离散数学

Discrete Mathematics

第四章

一阶(谓词)逻辑基本概念

- 4.1 一阶(谓词)逻辑符号化
- 4.2一阶(谓词)逻辑公式及解释

简 述

在命题逻辑中，命题是最基本的单位，对简单命题不再进行分解，不关心命题中个体与总体的内在联系和数量关系。这就使得它难以描述和证明一些常见的推理。因此，需要对命题进行细化，建立更为精细的逻辑推理体系。

例如:逻辑学中著名的三段论：

凡偶数都能被2整除。6是偶数。所以， 6能被2整除。

这个推理是数学中的真命题，是正确的，但在命题逻辑中却无法判断其正确性，用p,q,r分别表示以上三个命题。

则得到推理的形式结构为：

$$(p \wedge q) \rightarrow r$$

由于上式不是重言式，因而不能由它判断推理的正确性。原因在于各命题的内在联系没有表示出来。

为了克服命题逻辑的局限性，应该将原子命题再细分，分析出个体词、谓词和量词，以便达到表达出命题的内在联系和命题之间的逻辑关系。这就是一阶逻辑所研究的内容。

§ 4.1 一阶逻辑命题符号化

一、谓词逻辑命题符号化的三个基本要素：个体词、谓词、量词。

1. 个体词：研究对象中可以独立存在的具体的或抽象的客体。

例如：小王，小张，马列主义，3，北京等都可做为个体词。

注：(1) 表示具体或特定客体的个体词称为个体常项，一般用小写字母$a, b, c, \ldots$ 表示；

(2)表示抽象或泛指的个体词称为个体变项，一般用小写字母$x, y, z, \ldots$ 表示。

个体变项的取值范围称为个体域 (或论域)。个体域可以是有限集合，如$\{1,2,3\}$或$\{a, b, c\}$，也可以是无限集合，如自然数集合N或实数集合R。由宇宙间一切事物组成的个体域称为全总个体域。

谓词

2．**谓词：**用来刻划个体词的**性质**或个体词之间**相互关系**的词。

例如：① 在命题“$\sqrt{2}$ 是无理数”中，“…是无理数”是谓词。

② 在命题“x 是有理数”中，“…是有理数”是谓词。

③ 在命题“小王与小李同岁”中，“…与…同岁”是谓词。

④ 在命题“x与y具有关系L”中，“…与…具有关系L”是谓词。

注: (1) 常用大写字母F,G,H 等来表示谓词。

(2) 表示**具体**性质或关系的谓词称为**谓词常项**;

表示**抽象或泛指**的性质或关系的谓词称为**谓词变项**。

(3) $F(a)$：表示个体常项a具有性质F (F是谓词常项或变项);

$F(x)$：表示个体变项x具有性质F (F同上);

$F(a,b)$：表示个体常项a、b具有关系F (同上);

$F(x,y)$：表示个体变项 x, y具有关系F (同上) 。

一般地, 用$P(x_1,x_2,\ldots,x_n)$表示含$n(n\geq 1)$个命题变项$x_1,x_2,\ldots,x_n$ 的n元谓词。

它可看成以个体域为定义域,以{0,1}为值域的n元函数关系.

当P取常项,且$(x_1,x_2,\ldots,x_n)$取定常项$(a_1,a_2,\ldots,a_n)$时, $P(a_1,a_2,\ldots,a_n)$是一个命题.

谓词

(4) 不含个体变项的谓词称为0元谓词。

例如 $F(a)$, $G(a,b)$, $P(a_1,a_2,\ldots,a_n)$等。当F, G, P等为谓词常项时，0元谓词即为命题。因此，命题可看作特殊的谓词。

例4.1 用0元谓词将下列命题符号化，并讨论它们的真值。

(1) 只有当2是素数时，4才是素数；

(2) 如果5大于4，则4大于6。

解：(1) 设一元谓词$F(x)$: x是素数；个体常项：a: 2；b: 4。

则命题可符号化：$F(b)\rightarrow F(a)$.

