微分法在几何上的应用：

空间曲线 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \\ z=\omega(t) \end{cases}$ 在点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 处的切线方程：$\dfrac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\dfrac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\dfrac{z-z_0}{\omega'(t_0)}$

在点 M 处的法平面方程：$\varphi'(t_0)(x-x_0)+\psi'(t_0)(y-y_0)+\omega'(t_0)(z-z_0)=0$

若空间曲线方程为：$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$，则切向量 $\vec{T}=\{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix},\begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix},\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}\}$

若空间曲线方程为：曲面 $F(x,y,z)=0$ 上一点，则 $M(x_0,y_0,z_0)$，

1.过此点的法向量：$\vec{n}=\{F_x'(x_0,y_0,z_0),F_y'(x_0,y_0,z_0),F_z'(x_0,y_0,z_0)\}$

2.过此点的切平面方程：$F_x'(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y'(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z'(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$

3.过此点的切法线方程：$\dfrac{x-x_0}{F_x'(x_0,y_0,z_0)}=\dfrac{y-y_0}{F_y'(x_0,y_0,z_0)}=\dfrac{z-z_0}{F_z'(x_0,y_0,z_0)}$

方向导数与梯度：

函数 $z=f(x,y)$ 在一点 $p(x,y)$ 沿任一方向 l 的方向导数为：$\dfrac{\partial f}{\partial l}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\cos\varphi+\dfrac{\partial f}{\partial y}\sin\varphi$

其中 φ 为为 x 轴到方向 l 的转角。

函数 $z=f(x,y)$ 在一点 $p(x,y)$ 的梯度：$\mathrm{grad}f(x,y)=\dfrac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\vec{j}$

它与方向导数的关系是：$\dfrac{\partial f}{\partial l}=\mathrm{grad}f(x,y)\cdot\vec{e}$ 其中 $\vec{e}=\cos\varphi\cdot\vec{i}+\sin\varphi\cdot\vec{j}$ 为 l 方向上的单位向量。$\therefore \dfrac{\partial f}{\partial l}$ 是 $\mathrm{grad}f(x,y)$ 在 l 上的投影。

多元函数的局部极值及其求法：

设 $f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0$，令：$f_{xx}(x_0,y_0)=A,\quad f_{xy}(x_0,y_0)=B,\quad f_{yy}(x_0,y_0)=C$

则：$\begin{cases} AC-B^2>0\text{时}, \begin{cases} A<0,(x_0,y_0)\text{为极大值} \\ A>0,(x_0,y_0)\text{为极小值} \end{cases} \\ AC-B^2<0\text{时}, \quad \text{无极值} \\ AC-B^2=0\text{时}, \quad \text{不确定} \end{cases}$

重积分及其应用：

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_{D'} f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdrd\theta$$

曲面 $z = f(x,y)$ 的面积 $A=\iint\limits_{D}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$

平面薄片的重心： $\bar{x}=\frac{M_x}{M}=\frac{\iint\limits_{D} x\rho(x,y)d\sigma}{\iint\limits_{D}\rho(x,y)d\sigma}$， $\bar{y}=\frac{M_y}{M}=\frac{\iint\limits_{D} y\rho(x,y)d\sigma}{\iint\limits_{D}\rho(x,y)d\sigma}$

平面薄片的转动惯量：对于 x 轴 $I_x=\iint\limits_{D} y^2\rho(x,y)d\sigma$, 对于 y 轴 $I_y=\iint\limits_{D} x^2\rho(x,y)d\sigma$

平面薄片（位于 xoy 平面）对于 z 轴上质点 $M(0,0,a),(a>0)$ 的引力， $F=\{F_x,F_y,F_z\}$，其中：

$$F_x=f\iint\limits_{D}\frac{\rho(x,y)xd\sigma}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}},\qquad F_y=f\iint\limits_{D}\frac{\rho(x,y)yd\sigma}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}},\qquad F_z=-fa\iint\limits_{D}\frac{\rho(x,y)xd\sigma}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

柱面坐标和球面坐标：

柱面坐标： $\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta,\\ z=z\end{cases}$ $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_{\Omega} F(r,\theta,z)rdrd\theta dz$

其中： $F(r,\theta,z)=f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)$

球面坐标： $\begin{cases}x=r\sin\varphi\cos\theta\\ y=r\sin\varphi\sin\theta,\\ z=r\cos\varphi\end{cases}$ $dv=rd\varphi\cdot r\sin\varphi\cdot d\theta\cdot dr=r^2\sin\varphi\, drd\varphi d\theta$

