



Kalman滤波及其在 SLAM中应用

康丹



Outline

- Kalman滤波
- 简单实例
- 扩展kalman滤波
- SLAM问题



准备知识

- 状态空间模型：在控制领域中，用输入向量、状态向量和输出向量描述系统的一种方法，叫状态空间模型。如下式

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases}$$

- $x(k)$ 表示 k 时刻的状态向量， $u(k)$ 表示 k 时刻的输入向量， $y(k)$ 表示 k 时刻的输出向量，
- **A**表示状态矩阵，**B**为控制矩阵或者输入矩阵，**C**为观测矩阵，**D**为输入输出矩阵。



Kalman滤波

- 背景介绍:
 - Kalman, 匈牙利数学家。
 - 卡尔曼滤波器源于他的博士论文和1960年发表的论文《A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems》（线性滤波与预测问题的新方法）。



kalman滤波

- 引入一个离散控制系统的控制模型：
- $$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + w(k)$$
- 定义系统的观测变量为 z ，得到测量方程：
- $$z(k) = Hx(k) + v(k)$$
- 其中， $x(k)$ 表示 k 时刻的状态向量， $u(k)$ 表示 k 时刻的输入向量， $z(k)$ 表示 k 时刻的观测向量，
- $w(k)$ 、 $v(k)$ 分别为过程激励噪声和观测噪声，它们为相互独立、正态分布的白噪声，协方差分别是 Q ， R （这里假设它们不随系统状态变化而变化）



kalman滤波

- kalman滤波第一步：
- 用系统的过程模型来预测下一状态的系统。假设现在的系统状态是 $x(k)$ ，可以预测下一时刻 $k+1$ 出现的状态：
$$x(k+1|k) = Ax(k|k) + Bu(k)$$
- 更新状态 $x(k+1|k)$ 的协方差矩阵：
$$P(k+1|k) = AP(k|k)A^T + Q$$
- 其中, Q 为过程激励噪声协方差。



