高等数学简明公式

第一章 初等数学

一、初等代数

1. 乘法公式与因式分解

1. $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$　　2. $(a+b+c)^2=a^2++b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

3. $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$　　4. $(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$

5. $a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$　　6. $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$

2. 比例 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

（1）合比定理 $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$　　（2）分比定理 $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$　　（3）合分比定理 $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$

（4）若 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$，则令 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=t$ 于是 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{a+c+e}{b+d+f}$

（5）若 y 与 x 成正比，则 $y=kx$（k 为比例系数）　　（6）若 y 与 x 成反比，则 $y=\frac{k}{x}$（k 为比例系数）

3. 不等式

（1）设 $a>b>0, n>0$，则 $a^n>b^n$　　（2）设 $a>b>0, n$ 为正整数，则 $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$

（3）设 $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$，则 $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$

（4）非负数的算术平均值不小于其几何平均值，即

$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$，　$\frac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[3]{abc}$，　$\frac{a_1+a_2+a_3\cdots+a_n}{n}\geq\sqrt[n]{a_1a_2a_3\cdots a_n}$

（5）绝对值不等式

1）$|a+b|\leq|a|+|b|$　　2）$|a-b|\leq|a|+|b|$　　3）$|a-b|\geq|a|-|b|$　　4）$-|a|\leq a\leq|a|$

4. 二次方程 $ax^2+bx+c=0$

（1）根：$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$　　$x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

（2）韦达定理：$x_1+x_2=-\frac{b}{a}, x_1x_2=\frac{c}{a}$　　（3）判别式 $\Delta=b^2-4ac\begin{cases}>0,\text{方程有了两不等实数根}\\=0,\text{方程有两相等实根}\\<0,\text{方程没有实根}\end{cases}$

5. 一元三次方程组的韦达定理：

若 $x^3+px^2+qx+r=0$ 的三个根分别为 x_1、x_2、x_3 则

$x_1+x_2+x_3=-p$， $x_1\cdot x_2+x_2\cdot x_3+x_3\cdot x_1=q$， $x_1\cdot x_2\cdot x_3=-r$

6．指数

（1）$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$ （2）$a^m\div a^n=a^{m-n}$ （3）$\left(a^m\right)^n=a^{mn}$

（4）$(ab)^m=a^m b^m$ （5）$\left(\dfrac{a}{b}\right)^m=\dfrac{a^m}{b^m}$ （6）$a^{-m}=\dfrac{1}{a^m}$

7．对数 $\log_a N,(a>0,a\neq1,N>0)$

（1）对数恒等式 $N=a^{\log_a N}$，更常用 $N=e^{\ln N}$ （2）$\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N$

（3）$\log_a\left(\dfrac{M}{N}\right)=\log_a M-\log_a N$ （4）$\log_a\left(M^n\right)=n\log_a M$

（5）$\log_a\sqrt[n]{M}=\dfrac{1}{n}\log_a M$ （6）换底公式 $\log_a M=\dfrac{\log_b M}{\log_b a}$

（7）$\log_a 1=0$ （8）$\log_a a=1$

8．数列

（1）等差数列

设 a_1 —首项 a_n —通项 d —公差 S_n —前 n 项和

1）$a_n=a_1+(n-1)d$ 2）$S_n=\dfrac{a_1+a_n}{2}n=na+\dfrac{n(n-1)}{2}d$

3）设 a,b,c 成等差数列，则等差数列中项 $b=\dfrac{1}{2}(a+c)$

（2）等比数列

设 a_1 —首项 q —公比 a_n —通项，则

1）通项 $a_n=a_1q^{n-1}$ 2）前 n 项和 $S_n=\dfrac{a_1\left(1-q^n\right)}{1-q}=\dfrac{a_1-a_nq}{1-q}$

（3）常用的几种数列的和

1 ） $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{1}{2}n(n+1)$ 2 ）

$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

3 ） $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left[\dfrac{1}{2}n(n+1)\right]^2$ 4 ）

$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

5）$1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+\ldots+n(n+1)(n+2)=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$

