离散数学

Discrete Mathematics

第一部分

数 理 逻 辑

Part One

Mathematics logic

逻辑学： 研究人的思维形式和规律的科学． 由于研究的对象和方法各有侧重而又分为形式逻辑、辩证逻辑和数理逻辑．

数理逻辑是用数学方法来研究推理的形式结构和推理规律的数学学科。这里所指的数学方法就是引进一套符号体系的方法。所以数理逻辑又称符号逻辑，它是从量的侧面来研究思维规律的。

现代数理逻辑可分为逻辑演算、证明论、公理集合论、递归论和模型论。

本部分仅介绍计算机科学领域中所必需的数理逻辑基础知识： 命题逻辑和谓词逻辑（一阶逻辑）。

第一章

命题逻辑基本概念

Chapter One

Foundations of Proposition Logic

1.1 命题与联结词

- 命题与真值
- 命题符号化
- 联结词及其逻辑关系
- 复合命题

1.2 命题公式及其赋值

- 命题常项与变项
- 命题公式及其赋值
- 命题公式的类型
- 公式类型的判断方法

§1.1 命题与联结词

一、命题

命题： 能判断真假(非真即假)的陈述句。

命题的真值： 命题的判断结果。

它只有两种可能：真或假，分别用1和0来表示。

真值为1的命题称为**真命题**；真值为0的命题称为**假命题**。

判断一个句子是否为命题：

首先判断它是否为陈述句;其次判断它是否有唯一的真值。

例 命题 “因为$3>2$, 所以$3\neq2$.”的组成。

定义 一个命题若不能被分解成更简单的陈述句，则称为**简单命题**或**原子命题**；

若一个命题是由几个简单陈述句通过**联结词**联结而成的，则称为**复合命题**。

例 1.1 判断下列句子是否为命题

√ （1） 4是素数。

√ （2） $\sqrt{5}$ 是无理数 。

× （3） x 大于 y,其中x和y是任意的两个数。

√ （4） 火星上有水。

√ （5） 2050年元旦是晴天。

× （6） π大于 $\sqrt{2}$吗？

× （7） 请不要吸烟！

× （8） 这朵花真美丽啊！

× （9） 我正在说假话。

注：通常用小写字母p , q , r 等来表示命题。

二．联结词与复合命题

例 1.2 将下列命题符号化。

(1) $\sqrt{2}$ 是有理数是不对的.（2）2是偶素数. (3) 2或4是偶素数.

(4) 如果2是素数，则3也是素数. (5) 2是素数当且仅当3是素数.

解：记 p：$\sqrt{2}$ 是有理数. q：2是素数. r：2是偶数. s：3是素数.

t：4是偶数. 则各语句表述为:

(1) 非p; (2) q与r; (3) p或t; (4)如果q,则s；(5) q当且仅当s .

定义 1.1 设 p 为命题，复合命题“非 p”(即“p 的否定”)称为 p 的否定式，记为 $\neg p$。 符号 $\neg$ 称为否定联结词。

规定：$\neg p$ 为真当且仅当 p 为假。

例 符号化：（1）张伟不是三好学生;（2）$\sqrt{2}$ 不是有理数 。

解：记 p：张伟是三好学生。 q：$\sqrt{2}$ 是有理数。

则: (1) $\neg$p ; (2) $\neg$q .

定义1.2 设 p, q 为两个命题。复合命题“p 与 q”即“p 并且 q”称为 p 与 q 的合取式，记为 $p \wedge q$。符号 $\wedge$ 称为合取联结词。

规定：$p \wedge q$ 为真当且仅当 p 与 q 同时为真。

注：自然语言中“与”，“和”，“且”，“既…又…”，“不仅…而且…”，“虽然…但是…”，“一面…一面…”等联结词都可以符号化为∧；

但并不是所有的“与”、“和”等都能用联结词∧替代。

例1.3 将下列命题符号化

(1) 吴颖既用功又聪明.

(2) 吴颖不仅用功而且聪明.

(3) 吴颖虽然聪明，但不用功.

(4) 张辉和王丽都是三好学生.

(5) 张辉和王丽是同学.

解：(1)、(2)、(3)、(4)：

令p:吴颖用功；q:吴颖聪明，

r: 张伟是三好学生；s: 王辉是三好学生.