因为该蕴含式前件为假，故命题为真。

(2) 设二元谓词$G(x,y)$: x大于y。个体常项：a: 4；b: 5；c: 6。

则命题可符号化为：$G(b,a)\rightarrow G(a,c)$。

由于$G(b,a)$为真，而$G(a,c)$为假，故命题为假。

谓词

有了个体词和谓词的概念之后，有些命题还是不能准确地符号化。

以前面所讨论的三段论为例：

令：$P(x)$：x是偶数。　$S(x)$：x能被2整除。

a：6。

符号化为：(1)$P(x)\rightarrow S(x)$　(2)$P(a)$　(3)$S(a)$

我们知道，“凡偶数都能被2整除。”是一个真命题，

而“$P(x)\rightarrow S(x)$”是一个一元函数，不是一个命题。原因是“$P(x)\rightarrow S(x)$”没有把命题(1)中“凡”的意思表示出来。

即缺少表示个体常项或变项的数量关系的词。所以还要引入量词的概念。

量词

3.量词: 表示个体常项或变项之间数量关系的词。

量词只有两个：**全称量词、存在量词**。

(1) 全称量词： 表示“全部”含义的词。全称量词统一符号化为“∀”。

注：*a*. 常用语中“全部”、“所有的”、“一切”、“每一个”、“任何”、

“任意的”、“凡”、“都”等词都是全称量词。

b. $\forall x\, F(x)$表示个体域里所有个体都有性质*F*.

(2) 存在量词： 表示“存在”含义的词。存在量词统一符号化为“∃”。

注：*a*. 常用词中“存在”、“有一个”、“有的”、“至少有一个”等词都

是存在量词。

b . $\exists x\, F(x)$表示个体域中存在个体具有性质 *F*。

例：**凡偶数都能被2整除。**

可符号化为：$\forall x(P(x)\rightarrow S(x))$是真命题，其中$x$不再起变元的作用，它被全称量词$x$限制住了，这时我们称$x$被量化了。

一阶逻辑中命题符号化问题

例4.2-1 在个体域为人类集合将下面两个命题符号化：

(1) 凡是人都要呼吸； (2) 有的人用左手写字。

解：令 F(x)：x 呼吸；G(x): x 用左手写字。则

(1) $\forall x\, F(x)$； (2) $\exists x\, G(x)$。

例4.2-2 上例中，将个体域改为全总个体域后，两命题的符号化形式如何？

解：令 F(x): x呼吸；G(x): x用左手写字；M(x): x是人。

则：(1) $\forall x\, (M(x) \rightarrow F(x))$； (2) $\exists x\, (M(x) \land G(x))$.

特性谓词：从全总个体域中分离出一个集合，定义的谓词。

由上面例子可见：

（1）在不同个体域中，同一个命题的符号化形式可能不同。

一般地，对全称量词，特性谓词应作为蕴含式的前件。

一般地，对存在量词，特性谓词应作为合取式的一项。

（2）同一个命题，在不同个体域中的真值也可能不同。

如果问题中没有指明个体域时，默认为全总体域。

一阶逻辑中命题符号化问题

(3) 当F是谓词常项时，$\forall xF(x)$是个命题，如果把个体域中的任何一个个体a代入，$F(a)$都为真，则$\forall xF(x)$为真；否则$\forall xF(x)$为假。

(4) 当F是谓词常项时，$\exists xF(x)$是个命题，如果个体域中存在一个个体a使$F(a)$为真，则$\exists xF(x)$为真；否则$\exists xF(x)$为假。

