离散数学

Discrete Mathematics

第五章

一阶逻辑等值演算与推理

- 5.1 一阶逻辑等值式与置换规则
- 5.2一阶逻辑的前束范式
- 5.3一阶逻辑的推理理论

§ 5.1 一阶逻辑等值式与置换规则

在一阶逻辑中，有些命题可以有不同的符号化形式。

如：没有不犯错误的人。

令：F(x):x是人。G(x):x犯错误。

有如下两种不同的符号化形式：

(1) $\neg \exists x(F(x) \land \neg G(x))$

(2) $\forall x(F(x) \rightarrow G(x))$

(1),(2)都等价于原命题， 是正确的，我们称(1)与(2)是等值的。

一、等值式

定义5.1 设A, B是一阶逻辑中任意两个公式，若 $A \leftrightarrow B$是永真式，

则称A与B是等值的，记做$A \Leftrightarrow B$ 。并称它为等值式。

注：判断公式A与B是否等值，等价于判断公式$A \leftrightarrow B$是否为永真式。

这个问题目前尚没有一般的解决方法。但是，人们已经证明了一些重要的等值式。

利用这些等值式和推演规则，可以推演出更多的等值式。

二、基本等值式

第一组：第二章中的16组等值式模式的代换实例都是一阶逻辑的等值式。如

$$\forall xF(x) \Leftrightarrow \neg\neg\forall xF(x)$$

$$\forall x\exists y(F(x,y)\rightarrow G(x,y)) \Leftrightarrow \neg\neg\forall x\exists y(F(x,y)\rightarrow G(x,y))$$

$$F(x)\rightarrow G(y) \Leftrightarrow \neg F(x)\vee G(y)$$

$$\forall x(F(x)\rightarrow G(y))\rightarrow\exists z H(z) \Leftrightarrow \neg\forall x(F(x)\rightarrow G(y))\vee\exists z H(z)$$

$$\exists x F(x) \Leftrightarrow \exists x F(x)\vee\exists x F(x)$$

$$\forall x F(x)\vee\neg\forall x F(x) \Leftrightarrow 1$$

$\exists x F(x)\wedge\neg\exists x F(x) \Leftrightarrow 0$ 等。

第二组：一阶逻辑特有的基本等值式

1. 消去量词等值式：设个体域为$D=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$，则

$$\begin{aligned}&(1)\ \forall xA(x) \Leftrightarrow A(a_1)\wedge A(a2)\wedge\ldots\wedge A(a_n);\\&(2)\ \exists xA(x) \Leftrightarrow A(a_1)\vee A(a_2)\vee\ldots\vee A(a_n).\end{aligned}\qquad(5.1)$$

2. 量词否定等值式： 设$A(x)$含自由出现个体变项x，则

$$(1)\ \neg\forall x A(x) \Leftrightarrow \exists x \neg A(x)；\qquad (5.2)$$

$$(2)\ \neg\exists x A(x) \Leftrightarrow \forall x \neg A(x)。$$

对(1)式：“不是所有的x都有性质A”与“存在x没有性质A”是一回事。

如：“所有的自然数都是偶数。”是假命题，

其否定为 “不是所有的自然数都是偶数。”

或“至少存在一个自然数不是偶数。” 是真命题。

令$F(x)$：x是偶数。个体域$D=N$。

“所有的自然数都是偶数。” 符号化为$\forall x F(x)$，真值为0 .

其否定式为$\neg\forall x F(x)$，真值为1 .

