离散数学

Discrete Mathematics

第十四章 图的基本概念

§14.1 图

§14.2 通路与回路

§14.3 图的矩阵表示

§14.4 图的运算

14.1 图

无向图与有向图

顶点的度数

握手定理

图的同构

简单图

完全图

子图

补图

无序对与多重集合

无序对: 2个元素构成的集合，记作(a,b)

无序积: $A\&B=\{(x,y)\mid x\in A\wedge y\in B\}$

例如 $A=\{a,b,c\}$, $B=\{1,2\}$

$A\&B=B\&A=\{(a,1), (b,1), (c,1), (a,2), (b,2), (c,2)\}$

$A\&A=\{(a,a), (a,b), (a,c), (b,b), (b,c), (c,c)\}$

$B\&B=\{(1,1), (1,2), (2,2)\}$

多重集合: 元素可以重复出现的集合

重复度: 元素在多重集合中出现的次数

例如 $S=\{a,b,b,c,c,c\}$，a,b,c 的重复度依次为1,2,3

无向图

定义14.1 无向图$G=<V,E>$为一个有序的二元组,其中

$V\neq\varnothing$称为顶点集, 其元素称为顶点或结点;

E是$V\&V$的多重子集, 称为边集, 其元素称为无向边，简称边.

有时用$V(G)$和$E(G)$分别表示V和E.

定义14.2 有向图$D=<V,E>$, 其中

$V\neq\varnothing$称为顶点集, 其元素称为顶点或结点;

E是$V\times V$的多重子集, 称为边集, 其元素称为有向边，简称边.

有时用$V(D)$和$E(D)$分别表示V和E .

图形表示：用小圆圈（或实心点）表示顶点，用顶点间的连线表示无向边，用有方向的连线表示有向边。

将图的集合定义转化成图形表示后，常用e_k表示无向边(v_i,v_j)(或有向边$<v_i,v_j>$)，并称顶点或边用字母标定的图为标定图，否则称为非标定图 .

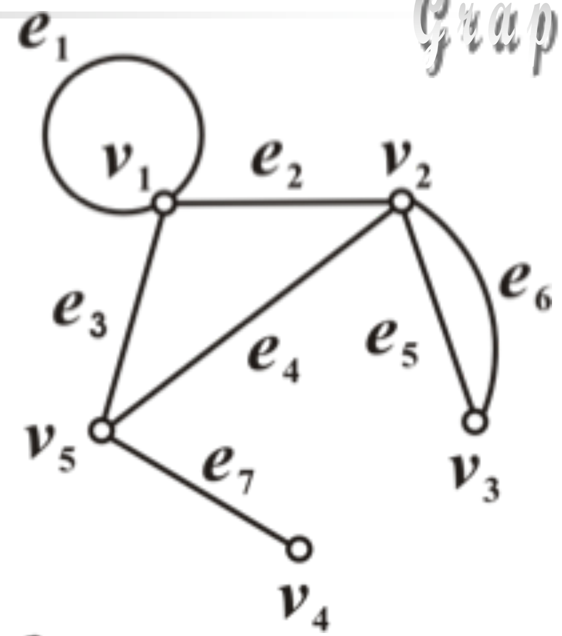
有向图

例14.1(1) $G=<V,E>$如图所示,

其中 $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_5\}$

$E=\{(v_1,v_1), (v_1,v_2), (v_2,v_3), (v_2,v_3),$

$(v_2,v_5), (v_1,v_5), (v_4,v_5)\}$.

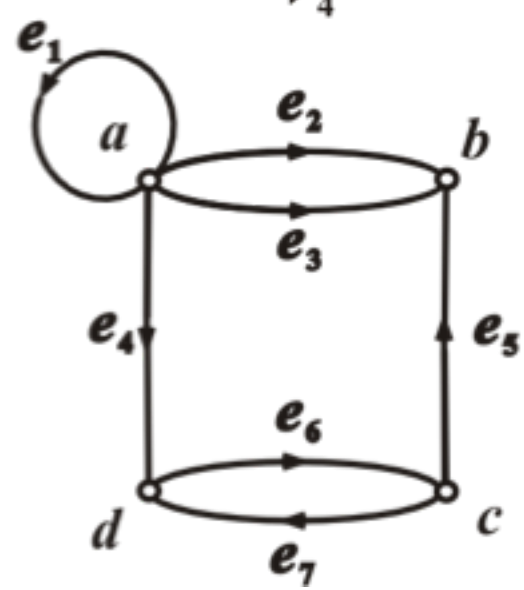


例14.1(2) $D=<V,E>$如右下图所示,

其中 $V=\{a, b, c, d\}$,

$E=\{<a, a>, <a, b>, <a, b>, <a, d>,$

$<d, c>, <c, d>, <c, b>\}$.



用$|V(G)|$,$|E(G)|$分别表示G的顶点数和边数.

有限图: $|V(G)|$,$|E(G)|$均为有限数的图.

n 阶图: n个顶点的图.

零图: $E=\varnothing$的图.

平凡图: 1 阶零图.

顶点和边的关联与相邻

设无向图$G=<V,E>$, $e_k=(v_i,v_j)\in E$, 称v_i, v_j为e_k的端点, e_k与v_i(v_j)关联.

若$v_i = v_j$, 则称e_k为环.

无边关联的顶点称作孤立点.

若$v_i \neq v_j$, 则称e_k与v_i(v_j)的关联次数为1;

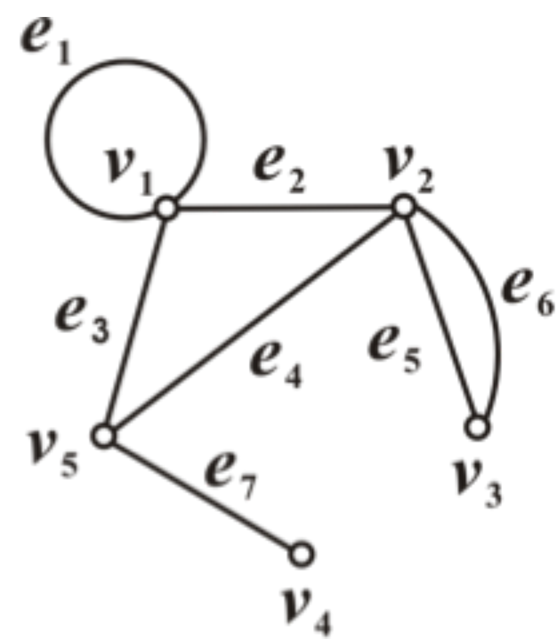
若$v_i = v_j$, 则称e_k与v_i的关联次数为2;

若v_i不是边e的端点, 则称e与v_i的关联次数为0.

设$v_i,v_j\in V$, $e_k,e_l\in E$, 若$(v_i,v_j)\in E$, 则称v_i,v_j相邻;

若e_k,e_l有一个公共端点, 则称e_k,e_l相邻.

对有向图有类似定义.



设$e_k=\langle v_i,v_j\rangle$是有向图的一条边, 又称$v_i$是$e_k$的始点, v_j是e_k的终点, v_i邻接到v_j, v_j邻接于v_i

邻域和关联集

设无向图G, $v\in V(G)$

v的邻域 $N(v)=\{u|u\in V(G)\wedge(u,v)\in E(G)\wedge u\neq v\}$

v的闭邻域 $\overline{N}(v)=N(v)\cup\{v\}$

v的关联集 $I(v)=\{e|e\in E(G)\wedge e$与$v$关联$\}$

设有向图D, $v\in V(D)$

v的后继元集 $\Gamma_D^+(v)=\{u|u\in V(D)\wedge\langle v,u\rangle\in E(G)\wedge u\neq v\}$

v的先驱元集 $\Gamma_D^-(v)=\{u|u\in V(D)\wedge\langle u,v\rangle\in E(G)\wedge u\neq v\}$

v的邻域 $N_D(v)=\Gamma_D^+(v)\cup\Gamma_D^-(v)$

v的闭邻域 $\overline{N}_D(v)=N_D(v)\cup\{v\}$

简单图

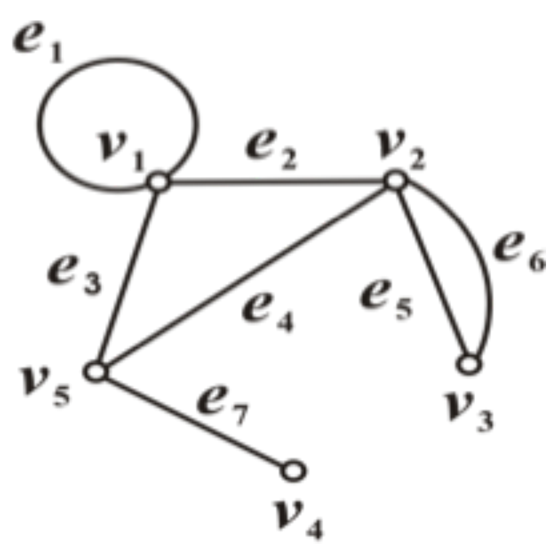
定义11.3 在无向图中, 关联同一对顶点的2条或2条以上的边, 称为平行边, 平行边的条数称为重数.