则符号化分别为： $p\wedge q$; $p\wedge q$; $q\wedge\neg p$; $r\wedge s$。

(5) 是原子命题, 符号化为t: 张辉和王丽是同学。

定义1.3 设 p , q 为两个命题，复合命题 “ p 或 q ” 称为 p 与 q 的析取式, 记为 $p \vee q$。符号$\vee$称为析取联结词。

规定： $p \vee q$ 为假当且仅当 p 与 q 同时为假。

注：自然语言中的 “或” 联结的两个命题可以具有相容性，也可以具有排斥性。

前者称为相容或，后者称为排斥或。

析取联结词$\vee$指的是“相容或”。

例1.4 将下列命题符号化

（1）张晓静爱唱歌或爱听音乐。

（2）张晓静只能挑选202房或203房。

（3）张晓静是江西人或安徽人。

解：(1)令p:张晓静爱唱歌；q:张晓静爱听音乐，

则： $p \vee q$；

(2)令r:张晓静住202房；s:张晓静住203房，

则： $(r \wedge \neg s) \vee (\neg r \wedge s)$;

(3)令t:张晓静是江西人；u:张晓静是安徽人，

则： $(t \wedge \neg u) \vee (\neg t \wedge u)$.

定义1.4 设 p, q 为两个命题。复合命题 "如果 p, 则 q "称为 p 与 q 的蕴涵式，记作 $p \to q$。符号 $\to$ 称为蕴涵联结词，

称 p 是蕴涵式的前件，q 是蕴涵式的后件，q 是 p 的必要条件。

规定：$p \to q$ 为假当且仅当 p 为真 q 为假。

注： 1.在自然语言中，"如果 p, 则 q"这种命题还有其它叙述方式，比如："只要 p, 就 q"，" 因为 p，所以 q", "p 仅当 q", "只有 q 才 p", "除非 q 才 p", "除非 q，否则非 p "等等，它们都可符号化为 $p \to q$。

2.在数学或其它自然科学中，"如果 p,则 q" 往往表达的是前件 p 为真，后件 q 也为真的推理关系。但在数理逻辑中，作为一种规定，当 p 为假时，无论 q 是真是假，$p \to q$ 均为真（因为考虑的整个语句）。

3.在自然语言中，"如果 p, 则 q " 中的前件 p 和后件 q 往往具有某种内在联系，而在数理逻辑中，p 与 q 可以无任何内在联系。

例1.5 将下列命题符号化，并指出各复合命题的真值。

(1) 如果3+3 = 6, 则雪是白色的。
(2) 如果3+3 ≠6, 则雪是白色的。
(3) 如果3+3 = 6, 则雪不是白色的。
(4) 如果3+3 ≠6, 则雪不是白色的。
(5) 只要 a 能被 4 整除，则 a 一定能被 2 整除。
(6) a 能被 4 整除，仅当 a 能被 2 整除。
(7) 除非 a 能被 2 整除，a 才能被 4 整除。
(8) 除非 a 能被 2 整除，否则 a 不能被 4 整除。
(9) 只有 a 能被 2 整除，a 才能被 4 整除。
(10) 只有 a 能被 4 整除，a 才能被 2 整除。(a 是一个给定的正整数）。

解：令p：3+3=6； q：雪是白色的。则 (1) 到 (4) 的符号化形式分别为：

$p \to q$； $\neg p \to q$； $p \to \neg q$； $\neg p \to \neg q$。

它们的真值分别为：1，1，0，1 。

令r：a 能被 4 整除； s：a能被 2 整除。 (5) 到 (9) 都可符号化为：

$r \to s$, 真值为 1 。

(10) 可符号化为 $s \to r$， 真值视 a 的值而定。

定义1.5 设 p, q 是两个命题，复合命题 "p 当且仅当 q"称为 p 与 q 的等价式，记为 $p\leftrightarrow q$。符号$\leftrightarrow$称为等价联结词。

规定：$p\leftrightarrow q$ 为真当且仅当 p 与 q 同时为真或同时为假。

注：$p\leftrightarrow q$ 可理解为"q与p互为充分必要条件"；

它与$(p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p)$的逻辑关系完全一致。

例 1.6 将下列命题符号化，并讨论它们的真值。

(1) √3 是无理数当且仅当加拿大位于亚洲。

(2) 2+3=5的充要条件是√3是无理数。

(3) 若两圆的面积相等, 则它们的半径相等, 反之亦然。

(4) 当王小红心情愉快时, 她就唱歌, 反之, 当她唱歌时, 一定心情愉快。

解：(1)令p:√3是无理数；q: 加拿大位于亚洲，则符号化为

$p\leftrightarrow q$，真值为0。

(2)令r:2+3=5；令p:√3是无理数，则符号化为 $r\leftrightarrow p$， 真值为1。

(3)令s:两圆面积相等；t:两圆半径相等，则符号化为 $s\leftrightarrow t$，真值为1。

(4)令x:王小红心情愉快；y:王小红唱歌，则符号化为

$x\leftrightarrow y$， 真值由具体情况而定。

小 结

以上定义的五种最基本的联结词组成一个联结词集{┐，∧，∨，→，↔ }。由其中某个联结词联结两个原子命题（┐联结一个原子命题）所形成的**复合命题**称为**基本复合命题**，它们的真值情况如下表。

p q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
0 0	1	0	0	1	1
0 1	1	0	1	1	0
1 0	0	0	1	0	0
1 1	0	1	1	1	1