$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_{\Omega} F(r,\varphi,\theta)r^2\sin\varphi\ dr\,d\varphi\ d\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{r(\varphi,\theta)}F(r,\varphi,\theta)r^2\sin\varphi\,dr$ 重心：

$$\bar{x}=\frac{1}{M}\iiint\limits_{\Omega} x\rho dv,\qquad \bar{y}=\frac{1}{M}\iiint\limits_{\Omega} y\rho dv,\qquad \bar{z}=\frac{1}{M}\iiint\limits_{\Omega} z\rho dv,$$

其中： $M=\bar{x}=\iiint\limits_{\Omega}\rho dv$

转动惯量：

$$I_x=\iiint\limits_{\Omega}(y^2+z^2)\rho dv,\qquad I_y=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+z^2)\rho dv,\qquad I_z=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\rho dv$$

曲线积分：

第一类曲线积分（对弧长的曲线积分）

设 $f(x,y)$ 在 L 上连续， L 的参数方程为： $\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$, $(\alpha\le t\le\beta)$ 则：

$$\int\limits_{L} f(x,y)ds=\int\limits_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt\quad(\alpha<\beta),$$

特殊情况： $\begin{cases}x=t\\ y=\varphi(t)\end{cases}$

第二类曲线积分（对坐标的曲线积分）

L 的参数方程为：$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$，则

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_\alpha^\beta\{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}dt$$

两类曲线积分之间的关系：其中 α 和 β 分别为 L 上积分起止点处切向量的方向角。

$$\int_L Pdx+Qdy=\int_L(P\cos\alpha+Q\cos\beta)ds$$

格林公式：$\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=\oint_L Pdx+Qdy$

当 $P=-y,Q=x$，即：$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=2$ 时，得到 D 的面积：$A=\iint_D dxdy=\frac{1}{2}\oint_L xdy-ydx$

平面上曲线积分与路径无关的条件：

1. G 是一个单连通区域；

2. $P(x,y)$，$Q(x,y)$ 在 G 内具有一阶偏导数，且 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$。注意奇点，如 $(0,0)$ 应减去对此奇点的积分，注意方向相反！

二元函数的全微分求积：

在 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$ 时，$Pdx+Qdy$ 才是二元函数 $u(x,y)$ 的全微分，其中：

$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}P(x,y)dx+Q(x,y)dy$，通常设 $x_0=y_0=0$。

曲面积分：

对面积的曲面积分： $\iint_\Sigma f(x,y,z)ds=\iint_{D_{xy}}f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+z_x^2(x,y)+z_y^2(x,y)}dxdy$

对坐标的曲面积分： $\iint_\Sigma P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy$，其中

$\iint_\Sigma R(x,y,z)dxdy=\pm\iint_{D_{xy}}R[x,y,z(x,y)]dxdy$，取曲面的上侧时取正号；

$\iint_\Sigma P(x,y,z)dydz=\pm\iint_{D_{yz}}P[x(y,z),y,z]dydz$，取曲面的前侧时取正号；

$\iint_\Sigma Q(x,y,z)dzdx=\pm\iint_{D_{zx}}Q[x,y(z,x),z]dzdx$，取曲面的右侧时取正号；

两类曲面积分之间的关系：

$$\iint_\Sigma Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iint_\Sigma(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)ds$$

高斯公式：

$$\iiint_\Omega\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv=\oiint_\Sigma Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\oiint_\Sigma(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)ds$$

高斯公式的物理意义——通量与散度：

散度：$\operatorname{div}\vec{\nu}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$　　即：单位体积内所产生的流体质量，若 $\operatorname{div}\vec{\nu}<0$，则为消失的流体质量

通量：$\iint_\Sigma\vec{A}\cdot\vec{n}ds=\iint_\Sigma A_n ds=\iint_\Sigma(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)ds$

因此，高斯公式又可写成：$\iiint_\Omega\operatorname{div}\vec{A}dv=\oiint_\Sigma A_n ds$

斯托克斯公式——曲线积分与曲面积分的关系：

$$\iint_\Sigma\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint_\Gamma Pdx+Qdy+Rdz$$

上式左端又可写成：$\iint_\Sigma\begin{vmatrix}dydz & dzdx & dxdy\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\iint_\Sigma\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}$

空间曲线积分与路径无关的条件：$\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z}$，$\frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x}$，$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$　　旋度：$\operatorname{rot}\vec{A}=\begin{vmatrix}\mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}$

