三角有理分式 $R(\sin x,\cos x)$ 的积分

（1）半角替换：

记 $t=\tan\frac{x}{2}$， 则 $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$， $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$， $dt=\frac{2}{1+t^2}dt$， 于是可将三角有理分式 $R(\sin x,\cos x)$ 的不定积分 $\int R(\sin x,\cos x)dx$ 化为关于 t 的有理分式积分。

（2）三角替换

若 $R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$，则取变换 $t=\cos x$，$dt=-\sin xdx$，$dx=-\frac{dt}{\sin x}$。

若 $R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$，则取变换 $t=\sin x$，$dx=\frac{dt}{\cos x}$。

若 $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$，则取变换 $t=\tan x$， $dx=\cos^2 xdt$。

定积分应用相关公式：

(1) $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$

(2) **对积分区间的可加性：**$\forall c\in R$, $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$

(3) **对被积函数满足线性性：**$\int_a^b[Af(x)+Bg(x)]dx=A\int_a^b f(x)dx+B\int_a^b g(x)dx$

(4) **保序性（保号性）：**若可积函数 $f(x)\ge 0,\quad \forall x\in[a,b]$，则 $\int_a^b f(x)dx\ge 0$。

若可积函数 $f(x), g(x)$ 满足 $f(x)\ge g(x)$，则 $\int_a^b f(x)dx\ge\int_a^b g(x)dx$。

特别，若非负连续函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上不恒为零， 则 $\int_a^b f(x)dx>0$。

(5) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则 $|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 上也可积，且 $\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\int_a^b|f(x)|dx$

(6) **估值定理：**若可积函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足 $m\le f(x)\le M$，则

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$$

进一步，若函数 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上非负可积，则（称为比较性质）

$$m\int_a^b g(x)dx\le\int_a^b f(x)g(x)dx\le M\int_a^b g(x)dx$$

(7) **积分中值定理：**若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上取定号且可积，则 $\exists\xi\in(a,b)$，

使 $\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx$。

特别， $g(x)\equiv 1$ 时， $\exists\xi\in[a,b]$, 使 $\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$ ， 或

$$\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} = f(\xi) = \overline{f_{[a,B]}(x)}$$（平均值）

（8）若 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上是可积的奇函数，则 $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$；

若 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上是可积的偶函数，则 $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$。

（9）若 $f(x)$ 是可积的周期函数，切周期为 T，则对任意是实数 a 必有 $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$

（10）若连续函数 $f(x)$ 满足 $\int_a^b f(x)dx = 0$，则存在 $x_0 \in (a,b)$ 使得 $f(x_0) = 0$。

（11）若非负连续函数 $f(x)$ 满足 $\int_a^b f(x)dx = 0$，则 $\forall x \in [a,b], f(x) \equiv 0$。

（12）分部积分法 设 $f(x)$ 与 $g'(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，$F(x)$ 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = F(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)dx$$

（13）区间变换 $\int_a^b f(x)dx \Rightarrow \int_0^1 f(x(t))x'(t)dt$：令 $t = \dfrac{x-a}{b-a}$，

$\int_a^b f(x)dx \Rightarrow \int_c^d f(x(t))x'(t)dt$：令 $t = \dfrac{x-a}{b-a}(d-c)+c$，

（14）运用定积分求极限常用公式为 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b-a}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f(a+\dfrac{b-a}{n}k) = \int_a^b f(x)dx$，

其中 $f(a+\dfrac{b-a}{n}k) = f(\xi_k)$，$\dfrac{b-a}{n} = \Delta x_k$

（15） $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n xdx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n xdx$，记 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n xdx$，则

$I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$，（$n = 2,3,\cdots$），初值：$I_0 = \dfrac{\pi}{2}$，$I_1 = 1$。

上述结果可归纳得到下述实用形式：

$$I_{2n} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2}, \qquad I_{2n+1} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\cdot 1 \ (n = 1,2,3,\cdots)。$$