而“所有的自然数都是偶数。”的否定“至少存在一个自然数不是偶数。”符号化为 $\exists x \neg F(x)$。

故 $\neg\forall x F(x) \Leftrightarrow \exists x \neg F(x)$；

而$\forall x \neg F(x)$ 意为“所有的自然数都不是偶数。”仍是假命题，故

$$\neg\forall x F(x) \not\Leftrightarrow \forall x \neg F(x)$$

基本等值式

对于(1)的证明：在有限个体域D，可利用削去量词等值式展开证明。

在无穷个体域D，设$\neg\forall xA(x)$为真，则$\forall xA(x)$为假。

根据全称量词的定义，

至少存在一个个体a，使$A(a)$为假，或$\neg A(a)$为真，

所以，$\exists x\neg A(x)$为真。

对(2)式：$\neg\exists xA(x)\Leftrightarrow\forall x\neg A(x)$。

“不存在有性质A的x。”与“所有x都没有性质A。”是一回事。

设“不存在有性质A的x。”($\neg\exists xA(x)$)是真命题，

我们看：“存在x没有性质A。”($\exists x\neg A(x)$)也是真命题，

是不是有 $\neg\exists xA(x)\Leftrightarrow\exists x\neg A(x)$。

答案是否定的，因为反过来不成立。

设“存在x没有性质A。”是真命题，推不出

“所有x都没有性质A。”也是真命题。

故只有 $\neg\exists xA(x) \Rightarrow \exists x\neg A(x)$

基本等值式

3. 量词辖域收缩与扩张等值式：

设$A(x)$含自由出现的个体变项x， B中不含x的出现，则

(1) $\forall x(A(x)\vee B) \Leftrightarrow \forall x\, A(x)\vee B$　　$\forall x(A(x)\wedge B) \Leftrightarrow \forall x\, A(x)\wedge B$

$\forall x(A(x)\rightarrow B) \Leftrightarrow \exists x\, A(x)\rightarrow B$　　$\forall x(B\rightarrow A(x)) \Leftrightarrow B\rightarrow\forall x\, A(x)$

(5.3)

(2) $\exists x(A(x)\vee B) \Leftrightarrow \exists x\, A(x)\vee B$　　$\exists x(A(x)\wedge B) \Leftrightarrow \exists x\, A(x)\wedge B$

$\exists x(A(x)\rightarrow B) \Leftrightarrow \forall x\, A(x)\rightarrow B$　　$\exists x(B\rightarrow A(x)) \Leftrightarrow B\rightarrow\exists x\, A(x)$

(5.4)

4. 量词分配等值式：

设$A(x)$,$B(x)$含自由出现的个体变项x，则

(1) $\forall x(A(x)\wedge B(x)) \Leftrightarrow \forall xA(x)\wedge\forall xB(x)$

(2) $\exists x(A(x)\vee B(x)) \Leftrightarrow \exists xA(x)\vee\exists xB(x)$　　(5.5)

三、一阶逻辑的等值演算规则

1.置换规则：设$\Phi(A)$是含公式A的公式，$\Phi(B)$是用公式B取代 $\Phi(A)$中所有A之后所得的公式。若$A \Leftrightarrow B$，则$\Phi(A) \Leftrightarrow \Phi(B)$。

2.换名规则：设A为一公式，将A中某量词辖域中一个约束变项的所有出现及相应的指导变元，改为该量词辖域中未曾出现过的某个体变项符号，公式中其余部分不变，所得公式记为A'，则$A \Leftrightarrow A'$。

3.代替规则：设A为一公式，将A中某自由出现的个体变项的所有出现用A中未曾出现过的个体变项符号代替，其余部分不变，所得公式记为 A', 则$A \Leftrightarrow A'$。

例5.1 将下列公式化成与之等值的公式，使其没有既是约束出现的又是自由出现的个体变项。

(1) $\forall x\, F(x, y, z) \rightarrow \exists y\, G(x, y, z)$； (2) $\forall x(F(x, y) \rightarrow \exists y\, G(x, y, z))$

解：(1) $\forall x F(x, y, z) \rightarrow \exists y G(x, y, z)$

$\Leftrightarrow \forall t F(t, y, z) \rightarrow \exists y G(x, y, z)$ (换名规则)

$\Leftrightarrow \forall t\, F(t, y, z) \rightarrow \exists w\, G(x, w, z)$ (换名规则)

或：$\forall x\, F(x, y, z) \rightarrow \exists y\, G(x, y, z)$

$\Leftrightarrow \forall x\, F(x, t, z) \rightarrow \exists y\, G(x, y, z)$ (代替规则)

$\Leftrightarrow \forall x\, F(x, t, z) \rightarrow \exists y\, G(w, y, z)$ (代替规则)

(2) $\forall x(F(x, y) \rightarrow \exists y\, G(x, y, z))$

$\Leftrightarrow \forall x\, (F(x, y) \rightarrow \exists t\, G(x, t, z))$ (代替规则)

或：$\forall x(F(x, y) \rightarrow \exists y\, G(x, y, z))$

$\Leftrightarrow \forall x(F(x, t) \rightarrow \exists y\, G(x, y, z))$ (换名规则)

