第二章　　解析几何

一、基本问题

1．两点间距离公式

（1）设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$为平面上两点，则 A 与 B 的距离 $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y-y_2)^2}$

（2）设 $A(x_1,y_1,z_1),B(x_2,y_2,z_2)$则 A 与 B 的距离 $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y-y_2)^2+(z_2-z_1)^2}$

2．定比分点公式

（1）设 $M(x,y)$式线段 AB 的分点

1） $\frac{AM}{MB}=\lambda,\begin{cases}\lambda>0\text{时，内分}\\ \lambda<0\text{时，外分}\end{cases}$ 则 $\begin{cases}x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}\\ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\end{cases}$　　2）设 M 为 AB 中点时，$\begin{cases}x=\frac{1}{2}(x_1+x_2)\\ y=\frac{1}{2}(y_1+y_2)\end{cases}$

（2）设 $M(x,y,z)$是空间线段 AB 的分点

1） $\frac{AM}{MB}=\lambda,\begin{cases}\lambda>0\text{时，内分}\\ \lambda<0\text{时，外分}\end{cases}$ 则 $\begin{cases}x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}\\ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\\ z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\end{cases}$　　2）设 M 为 AB 中点时，$\begin{cases}x=\frac{1}{2}(x_1+x_2)\\ y=\frac{1}{2}(y_1+y_2)\\ z=\frac{1}{2}(z_1+z_2)\end{cases}$

3. 平面上不在同一直线上的三点 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),C(x_3,y_3)$所围三角形面积 $S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_3 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}$ 的绝对值。

二、 直线与平面方程

1. 平面直线方程：

（1）一般式：$AX+By+C=0$，斜率 $k=-\frac{A}{B}$。　　（2）斜截式：$y=kx+b$，其中 k 为斜率，b 为 y 轴截距

（3）点斜式：$y-y_0=k(x-x_0)$直线过点(x_0,y_0)，斜率为 k。

（4）截距式：$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$，其中 $a\neq0,b\neq0,a,b$ 为 x 轴、 y 轴上截距。

（5）两点式：$\frac{y-y_1}{y_2-y}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$ 或 $\begin{vmatrix}x & y & 1\\ x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\end{vmatrix}=0$　　（6）参数式：$\begin{cases}x=x_0+kt,\\ y=y_0+mt,\end{cases}$ 斜率为 $k=\frac{m}{l}$，过 (x_0,y_0)点。

2．空间直角坐标系中的平面方程

（1）一般式 $Ax+By+Cz+D=0$

1）$Ax+By+Cz=0$，通过原点　　2）$Ax+By+D=0$，与 z 轴平行　　3）$Ax+By=0$，通过 z 轴

（2）点法式：$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ 过 (x_0,y_0,z_0) 点，法矢量 $n=|A,B,C|$　（3）截距式：$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

（4）三点式：$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}=0$，这里 $(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2),(x_3,y_3,z_3)$ 为平面所过的三点。

三、点线与点面距离

（1）点 (x_0,y_0) 到直线 $AX+By+C=0$ 的距离 $d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

（2）点 (x_0,y_0,z_0) 到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离　$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

注意：平面上的直线对应于空间上的平面。

四、空间直线方程

（1）一般式：$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0; \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0; \end{cases}$ 其中 $\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$ 为方向数。

（2）参数式：$\begin{cases} x=x_0+lt; \\ y=y_0+mt; \\ z=z_0+nt; \end{cases}$ 直线过 (x_0,y_0,z_0)，方向参数 l,m,n

（3）标准式（对称式）：$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$，直线过 (x_0,y_0,z_0)，方向数 l,m,n

（4）两点式：$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$，直线过 $(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)$。

五、直线间、平面间、直线与平面间的关系

1．设直线 $L_1:A_1x+B_1y+C_1=0$，令 $k_1=-\frac{A_1}{B_1}$　　$L_2:A_2x+B_2y+C_2=0$，令 $k_2=-\frac{A_2}{B_2}$

（1）$L_1 /\!/ L_2 \Leftrightarrow k_1=k_2$ 或 $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}$　　（2）$L_1\perp L_2 \Leftrightarrow k_1\cdot k_2=-1$ 或者 $A_1A_2+B_1B_2=0$