kalman滤波

- 结合观测值更新状态估计，得到**k+1**时刻状态为：

$$x(k+1|k+1) = x(k+1|k) + K_g(z(k+1) - Hx(k+1|k))$$

- 其中， $V(k+1) = z(k+1) - Hx(k+1|k)$ 称为新息。
- K_g 为kalman增益，其计算公式为：

$$K_g = P(k+1|k)H^T(HP(k+1|k)H^T + R)$$

- 式中， R 为观测噪声协方差。

kalman滤波

- 为了令kalman不断迭代下去，需要更新K时刻状态 $x(k+1|k+1)$ 的协方差：

$$P(k+1|k+1) = (I - K_g H)P(k+1|k)$$

- 时间更新和测量更新不断重复迭代，就是kalman最吸引人的特性。

时间更新（预测）

(1) 向前推算状态变量

- $x(k+1|k) = Ax(k|k) + Bu(k)$

(2) 向前推算误差协方差

$$P(k+1|k) = AP(k|k)A^T + Q$$

$x(k|k)$ 和 $P(k|k)$ 为初始估计

测量更新（校正）

(1) 计算kalman增益

$$K_g = P(k+1|k)H^T (HP(k+1|k)H^T + R)^{-1}$$

(2) 由观测变量 $z(k+1)$ 更新估计

$$x(k+1|k+1) = x(k+1|k) + K_g (z(k+1) - Hx(k+1|k))$$

(3) 更新测量误差

$$P(k+1|k+1) = (I - K_g H)P(k+1|k)$$

简单实例

- 考虑房间内温度对象过程：

$$x(k+1) = x(k) + w(k)$$

$$z(k) = x(k) + v(k)$$

- 即过程的状态不随时间变化，没有控制输入；
包含噪声的观测值是状态变量的直接体现。

- 那么，**kalman**滤波的5个方程分别为：

- $x(k+1|k) = x(k|k) \quad P(k+1|k) = P(k|k) + Q$

- $K_g = P(k+1|k)(P(k+1|k) + R)^{-1}$

- $x(k+1|k+1) = x(k+1|k) + K_g(z(k+1) - x(k+1|k))$

- $P(k+1|k+1) = (I - K_g)P(k+1|k)$

简单实例

- 假设房间温度不变， k 时刻为**23度**（估计值），该值的协方差假设为**5度**（上一时刻更新的协方差为**3度**，噪声为**2度**）。
- 房间内有一温度计，其值显示**25度**，该值的偏差（噪声）为**2度**。
- 则**kalman**增益为： $K_g = 5 / (5 + 2) = 0.71$
- **K+1**时刻的真实估计值为：
$$x(k+1|k+1) = 23 + 0.71 * (25 - 23) = 24.42$$
- 该时刻更新协方差为（即为上边**3度**的计算式）
$$P(k+1|k+1) = (1 - 0.71) \times 5 = 1.45$$

扩展卡尔曼滤波

- 可以看出，卡尔曼滤波估计是一个线性随机系统的状态。然而实际中，很多系统是非线性的，处理这些系统时，用扩展卡尔曼滤波(EKF)，它是将期望和方差线性化的卡尔曼滤波器。

- 控制对象的状态空间表述为：

$$x(k+1) = f(x(k), u(k), w(k))$$

$$z(k) = h(x(k), v(k))$$

扩展卡尔曼滤波

- 扩展卡尔曼滤波的5个方程为：

时间更新（预测）

(1) 向前推算状态变量

$$x(k+1|k) = f(x(k|k), u(k), 0)$$

(2) 向前推算误差协方差

$$P(k+1|k) = AP(k|k)A^T + WQW^T$$

$x(k|k)$ 和 $P(k|k)$ 为初始估计

测量更新（校正）

(1) 计算 *kalman* 增益

$$K_g = P(k+1|k)H^T(HP(k+1|k)H^T + VRV^T)^{-1}$$

(2) 由观测变量 $z(k+1)$ 更新估计

$$x(k+1|k+1) = x(k+1|k) + K_g(z(k+1) - h(x(k+1|k)))$$

(3) 更新测量误差

$$P(k+1|k+1) = (I - K_gH)P(k+1|k)$$



扩展卡尔曼滤波

- **A**是**f**对**x**的偏导的雅可比矩阵，即

$$A_{[i,j]} = \frac{\partial f_{[i]}}{\partial x_{[i]}}$$

- **W**是**f**对**w**的偏导的雅可比矩阵，即

$$W_{[i,j]} = \frac{\partial f_{[i]}}{\partial w_{[i]}}$$

- **H**是**h**对**x**的偏导的雅可比矩阵，即

$$H_{[i,j]} = \frac{\partial h_{[i]}}{\partial w_{[i]}}$$

- **V**是**h**对**v**的偏导的雅可比矩阵，即

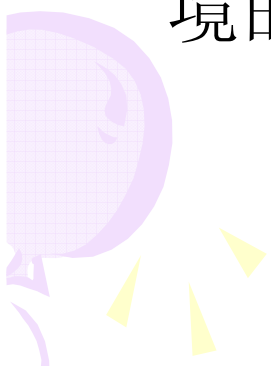
$$V_{[i,j]} = \frac{\partial h_{[i]}}{\partial v_{[i]}}$$

•

•



SLAM问题

- **SLAM: Simultaneous localization and mapping** 自主定位和地图创建。有时也称为**CML (concurrent mapping and localization)**
 - 问题陈述：自主移动机器人从未知环境中一个未知点开始运动，经过一系列未知特征点，并得到这些点到机器人距离的一组测量数据。这组测量数据由机器人头部的测距传感器测得。
 - **SLAM**处理的目标是根据这些测量数据得到环境的估计地图，并用这张地图实现机器人的定位。
- 



SLAM问题

- 在**SLAM**中，机器人运动模型已知，即运动角速度和线速度，可以估计机器人的位置；机器人与特征点之间的测量值可以测出，即知道测量值。在**SLAM**中，根据**EKF**，用每一状态的测量值来更新机器人的运动位置，然后由机器人位置和测量值求出特征点的坐标。

