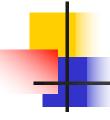




离散数学

Discrete Mathematics





第四章

一阶(谓词)逻辑基本概念

4.1一阶(谓词)逻辑符号化 4.2一阶(谓词)逻辑公式及解释

在命题逻辑中,命题是最基本的单位,对简单命题不再进行分解,不 关心命题中个体与总体的内在联系和数量关系。这就使得它难以描述和证 明一些常见的推理。因此,需要对命题进行细化,建立更为精细的逻辑推 理体系。

例如:逻辑学中著名的三段论:

凡偶数都能被2整除。6是偶数。所以, 6能被2整除。

这个推理是数学中的真命题,是正确的,但在命题逻辑中却无法判断 其正确性,用p,q,r分别表示以上三个命题。

则得到推理的形式结构为:

 $(p\Lambda q)\rightarrow r$

由于上式不是重言式,因而不能由它判断推理的正确性。原因在于各命题的内在联系没有表示出来。

为了克服命题逻辑的局限性,应该将原子命题再细分,分析出个体词、谓词和量词,以便达到表达出命题的内在联系和命题之间的逻辑关系。这就是一阶逻辑所研究的内容。

§ 4.1 一阶逻辑命题符号化



- 一、谓词逻辑命题符号化的三个基本要素:个体词、谓词、量词。
 - 1. 个体词: 研究对象中可以独立存在的具体的或抽象的客体。

例如:小王,小张,马列主义,3,北京等都可做为个体词。

(2)表示抽象或泛指的个体词称为个体变项,一般用小写字母x, y, z, ...表示。

个体变项的取值范围称为个体域 (或论域)。个体域可以是有限集合,如 $\{1,2,3\}$ 或 $\{a,b,c\}$,也可以是无限集合,如自然数集合N或实数集合R。由宇宙间一切事物组成的个体域称为全总个体域。

谓词

- 2. 谓词: 用来刻划个体词的性质或个体词之间相互关系的词。
- 例如: ① 在命题 1/2 是无理数"中,"…是无理数"是谓词。
 - ② 在命题"x 是有理数"中,"…是有理数"是谓词。
 - ③ 在命题"小王与小李同岁"中,"…与…同岁"是谓词。
- ④ 在命题 "x与y具有关系L"中, "…与…具有关系L"是谓词。 注: (1) 常用大写字母F,G,H 等来表示谓词。
 - (2) 表示具体性质或关系的谓词称为谓词常项; 表示抽象或泛指的性质或关系的谓词称为谓词变项。
 - (3) F(a): 表示个体常项a具有性质F(F是谓词常项或变项);
 - F(x): 表示个体变项x具有性质F(F同上);
 - F(a,b): 表示个体常项 $a \times b$ 具有关系F(同上);
 - F(x,y): 表示个体变项 x,y具有关系F(同上)。
- 一般地,用 $P(x_1,x_2,...,x_n)$ 表示含 $n(n\geq 1)$ 个命题变项 $x_1,x_2,...,x_n$ 的n元谓词。它可看成以个体域为定义域,以 $\{0,1\}$ 为值域的n元函数关系。
- 当P取常项,且 $(x_1,x_2,...,x_n)$ 取定常项 $(a_1,a_2,...,a_n)$ 时, $P(a_1,a_2,...,a_n)$ 是一个命题.

谓词

(4)不含个体变项的谓词称为0元谓词。

例如 F(a), G(a,b), $P(a_1,a_2,...,a_n)$ 等。当F, G, P等为谓词常项时,0元谓词即为命题。因此,命题可看作特殊的谓词。

- 例4.1 用0元谓词将下列命题符号化,并讨论它们的真值。
 - (1) 只有当2是素数时,4才是素数;
 - (2) 如果5大于4,则4大于6。
 - 解: (1) 设一元谓词F(x): x是素数; 个体常项: a: 2; b: 4。

则命题可符号化: $F(b) \rightarrow F(a)$.

因为该蕴含式前件为假,故命题为真。

(2) 设二元谓词G(x,y): x大于y。个体常项: a: 4; b: 5; c: 6。

则命题可符号化为: $G(b,a) \rightarrow G(a,c)$ 。

由于G(b,a)为真,而G(a,c)为假,故命题为假。



谓词

有了个体词和谓词的概念之后,有些命题还是不能准确地符号化。

以前面所讨论的三段论为例:

令: P(x): x是偶数。 S(x): x能被2整除。

a: 6.