定积分的近似计算：

矩形法：$\int_a^b f(x) \approx \dfrac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + \cdots + y_{n-1})$

梯形法：$\int_a^b f(x)dx \approx \dfrac{b-a}{n}[\dfrac{1}{2}(y_0 + y_n) + y_1 + \cdots + y_{n-1}]$

抛物线法：$\int_a^b f(x)dx \approx \dfrac{b-a}{3n}[(y_0 + y_n) + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{n-1})]$

定积分的几何应用

1. 绕 x 轴旋转生成的旋转体的体积（小圆台法）

平面区域 $D=\{(x,y)|a\le x\le b,0\le y\le f(x)\}$ 绕 x 轴旋转生成的旋转体的

$$V_x=\int_a^b \pi f^2(x)dx$$

2. 绕 y 轴旋转生成的旋转体的体积（薄壁筒法）

平面区域 $D=\{(x,y)|a\le x\le b,0\le y\le f(x)\}$ 绕 y 轴旋转生成的旋转体

$$V_y=\int_a^b 2x\pi f(x)dx$$

光滑曲线的弧长

3. 直角坐标系中的光滑曲线 $y=f(x),\quad a\le x\le b$ 的弧长为

$$l=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx。$$

4. 参数方程下 $x=x(t),y=y(t),\quad \alpha\le t\le\beta$ 的弧长为

$$l=\int_\alpha^\beta\sqrt{[x'(t)]^2++[y'(t)]^2}dt。$$

5. 极坐标系下光滑曲线 $\rho=\rho(\varphi),\quad \alpha\le\varphi\le\beta$ 的弧长为

$$l=\int_\alpha^\beta\sqrt{\rho^2(\varphi)++[\rho'(\varphi)]^2}d\varphi。$$

旋转体的侧面积

6. 直角坐标系中曲线 $y=f(x),\ a\le x\le b$ 绕 x 轴旋转生成的旋转体的侧面积为

$$A=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx。$$

7. 参数方程下曲线 $x=x(t),y=y(t),\quad \alpha\le t\le\beta$ 绕 x 轴旋转生成的旋转体的侧面积为

$$A=2\pi\int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{[x'(t)]^2++[y'(t)]^2}dt$$

定积分的物理应用

功：$W=F\cdot s$

水压力：$F=p\cdot A$

引力：$F=k\dfrac{m_1m_2}{r^2}$，k为引力系数

函数的平均值：$\bar{y}=\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

均方根：$\sqrt{\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f^2(t)dt}$

质心与形心

平面光滑曲线的质心 设平面光滑曲线的参数方程为 $x=x(t),\ y=y(t),\quad \alpha\le t\le\beta$

其质量线密度为 $\mu(t)$，则其质量为 $M=\int_\alpha^\beta\mu(t)\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}dt$。

曲线关于 x 轴与 y 轴的静力矩分别为

$$M_x=\int_\alpha^\beta\mu(t)y(t)\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}dt，\quad M_y=\int_\alpha^\beta\mu(t)x(t)\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}dt$$

其质心坐标 $(\bar{x},\bar{y})$ 为 $\bar{x}=\dfrac{\int_\alpha^\beta \mu(t)x(t)\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt}{\int_\alpha^\beta \mu(t)\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt}$，

$$\bar{y}=\frac{\int_\alpha^\beta \mu(t)y(t)\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt}{\int_\alpha^\beta \mu(t)\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt}$$

若平面光滑曲线的方程为 $y=f(x),\ a\le x\le b$，则 $\bar{x}=\dfrac{\int_\alpha^\beta \mu(t)x\sqrt{1+[f'(t)]^2}\,dt}{\int_\alpha^\beta \mu(t)\sqrt{1+[f'(t)]^2}\,dt}$，

$$\bar{y}=\frac{\int_\alpha^\beta \mu(t)f(x)\sqrt{1+[f'(t)]^2}\,dt}{\int_\alpha^\beta \mu(t)\sqrt{1+[f'(t)]^2}\,dt}$$