例4.3 在个体域限制为（a）和（b）条件时，将下列命题符号化，并给出它们的真值。

（2） 对于任意的x,均有$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$

（2） 存在x,使得$x+5=3$

其中（a）个体域为$D_1=N$　（b）个体域为$D_2=R$

解令F(x)： $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$，G(x)： $x+5=3$，

则可符号化为（1） $\forall xF(x)$，（2） $\exists xG(x)$ 。

一阶逻辑中命题符号化问题

例4.4 将下列命题符号化，并讨论其真值。

(1) 所有的人都长着黑头发；(2) 有的人登上过月球；

(3) 没有人登上过木星；(4) 在美国留学的学生未必都是亚洲人。

解：令 M(x)：x 为人。

(1) 令F(x)：x长着黑头发。则

$\forall x\,(M(x)\rightarrow F(x))$。 命题为假。

(2) 令G(x)：x登上过月球。则

$\exists x\,(M(x)\wedge G(x))$。 命题为真。

(3) 令H(x)：x登上过木星。则

$\neg\exists x\,(M(x)\wedge H(x))$。 命题为真。

(4) 令F(x)：x是在美国留学的学生；G(x)：x是亚洲人。则

$\neg\forall x\,(F(x)\rightarrow G(x))$。 命题为真。

二、n 元谓词(n≥2)的符号化

例4.5 将下列命题符号化

(1) 兔子比乌龟跑得快；

(2) 有的兔子比所有的乌龟跑得快；

(3) 并不是所有的兔子都比乌龟跑得快；

(4) 不存在跑得同样快的两只兔子。

解：令F(x): x是兔子；G(y): y是乌龟；

H(x,y): x比y跑得快; L(x,y): x与 y跑得同样快。则：

(1) $\forall x \forall y\, (F(x) \wedge G(y) \rightarrow H(x,y))$;

(2) $\exists x\, (F(x) \wedge \forall y\, (G(y) \rightarrow H(x,y)))$;

(3) $\neg \forall x \forall y\, (F(x) \wedge G(y) \rightarrow H(x,y))$;

(4) $\neg \exists x\, \exists y\, (F(x) \wedge F(y) \wedge L(x,y))$.

注：

1.分析命题中表示性质和关系的谓词，分别符号化为一元和n元谓词 (n≥2)。

2. 根据命题的实际意义选用全称量词或存在量词。

3. 一般来说，多个量词在一起时，其顺序不能随意调换。

例如：“对任意x，都存在y，使x+y=10”这一命题，可符号化为

$\forall x \exists y H(x,y)$，($H(x,y)$：$x+y=10$)，它不能改写为 $\exists y \forall x H(x,y)$。

4. 有些命题的符号化形式不唯一。

例如例4.5中的 (3) 还可符号化为$\exists x \exists y(F(x) \land G(y) \land \neg H(x,y))$；(4) 还可符号化为$\forall x \forall y(F(x) \land F(y) \to \neg L(x,y))$.

§ 4.2一阶逻辑公式及解释

非逻辑符号：个体词常项符号、函数符号和谓词符号

逻辑符号：个体词变项符号、量词符号、联结词符号和括号与逗号

定义4.1 设L是一个非逻辑符号，由L生成的一阶语言$\mathcal{L}$的字母表包括下述符号如下：

非逻辑符号

(1) L中的个体常项符号：$a, b, c, \ldots; \ a_i, b_i, c_i, \ldots, i \geq 1$

(2) L中的函数符号：$f, g, h, \ldots; \ f_i, g_i, h_i, \ldots, i \geq 1$

(3) L中的谓词符号：$F, G, H, \ldots; F_i, G_i, H_i, \ldots, i \geq 1$

逻辑符号

(4) 个体变项符号：$x, y, z, \ldots; \ x_i, y_i, z_i, \ldots, \ i \geq 1$

(5) 量词符号： $\forall$，$\exists$.

(6) 联结词符号：$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$.

(7) 逗号与括号： ，，( ) .

项与原子公式

定义 4.2 一阶语言$\mathcal{L}$的项定义如下：

(1) 个体常项符号和个体变项符号是项；

(2) 若 φ $(x_1, x_2,\dots,x_n)$ 是n元函数符号，$t_1,t_2,\dots,t_n$ 是n个项，则 φ $(t_1,t_2,\dots,t_n)$是项.

(3) 所有的项都是有限次使用(1)、(2)得到的。

定义4.3 设$R(x_1,x_2,\dots,x_n)$是一阶语言$\mathcal{L}$中的n元谓词符号。$t_1,t_2,\dots,t_n$ 是$\mathcal{L}$的n个项，则称 $R(t_1,t_2,\dots,t_n)$是$\mathcal{F}$的原子公式。

如例4.5 中的一元谓词F(x)，G(y)；二元谓词H(x,y)，L(x,y)都是原子公式

合式公式

定义4.4 一阶语言$\mathcal{L}$ 中的**合式公式** (也称为谓词公式或公式) 定义如下：

(1) 原子公式是合式公式；

(2) 若A是合式公式，则 $(\neg A)$也是合式公式；

(3) 若A, B 是合式公式，则$(A\wedge B)$, $(A\vee B)$, $(A\rightarrow B)$, $(A\leftrightarrow B)$也是合式公式；