向量 $\vec{A}$ 沿有向闭曲线 Γ 的环流量：$\oint_\Gamma Pdx+Qdy+Rdz=\oint_\Gamma\vec{A}\cdot\vec{t}ds$

常数项级数：

等比数列：$1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}=\frac{1-q^n}{1-q}$　　等差数列：$1+2+3+\cdots+n=\frac{(n+1)n}{2}$

调和级数：$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ 是发散的

级数审敛法：

1. 正向级数的审敛法——根植审敛法（柯西判别法）：

设 $\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}$，则 $\begin{cases}\rho<1\text{时，级数收敛}\\ \rho>1\text{时，级数发散}\\ \rho=1\text{时，不确定}\end{cases}$

2. 比值审敛法：

设：$\rho=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}$，则 $\begin{cases}\rho<1\text{时，级数收敛}\\ \rho>1\text{时，级数发散}\\ \rho=1\text{时，不确定}\end{cases}$

3.定义法：

$s_n=u_1+u_2+\cdots+u_n;\lim_{n\to\infty}s_n$ 存在，则收敛，否则发散。

交错级数 $u_1-u_2+u_3-u_4+\cdots$（或 $-u_1+u_2-u_3+\cdots,u_n>0$）的审敛法——莱布尼兹定理：

如果交错级数满足 $\begin{cases}u_n\geq u_{n+1}\\ \lim_{n\to\infty}u_n=0\end{cases}$，那么级数收敛且其和 $s\leq u_1$，其余项 r_n 的绝对值 $|r_n|\leq u_{n+1}$。

绝对收敛与条件收敛：

（1）$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$，其中 u_n 为任意实数；（2）$|u_1|+|u_2|+|u_3|+\cdots+|u_n|+\cdots$

如果（2）收敛，则（1）肯定收敛，且称为绝对收敛级数；
如果（2）发散，而（1）收敛，则称（1）为条件收敛级数。

调和级数 $\sum\frac{1}{n}$ 发散，而 $\sum\frac{(-1)^n}{n}$ 收敛，级数：$\sum\frac{1}{n^2}$ 收敛；p 级数：$\sum\frac{1}{n^p}\begin{cases}p\le 1\text{ 时发散}\\ p>1\text{时收敛}\end{cases}$

幂级数：

$$1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots\quad\begin{cases}|x|<1\text{时，收敛于}\dfrac{1}{1-x}\\ |x|\ge 1\text{时，发散}\end{cases}$$

对于级数（3）$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$，如果它不是仅在原点收敛，也不是在全数轴上都收敛，则必存在 R，使 $\begin{cases}|x|<R\text{时收敛}\\ |x|>R\text{时发散}\\ |x|=R\text{时不定}\end{cases}$，其中 R 称为收敛半径。

求收敛半径的方法：设 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho$，其中 a_n，a_{n+1} 是（3）的系数，则 $\begin{cases}\rho\ne 0\text{时，}R=\dfrac{1}{\rho}\\ \rho=0\text{时，}R=+\infty\\ \rho=+\infty\text{时，}R=0\end{cases}$

函数展开成幂级数：

函数展开成泰勒级数：

$$f(x)=f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$$

余项：$R_n=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$，$f(x)$ 可以展开成泰勒级数的充要条件是：$\lim\limits_{n\to\infty}R_n=0$

$x_0=0$ 时，即为麦克劳林公式：$f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$

一些函数展开成幂级数：

$e^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$，$x\in(-\infty,+\infty)$，　$\cos x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$，$x\in(-\infty,+\infty)$，　$\sin x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$，

$x\in(-\infty,+\infty)$，

$\ln(1+x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$，$x\in(-1,1]$，　$(1+x)^\alpha=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$，

其中，当 $\alpha\le -1$ 时，$x\in(-1,1)$；当 $-1<\alpha<0$ 时，$x\in(-1,1]$；当 $\alpha>0$ 时，$x\in[-1,1]$。

特别，当 $\alpha=-1$ 时，有 $\frac{1}{1+x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n$，$x\in(-1,1)$。

欧拉公式：

$e^{ix} = \cos x + i\sin x$ 或 $\begin{cases} \cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ \sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} \end{cases}$

三角级数：

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \varphi_n) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

其中，$a_0 = 2A_0$，$a_n = A_n \sin\varphi_n$，$b_n = A_n \cos\varphi_n$，$\omega t = x$