符号化为: $(1)P(x)\rightarrow S(x)$ (2)P(a) (3)S(a)

我们知道, "凡偶数都能被2整除。"是一个真命题,

而 " $P(x) \rightarrow S(x)$ "是一个一元函数,不是一个命题。原因是 " $P(x) \rightarrow S(x)$ "没有把命题(1) 中 "凡"的意思表示出来。

即缺少表示个体常项或变项的数量关系的词。所以还要引入量词的概念。

量词

3.量词:表示个体常项或变项之间数量关系的词。

量词只有两个:全称量词、存在量词。

(1) 全称量词:表示"全部"含义的词。全称量词统一符号化为"∀"。

注: a. 常用语中"全部"、"所有的"、"一切"、"每一个"、"任何"、

"任意的"、"凡"、"都"等词都是全称量词。

b. ∀x F(x)表示个体域里所有个体都有性质F.

(2) 存在量词:表示"存在"含义的词。存在量词统一符号化为"3"。

注: a. 常用词中"存在"、"有一个"、"有的"、"至少有一个"等词都

是存在量词。

 $b.\exists x F(x)$ 表示个体域中存在个体具有性质 F。

例:凡偶数都能被2整除。

可符号化为 $_{a}$ $_$

一阶逻辑中命题符号化问题

例4.2-1 在个体域为人类集合将下面两个命题符号化:

(1) 凡是人都要呼吸;(2) 有的人用左手写字。

解: 令 F(x): x 呼吸; G(x): x 用左手写字。则

(1) $\forall x F(x)$; (2) $\exists x G(x)$.

例4.2-2 上例中,将个体域改为全总个体域后,两命题的符号化形式如何?

解: 令 F(x): x呼吸; G(x): x用左手写字; M(x): x是人。

则: (1) $\forall x (M(x) \rightarrow F(x))$; (2) $\exists x (M(x) \land G(x))$.

由上面例子可见:

特性谓词:从全 总个体域中分离 出一个集合,定 义的谓词。

- (1) 在不同个体域中,同一个命题的符号化形式可能不同。
 - 一般地,对全称量词,特性谓词应作为蕴含式的前件。
 - 一般地,对存在量词,特性谓词应作为合取式的一项。
- (2) 同一个命题,在不同个体域中的真值也可能不同。 如果问题中没有指明个体域时,默认为全总体域。

一阶逻辑中命题符号化问题



- (3) 当F是谓词常项时, $\forall xF(x)$ 是个命题,如果把个体域中的任何一个个体a代入,F(a)都为真,则 $\forall xF(x)$ 为真;否则 $\forall xF(x)$ 为假。
- (4) 当F是谓词常项时, $\exists x F(x)$ 是个命题,如果个体域中存在一个个体a 使 F(a) 为真,则 $\exists x F(x)$ 为真,否则 $\exists x F(x)$ 为假。

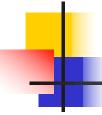
例4.3 在个体域限制为(a)和(b)条件时,将下列命题符号化,并给出它们的真值。

- (2) 对于任意的x,均有 x^2 -3x+2=(x-1)(x-2)
- (2) 存在x,使得x+5=3

其中(a)个体域为D1=N (b)个体域为D2=R

解令F(x): $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$, G(x): x+5=3,

则可符号化为(1) ∀xF(x), (2) ∃xG(x)。



一阶逻辑中命题符号化问题



例4.4 将下列命题符号化,并讨论其真值。

- (1) 所有的人都长着黑头发; (2) 有的人登上过月球;
- (3) 没有人登上过木星; (4) 在美国留学的学生未必都是亚洲人。解: 令 M(x): x 为人。
 - (1) 令F(x): x长着黑头发。则∀x (M(x)→ F(x))。 命题为假。
 - (2) 令G(x): x登上过月球。则∃x (M(x)∧G(x))。 命题为真。
 - (3) 令H(x): x登上过木星。则 ¬∃x (M(x)∧H(x))。 命题为真。
 - (4) 令F(x): x是在美国留学的学生; G(x): x是亚洲人。则 $\forall x (F(x) \rightarrow G(x))$ 。 命题为真。