SLAM问题

K时刻，机器人状态可表示为

$$X = [X_v(k) \quad X_{lm}(k)]$$

其中， $X_{veh}(k) = (x(k) \ y(k) \ \theta(k))^T$

$$X_{lm} = [x_{lm}(k) \ y_{lm}(k)]$$

- $X_v(k)$ 表示机器人的状态， $X_{lm}(k)$ 为路标的状态，它不随时间变化而变化，可以写成 X_{lm} 。
- 观测值是描述机器人和特征点距离的函数，则

$$Z_i(k) = [\rho_i(k), \theta_i(k)]^T$$

- 其中， $\rho_i(k)$ 为特征点i与机器人之间的距离， $\theta_i(k)$
- 为机器人与特征点位置的夹角。

SLAM问题

- EKF-SLAM算法:
- (1) 初始化机器人的位置 $X_v(0)$ 和协方差阵 $P(0)$, 可以令其都为0.
- (2) 预测
$$X_v(k+1|k) = f(X_v(k|k), u(k))$$
$$P(k+1|k) = AP(k|k)A^T + Q(k)$$
- (3) 观测值
- 路标特征值的预测值的新息为
$$V(k+1) = z(k+1) - h(x(k+1|k))$$
- 新息的误差协方差矩阵为:
$$S(k+1) = HP(k+1|k)H^T + R$$

SLAM问题

- (4)数据关联

- 检验 $k+1$ 时观测到的特征点与 $0,1,\dots,k$ 时观测到的特征点是否关联上，根据下式证明时刻观测到的一组特征点确实是观测到的，其中 G 为常数；否则，舍弃观测值。

- $$V(k+1)S(k+1)V^T(k+1) \leq G$$

- (5)更新 *kalman* 增益

- $$K_g = P(k+1|k)H^T(HP(k+1|k)H^T + R)^{-1}$$

- 机器人状态:

- $$x(k+1|k+1) = x(k+1|k) + K_g(z(k+1) - h(x(k+1|k)))$$

- 协方差矩阵更新

- $$P(k+1|k+1) = (I - K_g H)P(k+1|k)$$

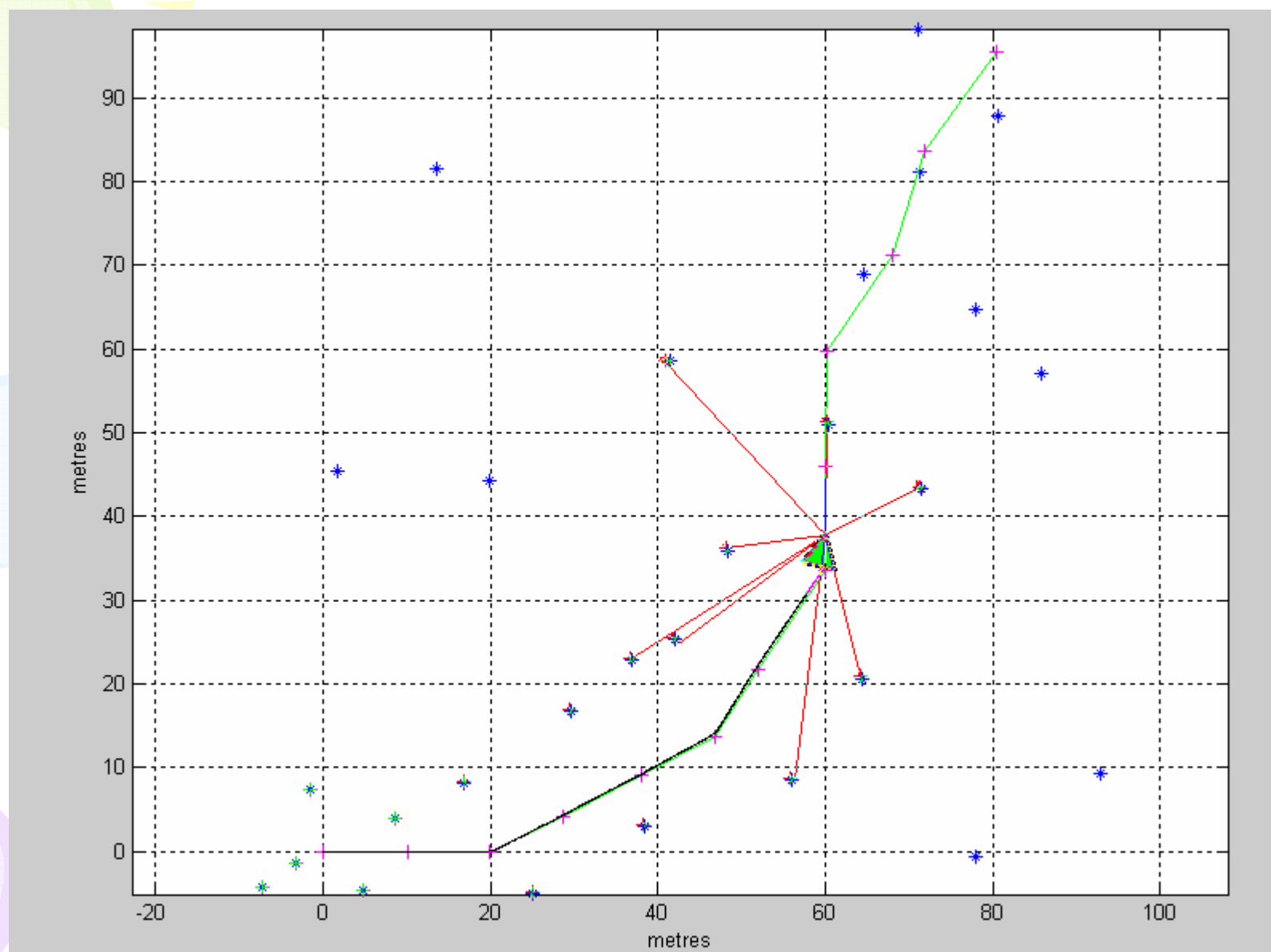


SLAM问题

- (6)返回(2)递归执行(2)-(5).