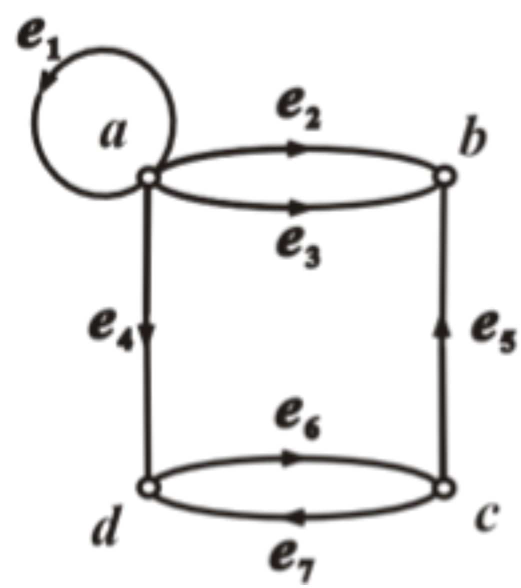
在有向图中, 具有相同始点和终点的2条或2条以上的边称为有向平行边, 简称平行边, 平行边的条数称为重数.

含平行边的图称为多重图

既无平行边也无环的图称为简单图

例11.1(续)





顶点的度数

定义14.4(1)设$G=<V,E>$为无向图, $v\in V$,

v的度数(度) $d(v)$: v作为边的端点次数之和

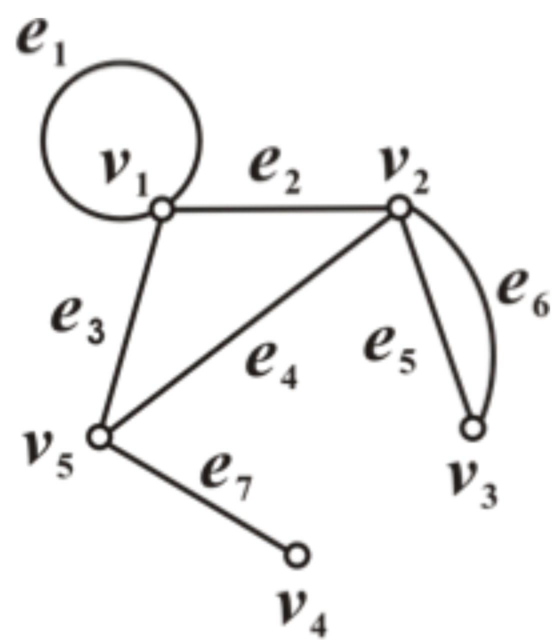
悬挂顶点: 度数为1的顶点

悬挂边: 与悬挂顶点关联的边

G的最大度$\Delta(G)=\max\{d(v)|\ v\in V\}$

G的最小度$\delta(G)=\min\{d(v)|\ v\in V\}$

例如 右图



$d(v5)=3$, $d(v2)=4$, $d(v1)=4$,

$\Delta(G)=4$, $\delta(G)=1$,

$v4$是悬挂顶点, $e7$是悬挂边, $e1$是环

顶点的度数(续)

定义11.4(2)设$D=<V,E>$为有向图, $v\in V$,

v的出度$d^+(v)$: v作为边的始点次数之和

v的入度$d^-(v)$: v作为边的终点次数之和

v的度数(度) $d(v)$: v作为边的端点次数之和

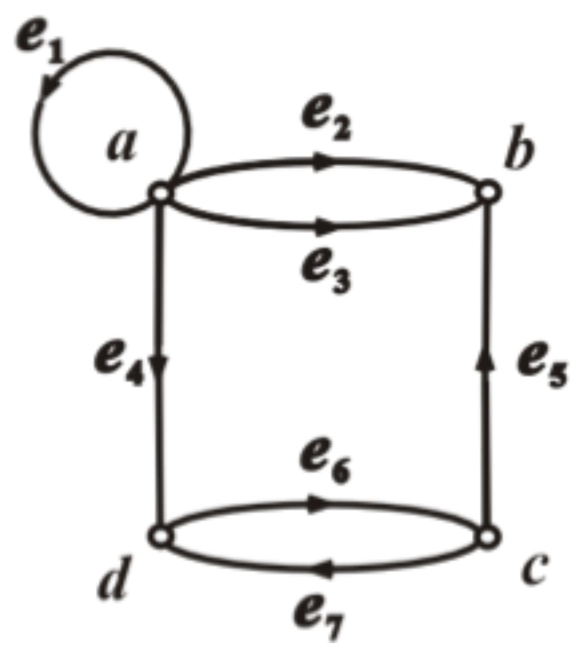
$$d(v)= d^+(v)+ d^-(v)$$

D的最大出度$\Delta^+(D)$, 最小出度$\delta^+(D)$

最大入度$\Delta^-(D)$, 最小入度$\delta^-(D)$

最大度$\Delta(D)$, 最小度$\delta(D)$

例如右图



$d^+(a)=4$, $d^-(a)=1$, $d(a)=5$,

$d^+(b)=0$, $d^-(b)=3$, $d(b)=3$,

$\Delta^+=4$, $\delta^+=0$, $\Delta^-=3$, $\delta^-=1$, $\Delta=5$, $\delta=3$

握手定理

定理14.1 设$G=\langle V,E\rangle$为任意无向图, $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$, $|E|=m$, 则

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2m.$$

证 图中每条边(包括环)均有两个端点, 在计算各顶点度数之和时, 每条边均提供2度, m条边共提供2m度.

定理14.2 设$D=\langle V,E\rangle$为任意有向图, $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$, $|E|=m$, 则

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2m, \text{且} \sum_{i=1}^{n} d^{-}(v_i) = \sum_{i=1}^{n} d^{+}(v_i) = m。$$

推论 任何图(无向图和有向图)都有偶数个奇度顶点.

证 设$G=\langle V,E\rangle$为任意图，令

$V_1=\{v \mid v\in V\wedge d(v)\text{为奇数}\}$, $V_2=\{v \mid v\in V\wedge d(v)\text{为偶数}\}$

则$V_1\cup V_2=V$, $V_1\cap V_2=\varnothing$，由握手定理可知

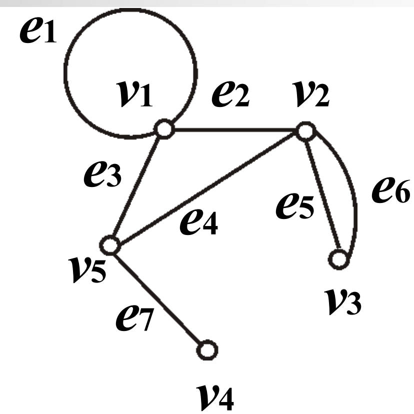
$$2m = \sum_{v\in V} d(v) = \sum_{v\in V_1} d(v) + \sum_{v\in V_2} d(v)$$

图的度数列

设无向图G的顶点集$V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$

G的度数列: $d(v_1), d(v_2), \ldots, d(v_n)$

如右图度数列:4,4,2,1,3

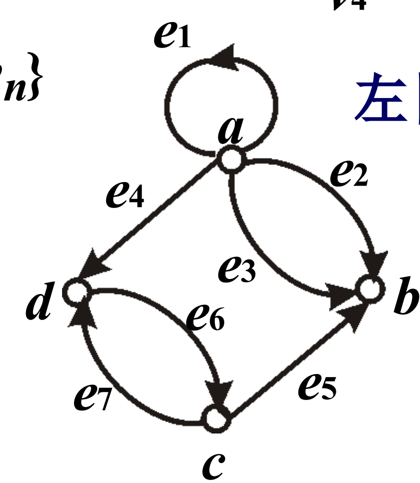


设有向图D的顶点集$V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$

D的度数列: $d(v_1), d(v_2), \ldots, d(v_n)$

D的出度列: $d^+(v_1), d^+(v_2), \ldots, d^+(v_n)$

D的入度列: $d^-(v_1), d^-(v_2), \ldots, d^-(v_n)$



左图度数列:5,3,3,3

出度列:4,0,2,1

入度列:1,3,1,2

对于给定的非负整数列$d=(d_1,d_2,\ldots,d_n)$,若存在以$V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$为顶点集的n阶无向图G, 使得$d(v_i)=d_i$, 则称d是可图化的。

特别地，若所得图是简单图，则称d是可简单图化的。

可图化

定理14.3 设非负整数列 $d=(d_1, d_2, \dots, d_n)$，则d是可图化的当且仅当

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = 0 \pmod 2.$$

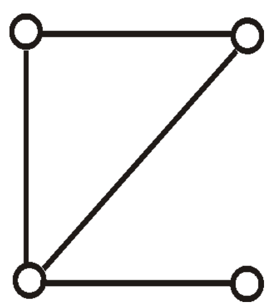
定理14.4设G为任意n阶无向简单图，则$\Delta(G) \le n-1$.

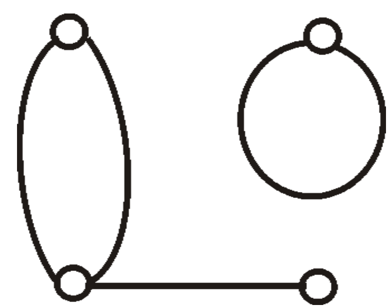
例1 下述2组数能成为无向图的度数列吗?

(1) 3,3,3,4; (2) 1,2,2,3

解 (1) 不可能. 有奇数个奇数.

