沖本本で時系列解析勉強会
第 4 章前半

Kano Lab.

Yuchi MATSUOKA

January 26, 2017

- ベクトル自己回帰（VAR）モデルは，自己回帰（AR）モデルの多変量への拡張である.
- VAR モデルを用いる目的

1. 複数の変数を用いることで予測精度を上げる.
2. 変数間の動学的関係の分析を行う.（時間的な要素や原因・結果の関係などを含めて経済現象を分析する）
   - グレンジャー因果性，インパルス応答関数，分散分解といった強力なツールを提供できる
   - 80 年代以降，マクロ経済学やファイナンスで頻繁に利用されるようになった.

1. VAR モデル
   - 4.1 弱定常ベクトル過程
   - 4.2. VAR モデル
   - 4.3 グレンジャー因果性

準備

- モデルに含まれる変数 $\mathbf{y}_t = (y_{1t}, y_{2t}, ..., y_{nt})'$ を定める．

  Ex:
  - 国際株式市場の関係の分析の場合，日本，アメリカ，イギリスの株式収益率など．
  - 金融政策の効果の分析の場合，鉱工業生産指数，コールレート，マネタリーベース，物価など．

- ベクトル $\mathbf{y}$ の期待値（ベクトル）

$$E(\mathbf{y}_t) = [E(y_{1t}), ..., E(y_{nt})]'$$

- k 次自己共分散行列

$$\mathrm{Cov}(\mathbf{y}_t, \mathbf{y}_{t-k}) = [\mathrm{Cov}(y_{it}, y_{j,t-k}]_{ij} = \begin{pmatrix} \mathrm{Cov}(y_{1t}, y_{1,t-k}) & \cdots & \mathrm{Cov}(y_{1t}, y_{n,t-k}) \\ \vdots & \ddots & \cdots \\ \mathrm{Cov}(y_{nt}, y_{1,t-k}) & \cdots & \mathrm{Cov}(y_{nt}, y_{n,t-k}) \end{pmatrix}$$

ベクトル過程の定常性

- 期待値（以下，$\boldsymbol{\mu}$）と自己共分散行列（以下，$\boldsymbol{\Gamma}_k$）が時点 t に依存しないとき，ベクトル過程は弱定常（共分散定常）といわれる．（以下，これを仮定する）
  - 単位の依存性をなくした自己相関行列

$$\boldsymbol{\rho}_k = \mathrm{Corr}(\mathbf{y}_t, \mathbf{y}_{t-k}) = [\mathrm{Corr}(y_{it}, y_{j,t-k})]_{ij}$$

もよく用いられる．$\mathbf{D} = \mathrm{diag}(var(y_1), ..., var(y_n))$ とすると，

$$\boldsymbol{\rho}_k = \mathbf{D}^{-1/2}\boldsymbol{\Gamma}_k\mathbf{D}^{-1/2}$$

である．

ホワイトノイズのベクトルへの拡張

Definition (ベクトルホワイトノイズ)

ベクトル過程 ϵ_t がすべての時点 t で

$$\begin{aligned} E(\epsilon_t) &= 0, \\ E(\epsilon_t \epsilon'_{t-k}) &= \begin{cases} \Sigma, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

を満たすとき，ϵ_t はベクトルホワイトノイズといわれる．$\epsilon_t \sim \text{W.N.}(\Sigma)$

- 明らかに弱定常であり，自己相関をもたない．
- ここで，Σ は $n \times n$ 正定値行列である．
- 対称行列である必要はない．つまり，ϵ_t は異時点ではどの成分も相関を持たないが，同時点において各成分は相関をもってよい．

ベクトル自己回帰（VAR）モデル

Definition (ベクトル自己回帰 (VAR) モデル VAR(p))

$$y_t = c + \Phi_1 y_{t-1} + \cdots + \Phi_p y_{t-p} + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim \text{W.N.}(\Sigma)$$

ただし，c は $n \times 1$ 定数ベクトル．Φ_i は $n \times n$ 係数行列.