平面图形的形心（质心） 设 $f(x),g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积，则平面图形

$D=\{(x,y)|a\le x\le b, f(x)\le y\le g(x)\}$ 的形心为 $\bar{x}=\dfrac{\int_a^b x[g(x)-f(x)]dx}{\int_a^b [g(x)-f(x)]dx}$，

$$\bar{y}=\frac{\frac{1}{2}\int_a^b [g^2(x)-f^2(x)]dx}{\int_a^b [g(x)-f(x)]dx}。$$

空间解析几何和向量代数：

空间两点的距离：$d=|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

向量在轴上的投影：$\Pr j_u\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|\cdot\cos\varphi,\varphi$ 是 $\overrightarrow{AB}$ 与 u 轴的夹角，$\Pr j_u(\vec{a}_1+\vec{a}_2)=\Pr j\vec{a}_1+\Pr j\vec{a}_2$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\theta=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$ 是一个数量

两向量之间的夹角：$\cos\theta=\dfrac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$

$$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix},|\vec{c}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\theta$$

例：$\vec{v}=\vec{w}\times\vec{r}$ 线速度

向量的混合积：$[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=|\vec{a}\times\vec{b}|\cdot|\vec{c}|\cos\alpha,\alpha$ 为锐角时，代表平行六面体的体积。

平面的方程：

1．点法式 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$，其中 $\vec{n}=\{A,B,C\},M_0(x_0,y_0,z_0)$

2．一般方程：$Ax+By+Cz+D=0$　　3．截距式方程：$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$

平面外任意一点到该平面的距离：$d=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

空间直线的方程：$\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}=t$，其中 $\vec{s}=\{m,n,p\}$；其中参数方程 $\begin{cases}x=x_0+mt\\ y=y_0+nt\\ z=z_0+pt\end{cases}$

二次曲面

1.椭球面：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$　　2.抛物线：$\dfrac{x^2}{2p}+\dfrac{y^2}{2q}=z$,（$p,q$同号）

3.双曲面

单叶双曲面：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$　　双叶双曲面：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$（马鞍面）

多元函数微分法及应用：

全微分：$dz=\dfrac{\partial z}{\partial x}dx+\dfrac{\partial z}{\partial y}dy$　　$du=\dfrac{\partial u}{\partial x}dx+\dfrac{\partial u}{\partial y}dy+\dfrac{\partial u}{\partial z}dz$

全微分的近似计算：$\Delta z\approx dz=f_x(x,y)\Delta x+f_y(x,y)\Delta y$

多元复合函数的求导法：

$z=f[u(t),v(t)]$　　$\dfrac{dz}{dt}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial t}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial t}$

$z=f[u(x,y),v(x,y)]$　　$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}$

当 $u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$ 时，

$du=\dfrac{\partial u}{\partial x}dx+\dfrac{\partial u}{\partial y}dy$　　$dv=\dfrac{\partial v}{\partial x}dx+\dfrac{\partial v}{\partial y}dy$

隐函数的求导公式：

隐函数 $F(x,y)=0$，$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{F_x}{F_y}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\partial}{\partial x}(-\dfrac{F_x}{F_y})+\dfrac{\partial}{\partial y}(-\dfrac{F_x}{F_y})\cdot\dfrac{dy}{dx}$

隐函数 $F(x,y,z)=0$，$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x}{F_z}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F_y}{F_z}$

隐函数方程组：

$\begin{cases}F(x,y,u,v)=0\\ G(x,y,u,v)=0\end{cases}$，$J=\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F}{\partial u} & \dfrac{\partial F}{\partial v}\\ \dfrac{\partial G}{\partial u} & \dfrac{\partial G}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}$

$\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{1}{J}\cdot\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}$　　$\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{1}{J}\cdot\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}$

$\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{1}{J}\cdot\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}$　　$\dfrac{\partial v}{\partial y}=-\dfrac{1}{J}\cdot\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}$