正交性：$1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x \cdots \sin nx, \cos nx \cdots$ 任意两个不同项的乘积在$[-\pi, \pi]$上的积分=0。

傅立叶级数：

$f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$，周期$=2\pi$

其中 $\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx & (n = 0,1,2\cdots) \\ b_n = \dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx & (n = 1,2,3\cdots) \end{cases}$

正弦级数：$a_n = 0$，$b_n = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx \quad n = 1,2,3\cdots \quad f(x) = \sum b_n \sin nx$ 是奇函数。

余弦级数：$b_n = 0$，$a_n = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx \quad n = 0,1,2\cdots \quad f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum a_n \cos nx$ 是偶函数。

周期为 $2l$ 的周期函数的傅立叶级数：

$f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\dfrac{n\pi x}{l} + b_n \sin\dfrac{n\pi x}{l})$，周期$=2l$，

其中， $\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\dfrac{n\pi x}{l} dx & (n = 0,1,2\cdots) \\ b_n = \dfrac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\dfrac{n\pi x}{l} dx & (n = 1,2,3\cdots) \end{cases}$

可引用的结果有：

$1 + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{5^2} + \cdots = \dfrac{\pi^2}{8}$ ，$1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{4^2} + \cdots = \dfrac{\pi^2}{6}$（相加）

$\dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{4^2} + \dfrac{1}{6^2} + \cdots = \dfrac{\pi^2}{24}$ $1 - \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} - \dfrac{1}{4^2} + \cdots = \dfrac{\pi^2}{12}$（相减）

微分方程的相关概念：

一阶微分方程：$y' = f(x, y)$ 或 $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$

可分离变量的微分方程：一阶微分方程可以化为 $g(y)dy = f(x)dx$ 的形式，解法：

$\int g(y)dy = \int f(x)dx$ 得：$G(y) = F(x) + C$ 称为隐式通解。

齐次方程：一阶微分方程可以写成 $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y) = \varphi(x, y)$，即写成 $\dfrac{y}{x}$ 的函数，解法：

设 $u = \dfrac{y}{x}$，则 $\dfrac{dy}{dx} = u + x\dfrac{du}{dx}$，$u + \dfrac{du}{dx} = \varphi(u), \therefore \dfrac{dx}{x} = \dfrac{du}{\varphi(u) - u}$ 分离变量，积分后将 $\dfrac{y}{x}$ 代替 u，即得

齐次方程的通解。

一阶线性微分方程：

1。.一阶线性微分方程：$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$

$$\begin{cases}\text{当}Q(x)=0\text{时,为齐次方程,}y=Ce^{-\int P(x)dx}\\ \text{当}Q(x)\neq 0\text{时，为非齐次方程,}y=(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C)e^{-\int P(x)dx}\end{cases}$$

2.贝努里方程：$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n,(n\neq 0,1)$

全微分方程：

如果 $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ 中左端式某函数的全微分方程，即 $du(x,y)=P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$，其中 $\frac{\partial u}{\partial x}=P(x,y),\frac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y)$，$\therefore u(x,y)=C$ 应该式该全微分方程的通解。

二阶微分方程：

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P(x)\frac{dy}{dx}+Q(x)y=f(x),\begin{cases}f(x)=0\text{时为齐次}\\ f(x)\neq 0\text{时为非齐次}\end{cases}$$

二阶常系数齐次线性微分方程及其解法：

$(*)y''+py'+qy=0$，其中 p,q 为常数；

求解步骤：

1.写出特征方程：$(\Delta)r^2+pr+q=0$，其中 r^2，r 的系数及常数项恰好式 $(*)$ 中 y'',y',y 系数。

2.求出 (Δ) 式的两个根 r_1,r_2

3.根据 r_1,r_2 的不同情况，按下表写出 $(*)$ 式的通解：

r_1，r_2的形式	(*)式的通解
两个不相等实根 $(p^2-4q>0)$	$y=c_1e^{r_1x}+c_2e^{r_2x}$
两个相等实根 $(p^2-4q=0)$	$y=(c_1+c_2x)e^{r_1x}$
一对共轭复根 $(p^2-4q<0)$ $r_1=\alpha+i\beta$，$r_2=\alpha-i\beta$ $\alpha=-\frac{p}{2}$，$\beta=\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}$	$y=e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x)$

二阶常系数非齐次线性微分方程

$y''+py'+qy=f(x)$，p,q 为常数 $f(x)=e^{\lambda x}P_m(x)$ 型，λ 为常数，

$f(x)=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x]$型