离散数学

Discrete Mathematics

第三章

命题逻辑的推理理论

3.1 推理的形式结构

3.2 自然推理系统P

§ 3.1 推理的形式结构

CHAPTER THREE

推理是指从一些已知的命题公式（称为前提）应用推理规则推演出另一些命题公式（称为结论）的过程。

定义3.1 设A_1，A_2，…，A_k和B是命题公式，若对于A_1，A_2，…，A_k，B中出现的命题变项的任一组赋值，要么$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k$为假，要么$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k$为真且B也为真，则称由前提$A_1$，$A_2$，…，$A_k$推出B的推理是有效的（或正确的），并称B是有效的结论。

$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \rightarrow B$永真

注:

1、由前提$A_1, A_2, \cdots, A_k$推结论B的推理是否正确与诸前提的排列次序无关。

将一个推理诸前提的集合记为Γ，则由Γ推出结论B的推理记为$\Gamma \vdash B$。若该推理是正确的，则记为$\Gamma \models B$（或$\Gamma \Rightarrow B$），否则记为$\Gamma \not\models B$（或$\Gamma \not\Rightarrow B$）。称$\Gamma \vdash B$和$\{A_1, A_2, \cdots, A_k\} \vdash B$为推理的形式结构。

2、设命题公式$A_1, A_2, \ldots, A_k, B$中共有n个命题变项。对于任一组赋值$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ (α_i取0或1, $i=1,2,\ldots, n$), 前提和结论的取值情况有如下四种：

(1) $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k$ 为0，B为0

(2) $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k$ 为0，B为1

(3) $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k$ 为1，B为0

(4) $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k$ 为1，B为1

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k = \begin{cases} 0, & B=\begin{cases}0\\1\end{cases} \\ 1, & B=1 \end{cases}$$

按照定义，只要不出现(3)，推理就是正确的。因而判断一个推理正确与否，只需判断是否会出现情况(3)即可。

3、推理正确，并不能保证结论B一定为真。因为前提可能是假的(情况(1))。

例3.1 判断下列推理是否正确

(1) $\{p, p\to q\} \vdash q$； (2) $\{p, q\to p\} \vdash q$

解：用真值表法

p	q	$p\wedge(p\to q)$	q	$p\wedge(q\to p)$	q
0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	1
1	0	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1

(1) 从真值表可见，没有出现前提$p\wedge(p\to q)$为真，结论q为假的情况，故 $\{p, p\to q\} \Rightarrow q$。

(2) 在赋值为10时，出现了前提$p\wedge(q\to p)$为真而q为假的情况，故 $\{p,q\to p\} \nRightarrow$ q。

定理3.1 命题公式 $A_1, A_2, \ldots, A_k$ 推 B的推理正确，

即 $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\} \models B$ 当且仅当 $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k) \rightarrow B$ 为重言式。

证明 见教材43页。

由该定理，推理的形式结构：

$$\{A_1, A_2, \cdots, A_k\} \vdash B \qquad (3.1)$$

可用 $(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k) \rightarrow B$ （3.2） 表示。

同时 $\{A_1, A_2, \cdots, A_k\} \vdash B$ 换成 $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \Rightarrow B$

