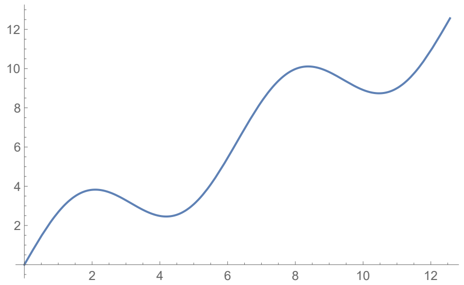
Quiz 2 Solution

1. Let I be an open interval, $f : I \to \mathbb{R}$ and $c,\ d \in I$.

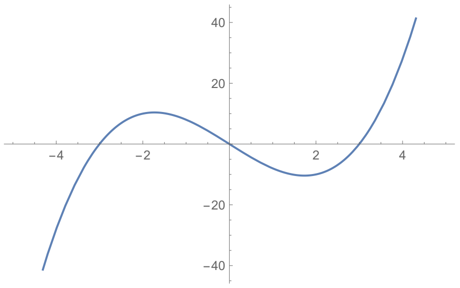
① If f has a relative (aka. local) maximum at c and a relative mininum at d, then $f(c) \geq f(d)$.

Sol. False. 相對極大值的函數值有可能小於相對極小值的函數值。見圖中 $x = 2$ 跟 x 約略為 10 的位置。



② If f is differentiable and all the solutions of $f'(x) = 0$ are $x = c,\ d$ and $f(c) > f(d)$, then f has an absolute maximum at c and f has an absolute minimum at d.

Sol. False. 考慮 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 定義為 $f(x) = x^3 - 9x$（或其他類似這種長相的函數）。f 微分是 0 只有兩個地方，但那兩處都不是絕對極值發生處。



③ Let $g(x) = \sqrt{x}$. Then g is differentiable on $[0, 4]$ and there must exists $c \in (0, 4)$ such that $g'(c) = \dfrac{1}{2}$.

Sol. False. 因為 $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = \infty$，所以 g 在 $[0, 4]$ 不可微。所以本選項錯誤。

註：但即便 g 在 $[0, 4]$ 不可微，仍可以用 Mean Value Theorem，因為 MVT 要求函數在 $[0, 4]$ 連續，且函數在 $(0, 4)$ 可微，現在 g 有在 $[0, 4]$ 連續，且有在 $(0, 4)$ 可微。所以後半部份 There must exists $c \in (0, 4)$ such that $g'(c) = \dfrac{1}{2}$ 是對的。（但因為前半不對，所以整個選項為 False）

④ If f is differentiable and strictly increasing on I (i.e., for every $x_1,\ x_2 \in I$, if $x_1 < x_2$, then

$f(x_1) < f(x_2)$), then $f'(x) > 0$ for all $x \in I$.

Sol. False. Consider $f(x) = x^3$. f is differentiable and strictly increasing on $\mathbb{R}$, but $f'(0) = 0$.

⑤ If f is twice-differentiable at c and $f''(c) = 0$, then f has an inflection point at c.

Sol. False. Consider $f(x) = x^4$. f is twice-differentiable at 0 and $f''(0) = 0$. $f'(x) = 4x^3$, $f''(x) = 12x^2$。$x > 0$ 時 $f''(x) > 0$，$x < 0$ 時也是。因此 f 在 0 不爲反曲點。

2. Compute the following limits or derivatives if it exists.

(a) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sqrt{x}}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \tan x \ln x$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{e^x}$

(d) $\left.\dfrac{d}{dx}\sqrt{x^2(\sec x - 1)}\right|_{x=0}$

Sol:

(a) 同 HW4 繳交習題，4-4 習題 57。參考方法之一如下。

$\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{x^{\sqrt{x}}} = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\sqrt{x}\ln x}$

又 $x \mapsto e^x$ 爲連續，所以若 $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}\ln x$ 存在的話，則 $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\sqrt{x}\ln x} = e^{\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}\ln x}$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}\ln x = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{(-\frac{1}{2})x^{-\frac{3}{2}}} = \lim\limits_{x\to 0^+} -2\sqrt{x} = 0$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\sqrt{x}\ln x} = e^{\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}\ln x} = e^0 = 1$

(b) 類似 HW4 繳交習題，4-4 習題 44。參考方法之一如下。

$$\lim_{x\to 0^+}\tan x\ln x = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\cot x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\csc^2 x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}(-\sin^2 x)$$
$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}(-\sin x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0^+}(-\sin x) = 0$$

(c) 因爲 $\lim\limits_{x\to 0^+} e^x = 1$，$\lim\limits_{x\to 0^+}(e^{2x}-1) = 1 - 1 = 0$，

因此根據除法極限律得 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{e^x} = \dfrac{0}{1} = 0$。