多次使用联结词集中的联结词，可组成更为复杂的复合命题。求复杂的复合命题的真值时，可依据上述真值表逐次求取。但运算过程中应注意联结词的优先顺序(包括括号)：

$$(\ ),\ \neg,\ \wedge,\ \vee,\ \rightarrow,\ \leftrightarrow。$$

对同一优先级的联结词，按出现的先后次序运算。

例1.7 令：p：北京比天津人口多；q：2+2=4；r：乌鸦是白色的。求下列命题的真值：

(1) $((\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)) \rightarrow r$；(2) $(q \vee r) \rightarrow (p \rightarrow \neg r)$;

(3) $(\neg p \vee r) \leftrightarrow (p \wedge \neg r)$.

解：$\because$ p, q, r 的真值分别为1, 1, 0，

$\therefore$ 按照真值表及命题式，(1), (2), (3)的真值分别为1, 1, 0。

§ 1.2 命题公式及其赋值

定义1.6 简单命题（原子命题）称为命题常项，而称真值可以变化的陈述句为命题变项。命题变项一般也用小写字母$p,q,r,\ldots$来表示。

将命题变项用联结词和括号按一定逻辑关系联结起来的符号串称为合式公式或命题公式。具体地说, 合式公式定义如下:

(1) 单个命题变项是合式公式, 称为原子命题公式.

(2) 若A是合式公式, 则$(\neg A)$也是合式公式.

(3) 若A,B是合式公式,则$(A\wedge B)$,$(A\vee B)$,$(A\rightarrow B)$,$(A\leftrightarrow B)$也是合式公式.

(4) 只有有限次地应用(1)～(3)形成的符号串才是合式公式.

设A是合式公式, B是中的一部分, 若B是合式公式, 则称B为A的子公式.

例如: p, $(p\vee q)\vee(\neg r)$, $(p\rightarrow q)\wedge(q\leftrightarrow r)$, $(p\wedge q)\wedge\neg r$, $p\wedge(q\vee\neg r)$

都是命题公式。

说明：元语言与对象语言， 外层括号可以省去

定义1.7 (1) 若命题公式A是单个命题变项，则称A为**0层公式**。

(2) 称命题A是**n+1(n≥0) 层公式**，只要A是下列情况之一：

(a) $A = \neg B$, B 是 n层公式;

(b) $A = B \wedge C$, B, C 分别为 i 层和j 层公式，且$max(i, j) = n$。

(c) $A = B \vee C$, B, C 分别为 i 层和j 层公式，且$max(i, j) = n$。

(d) $A = B \rightarrow C$, B, C 分别为 i 层和j 层公式，且$max(i, j) = n$。

(e) $A = B \leftrightarrow C$, B, C 分别为 i 层和j 层公式，且$max(i, j) = n$。

例如: $(\neg p \wedge q) \rightarrow r$, $(\neg (p \rightarrow \neg q)) \wedge ((r \vee s) \leftrightarrow \neg p)$ 分别为

3层和 4 层公式。

由于命题公式中含有命题变项，故其真值一般是不确定的。当公式中所有命题变项都解释成具体的命题后，命题公式就成了真值确定的命题了。

例如，命题公式 $(p \vee q) \rightarrow r$:

若将 p 解释成:2 是素数, q 解释成:3是偶数, r 解释成: $\sqrt{2}$ 是无理数。

则命题公式 $(p \vee q) \rightarrow r$ 就被解释成了一个真命题。

另外，如果p, q 的解释不变，而将r解释成: $\sqrt{2}$是有理数,

则 $(p \vee q) \rightarrow r$ 就被解释成了一个假命题。

赋值

定义 1.8 设在命题公式A 中出现的所有命题变项为$p_1, p_2, \ldots p_n$，给它们各指定一个真值，称为对公式A的一个赋值 (或解释)。若一个赋值使A的真值为1，则称该赋值为A的成真赋值，否则称为A的成假赋值。

注： 设A中的变项为$p_1, p_2, \ldots, p_n$，给A的赋值 $a_1, a_2, \ldots a_n$ 是指 $p_1 = a_1, p_2 = a_2, \ldots, p_n = a_n$，其中$a_i$为 0 或 1, ($i = 1,2,\ldots, n$)。

例如： 公式 $(\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_3) \vee (p_1 \wedge p_2)$中，