或写成 前提：$A_1, A_2, \cdots, A_k$

结论：B （3.5）

然后论证推理是否正确！

判断推理是否正确的三种直接方法：

1、真值表法 2、等值演算法 3、主析取范式法

例3.2 判断下列推理是否正确。

(1) 若a能被4整除，则a能被2整除。a 能被4整除，所以 a能被2整除。

(2) 下午马芳或去看电影或去游泳。她没去看电影，所以她去游泳了。

(3) 若下午气温超过30℃，则王小燕必去游泳。若她去游泳，她就不去看电影了。所以，若王小燕没去看电影，下午气温必超过了30℃。

解：(1) 设p：a能被4整除； q：a能被2整除

前提：$p \rightarrow q$，p

结论：q

推理的形式结构：$(p \rightarrow q) \wedge p \rightarrow q$

由例3.1知道此推理正确，即$(p \rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$。

(2) 设 p: 马芳下午去看电影；q：马芳下午去游泳。

前提：$p \vee q, \neg p$

结论：q

推理的形式结构：$((p \vee q) \wedge \neg p) \rightarrow q$

我们用等值演算来检验该蕴含式是否为重言式。

$$
\begin{aligned}
((p \vee q) \wedge \neg p) \rightarrow q &\Leftrightarrow \neg ((p \vee q) \wedge \neg p) \vee q \\
&\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee p) \vee q \\
&\Leftrightarrow ((\neg p \vee p) \wedge (\neg q \vee p)) \vee q \\
&\Leftrightarrow \neg q \vee p \vee q \\
&\Leftrightarrow 1
\end{aligned}
$$

可见$((p \vee q) \wedge \neg p) \rightarrow q$ 是重言式，故$(p \vee q) \wedge \neg p) \Rightarrow q$，推理正确。

(3) 设p: 下午超过30℃；q：王小燕去游泳；r：王小燕去看电影。

前提：$p\rightarrow q$，$q\rightarrow\neg r$　　结论：$\neg r\rightarrow p$

推理形式结构：$((p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow\neg r))\rightarrow(\neg r\rightarrow p)$

我们用主析取式法检验该蕴含式是否为重言式。

$$((p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow\neg r))\rightarrow(\neg r\rightarrow p)$$

$$\Leftrightarrow\neg((\neg p\vee q)\wedge(\neg q\vee\neg r))\vee(r\vee p)$$

$$\Leftrightarrow((p\wedge\neg q)\vee(q\wedge r))\vee r\vee p$$

$$\Leftrightarrow p\vee r \qquad \text{两次吸收律}$$

$$\Leftrightarrow(p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge\neg r)\vee(p\wedge q\wedge r)$$

$$\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge r)\quad \text{(用例2.11(1))}$$

$$\Leftrightarrow m_1\vee m_3\vee m_4\vee m_5\vee m_6\vee m_7$$

可见，主析取范式中少两个极小项m_0和m_2，从而推理不正确。

推理定律

在研究推理过程中，人们发现了一些重要的重言蕴含式，并将它们作为推理定律，在推理过程中可直接引用。常用的推理定律有：

(1) 附加律: $A \Rightarrow A \vee B$

(2) 化简律: $A \wedge B \Rightarrow A$

(3) 假言推理: $(A \to B) \wedge A \Rightarrow B$

(4) 拒取式: $(A \to B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$

(5) 析取三段论: $(A \vee B) \wedge \neg B \Rightarrow A$

(6) 假言三段论: $(A \to B) \wedge (B \to C) \Rightarrow (A \to C)$

(7) 等价三段论: $(A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C) \Rightarrow (A \leftrightarrow C)$

(8) 构造性二难: $(A \to B) \wedge (C \to D) \wedge (A \vee C) \Rightarrow (B \vee D)$

构造性二难(特殊形式): $(A \to B) \wedge (\neg A \to B) \wedge (A \vee \neg A) \Rightarrow B$

(9) 破坏性二难: $(A \to B) \wedge (C \to D) \wedge (\neg B \vee \neg D) \Rightarrow (\neg A \vee \neg C)$

此外，§2.1中给出的24个等值式中的每一个都派生出两条推理定律. 比如$\neg\neg A \Leftrightarrow A$产生出$\neg\neg A \Rightarrow A$ 和$A \Rightarrow \neg\neg A$.

还有一些等值式和重言蕴含式可在推理中引用。如:

$$A \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)$$

$$\neg (A \rightarrow B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B$$

$$A \rightarrow (B \rightarrow C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \rightarrow C$$

$$(A \leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$$

$$\neg (A \leftrightarrow B) \Leftrightarrow A \leftrightarrow \neg B$$

$$\neg A \Rightarrow A \rightarrow B$$

$$B \Rightarrow A \rightarrow B$$

$$A \rightarrow B \Rightarrow (A \vee C) \rightarrow (B \vee C)$$

$$A \rightarrow B \Rightarrow (A \wedge C) \rightarrow (B \wedge C)$$

§ 3.2 自然推理系统

“证明”是一个描述推理过程的命题公式序列, 其中的每个公式或者是已知前提, 或者是由某些前提应用推理规则得到的结论.