二、n 元谓词(n≥2)的符号化



例4.5 将下列命题符号化

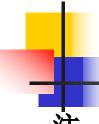
- (1) 兔子比乌龟跑得快;
- (2) 有的兔子比所有的乌龟跑得快;
- (3) 并不是所有的兔子都比乌龟跑得快;
- (4) 不存在跑得同样快的两只兔子。

解: 令F(x): x是兔子; G(y): y是乌龟;

H(x,y): x比y跑得快; L(x,y): x与 y跑得同样快。则:

- (1) $\forall x \forall y (F(x) \land G(y) \rightarrow H(x,y));$
- (2) $\exists x (F(x) \land \forall y (G(y) \rightarrow H(x,y)));$
- (3) $\neg \forall x \forall y (F(x) \land G(y) \rightarrow H(x,y));$
- (4) $\exists x \exists y (F(x) \land F(y) \land L(x,y)).$





注:

- 1.分析命题中表示性质和关系的谓词,分别符号化为一元和n元谓词 (n≥2)。
- 2. 根据命题的实际意义选用全称量词或存在量词。
- 3. 一般来说,多个量词在一起时,其顺序不能随意调换。

例如: "对任意x,都存在y,使x+y=10"这一命题,可符号化为 ∀x∃yH(x,y),(H(x,y): x+y =10),它不能改写为 ∃y∀xH(x,y)。

4. 有些命题的符号化形式不唯一。

例如例4.5中的(3)还可符号化为 $\exists x \exists y (F(x) \land G(y) \land \neg H(x, y)); (4)$ 还可符号化为 $\forall x \forall y (F(x) \land F(y) \rightarrow \neg L(x, y)).$

§ 4.2一阶逻辑公式及解释



非逻辑符号:个体词常项符号、函数符号和谓词符号 逻辑符号:个体词变项符号、量词符号、联结词符号和括号与逗号 定义4.1 设L是一个非逻辑符号,由L生成的一阶语言 L的字母表包括下述符号如下:

非逻辑符号

- (1) L中的个体常项符号: $a, b, c, ...; a_i, b_i, c_i, ..., i \geq 1$
- (2) L中的函数符号: $f, g, h, ...; f_i, g_i, h_i, ...$, $i \ge 1$
- (3) *L*中的谓词符号: F,G, H,...; F_i,G_i, H_i,..., *i*≥1 逻辑符号
- (4) 个体变项符号: $x, y, z, ...; x_i, y_i, z_i, ..., \ge 1$
- (5) 量词符号: ∀ , ∃.
- (6) 联结词符号: ┐,Λ,V, →,↔.
- (7) 逗号与括号: ,,().



项与原子公式



定义 4.2 一阶语言 L 的项定义如下:

- (1) 个体常项符号和个体变项符号是项;
- (2) 若 $\varphi(x_1, x_2,...,x_n)$ 是n元函数符号, $t_1,t_2,...,t_n$ 是n个项,则 $\varphi(t_1,t_2,...,t_n)$ 是项.
- (3) 所有的项都是有限次使用(1)、(2)得到的。

定义4.3 设 $R(x_1,x_2,...,x_n)$ 是一阶语言 \mathcal{L} 中的n元谓词符号。 $t_1,t_2,...,t_n$ 是 \mathcal{L} 的n个项,则称 $R(t_1,t_2,...,t_n)$ 是 \mathcal{F} 的原子公式。

如例4.5 中的一元谓词F(x),G(y);二元谓词H(x,y),L(x,y)都是原子公式



合式公式



定义4.4 一阶语言L 中的合式公式 (也称为谓词公式或公式) 定义如下:

- (1) 原子公式是合式公式;
- (2) 若A是合式公式,则(7A)也是合式公式;
- (3) 若A, B 是合式公式,则(A \land B), (A \lor B), (A \rightarrow B), (A \leftrightarrow B)也是合式公式;
- (4) 若A是合式公式,则 $\forall xA$, $\exists xA$ 也是合式公式;
- (5) 只有有限次应用 (1)~(4) 构成的符号串才是合式公式。