000 (即 $p_1 = 0$， $p_2 = 0$， $p_3 = 0$) 和 110 都是 成真赋值；

而 001 (即 $p_1 = 0$, $p_2 = 0$， $p_3 = 1$) 和 011 都是 成假赋值。

真值表

定义 1.9 将命题公式A在**所有赋值**下的取值情况列成表，称为A的**真值表**。

含n个命题变项的公式共有2^n 个不同的赋值。构造真值表的一般步骤如下：

(1) 列出命题公式中的所有命题变项 $p_1, p_2, \ldots p_n$，(无下标时按字典序排列)。列出这些变项的所有2^n 个赋值。一般从00…0开始，按二进制加法依次列到11…1为止。

(2) 按从低到高的顺序依次列出公式的各个层。

(3) 对应于变项的2^n 个赋值分别计算出各层的真值，直至算出公式的真值。

例1.8 写出下列公式的真值表，并求它们的成真、成假赋值。

(1)$(\neg p \wedge q) \to \neg r$; (2)$(p \wedge \neg p) \leftrightarrow (q \wedge \neg q)$; (3)$\neg(p \to q) \wedge q \wedge r$

解： $(\neg p \wedge q) \to \neg r$ 的真值表

p q r	$\neg p$	$\neg r$	$\neg p \wedge q$	$(\neg p \wedge q) \to \neg r$
0 0 0	1	1	0	1
0 0 1	1	0	0	1
0 1 0	1	1	1	1
0 1 1	1	0	1	0
1 0 0	0	1	0	1
1 0 1	0	0	0	1
1 1 0	0	1	0	1
1 1 1	0	0	0	1

(p∧┐p)↔(q∧┐q)的真值表

p	q	┐p	┐q	p∧┐p	q∧┐q	(p∧┐p)↔(q∧┐q)
0	0	1	1	0	0	1
0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	0	0	0	0	1

┐(p→q)∧q∧r 的真值表

p	q	r	p→q	┐(p→q)	┐(p→q)∧q	┐(p→q)∧q∧r
0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0
1	0	1	0	1	0	0
1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0

公式分类

定义1.10 设A是一个命题公式。

(1) 若A在各种赋值下取值总为1，则称A是永真式或重言式。

(2) 若A在各种赋值下取值总为0，则称A是永假式或矛盾式。

(3) 若A不是矛盾式，则称A为可满足式。

注：A是可满足式当且仅当A至少存在一个成真赋值。

1. 重言式必是可满足式，但反之不真。

2. 可用真值表来判断公式的类型：

   (1) 若真值表最后一列全为1，则公式为重言式；

   (2) 若真值表最后一列全为0，则公式为矛盾式；

   (3)若真值表最后一列至少有一个1，则公式为可满足式。

给定n个命题变项，使用联结词和括号，可构成无穷多个命题公式。

n 个命题变项共有 2^n 个可能的赋值，而在每个赋值下公式只能取值 0 或1。因此含 n 个命题变项的公式其真值表只有2^{2^n}种可能的情况。从而必有无穷多个公式具有相同的真值表。

例1.9 下列公式中哪些具有相同的真值表?

(1) $p \rightarrow q$;　(2) $p \leftrightarrow q$;　(3) $\neg(p \wedge \neg q)$;

(4) $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$;　(5) $\neg q \vee p$

解: 5个公式的真值表

p	q	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$	$\neg(p \wedge \neg q)$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$	$\neg q \vee p$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1

从上表可见，命题公式 “$p \rightarrow q$” 与 “$\neg(p \wedge \neg q)$”有相同的真值表。

命题 “$p \leftrightarrow q$” 与 “$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$” 有相同的真值表。

设公式A、B中总共含有命题变项$p_1, p_2, \ldots p_n$，但A或B并不全含有这些变项。如果某个变项未在公式A中出现，则称该变项为A的哑元。同样可定义B的哑元。

在讨论A与B是否有相同的真值表时，应将哑元考虑在内，即将A、B都看成含所有$p_1, p_2, \ldots p_n$的命题公式。

例1.10 下列公式中，哪些具有相同的真值表？

(1) $p\rightarrow q$； (2) $\neg q\vee r$； (3) $(\neg p\vee q)\wedge((p\wedge r)\rightarrow p)$； (4) $(q\rightarrow r)\wedge(p\rightarrow p)$.

解：四个命题共含p, q, r三个变项，r是(1)的哑元，p是(2)的哑元。

4 个公式的真值表

p q r	$p\rightarrow q$	$\neg q\vee r$	$(\neg p\vee q)\wedge((p\wedge r)\rightarrow p)$	$(q\rightarrow r)\wedge(p\rightarrow p)$
0 0 0	1	1	1	1
0 0 1	1	1	1	1
0 1 0	1	0	1	0
0 1 1	1	1	1	1
1 0 0	0	1	0	1
1 0 1	0	1	0	1
1 1 0	1	0	1	0
1 1 1	1	1	1	1

从表中可见，(1)与(3)具有相同的真值表；(2)与(4)具有相同的真值表。