-

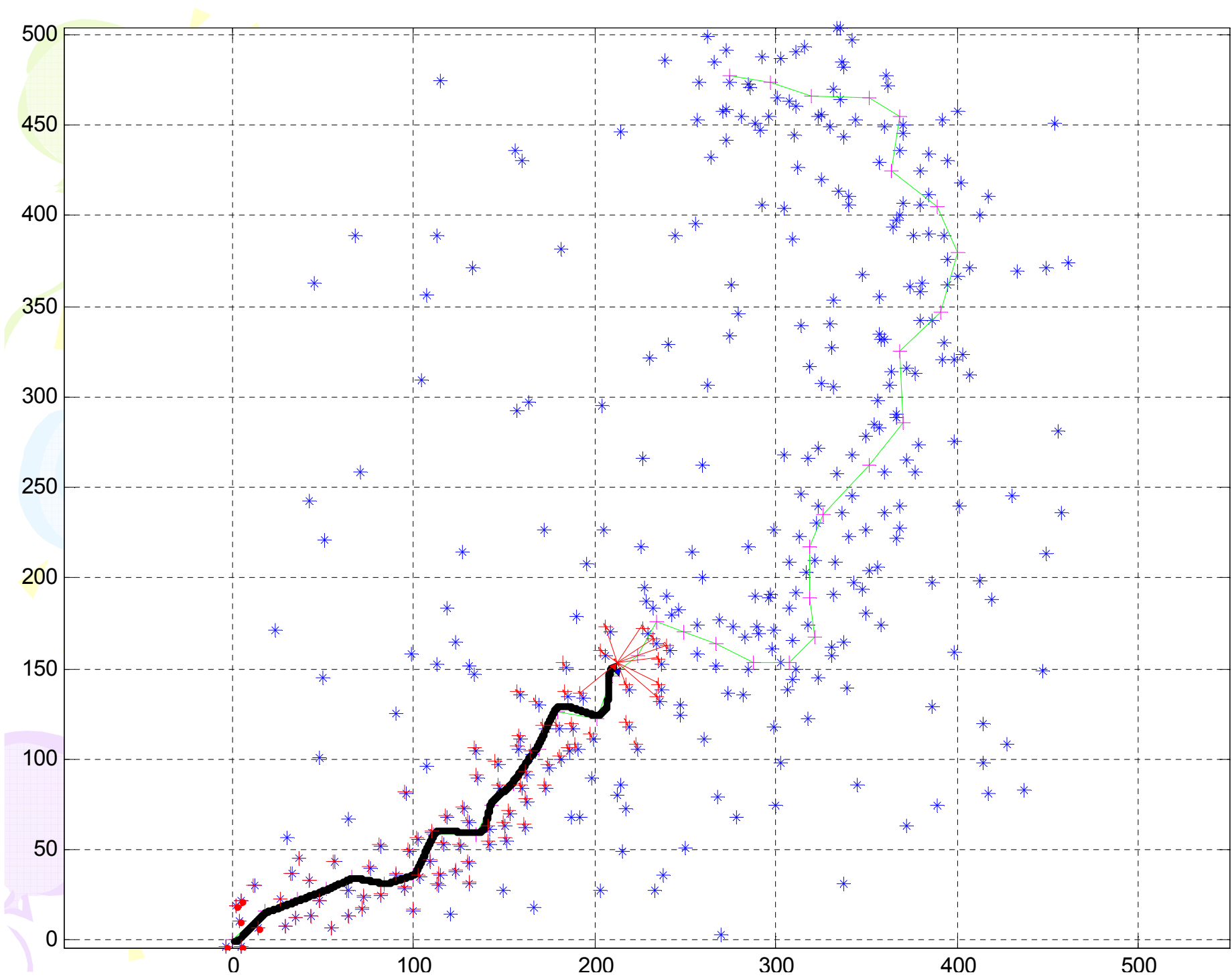
- 该算法在matlab上仿真执行结果为：

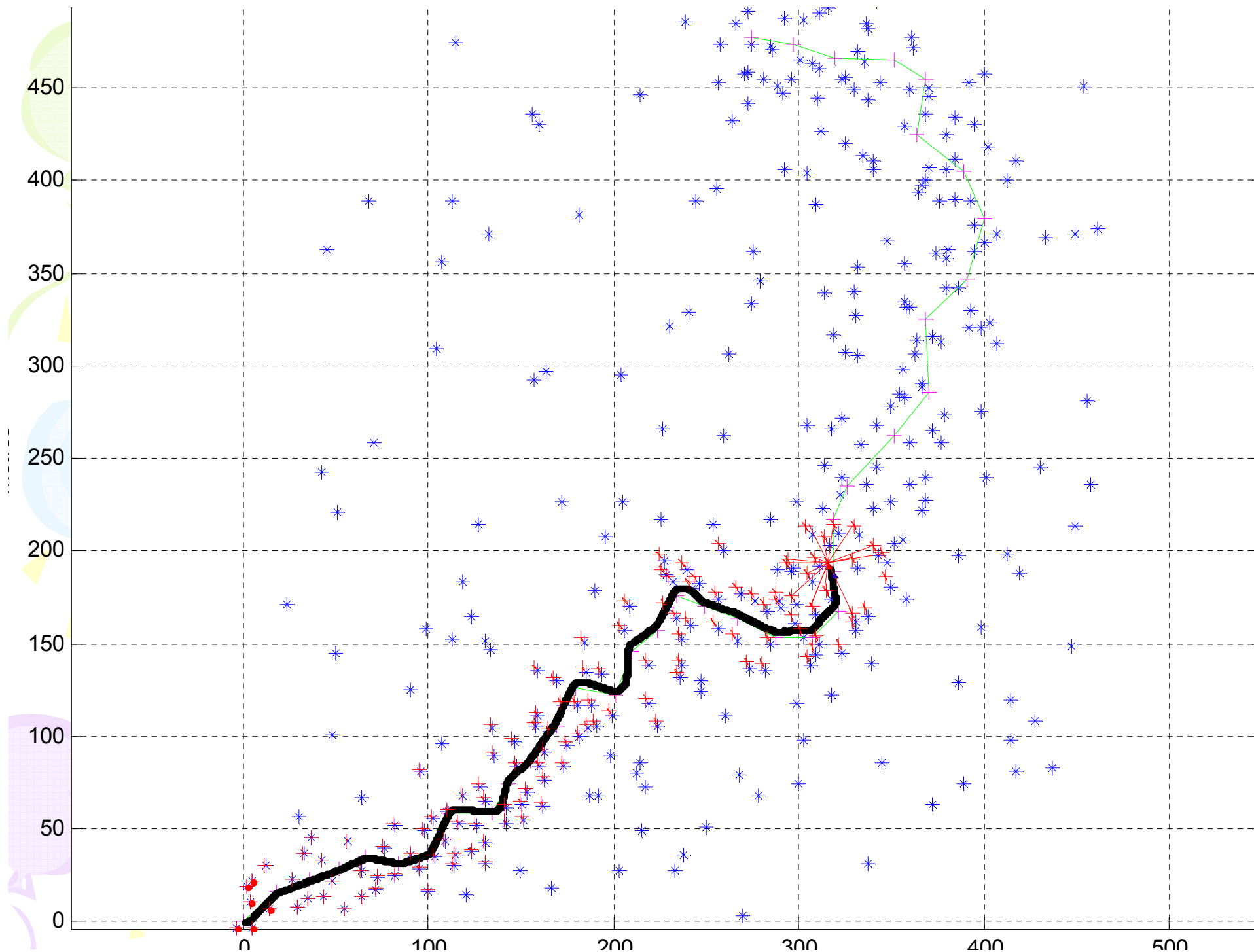


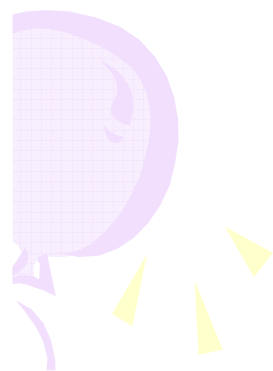