定义4.5 在公式 $\forall x A$ 和 $\exists x A$ 中,称 x 为指导变元,A为相应量词的辖域。在 $\forall x$ 和 $\exists x$ 的辖域中,x的所有出现都称为约束出现,A中不是约束出现的其它变项都称为自由出现。

辖域



例4.6 指出下列公式中的指导变元,各量词的辖域,自由出现和约束出现的个体变项:

(1)
$$\forall x(F(x,y) \rightarrow G(x,z));$$

(4.22)

(2)
$$\forall x(F(x) \rightarrow G(y)) \rightarrow \exists y(H(x) \land L(x,y,z)).$$

(4.23)

解: (1) 指导变元: x; 量词 \forall 的辖域: $A=(F(x,y)\to G(x,z))$;

在A中,x是约束出现;y,z是自由出现。

(2) 前件量词∀的指导变元: x; 后件量词∃的指导变元: y.

量词 \forall 的辖域: $(F(x) \rightarrow G(y))$, 其中x是约束出现,y 是自由出现。

量词3的辖域: $(H(x) \wedge L(x,y,z))$, 其中 y是约束出现,而x, z 是自由出现。

闭式



定义4.6 设A是任意的公式,若A中不含自由出现的个体变项,则称A为封闭的 公式,简称闭式。

例如: $\forall x \exists y \; H(x,y)$, $\forall x \forall y (F(x) \land F(y) \rightarrow \neg \; L(x,y))$,

$$\forall x (F(x) \rightarrow G(x)) \land F(a) \rightarrow G(a)$$

都是闭式。

例4.7 将下列两个公式中的变项指定为常项使其成为命题:

(1) $\forall x(F(x) \rightarrow G(x))$

(4.25)

(2) $\forall x \forall y (F(x) \land F(y) \land G(x,y) \rightarrow H(f(x,y),g(x,y)))$

(4.26)

解(1)个体域 F(x) G(x)

命题

真值

全总 x是人

x是黄种人

所有人都是黄种人。

实数 x是自然数 x是整数

所有自然数都是整数。

(2)(4.26)式含两个2元函数变项,一个1元谓词变项,两个2元谓词变项。

个体域 F(x)

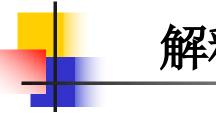
G(x, y) H(x, y) f(x, y) g(x, y)

全总 x是实数 $x \neq y$ x > y

 $x^{2}+y^{2}$

2xy

命题:对于任意的x,y,若x与y都是实数且 $x \neq y$,则 $x^2 + y^2 > 2xy$. 真值为真。



在例4.7中对各种变项的指定也称为对它们的解释。这里是先给 出公式再对它们进行解释,

也可以先给出解释,再去解释各种公式。

定义4.7 对公式A指定其中个体域的范围,并指定其中谓词的具体 含义使其成为命题,称为对公式A的一个解释。

设 \mathcal{L} 是由L生成的一阶语言, \mathcal{L} 的解释 I 由下面4部分组成:

- (a) 非空个体域 D_I;
- (b) 对每一个个体常项符号 $a \in L$,有一个 $\overline{a} \in D_I$,称 \overline{a} 为 $a \in I$ 中的解释;
- (c) 对每一个n元函数符号 $f \in L$,有一个 D_I 上的n元函数 \overline{f} , 称 \overline{f} 为f在I中的解释:
- (d) 对每一个n元谓词符号 $F \in L$,有一个 D_I 上的n元谓词 \overline{F} , 称 \overline{F} 为f在I中的解释。







- (a) 个体域 D= 自然数集合N
- **(b)** $\bar{a} = 0$
- (c) $\overline{g}(x,y) = x \cdot y$, $\overline{f}(x,y) = x + y$
- **(d)** $\overline{F}(x, y)$: x = y

在解释I之下,下列公式哪些为真?哪些为假?哪些真值不能确定?