注:

前已述及, 可以用真值表法、等值演算法和主析取范式法来判断推理是否正确。但当推理中包含的命题变项较多时, 这些方法的演算量很大. 因而需要对推理进行严谨的证明。证明应在推理系统中进行.

形式系统

定义3.2一个形式系统I由下面四个部分组成：

(1)非空的字母表集，记作A(I).

(2)A(I)中符号构造的合式公式集，记作E(I).

(3) E(I)中一些特殊的公式组成的公理集，记作Ax(I).

(4)推理规则集，记作R(I).

这样可将I记为4元组<A(I),E(I),Ax(I),R(I)>.其中<A(I),E(I)>是I的形式语言系统,<Ax(I),R(I)>为I的形式演算系统。

形式系统一般分为两类：

一是自然推理系统：它的特点是从任意给定的前提出发，应用系统中的推理规则进行推理演算，得到的最后命题公式是推理的结论。

另外的则是公理推理系统：它只能从若干给定的公理出发，应用系统的推理规则进行推理演算。得到的结论是系统中的重言式，称为系统中的定理。

自然推理系统P

定义3.3 自然推理系统P由以下三部分要素组成:

1. 字母表:

(1) 命题变项符号: p, q, r, ⋯

(2) 联结词符号: ¬ ,∧,∨ →, ↔

(3)逗号与括号: ， , ( )

2. 合式公式集 (合式公式的定义见定义1.6).

3. 推理规则:

(1) 前提引入规则: 在证明的任何步骤上都可引入前提;

(2) 结论引入规则: 在证明的任何步骤上所得到的结论都可做为后续证明的前提.

(3) 置换规则: 在证明的任何步骤上, 命题公式中的子公式都可以用与之等值的公式置换.

推理规则

(4)假言推理规则

$$\frac{A \to B \quad A}{\therefore B}$$

(5)附加规则

$$\frac{A}{\therefore A \vee B}$$

（6）化简规则

$$\frac{A \wedge B}{\therefore A}$$

（7）拒绝式规则

$$\frac{A \to B \quad \neg B}{\therefore \neg A}$$

(8)假言三段论规则

$$\frac{A \to B \quad B \to C}{\therefore A \to C}$$

(9)析取三段论规则

$$\frac{A \vee B \quad \neg B}{\therefore A}$$

（10）构造性二难推理规则

$$\frac{A \to B \quad C \to D \quad A \vee C}{\therefore B \vee D}$$

（11）破坏性二难推理规则

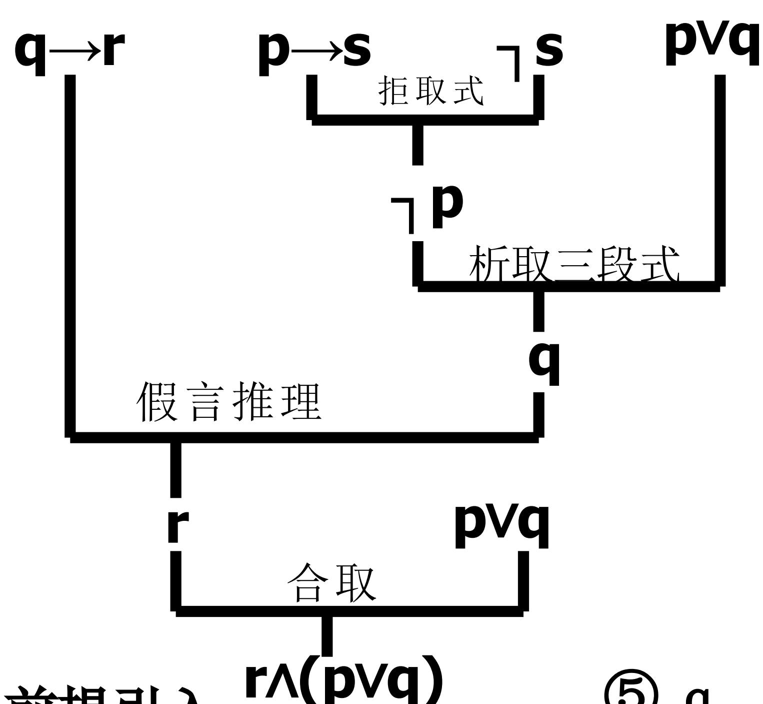
$$\frac{A \to B \quad C \to D \quad \neg B \vee \neg D}{\therefore \neg A \vee \neg C}$$