(4) 若A是合式公式，则 $\forall xA$, $\exists xA$也是合式公式；

(5) 只有有限次应用 (1)~(4) 构成的符号串才是合式公式。

定义4.5 在公式 $\forall xA$ 和 $\exists xA$中，称 x 为**指导变元**，A为相应量词的**辖域**。在$\forall x$ 和 $\exists x$ 的辖域中，x的所有出现都称为**约束出现**，A中不是约束出现的其它变项都称为**自由出现** 。

辖域

例4.6 指出下列公式中的指导变元，各量词的辖域，自由出现和约束出现的个体变项：

(1) $\forall x(F(x,y) \rightarrow G(x,z))$; (4.22)

(2) $\forall x(F(x) \rightarrow G(y)) \rightarrow \exists y(H(x) \land L(x,y,z))$. (4.23)

解：(1) 指导变元：x； 量词$\forall$的辖域：$A=(F(x,y) \rightarrow G(x,z))$;

在A 中，x是约束出现；y, z是自由出现。

(2) 前件量词$\forall$的指导变元：x；后件量词$\exists$的指导变元：y.

量词$\forall$的辖域: $(F(x)\rightarrow G(y))$, 其中x是约束出现， y 是自由出现。

量词$\exists$的辖域: $(H(x)\land L(x,y,z))$, 其中 y是约束出现，而x, z 是自由出现。

闭式

定义4.6 设A是任意的公式，若A中不含自由出现的个体变项，则称A为封闭的公式，简称闭式。

例如：$\forall x\exists y\, H(x,y)$，$\forall x\forall y(F(x)\wedge F(y)\rightarrow\neg L(x,y))$,

$\forall x(F(x)\rightarrow G(x))\wedge F(a)\rightarrow G(a)$ 都是闭式。

例4.7 将下列两个公式中的变项指定为常项使其成为命题：

(1) $\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$ (4.25)

(2) $\forall x\forall y(F(x)\wedge F(y)\wedge G(x,y)\rightarrow H(f(x,y),g(x,y)))$ (4.26)

解(1)

个体域	$F(x)$	$G(x)$	命题	真值
全总	x是人	x是黄种人	所有人都是黄种人。	0
实数	x是自然数	x是整数	所有自然数都是整数。	1

(2) (4.26)式含两个2元函数变项，一个1元谓词变项，两个2元谓词变项。

个体域	$F(x)$	$G(x, y)$	$H(x, y)$	$f(x, y)$	$g(x, y)$
全总	x是实数	$x\neq y$	$x>y$	x^2+y^2	$2xy$

命题：对于任意的x，y，若x与y都是实数且$x\neq y$，则$x^2+y^2>2xy$.

真值为真。

解释

在例4.7中对各种变项的指定也称为对它们的解释。这里是先给出公式再对它们进行解释，

也可以先给出解释，再去解释各种公式。

定义4.7 对公式A指定其中个体域的范围，并指定其中谓词的具体含义使其成为命题，称为对公式A的一个解释。

设$\mathcal{L}$是由L生成的一阶语言，$\mathcal{L}$的解释 I 由下面4部分组成：

(a) 非空个体域 D_I;

(b) 对每一个个体常项符号a∈L,有一个$\bar{a}$∈D_I,称$\bar{a}$为a在I中的解释；

(c) 对每一个n元函数符号f∈L ,有一个 D_I上的n元函数$\bar{f}$，称$\bar{f}$为f在I中的解释；

(d) 对每一个n元谓词符号F∈L ,有一个 D_I上的n元谓词$\bar{F}$，称$\bar{F}$为f在I中的解释。

解释

例 4.8 给定解释 I 如下：

(a) 个体域 D= 自然数集合N

(b) $\bar{a}=0$

(c) $\bar{g}(x,y)=x\cdot y$，$\bar{f}(x,y)=x+y$

(d) $\bar{F}(x,y): \quad x=y$

在解释I 之下，下列公式哪些为真？哪些为假？哪些真值不能确定？

(1) $F(f(x,y), g(x,y))$;

解：公式解释为:“$x+y=x\cdot y$”，不是命题;真值不确定

(2) $F(f(x,a), y) \rightarrow F(g(x, y),z)$;

解: 公式解释为: “$(x+0=y) \rightarrow (x\cdot y=z)$”，不是命题;真值不确定

(3) $\neg F(g(x,y), g(y,z))$;