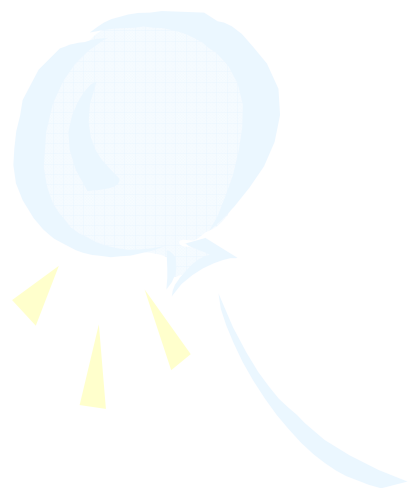
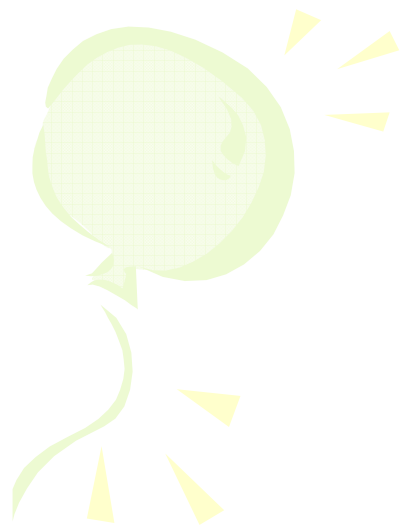


SLAM问题

- 目前问题:
- **EKF-SLAM**一致性和算法有效性:
- 当环境特征较多时, 出现偏移现象, 且计算时间太长。







• 谢谢大家！