(1) F(f(x,y), g(x,y));

解: 公式解释为:"x+y=x·y",

不是命题;真值不确定

 $(2) F(f(x,a), y) \rightarrow F(g(x, y), z);$

解: 公式解释为: " $(x+\theta=y) \rightarrow (x\cdot y=z)$ ",

不是命题;真值不确定

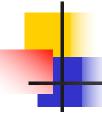
 $(3) \gamma F(g(x,y), g(y,z));$

解: 公式解释为: "x·y≠y·z",

不是命题;真值不确定







(4) $\forall x F(g(x, y), z)$;

解:公式解释为: "∀x (x·y≠y·z)",

不是命题;真值不确定

(5) $\forall x F(g(x, a), x);$

解:公式解释为: "∀x (x·0=x)",

假命题;

(6) $\forall x \ F(g(x, a), x) \rightarrow F(x, y) ;$

解:公式解释为: "∀x (x·0 = x)→(x=y)",

真命题 (前件为假);

(7) $\forall x \forall y (F(f(x,a),y) \rightarrow F(f(y,a),x))$;

解:公式解释为: "∀x∀y ((x+0=y)→(y+0=x))", 真命题;

(8) $\forall x \forall y \exists z F(f(x,y),z);$

解:公式解释为: "∀x∀y∃z(x+y=z)",

真命题;

(9) $\exists x \ F(f(x,x),g(x,x))$;

解:公式解释为: " $\exists x(x+x=x\cdot x)$,

真命题.



公式类型

定理 4.1 闭式在任何解释下都可变成命题。

(证明略)

定义4.8 设A为一个公式,若A在任何解释下均为真,则称A为永真式(或逻辑有效式);

若A在任何解释下均为假,则称A为永假式(或逻辑矛盾式);

若至少存在一个解释使A为真,则称A为可满足式。

定义4.9 设 A_0 是含命题变项 p_1 , p_2 ,..., p_n 的命题公式, A_1 , A_2 ,..., A_n 是n个 谓词公式。用 A_i ($1 \le i \le n$) 处处代替 A_0 中的 p_i , 所得公式A 称为 A_0 的代换实例。

例如: $F(x) \rightarrow G(x)$, $\forall x \ F(x) \rightarrow \exists y \ G(y)$ 等都是 $p \rightarrow q$ 的代换实例。

定理4.2 重言式的代换实例都是永真式,矛盾式的代换实例都是矛盾式。

例4.9 判断下列公式中,哪些是永真式,哪些是永假式?

- (1) $\forall x (F(x) \rightarrow G(x));$
- (3) $\forall x \ F(x) \rightarrow (\exists x \ \exists y \ G(x,y) \rightarrow \forall x \ F(x));$

- (1) $\exists x (F(x) \land G(x));$ (4) $\neg (\forall x F(x) \rightarrow \exists y G(y)) \land \exists y G(y).$

解:用A,B,C,D分别代表(1)、(2)、(3)、(4)中的公式。

- (1) 取解释: 个体域 I₁为实数域; F(x): x是实数; G(x): x是有理数。 在II下A为真、故A不是矛盾式。
- 再取解释: 个体域 I2为实数域; F(x): x是无理数; G(x): x 能表示成分数。 在I2下A为假。故公式A是可满足式但不是永真式。
- (2)公式B是非永真的可满足式。
- (3)易知C是命题公式 $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ 的代换实例,而该命题公式是重言式, 故公式C是永真式。
- (4) D是命题公式 $_{7}(p\rightarrow q)\Lambda q$ 的代换实例,而该命题公式为矛盾式, 故公式D是矛盾式。

公式类型



例4.10 判断下列公式的类型:

- (1) $\forall x \ F(x) \rightarrow \exists x \ F(x);$ (2) $\forall x \exists y F(x,y) \rightarrow \exists x \forall y \ F(x,y);$
- (3) $\exists x (F(x) \land G(x)) \rightarrow \forall y G(y)$.
- 解: 记三式中的公式分别为A, B, C。
- (1) 设I为任一解释,个体域为D。若存在x₀∈D,使F(x₀)为假,则∀xF(x)为假,所以A的前件为假, 故A为真。从而公式A为真。由 I 的任意性知, A是永真式。
- (2) 取解释I, 个体域为自然数集合N,F(x,y)为 $x \le y$, 在 I 下 B的前件与后件均为真,故B为真,这说明 B不是矛盾式。
 - 另取解释 I₁, 个体域为自然数集合N, F(x,y)为 x=y, 在 I₁下, B的前件 真而后件假, 故B为假。这又说明 B不是永真式。从而 B是非永真的可满足式。
- (3) C也是非永真的可满足式。