例 5.2 证明：

(1) $\forall x\,(A(x)\vee B(x)) \not\Leftrightarrow \forall x\,A(x)\vee\forall x\,B(x)$

(2) $\exists x\,(A(x)\wedge B(x)) \not\Leftrightarrow \exists x\,A(x)\wedge\exists x\,B\,(x)$

证明（1）我们来证$\forall x\,(A(x)\vee B(x)) \leftrightarrow \forall x\ A(x)\vee\forall x\ B(x)$ 不是永真式。

为此，取解释 I：个体域为自然数集N，F(x)：x是奇数，G(x): x是偶数。并分别用F(x)和G(x)代替A(x)和B(x)。则

$\forall x\,(F(x)\vee G(x))$ 为真命题，而$\forall x\ F(x)\vee\forall x\ G(x)$ 是假命题。故该公式存在成假解释，不是永真式。

（2）可类似证明。

此例说明，“∀”对“∨”无分配律，“∃”对“∧”无分配律。

例5.3 设个体域为D={a, b, c}, 将下列公式中的量词消去:

(1) $\forall x\,(F(x)\rightarrow G(x))$; (2) $\forall x\,(F(x)\vee\exists y\,G(y))$; (3) $\exists x\forall y\,F(x,y)$

解:

(1) $\forall x(F(x)\rightarrow G(x)) \Leftrightarrow (F(a)\rightarrow G(a))\wedge(F(b)\rightarrow G(b))\wedge(F(c)\rightarrow G(c))$.

(2) $\forall x\,(F(x)\vee\exists y\,G(y))$

$\Leftrightarrow \forall x\,F(x)\vee\exists y\,G(y)$

$\Leftrightarrow (F(a)\wedge F(b)\wedge F(c))\vee(G(a)\vee G(b)\vee G(c))$.

(3) $\exists x\,\forall y\,F(x,y)$

$\Leftrightarrow \exists x\,(F(x,a)\wedge F(x,b)\wedge F(x,c))$

$\Leftrightarrow (F(a,a)\wedge F(a,b)\wedge F(a,c))\vee(F(b,a)\wedge F(b,b)\wedge F(b,c))$

$\vee(F(c,a)\wedge F(c,b)\wedge F(c,c))$.

例5.4 给定解释I 如下：

（a） 个体域D= {2,3}; （b） D中特定元素，$\bar{a}$=2;

（c） D上特定函数$\bar{f}(x)$ 为：$\bar{f}(2)=3, \bar{f}(3)=2$。

（d） D上特定谓词：

$\bar{G}(x,y)$: $\bar{G}(2,2)=\bar{G}(2,3)=\bar{G}(3,2)=1, \bar{G}(3,3)=0$;

$\bar{L}(x,y)$: $\bar{L}(2,2)= \bar{L}(3,3)=1, \bar{L}(2,3)= \bar{L}(3,2) =0$;

$\bar{F}(x)$：$\bar{F}(2)=0, \bar{F}(3)=1$

在I下求下列各式的真值。

(1) $\forall x(F(x)\land G(x,a))$;

解：设公式为A, 则

$A \Leftrightarrow (F(2)\land G(2,2))\land(F(3)\land G(3,2))$

$\Leftrightarrow(0\land 1)\land(1\land 1) \Leftrightarrow 0$

(2) $\exists x(F(f(x)) \land G(x,f(x)))$;

(3) $\forall x \exists y\, L(x,y)$; (4) $\exists y \forall x\, L(x,y)$

解：设以上公式分别为B, C, D

(2) $B \Leftrightarrow (F(f(2)) \land G(2,f(2))) \lor (F(f(3)) \land G(3,f(3)))$

$\Leftrightarrow (F(3) \land G(2,3)) \lor (F(2) \land G(3,2))$

$\Leftrightarrow (1 \land 1) \lor (0 \land 1)$

$\Leftrightarrow 1$

(3) $C \Leftrightarrow (L(2, 2) \lor L(2,3)) \land (L(3,2) \lor L(3,3))$

$\Leftrightarrow (1 \lor 0) \land (0 \lor 1) \Leftrightarrow 1$

(4) $D \Leftrightarrow (L(2,2) \land L(2,3)) \lor (L(3,2) \land L(3,3))$

$\Leftrightarrow (1 \land 0) \lor (0 \land 1) \Leftrightarrow 0$

例5.5 证明下列等值式

(1) $\neg\exists x(M(x)\wedge F(x))\Leftrightarrow\forall x(M(x)\rightarrow\neg F(x))$