(12)合取引入规则

$$\frac{A \quad B}{\therefore A \wedge B}$$

例3.3 在自然推理系统P中构造下面推理的证明:

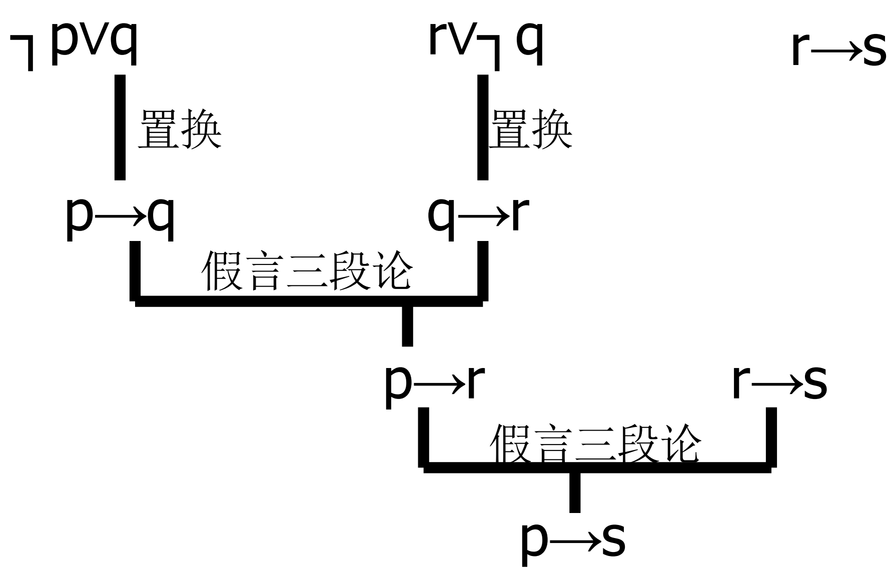
(1) 前提: $p\vee q, q\rightarrow r, p\rightarrow s, \neg s$　　结论: $r\wedge(p\vee q)$



证明:

①	$p\rightarrow s$	前提引入	⑤	q	③④析取三段式
②	$\neg s$	前提引入	⑥	$q\rightarrow r$	前提引入
③	$\neg p$	①②拒取式	⑦	r	⑤⑥假言推理
④	$p\vee q$	前提引入	⑧	$r\wedge(p\vee q)$	⑦④合取