たとえば，２変量 VAR(1) モデルは

$$\begin{cases} y_{1t} &= c_1 + \phi_{11} y_{1,t-1} + \phi_{12} y_{2,t-1} + \epsilon_{1t} \\ y_{2t} &= c_2 + \phi_{21} y_{1,t-1} + \phi_{22} y_{2,t-1} + \epsilon_{2t} \end{cases}, \begin{pmatrix} \epsilon_{1t} \\ \epsilon_{2t} \end{pmatrix} \sim \text{W.N.}(\Sigma)$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}, \rho = \text{Corr}(\epsilon_{1t}, \epsilon_{2t})$$

VAR(p) モデルの定常性条件

- 1 変量のときと同様に，VAR モデルは必ずしも定常になるとは限らない．
- 定常条件は 1 変量のときの定常条件を行列に拡張したもの，つまり

$$|1_n - \Phi_1 z - \cdots - \Phi_p z^p| = 0$$

のすべての解の絶対値が 1 より大きいことである．

例 4.2 (VAR(1) モデルの定常条件)

- VAR(1) モデル

$$y_t = \Phi_1 y_{t-1} + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim \text{W.N.}(\Sigma)$$

  を考える.

- AR 特性方程式 $|I_n - \Phi_1 z| = 0$ を解く. これは, $|z^{-1}I_n - \Phi_1| = 0$ と同値. つまり線形代数でいう Φ_1 の固有方程式を解くことである.
  - 定常性の条件 $|z| > 1$ は Φ_1 のすべての固有値の絶対値が 1 より小さいことである.

VAR モデルの統計量

- VAR モデルの期待値は

$$
\begin{aligned}
\mu &= E(y_t) = E(c + \Phi_1 y_{t-1} + \cdots + \Phi_p y_{t-p} + \epsilon_t,) \\
&= c + \Phi_1 \mu + \cdots \Phi_p \mu \\
\mu &= (I_n - \Phi_1 - \cdots - \Phi_p)^{-1} c
\end{aligned}
$$

  である.

- 自己相関は行列版のユール・ウォーカー方程式

$$
\rho_k = \Phi_1 \rho_{k-1} + \cdots + \Phi_p \rho_{k-p}
$$

  により求めることができる.

VAR モデルの推定

- VAR モデルの各方程式は同時点のその他の変数は含まないので同時方程式モデル (simultaneous equation model) ではない.
  - 例えば,

$$\begin{cases} x_t &= c_1 + \phi z_{t-1} + \epsilon_{1t} \\ y_t &= c_2 + \varphi z_{t-1} + \epsilon_{2t} \end{cases}$$

みたいなのが同時方程式モデル.

- しかし，各方程式は誤差項の相関を通じて関係している．このようなモデルを見かけ上無関係な回帰 (SUR) モデル (seemingly unrelated regression model) という.

$\rightarrow$ 一般的に，すべての回帰式を同時に推定しなければならない.

BUT VAR モデルは全ての回帰式が同一の説明変数を持つという特殊性があるため、実は各方程式を個別に OLS によって推定すれば BLUE になるということが分かっている．また，誤差のガウス性を仮定すれば MLE と一致.

VAR モデルの次数選択

- 情報量規準を用いましょう.
- 経験的に定めることも必要らしいです.

- VMA モデルや VARMA モデルも同様に定義できるが，応用上ほとんど利用されない.
  - モデルの推定が困難.
  - VAR モデルだけでもかなり複雑なモデルを記述できる.

3つのツールの概説

- グレンジャー因果性：
  - ある変数（群）が他の変数（群）の予測の向上に役立つかどうか判定する.
  - Ex. アメリカの株式市場が，日本の株式市場の予測に役立つのか？
- インパルス応答変数：
  - ある変数に対するショックやその変数やその他の変数に与える影響を分析する.
  - Ex. 日本の株式市場に他国の株式市場がどのような影響を，どのような大きさで与えるのか？
- 分散分解：
  - 各変数の不確実性において，各変数が寄与する割合を計算する.
  - Ex. 日本の株式市場における予測できない変動において，各国の株式市場がどの程度の役割を果たしているのか？

1 VAR モデル

4.1 弱定常ベクトル過程

4.2. VAR モデル

4.3 グレンジャー因果性

グレンジャー因果性 Granger(1969)

Definition (グレンジャー因果性)

現在と過去の x の値だけに基づいた将来の x の予測と，現在と過去の x と y の値に基づいた将来の x の予測を比較して後者のほうが MSE が小さくなる場合，y_t から x_t へのグレンジャー因果性が存在するという．

