 直到最上層為 n。因此可知 $b^k = n$, $k = \log_b n$

將各層合併的時間加總即 $T(n)$

$$T(n) = n^d + \left(\frac{a}{b^d}\right) n^d + \left(\frac{a}{b^d}\right)^2 n^d + \left(\frac{a}{b^d}\right)^3 \cdot n^d + \cdots + \left(\frac{a}{b^d}\right)^k \cdot n^d$$

$$\xrightarrow[n^d]{\text{提出}} T(n) = n^d\left(1 + \left(\frac{a}{b^d}\right) + \left(\frac{a}{b^d}\right)^2 + \left(\frac{a}{b^d}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{a}{b^d}\right)^k\right)$$

為公比 $= \frac{a}{b^d}$ 的等比級數。令 $q = \frac{a}{b^d}$

$$\Rightarrow T(n) = n^d\left(q^0 + q^1 + q^2 + \cdots + q^k\right) = n^d \times \frac{1-q^{k+1}}{1-q}, \text{ when } q \neq 1$$

$$= n^d \times (k+1), \text{ when } q = 1$$

① when $q=1$, $a=b^d$, $T(n) = n^d(k+1) = n^{\log_b a}(\log_b n + 1) < n^{\log_b a} \log n$ when b 夠大, $\Rightarrow \underline{T(n) = O(n^{\log_b a} \log n)}$ ※

② when $q<1$, $a<b^d$, when k 夠大, $1-q^{k+1} \xrightarrow{\text{趨近}} 1$, $T(n) = \frac{1}{1-q} \times n^d = C \times n^d \Rightarrow \underline{T(n) = O(n^d)}$ ※

③ when $q>1$, $a>b^d$, when k 夠大, $q^{k+1} \to \infty$, $T(n) = O(n^d q^k) \xrightarrow[q=\frac{a}{b^d}]{k=\log_b n} O(a^{\log_b n}) = \underline{O(n^{\log_b a})}$ ※