解：公式解释为: “$x\cdot y\neq y\cdot z$”，不是命题;真值不确定

解释

(4) $\forall x F(g(x, y), z)$;

解:公式解释为: “$\forall x\,(x\cdot y \neq y\cdot z)$”, 不是命题;真值不确定

(5) $\forall x\, F(g(x, a),x)$;

解:公式解释为: “$\forall x\,(x\cdot 0=x)$”, 假命题;

(6) $\forall x\, F(g(x, a),x) \rightarrow F(x,y)$;

解:公式解释为: “$\forall x\,(x\cdot 0 = x)\rightarrow(x=y)$”, 真命题 (前件为假);

(7) $\forall x\forall y(F(f(x,a),y)\rightarrow F(f(y,a), x))$;

解:公式解释为: “$\forall x\forall y\,((x+0=y)\rightarrow(y+0=x))$”, 真命题;

(8) $\forall x\forall y\exists z\, F(f(x,y),z)$;

解:公式解释为: “$\forall x\forall y\exists z(x+y=z)$”, 真命题;

(9) $\exists x\, F(f(x,x),g(x,x))$;

解:公式解释为: “$\exists x(x+x = x\cdot x)$, 真命题.

公式类型

定理 4.1 闭式在任何解释下都可变成命题。

(证明略)

定义4.8 设A为一个公式，若A在任何解释下均为真，则称A为永真式(或逻辑有效式)；

若A在任何解释下均为假，则称A为永假式(或逻辑矛盾式)；

若至少存在一个解释使A为真，则称A为可满足式。

定义4.9 设A_0 是含命题变项p_1 , p_2,…, p_n 的命题公式，A_1, A_2 , … , A_n 是n个谓词公式。用A_i (1≤i≤n）处处代替A_0 中的p_i, 所得公式A 称为A_0 的代换实例。

例如： $F(x)\rightarrow G(x)$, $\forall x\, F(x) \rightarrow \exists y\, G(y)$ 等都是$p\rightarrow q$的代换实例。

定理4.2 重言式的代换实例都是永真式，矛盾式的代换实例都是矛盾式。

公式类型

例4.9 判断下列公式中，哪些是永真式，哪些是永假式？

(1) $\forall x\,(F(x) \to G(x))$;　　(3) $\forall x\, F(x) \to (\exists x\, \exists y\, G(x,y) \to \forall x\, F(x))$;

(1) $\exists x\,(F(x) \wedge G(x))$;　　(4) $\neg(\forall x\, F(x) \to \exists y\, G(y)) \wedge \exists y\, G(y)$.

解：用A, B, C , D分别代表(1)、(2)、(3) 、(4)中的公式。

(1)　取解释：个体域 I_1为实数域；　F(x): x是实数；G(x): x是有理数。

在I_1下A为真, 故A不是矛盾式。

再取解释：个体域 I_2为实数域；F(x): x是无理数；G(x): x 能表示成分数。

在I_2下A为假。故公式A是可满足式但不是永真式。

(2)公式B是非永真的可满足式。

(3)易知C是命题公式$p \to (q \to p)$的代换实例，而该命题公式是重言式，

故公式C 是永真式。

(4) D是命题公式$\neg(p \to q) \wedge q$的代换实例，而该命题公式为矛盾式，

故公式D是矛盾式。

公式类型

例4.10 判断下列公式的类型：

(1) $\forall x\, F(x) \rightarrow \exists x\, F(x)$； （2）$\forall x \exists y F(x,y) \rightarrow \exists x \forall y\, F(x,y)$;

(3) $\exists x\, (F(x) \wedge G(x)) \rightarrow \forall y\, G(y)$。

解： 记三式中的公式分别为A, B, C。

(1) 设I为任一解释，个体域为D。若存在$x_0 \in D$，使$F(x_0)$为假，

则$\forall x F(x)$为假，所以A的前件为假， 故A为真。从而公式A为真。

由 I 的任意性知, A是永真式。

(2) 取解释I, 个体域为自然数集合N，$F(x,y)$为$x \leq y$, 在 I 下 B的前件与后件均为真， 故B为真，这说明 B不是矛盾式。

另取解释 I_1, 个体域为自然数集合N, $F(x,y)$为 $x=y$, 在 I_1下，B的前件真而后件假，故B为假。这又说明 B不是永真式。从而 B是非永真的可满足式。

(3) C也是非永真的可满足式。