（3）重合 $\Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$　　（4）夹角 $\theta:\tan\theta=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|$

2．设平面 $\pi_1:A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0;$　　平面 $\pi_2:A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0;$

直线 $L_1:\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$　　直线 $L_2:\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$

（1）平面间夹角 θ，则　$\cos\theta=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$

平面 π_1 // 平面 $\pi_2 \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$　　　　平面 $\pi_1 \perp$ 平面 $\pi_2 \Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$

（2）直线间夹角 θ，则 $\cos\theta=\dfrac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}$

直线 L_1 // 直线 $L_2 \Leftrightarrow \dfrac{l_1}{l_2}=\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}$　　　　直线 $L_1 \perp$ 直线 $L_2 \Leftrightarrow l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$

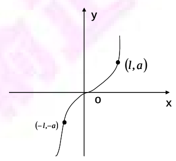
（3）直线与面的夹角 θ，$\sin\theta=\dfrac{|l_1A_1+m_1B_1+n_1C_1|}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}}$

直线 L_1 // 平面 $\pi_1 \Leftrightarrow A_1l_1+B_1m_1+C_1n_1=0$　　　　直线 $L_1 \perp$ 平面 $\pi_1 \Leftrightarrow \dfrac{l_1}{A_1}=\dfrac{m_1}{B_1}=\dfrac{n_1}{C_1}$

六、重要曲线与重要曲面

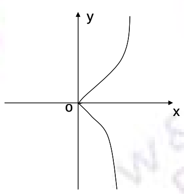
1．平面曲线

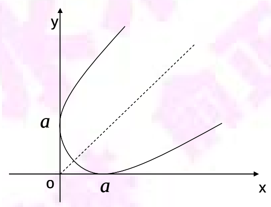
（1）立方抛物线 $y=ax^3\,(a>0)$



（2）半立方抛物线 $y=ax^3(a>0)$　　　　（3）抛物线 $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}(a>0)$ 或

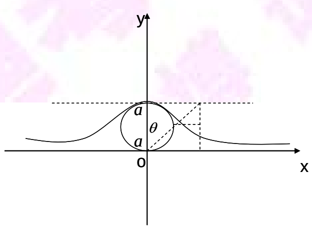
$$\begin{cases} x=a\cos^4 t \\ y=a\sin^4 t \end{cases}$$

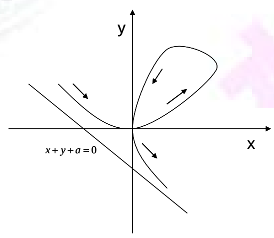




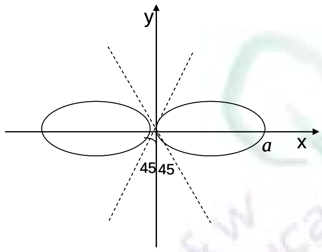
（4）箕舌线 $y=\dfrac{8a^3}{x^2+4a^2}$ 或 $\begin{cases} x=2a\tan\theta \\ y=2a\cos^2\theta \end{cases}$　　　　（5）叶形线 $x^3+y^3-3axy=0$，令 $y=tx$，

则 $\begin{cases} x=\dfrac{3at}{1+t^2} \\ y=\dfrac{3at^2}{1+t^2} \end{cases}$

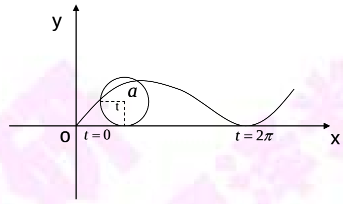




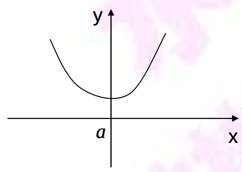
（6）双纽线 $\left(x^2+y^2\right)^2=a^2\left(x^2-y^2\right)$ 或 $\rho^2=a^2\cos 2\theta$



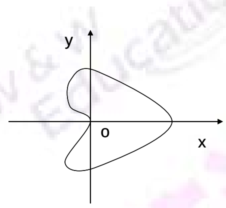
（7）摆线 $\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$



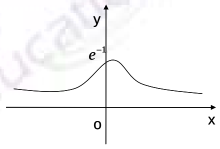
（8）悬链线 $y=\dfrac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$ 或 $y=ach\dfrac{x}{a}$