9．排列、组合与二项式定理

（1）排列

$\mathrm{P}_n^m=n(n-1)(n-2)\cdots[n-(m-1)]$

（2）全排列 $\mathrm{P}_n^n=n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1=n!$ （3）组合

$\mathrm{C}_n^m=\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}=\frac{n!}{m!(n-m)!}$

组合的性质：

1）$\mathrm{C}_n^m=\mathrm{C}_n^{n-m}$ 2）$\mathrm{C}_n^m=\mathrm{C}_{n-1}^m+\mathrm{C}_{n-1}^{m-1}$

（4）二项式定理

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots[n-(k-1)]}{k!}a^{n-k}b^k+\cdots+b^n$$

二、平面几何

1．图形面积

（1）任意三角形 $S=\frac{1}{2}bh=\frac{1}{2}ab\sin C=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ 其中 $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$

（2）平行四边形 $S=bh=ab\sin\varphi$

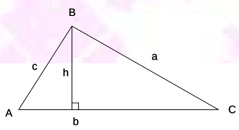
（3）梯形 S=中位线×高 （4）扇形 $S=\frac{1}{2}rl=\frac{1}{2}r^2\theta$

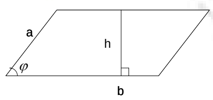
2．旋转体

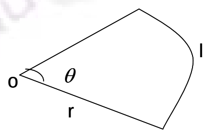
（1）圆柱 设 R —底圆半径，H —柱高，则

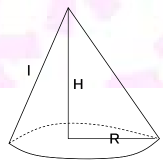
1）侧面积 $S_{侧}=2\pi RH$， 2）全面积 $S_{全}=2\pi R(H+R)$ 3）体积 $V=\pi R^2H$ （2）圆锥

（$l=\sqrt{R^2+H^2}$ 母线）





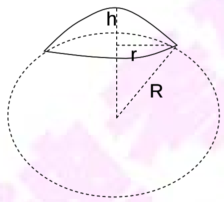




1）侧面积 $S_{侧}=\pi Rl$

2）侧面积 $S_{全}=\pi R(l+R)$　　3)体积 $V=\frac{1}{3}\pi R^2 H$

（3）球



设 R －半径，d －直径，则

1）全　面　积　$S_{全}=4\pi R^2$　　2）体积 $V=\frac{4}{3}\pi R^3$

（4）球缺（球被一个平面所截面得到的部分）

1）面积 $S=2\pi RH$（不包括底面）　　2）体积 $V=\pi h^2\left(R-\frac{h}{3}\right)$

3. 棱柱及棱锥：设 S －底面半径，H －高

（1）　棱柱体积 $V=SH$　　（2）　棱锥体积 $V=\frac{1}{3}SH$　　（3）正棱锥侧面积 $A=\frac{1}{2}\times$ 底面积×母线长

三、平面三角

1.　三角函数间的关系

（1）$\sin\alpha\sec\alpha=1$　（2）$\cos\alpha\csc\alpha=1$　（3）$\tan\alpha\cot\alpha=1$

（4）$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

（5）$1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha$　（6）$1+\cot^2\alpha=\csc^2\alpha$　（7）$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

（8）$\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

2. 倍角三角函数

（1）$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$　（2）$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$

（3）$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

（4）$\cot 2\alpha=\frac{1-\cot^2\alpha}{2\cot\alpha}$　（5）$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$　（6）$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$

3. 三角函数的合差化积公式

（1）$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$　（2）$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

（3）$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$　（4）$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

（5）$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$　（6）$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$

（7）$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$ （8）$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$

4．边角关系

（1）正弦定理： $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$， R 为外接圆半径

（2）余弦定理

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$， $b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$，

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

5．反三角函数

恒等式

（1）$\arcsin x\pm\arcsin y=\arcsin\left(x\sqrt{1-y^2}\pm y\sqrt{1-x^2}\right)$

（2）$\arccos x\pm arccoy=\arccos\left(xy\mp\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right)$

（3）$\arctan x\pm\arctan y=\arctan\left(\frac{x\pm y}{1\mp xy}\right)$

（4）$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$

（5）$\arctan x+arc\cot x=\frac{\pi}{2}$