(2) 能





实例

例14.2 判断下列各非负整数哪些是可图化的？哪些可简单图化？

(1)（5,5,4,4,2,1）　(2) (5,4,3,2,2)　(3) (3,3,3,1)

(4) $(d_1,d_2,\ldots,d_n)$, $d_1>d_2>,\ldots,d_n>=1$且$\sum_{i=1}^{n} d_i$为偶数。

(5) (4,4,3,3,2,2)

解：除（1）外均可图化，而且只有（5）可简单图化。

同构

定义14.5 设$G_1=\langle V_1,E_1\rangle$, $G_2=\langle V_2,E_2\rangle$为两个无向图(有向图), 若存在双射函数$f$: $V_1\to V_2$, 使得对于任意的$v_i,v_j\in V_1$,

$$(v_i,v_j)\in E_1\ (\langle v_i,v_j\rangle\in E_1)\ \text{当且仅当}$$

$$(f(v_i),f(v_j))\in E_2\ (\langle f(v_i),f(v_j)\rangle\in E_2)$$

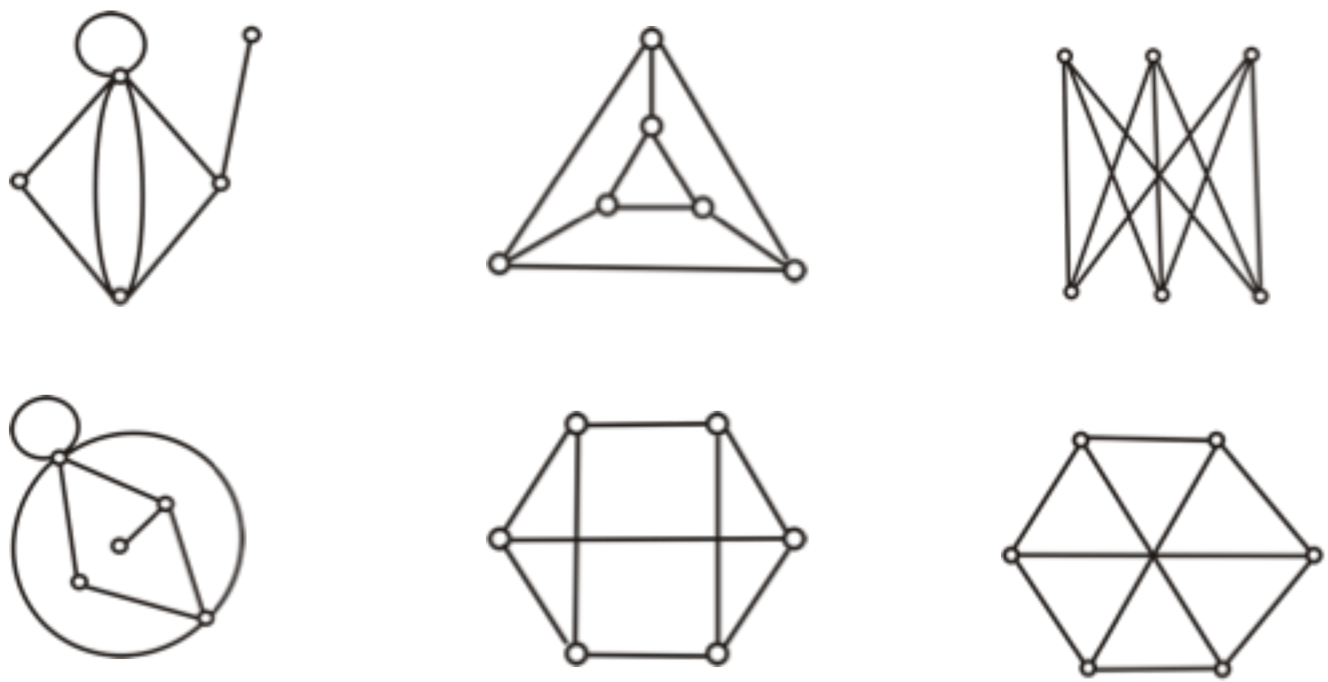
并且(v_i,v_j) $(\langle v_i,v_j\rangle)$与$(f(v_i),f(v_j))$ $(\langle f(v_i),f(v_j)\rangle)$的重数相同，则称$G_1$与$G_2$是同构的，记作$G_1\cong G_2$.

图之间的同构关系可看成全体图集合上的二元关系，这个二元关系具有自反性，对称性和传递性，因而它是等价关系。

在这个等价关系的每个等价类中均取一个非标定图作为一个代表，凡与它同构的图，在同构的意义下都可以看成一个图。

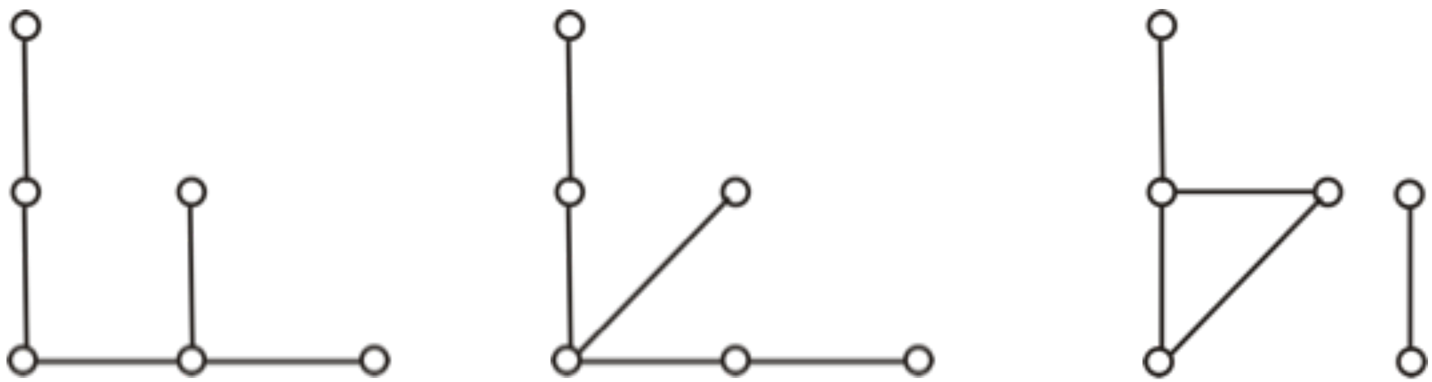
到目前为止，还没找到判断两个图是否同构的有效的算法。

实例



实例

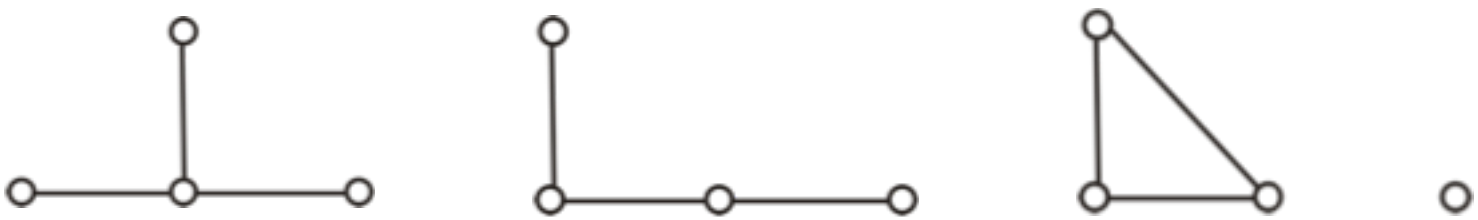
例 **画出3个以1,1,1,2,2,3为度数列的非同构的无向简单图.**



实例

例14.3 画出4阶3条边的所有非同构的无向简单图.

解 总度数为6, 分配给4个顶点, 最大度为3, 且奇度顶点数为偶数,有下述3个度数列: (1) 1,1,1,3;(2)1,1,2,2;(3)0,2,2,2.



1,1,1,3　　　　1,1,2,2　　　　0,2,2,2

完全图与正则图

定义14.6 无向完全图G: 每对顶点之间都有一条边的无向简单图.

n 阶无向完全图记作K_n,

顶点数 n, 边数 $m=n(n-1)/2$, $\Delta=\delta=n-1$.

有向完全图D: 每对顶点之间均有两条方向相反的边的有向简单图.

顶点数n, 边数$m=n(n-1)$, $\Delta^+=\delta^+=\Delta^-=\delta^-=n-1$, $\Delta=\delta=2(n-1)$.

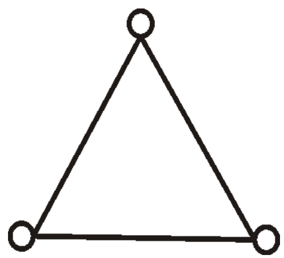
N阶竞赛图D: D为有向简单图,且它的基图为K_n.

顶点数n, 边数$m=n(n-1)/2$.

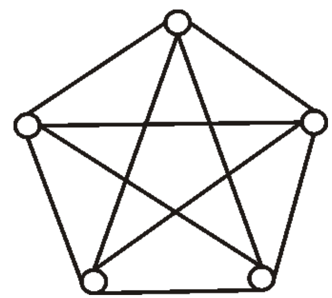
定义14.7 k-正则图: 每个顶点的度数均为 k 的无向简单图.

顶点数 n, 边数 $m=kn/2$.