(2) $\neg\forall x(F(x)\rightarrow G(x))\Leftrightarrow\exists x(F(x)\wedge\neg G(x))$

(3) $\neg\forall x\forall y(F(x)\wedge G(y)\rightarrow H(x,y))\Leftrightarrow$

$\exists x\exists y\,(F(x)\wedge G(y)\wedge\neg H(x,y))$

证: (1) $\neg\exists x(M(x)\wedge F(x))$

$\Leftrightarrow\forall x\neg(M(x)\wedge F(x))$ (量词否定等值式)

$\Leftrightarrow\forall x\,(\neg M(x)\vee\neg F(x))$ （德摩根律）

$\Leftrightarrow\forall x\,(M(x)\rightarrow\neg F(x))$ （蕴含等值式）

(2) $\neg\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$

$\Leftrightarrow \exists x \neg(F(x)\rightarrow G(x))$ (量词否定等值式)

$\Leftrightarrow \exists x \neg(\neg F(x)\vee G(x))$ （置换规则）

$\Leftrightarrow \exists x (F(x)\wedge\neg G(x))$ （置换规则）

(3) $\neg\forall x\forall y (F(x)\wedge G(y)\rightarrow H(x,y))$

$\Leftrightarrow \exists x \neg(\forall y(\neg(F(x)\wedge G(y))\vee H(x,y)))$

(量词否定等值式)

$\Leftrightarrow \exists x \exists y\neg(\neg(F(x)\wedge G(y))\vee H(x,y))$ (量词否定等值式)

$\Leftrightarrow \exists x \exists y((F(x)\wedge G(y))\wedge\neg H(x,y))$ (德摩根律）

§5.2 一阶逻辑的前束范式

在命题逻辑中，析取范式和合取范式是公式的两种不同的等值形式，在一阶逻辑中公式也有范式形式。

定义5.2 具有如下形式

$$Q_1x_1Q_2x_2\ldots Q_kx_kB$$

的一阶逻辑公式称为前束范式，其中Q_i（$1\leqslant i\leqslant k$）为$\forall$或$\exists$，B为不含量词的公式。

例如：$\forall x\forall y(F(x)\wedge G(y)\rightarrow H(x,y))$

$\forall x\forall y\exists z(F(x)\wedge G(y)\wedge H(x)\rightarrow L(x,y,z))$ 是前束范式

而

$\forall x(F(x)\rightarrow\exists y(G(y)\wedge H(x,y)))$

$\exists x(F(x)\wedge\forall y(G(y)\rightarrow H(x,y)))$ 不是前束范式

定理5.1 谓词逻辑中的任何公式都存在与之等值的前束范式。

证明: 略。

注:

1.虽然任何公式都有前束范式，但一般来说，一个公式的前束范式并不唯一。

2.前束范式的求法：利用上节所述的三条等值演算规则和基本等值式（上节所列的(5.2)~~(5.5)公式）。

例5.6 求下列公式的前束范式：

(1) $\forall x\, F(x) \land \neg \exists x\, G(x)$; (2) $\forall x\, F(x) \lor \neg \exists x\, G(x)$.

解：(1) $\forall x\, F(x) \land \neg \exists x\, G(x)$

$\Leftrightarrow \forall x\, F(x) \land \neg \exists y\, G(y)$ 换名规则

$\Leftrightarrow \forall x\, F(x) \land \forall y \neg G(y)$ 量词否定等值式(5.2-2)

$\Leftrightarrow \forall x(F(x) \land \forall y \neg G(y))$ 量词辖域扩张等值式(5.3-2)

$\Leftrightarrow \forall x \forall y\, (F(x) \land \neg G(y))$ 量词辖域扩张等值式(5.3-2)

或 $\forall x\, F(x) \land \neg \exists x\, G(x)$

$\Leftrightarrow \forall x\, F(x) \land \forall x \neg G(x)$ 量词否定等值式(5.2-2)

$\Leftrightarrow \forall x(F(x) \land \neg G(x))$ 量词分配等值式(5.5-1)

(2) $\forall x\, F(x) \lor \neg \exists x\, G(x)$

$\Leftrightarrow \forall x\, F(x) \lor \forall x \neg G(x)$ 量词否定等值式(5.2-2)