（2） 前提：$\neg p\vee q$，$r\vee\neg q$，$r\rightarrow s$　　结论：$p\rightarrow s$



证明：

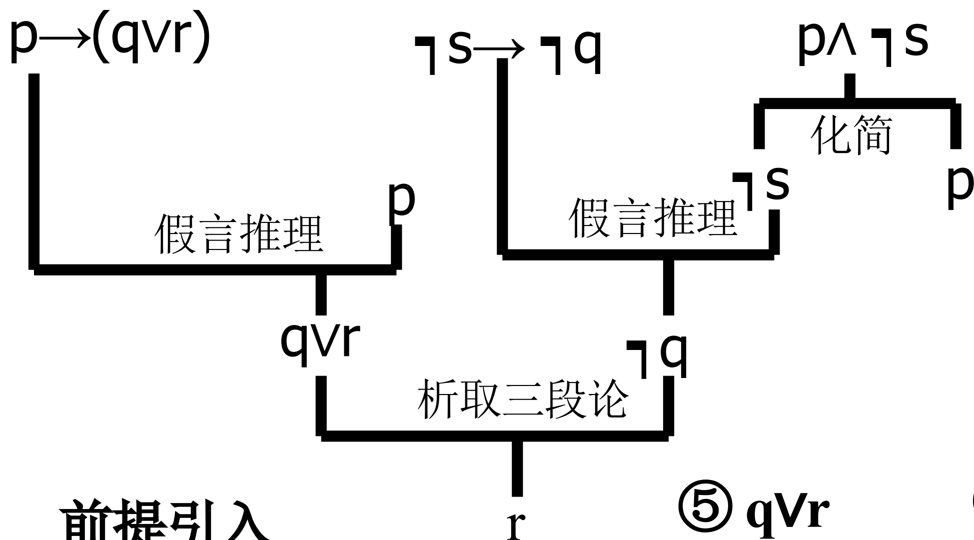
① $\neg p\vee q$	前提引入		⑤ $p\rightarrow r$	②④假言三段论
② $p\rightarrow q$	①置换		⑥ $r\rightarrow s$	前提引入
③ $r\vee\neg q$	前提引入		⑦ $p\rightarrow s$	⑤⑥假言三段论
④ $q\rightarrow r$	③置换			

例3.4 在自然推理系统P中构造下面推理的证明:

若数a 是实数, 则它不是有理数就是无理数。若a不能表示成分数, 则它不是有理数。a 是实数且它不能表示成分数, 所以a是无理数。

解: 令 p: a是实数; q: a是有理数; r: a是无理数; s: a能表示成分数.

前提: $p\to(q\vee r)$, $\neg s\to\neg q$, $p\wedge\neg s$ 结论: r



证明:

① $p\wedge\neg s$ 前提引入

② p ①化简

③ $\neg s$ ①化简

④ $p\to(q\vee r)$ 前提引入

⑤ $q\vee r$ ②④假言推理

⑥ $\neg s\to\neg q$ 前提引入

⑦ $\neg q$ ③⑥假言推理

⑧ r ⑤⑦析取三段论

构造证明的两个技巧

1. 附加前提证明法:

欲证 $(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k) \Rightarrow (A \rightarrow B)$,

可改证$(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots A_k \wedge A) \Rightarrow B$。

道理如下:

$$
\begin{aligned}
&(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k) \rightarrow (A \rightarrow B) \\
&\Leftrightarrow \neg (A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k) \vee (\neg A \vee B) \\
&\Leftrightarrow (\neg A_1 \vee \neg A_2 \vee \cdots \vee \neg A_k \vee \neg A) \vee B \\
&\Leftrightarrow \neg (A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \wedge A) \vee B \\
&\Leftrightarrow (A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \wedge A) \rightarrow B
\end{aligned}
$$