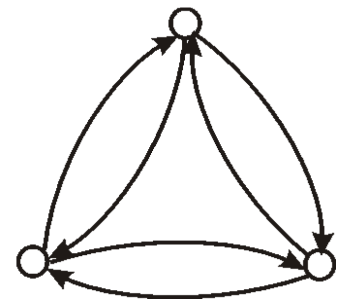
实例



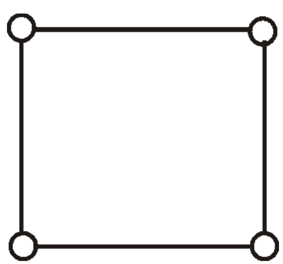
K_3



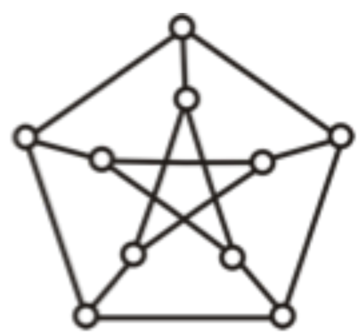
K_5



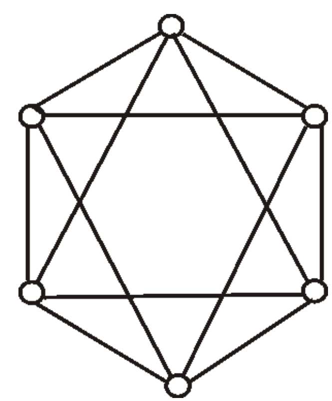
3阶有向完全图



2正则图



3正则图



4正则图

子图

定义14.8 设$G=<V,E>$, $G'=<V',E'>$是两个图(同为无向,或同为有向图).

若$V'\subseteq V$且$E'\subseteq E$, 则称G'为G的子图, G为G'的母图, 记作$G'\subseteq G$.

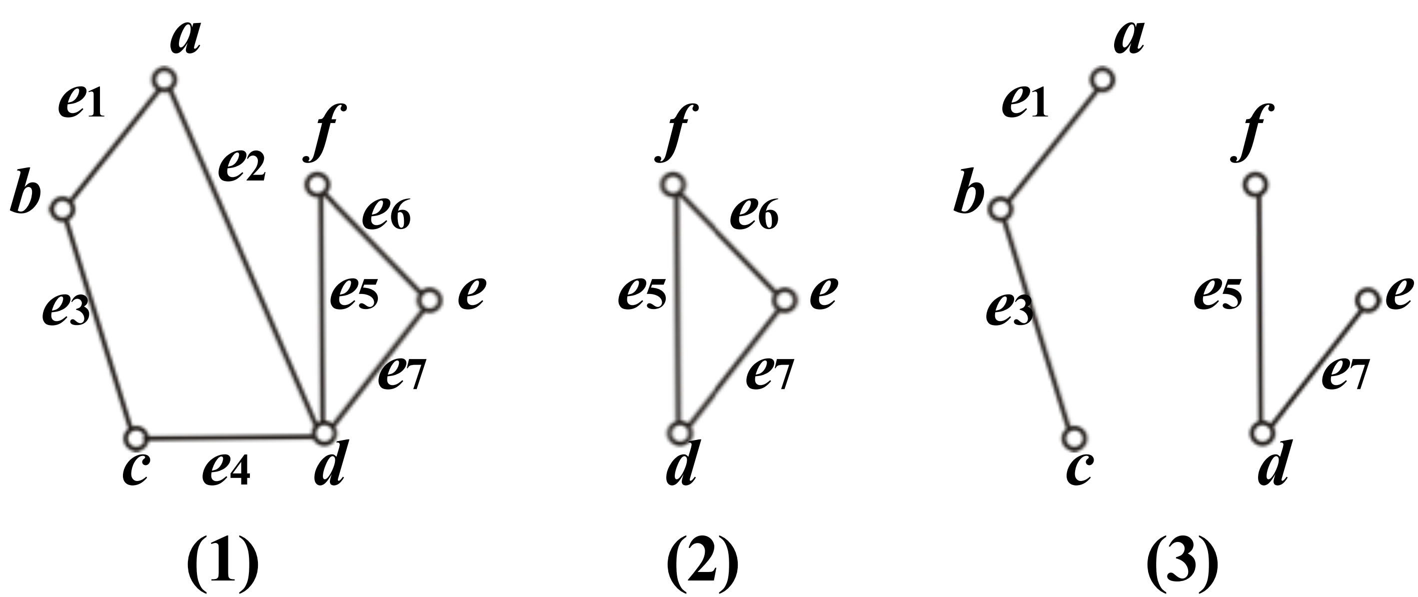
若$V'\subset V$或$E'\subset E$, 称G'为G的真子图.

若$G'\subseteq G$ 且$V'=V$, 则称G'为G的生成子图.

设$V'\subseteq V$且$V'\neq\varnothing$, 以V'为顶点集, 以两端点都在V'中的所有边为边集的G的子图称作V'的导出子图, 记作$G[V']$.

设$E'\subseteq E$且$E'\neq\varnothing$, 以E'为边集, 以E'中边关联的所有顶点为顶点集的G的子图称作E'的导出子图, 记作$G[E']$.

实例



(1),(2),(3)是(1)的子图, (2),(3)是真子图, (1)是母图.

(1),(3)是(1)的生成子图.

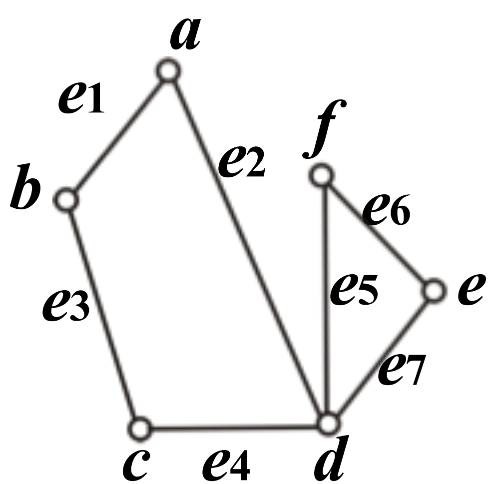
(2)是$\{d,e,f\}$的导出子图, 也是$\{e_5, e_6, e_7\}$导出子图.

(3)是$\{e_1, e_3, e_5, e_7\}$的导出子图.

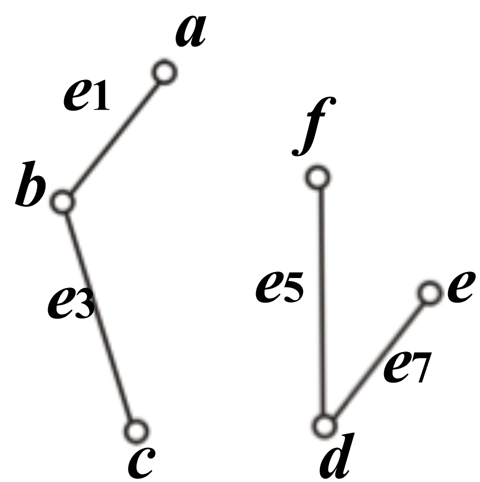
补图

定义14.9 设$G=<V,E>$为n阶无向简单图, 记$\overline{E}=V\&V-E$,

称 $\overline{G}=<V,\overline{E}>$为$G$的**补图**.



(1)



(2)

若 $G \cong \overline{G}$,称G是自**补图**.

从图中删边、 点集合

定义14.10 设$G=<V,E>$为无向图。

记 $G-e$: 从G中删除e

$G-E'$: 从G中删除E'中所有边

$G-v$: 从G中删除v及关联的边

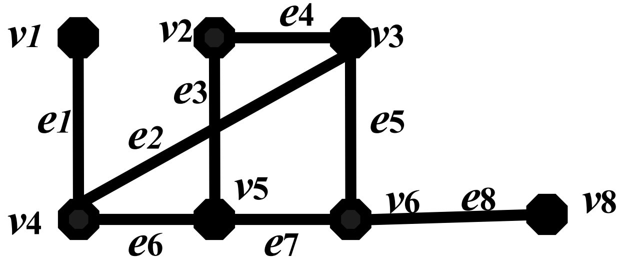
$G-V'$: 从G中删除V'中所有的顶点及关联的边

$G \setminus e$: 从G中删除e后将e的两个端点用一个新的顶点代替.

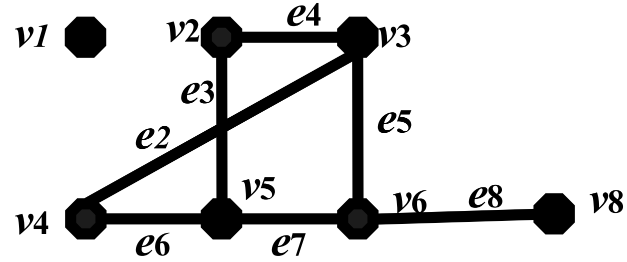
$G+(u, v)$: 在u, v之间加一条边

例子

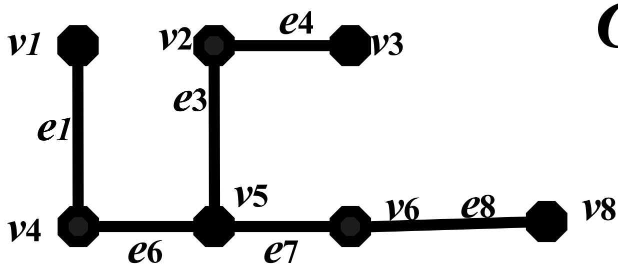
G:



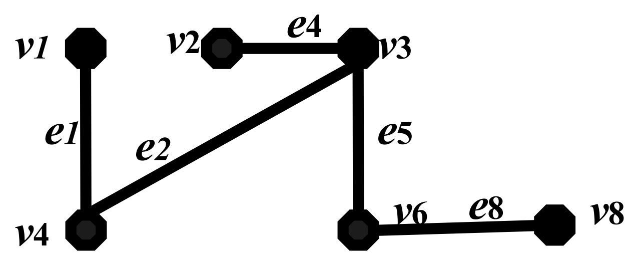
$G-e_1$:



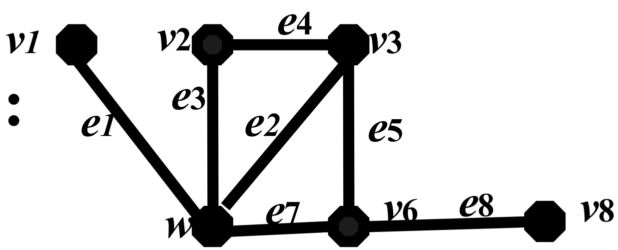
$G-\{e_2,e_5\}$:



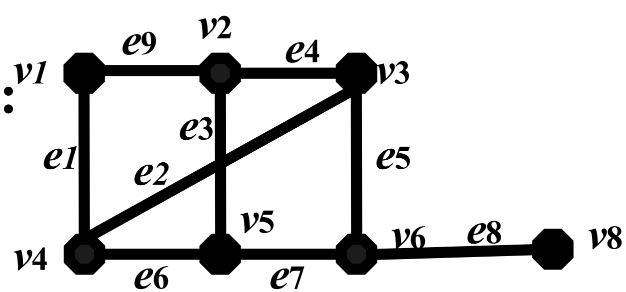
$G-v_5$:



$G \setminus e_6$:



$G+(v_1, v_2)$:



11.2通路与回路

定义14.11 给定图$G=\langle V,E\rangle$为无向标定图, G中顶点与边的交替序列$\Gamma=v_0e_1v_1e_2\ldots e_lv_l$. 其中$1\le i\le l$, $e_i=(v_{i-1},v_i)$, 则称Γ为v_0到v_l的**通路**, v_0和v_l分别为通路的**起点**和**终点**, l(边的条数)为通路的**长度**.

又若$v_0=v_l$, 则称Γ为**回路**.

若通路中所有边各异, 则称为**简单通路**.

若回路中所有边各异, 则称为**简单回路**.

否则称为**复杂通路**(复杂回路).

若通路Γ中所有顶点各异, 则称Γ为**初级通路或路径**.

若回路中所有顶点(除$v_0=v_l$)各异, 则称Γ为**初级回路或圈**.

长度为奇数的圈称作**奇圈**.

长度为偶数的圈称作**偶圈**.

说明

(1) 表示方法

① 按定义用顶点和边的交替序列, $\Gamma=v_0e_1v_1e_2\ldots e_lv_l$

② 用边序列, $\Gamma=e_1e_2\ldots e_l$

③ 简单图中, 用顶点序列, $\Gamma=v_0v_1\ldots v_l$

(2) 在无向图中, 长度为1的圈由环构成.

长度为2的圈由两条平行边构成.

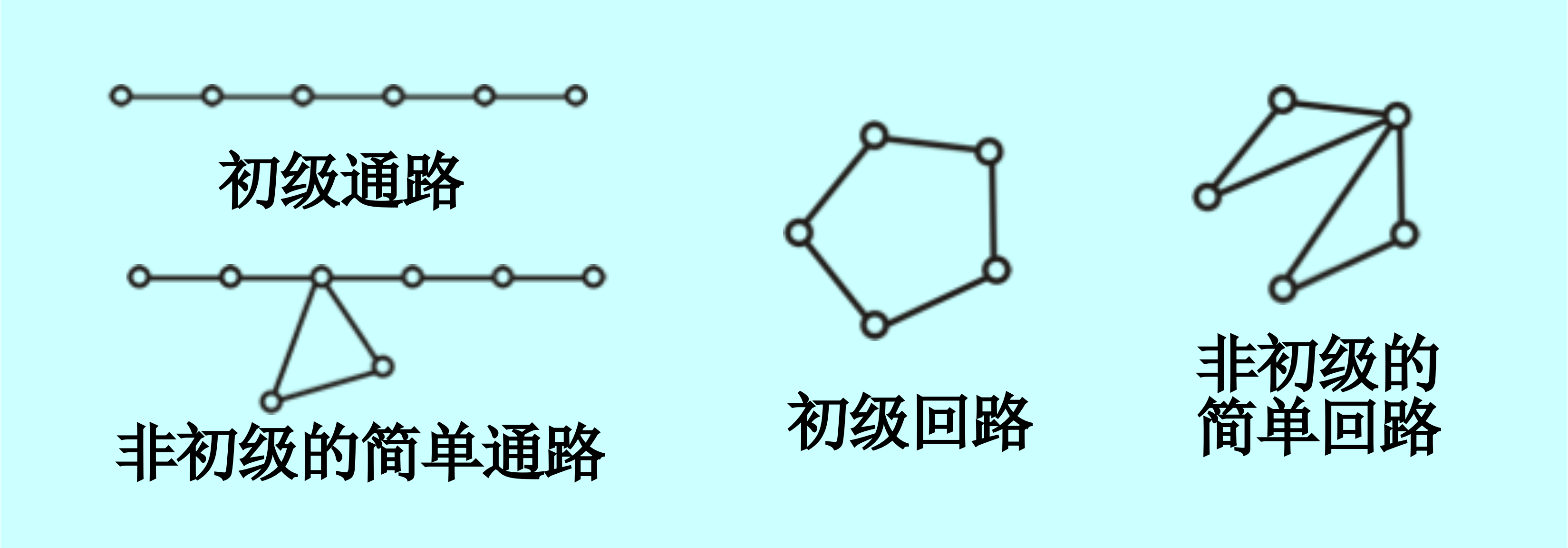
在无向简单图中, 所有圈的长度≥3.

在有向图中, 长度为1的圈由环构成.

在有向简单图中, 所有圈的长度≥2.

说明(续)

(3) 初级通路(回路)是简单通路(回路), 但反之不真.



通路与回路(续)

定理14.5 在n阶图G中，若从顶点u到$v(u\neq v)$存在通路，则从u到v存在长度小于等于$n-1$的通路.

证 若通路中没有相同的顶点(即初级通路)，长度必$\leq n-1$.

若有相同的顶点，删去这两个顶点之间的这一段，仍是u到v的通路.

重复进行，直到没有相同的顶点为止.

推论 在n阶图G中，若从顶点u到$v(u\neq v)$存在通路，则从u到v一定存在长度小于或等于$n-1$的初级通路.

定理14.6 在n阶图中，若存在v到自身的回路，则一定存在v到自身长度小于等于n的回路.

推论 在n阶图中，若存在v到自身的简单回路，则一定存在v到自身长度小于等于n的初级回路.

14.3 图的连通性

定义14.12设无向图G=<V,E>, $u,v\in V$

u与v连通: 若u与v之间有通路,记为u~v.规定u~ u.

连通关系 $R=\{\langle u,v\rangle \mid u,v\in V$且$u\sim v\}$,

则可验证R是等价关系.

定义14.13 连通图: 任意两点都连通的图.

规定平凡图是连通图.

非连通图:不是连通图的图.

定义14.14 连通分支:设$V/R=\{V_1,V_2,\ldots,V_k\}$, 称$V$关于$R$的等价类的导出子图$G[V_1],G[V_2],\ldots,G[V_k]$ 为G的连通分支.

连通分支数 $p(G)=k$.

G是连通图$\Leftrightarrow p(G)=1$.

短程线与距离

定义14.15 设无向图$G=<V,E>$, $u,v\in V$.

若$u\sim v$,

u与v之间的短程线: u与v之间长度最短的通路.

u与v之间的距离$d(u,v)$: u与v之间短程线的长度.

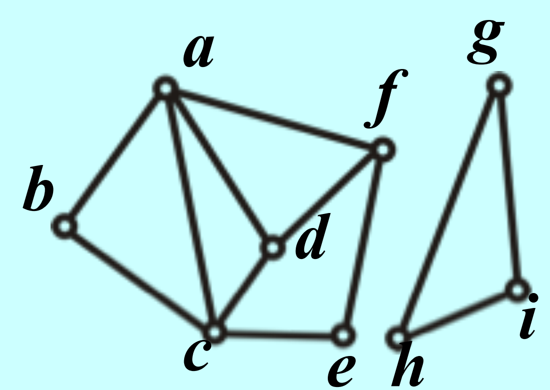
若u与v不连通, 规定$d(u,v)=\infty$.

性质:

(1) $d(u,v)\geq 0$, 且$d(u,v)=0 \Leftrightarrow u=v$

(2) $d(u,v)=d(v,u)$

(3) $d(u,v)+d(v,w)\geq d(u,w)$



例如 a与e之间的短程线:ace,afe.

$d(a,e)=2$, $d(a,h)=\infty$

点割集与边割集

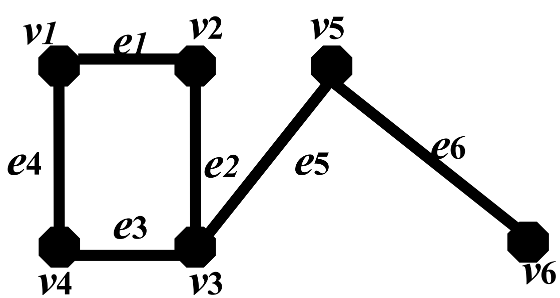
定义14.16 设无向图$G=<V,E>$,若$V'\subset V$且$V'\neq\varnothing$, 使得$p(G-V')>p(G)$, 而对$\forall V''\subset V'$, $p(G-V'')=p(G)$, 则称V'为G的**点割集**.