Definition (一般的なグレンジャー因果性)

x_t と y_t はベクトル過程．x と y の時点 t において現在と過去を含む利用可能な情報の集合 Ω_t，現在と過去の y を取り除いたものを $\tilde{\Omega}_t$ とする．このとき，$\tilde{\Omega}_t$ に基づいた将来の x の予測と，Ω_t に基づいた将来の x の予測を比較して，後者のほうが小さくなる場合，y_t から x_t へのグレンジャー因果性が存在するという．MSE の大小は行列の意味での大小である．

グレンジャー因果性の具体例

ここでは，2 変量 VAR(2) モデルで具体例を示す.

$$
\begin{cases}
y_{1t} &= c_1 + \phi_{11}^{(1)} y_{1,t-1} + \phi_{12}^{(1)} y_{2,t-1} + \phi_{11}^{(2)} y_{1,t-2} + \phi_{12}^{(2)} y_{2,t-2} + \epsilon_{1t} \\
y_{2t} &= c_2 + \phi_{21}^{(1)} y_{1,t-1} + \phi_{22}^{(1)} y_{2,t-1} + \phi_{21}^{(2)} y_{1,t-2} + \phi_{22}^{(2)} y_{2,t-2} + \epsilon_{2t}
\end{cases}
$$

- y_{2t} から y_{1t} へのグレンジャー因果性が存在しないということは $\phi_{12}^{(1)} = \phi_{12}^{(2)} = 0$ と同値．このことは，より一般の次数でも同様.

→ F 検定で，y_1 の式において y_2 に関連する係数がすべて 0 になることを帰無仮説として検定すればよい！

F検定によるグレンジャー因果性の検定

1. 帰無仮説，$H_0 : \phi_{12}^{(1)} = \phi_{12}^{(2)} = 0$ とする．
2. $y_{1t} = c_1 + \phi_{11}^{(1)} y_{1,t-1} + \phi_{12}^{(1)} y_{2,t-1} + \phi_{11}^{(2)} y_{1,t-2} + \phi_{12}^{(2)} y_{2,t-2} + \epsilon_{1t}$

   で OLS で推定する．その残差平方和を SSR1 とする．
3. $y_{1t} = c_1 + \phi_{11}^{(1)} y_{1,t-1} + \phi_{11}^{(2)} y_{1,t-2} + \epsilon_{1t}$

   で OLS で推定し，その残差平方和を SSR0 とする．
4. F 統計量

$$F := \frac{(\mathrm{SSR0} - \mathrm{SSR1})/2}{\mathrm{SSR1}/(T-5)}$$

   を定義する．2F は帰無仮説の下で漸近的に $\chi^2(2)$ に従う．2F と $\chi^2(2)$ の 95 パーセント点と比較して，2F の方が大きければ H_0 を棄却．グレンジャー因果が存在するとする！

一般の場合のＦ検定によるグレンジャー因果性の検定

ほぼ同じだが，n 変量 VAR(p) モデルの場合は F 統計量を

$$F := \frac{(\mathsf{SSR0} - \mathsf{SSR1})/r}{\mathsf{SSR1}/(T - np - 1)}$$

ただし，r は考える制約の数.

あとは rF の帰無分布が $\chi^2(r)$ に漸近的に従うことを利用して，検定すれば良い.

Sims(1972) による分布ラグモデルの解釈

- ある時系列 y_t が別の時系列 x_t と期待値 0 の誤差項 ϵ_t を用いて

$$y_t = c + \sum_{k=0}^{\infty} b_k x_{t-k} + \epsilon_t, \quad \mathrm{Cov}(x_t, \epsilon_s) = 0, \quad \forall t, s$$

という形で表現できるとき，y_t は x_t の分布ラグモデルに従うといわれる．

- x_t が任意の時点 s で誤差 ϵ_s と無相関．

→ y_t において，x に関する情報が含まれる部分は，完全に現在と過去の x で記述される．

→ y_t が x_t の分布ラグモデルに従う場合，y_t から x_t へのグレンジャー因果性は存在しない．(逆も成り立つ)

- y_t から x_t へのグレンジャー因果性が存在しないための必要十分条件は，y_t が x_t の分布ラグモデルで表現できることである．

グレンジャー因果性の長所と短所

- 長所
  - 定義が非常に明確である.
  - データを用いて容易に検定できる.
- 短所
  - グレンジャー因果性は通常の因果性とは異なる.（通常の因果性が存在する必要条件ではある）
  - グレンジャー因果性と通常の因果性の向きが同じになるとは限らない.
  - 定性的概念であり，関係の強さが測れない.（インパルス応答関数や分散分解を使おう）