這題用分母極限是 1，故不能用羅畢達法則。用羅畢達法則答案會算成 2。

這題是提醒你羅畢達法則使用時一定要先確認是否符合羅畢達使用的前提。

(d) 這題若用 Chain Rule 計算，會得到 $\dfrac{d}{dx}\sqrt{x^2(\sec x - 1)} = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2(\sec x - 1)}}(\cdots\cdots)$，

然後有同學會認爲 0 代不進分母，所以在 0 不可微。但這是誤解。

Chain rule $\boxed{(f\circ g)'(c) = f'\big(g(c)\big)g'(c)}$ 使用的前提之一是「f 在 $g(c)$ 可微」且 g 在 c 可微，

令 $g(x) = x^2(\sec x - 1)$，$f(y) = \sqrt{y}$，則 $f(g(x)) = \sqrt{x^2(\sec x - 1)}$。

由於 f 在 $g(0)$ 不可微，所以不能用 Chain Rule 來算。此時須回歸導數原本定義。

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2(\sec x - 1)} - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|\sqrt{\sec x - 1}}{x}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|\sqrt{\sec x - 1}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x\sqrt{\sec x - 1}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{\sec x - 1} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|\sqrt{\sec x - 1}}{x} = \lim_{x\to 0^-} -\frac{x\sqrt{\sec x - 1}}{x} = \lim_{x\to 0^-} -\sqrt{\sec x - 1} = 0$$

所以 $\left.\dfrac{d}{dx}\sqrt{x^2(\sec x - 1)}\right|_{x=0} = 0$

3. Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be defined by $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}$.

Sol: $f'(x) = \dfrac{2(x+1)(1+x^2) - 2x(x+1)^2}{(x^2+1)^2} = \dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$

$$f''(x) = \frac{2(-2x)\cdot(1+x^2)^2 - [2(1+x^2)2x]2(1-x^2)}{(1+x^2)^4} = \frac{4x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$$

$f'(x) = 0$，得 $1 - x^2 = 0$，所以 $x = 1, -1$

① $x > 1$ 時，$f'(x) < 0$，故 f 在區間 $(1, \infty)$ 爲嚴格減。(區間回答時含帶著端點也可)

② $-1 < x < 1$ 時，$f'(x) > 0$，故 f 在區間 $(-1, 1)$ 爲嚴格增。(區間回答時含帶著端點也可)

③ $x < 1$ 時，$f'(x) < 0$，故 f 在區間 $(-\infty, -1)$ 爲嚴格減。(區間回答時含帶著端點也可)

By First Derivative Test，f 在 1 有相對極大，f 在 -1 有相對極小。

① $x > \sqrt{3}$ 時，$f''(x) > 0$，故 f 在區間 $(\sqrt{3}, \infty)$ 爲凹向上。

② $0 < x < \sqrt{3}$ 時，$f''(x) < 0$，故 f 在區間 $(0, \sqrt{3})$ 爲凹向下。

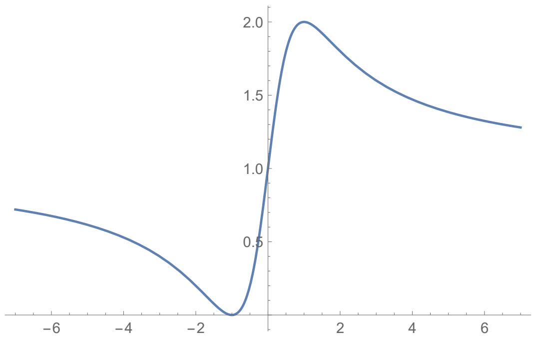
③ $-\sqrt{3} < x < 0$ 時，$f''(x) > 0$，故 f 在區間 $(-\sqrt{3}, 0)$ 爲凹向上。

④ $x < -\sqrt{3}$ 時，$f''(x) < 0$，故 f 在區間 $(-\infty, -\sqrt{3})$ 爲凹向下。

可知 f 在點 $(0, 1)$，$(\sqrt{3}, \dfrac{(\sqrt{3}+1)^2}{4})$，$(-\sqrt{3}, \dfrac{(1-\sqrt{3})^2}{4})$ 均爲反曲點。

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x+1)^2}{x^2+1} = 1$，且 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{(x+1)^2}{x^2+1} = 1$，得 $y = 1$ 爲兩側的水平漸進線。另外 f 無垂直漸進線及斜漸進線。

由於漸進線的情形及函數嚴格遞增遞減的情形，直觀可知 f 在 1 發生絕對極大，f 在 -1 發生絕對極小。(見圖)



註：(1) 看嚴格遞增遞減可從 f' 的符號看。又看 f' 的符號等同只看分子部份 $1-x^2$ 的符號就好，因此討論的分界處在 $1,\ -1$。

(2) 看凹向性可從 f'' 的符號看。又看 f'' 的符號等同只看分子部份 $x(x^2-3)$ 的符號就好，因此討論的分界處在 $0,\ \pm\sqrt{3}$。