若$\{v\}$为点割集, 则称v为**割点**.

定义14.17若$E'\subseteq E$, $E'\neq\varnothing$,使得$p(G-E')>p(G)$,而对$\forall E''\subset E'$, $p(G-E'')=p(G)$, 则称E'为G的**边割集**.

若$\{e\}$为边割集, 则称e为**割边**或**桥**.

例



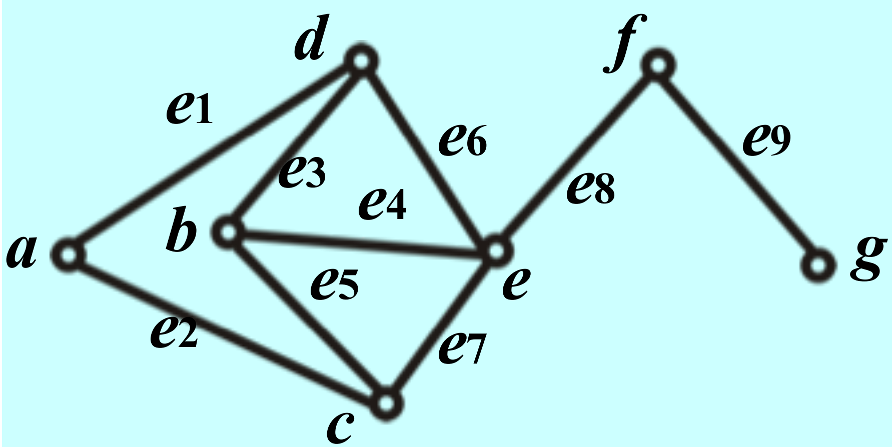
点割集： {v2, v4}, {v3}, {v5}

割点： {v3}, {v5}

边割集:{e5},{e6},{e1,e2},{e1,e3},{e1,e4},{e2,e3},{e2,e4},{e3,e4}

桥: {e5},{e6}

实例



割点：e，f

点割集：$\{e\}$,$\{f\}$，$\{c,d\}$

桥：e_8, e_9

边割集：$\{e_8\}$,$\{e_9\}$，$\{e_1,e_2\}$，

$\{e_1, e_3, e_6\}$，$\{e_1, e_3, e_4, e_7\}$

说明：K_n无点割集.

n 阶零图既无点割集，也无边割集.

若G连通，E'为边割集，则$p(G-E')=2$.

若G连通，V'为点割集，则$p(G-V')\geq 2$.

点连通度与边连通度

定义14.18 设无向连通图$G=<V,E>$,

称$\kappa(G)=\min\{\,|V'|\mid V'$是$G$的点割集$\}$为$G$的**点连通度**.

若$\kappa(G)\geq k$, k为非负整数,则称G是**k-连通图**.

若G是k-连通图,则在G中删除任何k-1个顶点后,所得图是连通的.

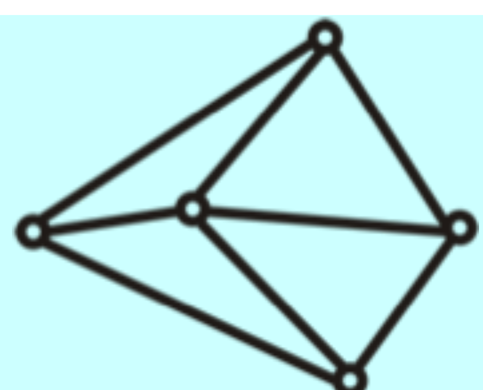
定义14.19 设无向连通图$G=<V,E>$,

称 $\lambda(G)=\min\{\,|E'|\mid E'$是$G$的边割集$\}$为$G$的**边连通度**.

若 $\lambda(G)\geq r$，则称G是r边-连通图。

若G是r边-连通图, 则在G中删除任意r-1条边后, 所得图是连通的.

例如



$\kappa(G)=3$

$\lambda(G)=3$

点连通度与边连通度(续)

说明:

(1) 若G是平凡图, 则$\kappa(G)=0$, $\lambda(G)=0$.

(2) 若G是完全图K_n, 则$\kappa(G)=n-1$, $\lambda(G)= n-1$.

(3) 若G中存在割点, 则$\kappa(G)=1$;

若G中存在割边, 则 $\lambda(G)= 1$.

(4) 规定非连通图的点连通度和边连通度均为0.

(5)设G_1,G_2都是n阶无向简单图,

若$\kappa(G_1)>\kappa(G_2)$，则称G_1比G_2的点连通程度高.

若$\lambda(G_1)>\lambda(G_2)$，则称$G_1$比$G_2$的边连通程度高.

例: P280图11.9

定理14.7 对任何无向图G, 有 $\kappa(G) \le \lambda(G) \le \delta(G)$.

有向图的连通性及其分类

定义14.20 设有向图$D=\langle V,E\rangle$, $u,v\in V$,

u可达v: u到v有通路. 规定u到自身总是可达的.

u与v相互可达: u可达v且v可达u

定义14.22 设有向图$D=\langle V,E\rangle$,

D弱连通(连通): 略去各边的方向所得无向图为连通图

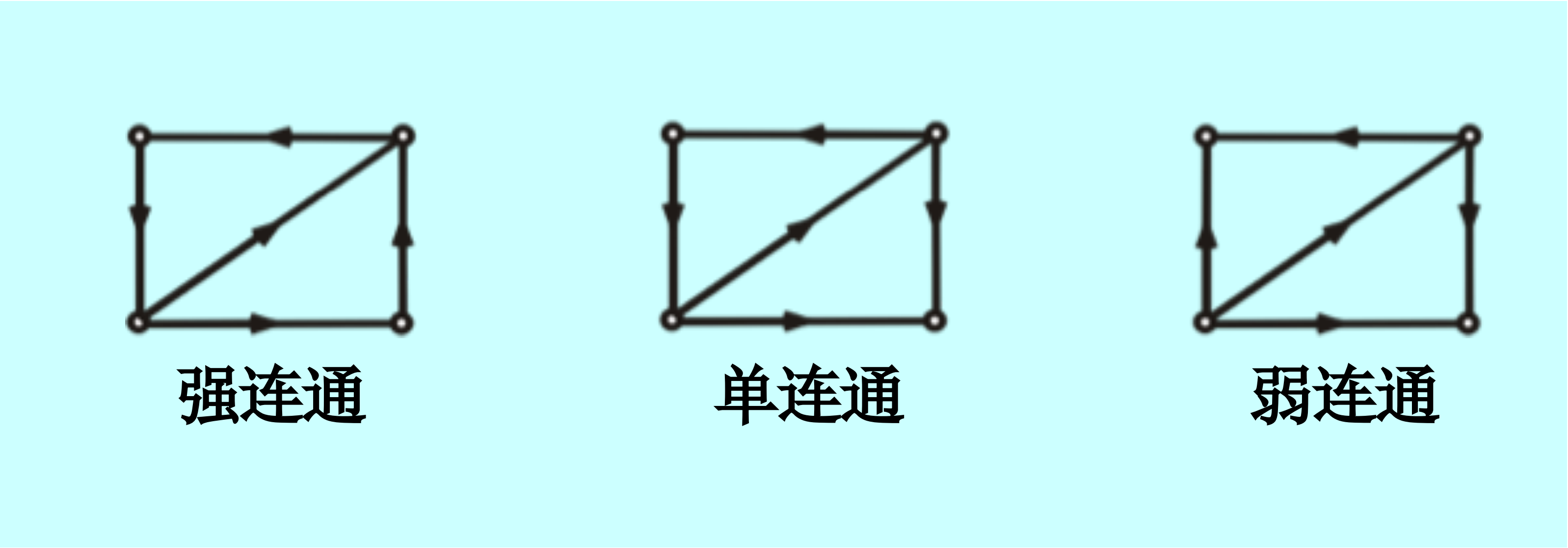
D单向连通: $\forall u,v\in V$，u可达v 或v可达u

D强连通: $\forall u,v\in V$，u与v相互可达

定理14.8 D是强连通的当且仅当D中存在经过所有顶点的回路

定理14.9 D是单向连通的当且仅当D中存在经过所有顶点的通路

实例



有向图中的短程线与距离

定义14.21 设有向图$D=<V,E>$, $u,v\in V$, 如果u可达v,

u到v的短程线: u到v长度最短的通路

距离$d<u,v>$: u到v的短程线的长度

若u不可达v, 规定$d<u,v>=\infty$.

性质:

$d<u,v>\geq 0$, 且$d<u,v>=0 \Leftrightarrow u=v$

$d<u,v>+d<v,w> \geq d<u,w>$

注意: 没有对称性

例题

例1 在仅两个奇次顶的无向图中，此二奇次顶连通.