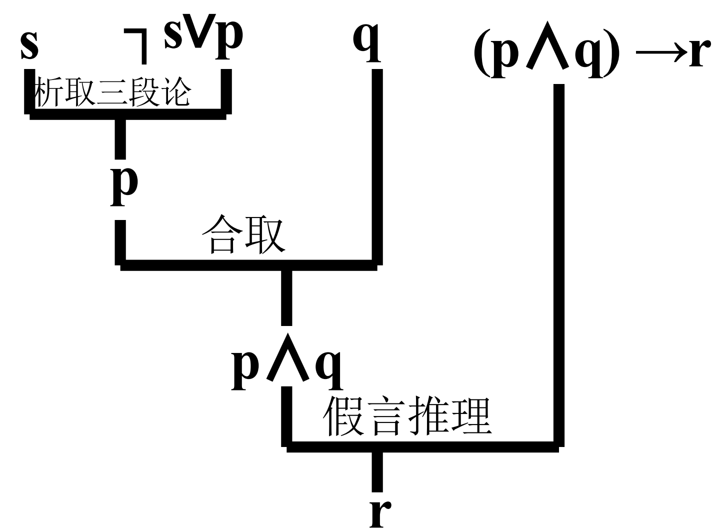
附加前提证明法

例3.5 在自然推理系统P中构造下面推理的证明：

如果小张和小王去看电影，则小李也去看电影。小赵不去看电影或小张去看电影。小王去看电影。所以，当小赵去看电影时，小李必定也去。

解：令 p: 小张去看电影；q: 小王去看电影；

r: 小李去看电影； s: 小赵去看电影。



前提：$(p\wedge q)\rightarrow r$, $\neg s\vee p$, q

结论：$s\rightarrow r$

证明：用附加前提法。

① s　　附加前提引入

② $\neg s\vee p$　　前提引入

③ p　　①②析取三段论

④ q　　前提引入

⑤ $p\wedge q$　　③④合取

⑥ $(p\wedge q)\rightarrow r$　　前提引入

⑦ r　　⑤⑥假言推理

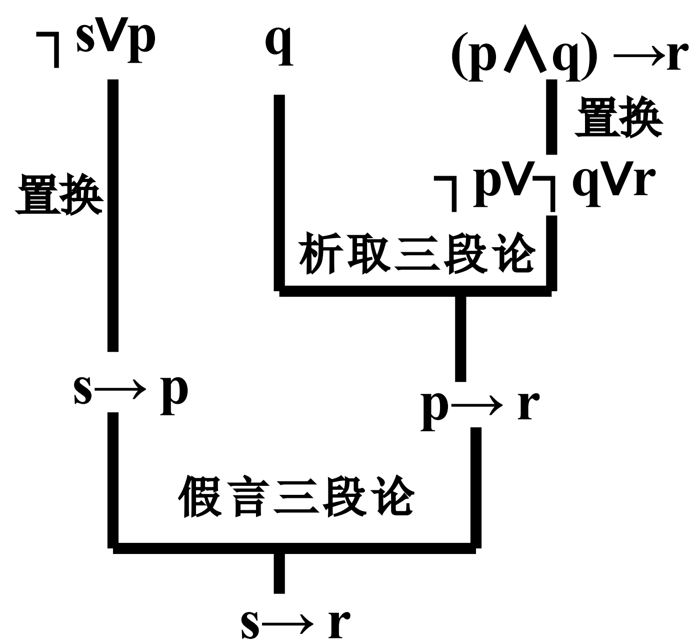
直接证明法

前提：$(p\wedge q)\rightarrow r$，$\neg s\vee p$，q

结论：$s\rightarrow r$

证明：

① $\neg s\vee p$	前提引入
② $s\rightarrow p$	① 置换
③ $(p\wedge q)\rightarrow r$	前提引入
④ $\neg p\vee\neg q\vee r$	③置换
⑤ q	前提引入
⑥ $p\rightarrow r$	④ ⑤析取三段论
⑦ $s\rightarrow r$	② ⑥假言三段论