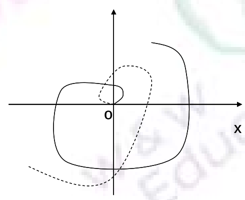
（9）心脏线 $\rho=a(1+\cos\theta)$



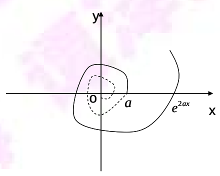
（10）概率曲线 $y=e^{-x^2}$



（11）阿基米德螺线 $\rho=a\theta$



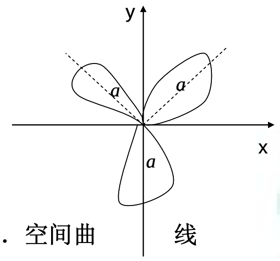
（12）等角螺线 $\rho=e^{a\theta}$

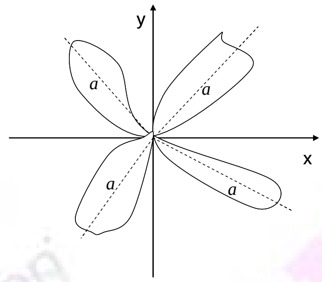


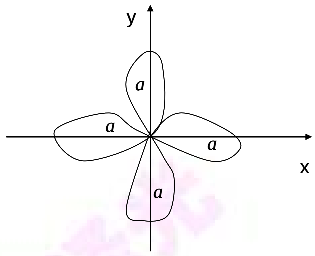
（13）星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 或 $\begin{cases} x=a\cos^3 t \\ y=a\sin^3 t \end{cases}$

（14）三叶玫瑰线 $\rho=a\sin 3\theta$

（15）四叶玫瑰线 $\rho=a\sin 2\theta$ 　　$\rho=a\cos 2\theta$







2．空间曲线

（1）一般方程 $\begin{cases} f(x,y,z)=0 \\ g(x,y,z)=0 \end{cases}$ （2）参数方程 $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$ （3）圆柱螺线 $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=a\sin t \\ z=kt \end{cases}$ （4）圆锥螺线 $\begin{cases} x=t\cos t \\ y=-t\sin t \\ z=at \end{cases}$

3．空间曲面

（1）球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$,球心在原点，半径为 R .$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ 球心在 (a,b,c)，半径为 R .

（2）椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 其中 a,b,c 为三个半径，在 $M(x_0,y_0,z_0)$ 处的切平面方程为 $\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}+\dfrac{z_0z}{c^2}=1$

（3）单叶双曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ （4）双叶双曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$ （5）椭圆抛物线 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=2cz$

（6）双曲抛物线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=2cz$

（7）旋转面曲线 $\begin{cases} f(x,z)=0 \\ y=0 \end{cases}$ 绕 x 轴旋转 $f\left(x,\pm\sqrt{y^2+z^2}\right)=0$ 绕 z 轴旋转 $f\left(\pm\sqrt{x^2+y^2},z\right)=0$

（8）柱面 设准线为 $\begin{cases} f(x,z)=0 \\ y=0 \end{cases}$，则一般方程 $f\left(X-\dfrac{l}{n},Y-\dfrac{m}{n}z\right)=0$，则母线方向数 l,m,n 。

特殊方程：

1） $f(X,Y)=0$ 母线// z 轴，准线 $\begin{cases} f(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$ 2） $\varphi(Y,Z)=0$ 母线// x 轴，准线 $\begin{cases} \varphi(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$

3） $\varphi(Z,X)=0$ 母线// y 轴，准线 $\begin{cases} \psi(x,z)=0 \\ y=0 \end{cases}$

（9）锥面 准线 $\begin{cases} f(x,y)=0 \\ z=c \end{cases}$,定点为原点，则一般方程： $f\left(\dfrac{cX}{Z},\dfrac{cY}{Z}\right)=0$

特殊方程：

1） $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}=0$，以 z 轴为对称轴，准线 $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0\\ z=c\end{cases}$

2） $\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}=0$，以 y 轴为对称轴，准线 $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{c^2}-1=0\\ y=b\end{cases}$

3） $-\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}=0$，以 x 轴为对称轴，准线 $\begin{cases}\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{c^2}-1=0\\ x=a\end{cases}$