证 如果图G中恰好有两个奇次顶u, v，
但在G中这两个奇次项u, v不连通，
则存在G的两个连通片G_1与G_2，使得$u \in V(G_1)$，$v \in V(G_2)$。
对于连通图G_1与G_2来说．皆有1个奇次项.
与定理11.1的推论相矛盾。

扩大路径法---最长轨(极大路径)法

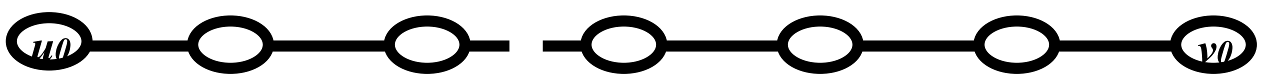
设$G=<V,E>$为n阶无向图,$E\neq\varnothing$.设是G中一条路径,若此路径Γ_i 的始点或终点与通路外的顶点相邻,则将他们扩到通路中,继续这过程,直到最后得到的通路的始点和终点不与通路外的顶点相邻为止.

设最后得到的路径为 Γ_{i+k} ,称它为极大路径.

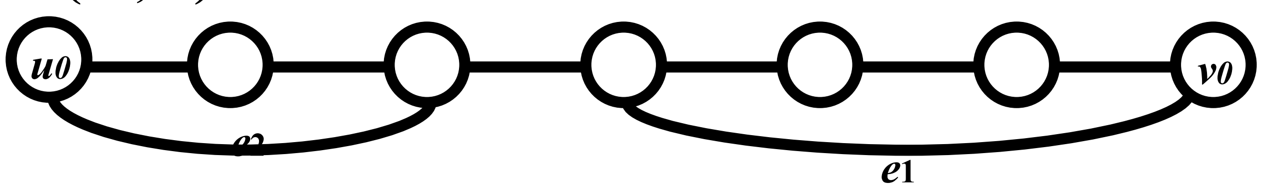
利用这种方法我们可以找到图G的最长轨.

例 无零次与1次顶的单图中有圈.

证 由于此图G中无零次与1次顶. 所以对于每个顶v, $d(v)\geq 2$, 且存在一条最长轨$P(u_0,v_0)$:



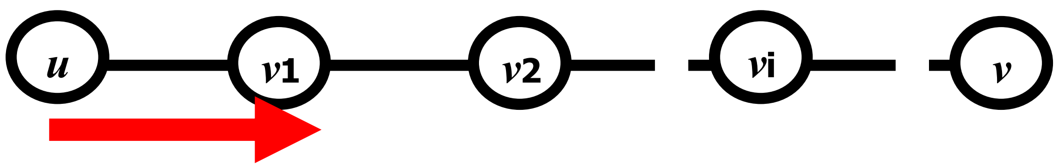
这样u_0,v_0还至少各有一条不在$P(u_0,v_0)$上的边与之关联,这种边的另一端必在$P(u_0,v_0)$上, 不然$P(u_0,v_0)$还可以加长, 与$P(u_0,v_0)$最长相违.于是造成如图所示的情形



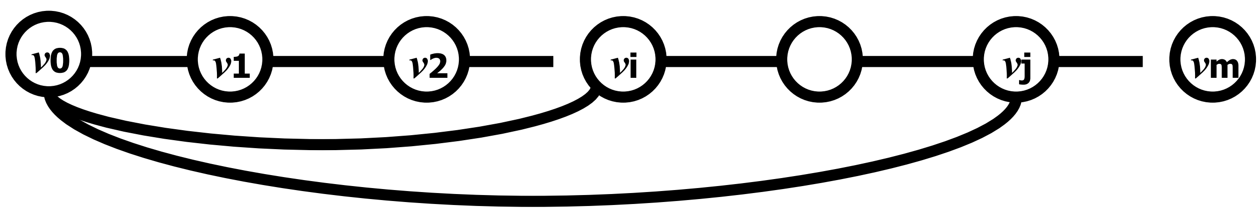
从而G中有圈.

例 若图G是连通图，G_1是G的子图，$|V(G_1)|<|V(G)|$,则G中有不属于G_1的边e,e的一端属于$V(G_1)$，另一端不属于$V(G_1)$。

取$u \in V(G_1), v \in V(G)-V(G_1)$



例14.8 若G是n阶无向简单图,每顶次数不小于3,则G中有偶圈。



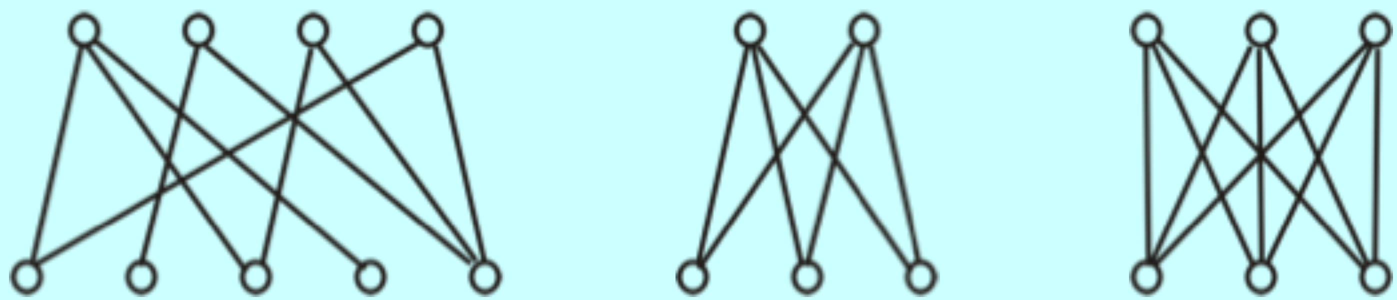
考虑最长轨$v_0 \ldots v_m$。则存在$v_i \neq v_j, 1<i<j<m$使v_i, v_j与v_0相邻。

最后考虑i,j的奇偶性即可。

二部图

定义14.23 设$G=<V,E>$,若能将V分成V_1和V_2($V_1 \cup V_2=V$, $V_1 \cap V_2=ø$),使得G中的每条边的两个端点都是一个属于V_1,另一个属于V_2,则称G为二部图(二分图, 偶图)，记为$<V_1,V_2,E>$。 称V_1与V_2为互补顶点子集.

若G为简单二部图, V_1中每个顶点均与V_2中所有顶点相邻, 则称G为完全二部图, 记为$K_{r,s}$, $r=|V_1|$, $s=|V_2|$.



K_{23}

K_{33}

定理14.10 一个无向图G是二部图当且仅当G中无奇数长度的回路。

分析: 必要性: G有回路→每个圈为偶圈,利用顶点划分。

充分性: 考虑连通性,然后根据跟某个点的距离的奇偶性划分顶点集合.

二部图的判别定理证明

证 必要性.

设$G=<V_1,V_2,E>$是二部图, 每条边只能从V_1到V_2, 或从V_2到V_1, 故任何回路必为偶长度.

充分性.

不妨设G至少有一条边且连通. 取任一顶点u, 令

$$V_1=\{v \mid v\in V \land d(v,u)\text{为偶数}\},$$

$$V_2=\{v \mid v\in V \land d(v,u)\text{为奇数}\}$$

则$V_1\cup V_2=V$, $V_1\cap V_2=\varnothing$.

先证V_1中任意两点不相邻.

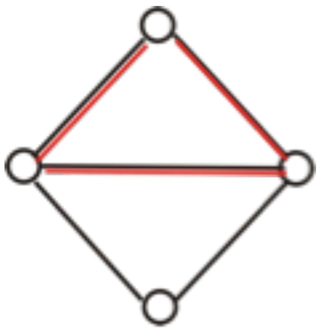
假设存在$s,t\in V_1$, $e=(s,t)\in E$.

设Γ_1, Γ_2分别是u到s,t的短程线, 则

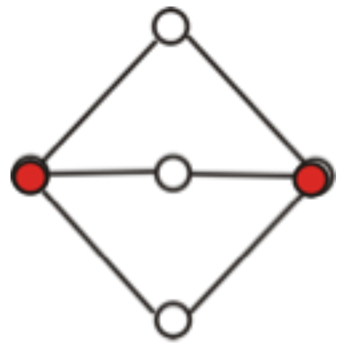
$\Gamma_1\cup e\cup\Gamma_2$是一条回路, 其长度为奇数, 与假设矛盾.

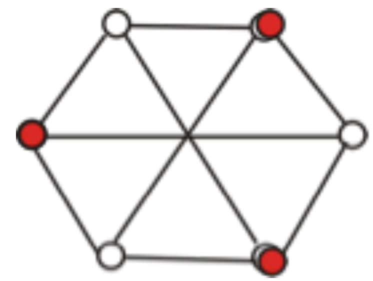
同理可证V_2中任意两点不相邻.