2. 归谬法：

欲证 $(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k) \Rightarrow B$，

若将$\neg B$做为附加前提后能得出矛盾(比如得到$A \wedge \neg A$)，则说明原推理正确。

道理如下： $(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k) \rightarrow B$

$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k) \vee B$

$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \wedge \neg B)$

可见，若$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \wedge \neg B$为矛盾式，

则$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \rightarrow B$为重言式。

例3.6 在自然推理系统P 中构造下面推理的证明：

如果小张守第一垒并且小李向B队投球，则A 队将取胜。或者A队未取胜，或者A队成为联赛第一名。A队没有成为联赛第一名。小张守第一垒。因此，小李没向 B队投球。

解：令 p: 小张守第一垒； q: 小李向B队投球； r: A队取胜；

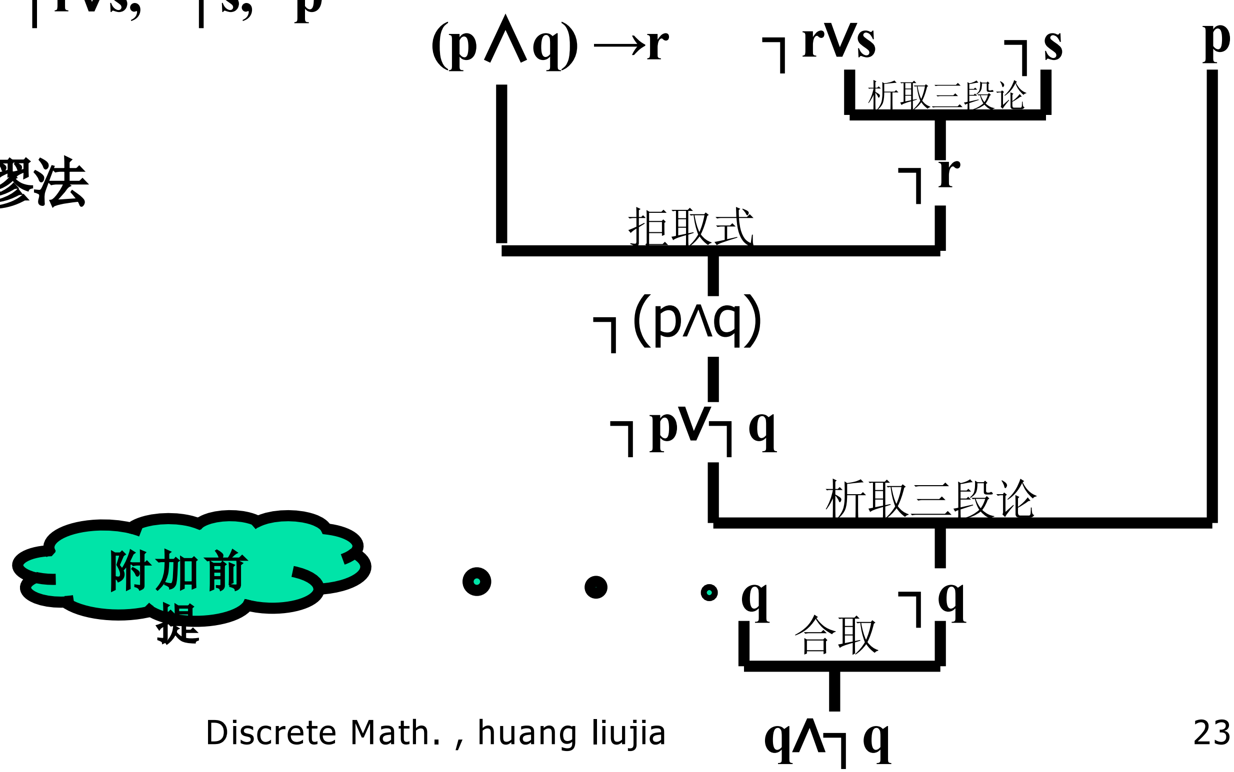
s: A队成为联赛第一名。

前提：$(p\wedge q)\rightarrow r$, $\neg r\vee s$, $\neg s$, p

结论：$\neg q$

证明：(1) 用归谬法

（2）直接证明



证明：用归谬法

① q	结论否定引入	⑥ $\neg(p\wedge q)$	④⑤拒取式
② $\neg r\vee s$	前提	⑦ $\neg p\vee\neg q$	⑥置换
③ $\neg s$	前提	⑧ p	前提
④ $\neg r$	②③析取三段论	⑨ $\neg q$	⑦⑧ 析取三段论
⑤ $(p\wedge q)\rightarrow r$	前提	⑩ $q\wedge\neg q$	①⑨合取

因 $q\wedge\neg q\Leftrightarrow 0$，故原推理正确。

直接证明

① $\neg r\vee s$	前提	⑤ $\neg(p\wedge q)$	③④ 拒取式
② $\neg s$	前提	⑥ $\neg p\vee\neg q$	⑤ 置换
③ $\neg r$	① ② 析取三段论	⑦ p	前提
④ $(p\wedge q)\rightarrow r$	前提	⑧ $\neg q$	⑥ ⑦ 析取三段论