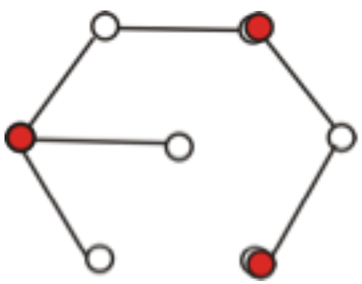
实例

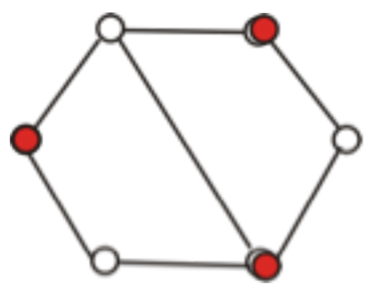


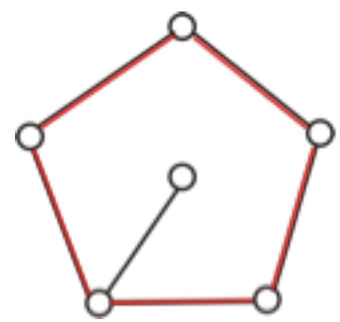
非二部图











非二部图

14.4 图的矩阵表示

无向图的关联矩阵

有向无环图的关联矩阵

有向图的邻接矩阵

- 有向图中的通路数与回路数

有向图的可达矩阵

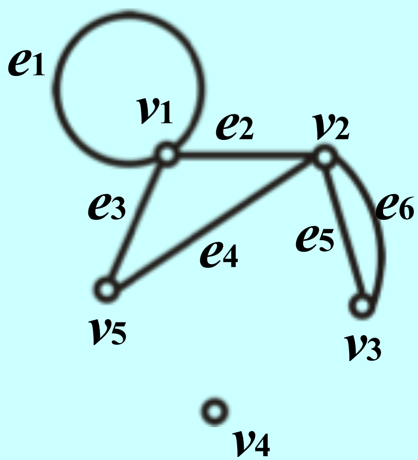
无向图的关联矩阵

定义14.24 设无向图$G=\langle V,E\rangle$, $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $E=\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. 令$m_{ij}$为$v_i$与$e_j$的**关联次数**, 称$(m_{ij})_{n\times m}$为**$G$的关联矩阵**, 记为$M(G)$.

m_{ij}的可能取值为:0,1,2.

例子:P284图11.14

例如



$$M(G)=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

关联矩阵的性质

(1) $\sum_{i=1}^{n} m_{ij} = 2, \quad j = 1, 2, \ldots, m$

(2) $\sum_{j=1}^{m} m_{ij} = d(v_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n$

(3) $\sum_{i,j} m_{ij} = 2m$

(4) ***ei*** **与*ei*是平行边 ⇔ 第*j*列与第*k*列相同**

(5) ***v_i*是孤立点 ⇔ 第*i*行全为0**

(6) ***e_j*是环 ⇔ 第*j*列的一个元素为2, 其余为0**

无环有向图的关联矩阵

定义14.25 设无环有向图$D=<V,E>$, $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $E=\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. 令

$$m_{ij}=\begin{cases} 1, & v_i\text{为}e_j\text{的始点} \\ 0, & v_i\text{与}e_j\text{不关联} \\ -1, & v_i\text{为}e_j\text{的终点} \end{cases}$$

则称$(m_{ij})_{n\times m}$为D的关联矩阵, 记为$M(D)$.

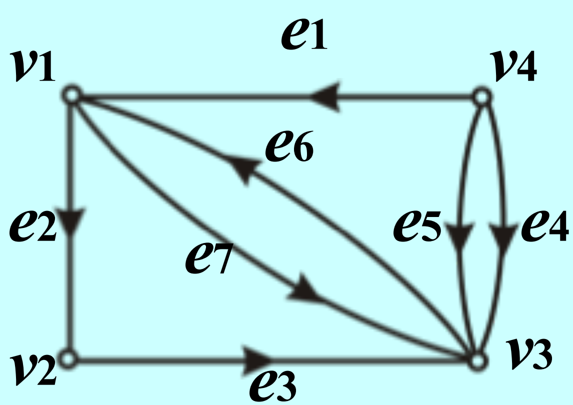
例子:P285图14.15

性质: (1) $\sum_{i=1}^{n} m_{ij}=0, \qquad j=1,2,\ldots,m$

(2) 第i行1的个数等于$d^+(v)$, 第i行−1的个数等于$d^-(v)$

(3) e_j与e_k是平行边 ⇔ 第j列与第k列相同

实例



$$M(D)=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

有向图的邻接矩阵

定义14.26

设有向图D=<V,E>, V={v_1, v_2, …, v_n}, E={e_1, e_2, …, e_m}, 令$a_{ij}^{(1)}$为顶点v_i邻接到顶点v_j边的条数，称$(a_{ij}^{(1)})_{m\times n}$为$D$的邻接矩阵, 记作$A(D)$, 简记作$A$.

例子:P286图14.16

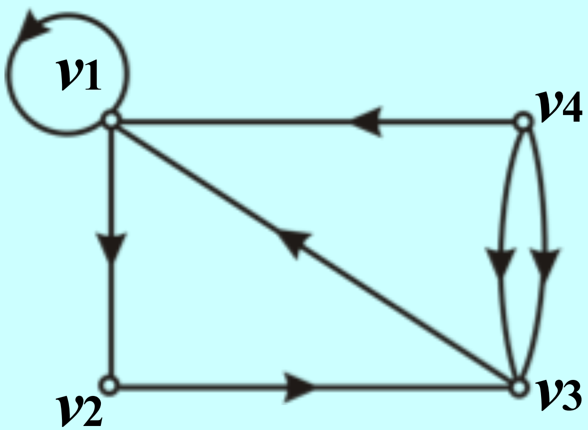
性质：(1) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(1)} = d^{+}(v_i),\quad i=1,2,\ldots,n$

(2) $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^{(1)} = d^{-}(v_j),\quad j=1,2,\ldots,n$

(3) $\sum_{i,j} a_{ij}^{(1)} = m$

(4) $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}^{(1)}$ 等于D中环的个数

实例



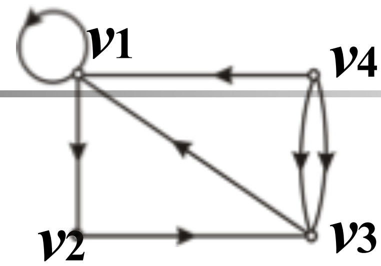
$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

有向图中的通路数与回路数

定理14.11 设A为n阶有向图D的邻接矩阵, 则$A^l(l\geq 1)$中元素$a_{ij}^{(l)}$等于D中v_i到v_j长度为 l 的通路(含回路)数,$a_{ii}^{(l)}$等于v_i到自身长度为l 的回路数,$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^{(l)}$ 等于D中长度为 l 的通路(含回路)总数, $\sum_{i=1}^{n}a_{ii}^{(l)}$ 等于D中长度为 l 的回路总数.

推论 设$B_l=A+A^2+\ldots+A^l(l\geq 1)$, 则$B_l$中元素 $b_{ij}^{(l)}$等于D中v_i到v_j长度小于等于 l 的通路(含回路)数, $b_{ii}^{(l)}$等于D中v_i到v_i的长度小于等于 l 的回路数, $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}^{(l)}$ 等于D中长度小于等于l 的通路(含回路)数, $\sum_{i=1}^{n}b_{ii}^{(l)}$为$D$中长度小于等于$l$ 的回路数.

实例(续)



$$A=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\1&0&2&0\end{bmatrix}\quad A^2=\begin{bmatrix}1&1&1&0\\1&0&0&0\\1&1&0&0\\3&1&0&0\end{bmatrix}\quad A^3=\begin{bmatrix}2&1&1&0\\1&1&0&0\\1&1&0&0\\3&3&1&0\end{bmatrix}$$

$$A^4=\begin{bmatrix}3&2&1&0\\1&1&0&0\\2&1&1&0\\4&3&1&0\end{bmatrix}$$

v_1到v_2长为3的通路有1条

v_1到v_3长为3的通路有1条

v_1到自身长为3的回路有2条

D中长为3的通路共有15条,其中回路3条

说明: 在这里, 通路和回路数是定义意义下的.

有向图的可达矩阵

定义14.27

设有向图$D=\langle V,E\rangle$, $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, 令

$$p_{ij}=\begin{cases}0, & v_i\text{可达}v_j\\ 1, & \text{否则}\end{cases}$$

称$(p_{ij})_{n\times n}$为**D的可达矩阵**, 记作$P(D)$, 简记为P.

性质:

$P(D)$主对角线上的元素全为1.

D强连通当且仅当$P(D)$的元素全为1.

实例

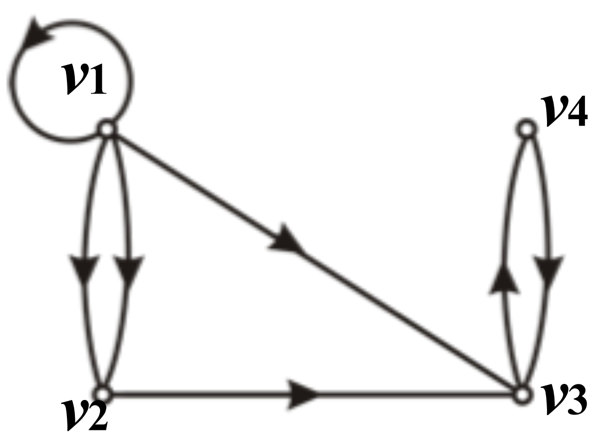
例1 (1) v_1到v_4,v_4到v_1长为3的通路各有多少条?

(2) v_1到自身长为1,2,3,4的回路各有多少条?

(3) 长为4的通路共有多少条?其中有多少条回路?

(4) 长度小于等于4的回路共有多少条?

(5) 写出D的可达矩阵, 并问D是强连通的吗?



$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

实例(续)

解

$$A^2=\begin{bmatrix}1&2&3&1\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\quad A^3=\begin{bmatrix}1&2&4&3\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}\quad A^4=\begin{bmatrix}1&2&6&4\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

v_1到v_4长为3的通路有 3 条,

v_4到v_1长为3的通路有 0 条

v_1到自身长为1,2,3,4的回路各有1 条

长为4的通路共有16条，其中有3 条回路

长度小于等于4的回路共有 8 条

可达矩阵

$$P=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}$$

非强连通,单连通