$\Leftrightarrow \forall x\, F(x) \lor \forall y \neg G(y)$ 换名规则

$\Leftrightarrow \forall x \forall y(F(x) \lor G(y))$ 量词辖域扩张等值式(5.3-1)

注：$\forall$只对$\land$有分配律，对$\lor$无分配律；$\exists$只对$\lor$有分配律，对$\land$无分配律。

例5.7 求下列各式的前束范式

(1) $\exists x\, F(x) \land \forall x\, G(x)$;　　(2) $\forall x\, F(x) \to \exists x\, G(x)$;

(3) $\exists x\, F(x) \to \forall x\, G(x)$;

解：(1) $\exists x\, F(x) \land \forall x\, G(x)$

$\Leftrightarrow \exists y\, F(y) \land \forall x\, G(x)$　　换名规则

$\Leftrightarrow \exists y \forall x (F(y) \land G(x))$　　量词辖域扩张等值式(5.3-2)(5.4-2)

(2) $\forall x\, F(x) \to \exists x\, G(x)$

$\Leftrightarrow \forall y\, F(y) \to \exists x\, G(x)$　　换名规则

$\Leftrightarrow \exists y (F(y) \to \exists x\, G(x))$　　量词辖域扩张等值式(5.3-3)

$\Leftrightarrow \exists y \exists x (F(y) \to G(x))$　　量词辖域扩张等值式(5.4-4)

(3) $\exists x\, F(x) \to \forall x\, G(x)$

$\Leftrightarrow \exists y\, F(y) \to \forall x\, G(x)$　　换名规则

$\Leftrightarrow \forall y\, (F(y) \to \forall x\, G(x))$　　量词辖域扩张等值式(5.4-3)

$\Leftrightarrow \forall y\, \forall x\, (F(y) \to G(x))$　　量词辖域扩张等值式(5.3-4)

例5.8 求下列各公式的前束范式

(1) $\forall x\, F(x,y) \rightarrow \exists y\, G(x,y)$

(2) $(\forall x_1 F(x_1,x_2) \rightarrow \exists x_2 G(x_2)) \rightarrow \forall x_1 H(x_1,x_2,x_3)$

思路： 要注意哪些个体变项是约束出现，哪些是自由出现。而且在求范式时，要保证它们约束和自由出现的身份与次数都不能改变，并且不能混淆。

解：(1) $\forall x\, F(x,y) \rightarrow \exists y\, G(x,y)$

$\Leftrightarrow \forall t\, F(t,y) \rightarrow \exists w\, G(x,w)$ 换名规则

$\Leftrightarrow \exists t\, (F(t,y) \rightarrow \exists w\, G(x,w))$ 量词辖域扩张等值式(5.3-3)

$\Leftrightarrow \exists t \exists w\, (F(t,y) \rightarrow G(x,w))$ 量词辖域扩张等值式(5.4-4)

或： $\forall x\, F(x,y) \rightarrow \exists y\, G(x,y)$

$\Leftrightarrow \forall x\, F(x,t) \rightarrow \exists y\, G(w,y)$ 代替规则

$\Leftrightarrow \exists x\, (F(x,t) \rightarrow \exists y\, G(w,y))$ 量词辖域扩张等值式(5.3-3)

$\Leftrightarrow \exists x \exists y\, (F(x,t) \rightarrow G(w,y))$ 量词辖域扩张等值式(5.4-4)

(2) $(\forall x_1 F(x_1,x_2) \rightarrow \exists x_2 G(x_2)) \rightarrow \forall x_1 H(x_1, x_2, x_3)$

$\Leftrightarrow (\forall x_4 F(x_4,x_2) \rightarrow \exists x_5 G(x_5)) \rightarrow \forall x_1 H(x_1,x_2,x_3)$ 换名规则

$\Leftrightarrow \exists x_4 (F(x_4,x_2) \rightarrow \exists x_5 G(x_5)) \rightarrow \forall x_1 H(x_1,x_2,x_3)$ 量词辖域扩张等值式

$\Leftrightarrow \exists x_4 \exists x_5 (F(x_4,x_2) \rightarrow G(x_5)) \rightarrow \forall x_1 H(x_1,x_2,x_3)$ 量词辖域扩张等值式

$\Leftrightarrow \forall x_4 \forall x_5 ((F(x_4,x_2) \rightarrow G(x_5)) \rightarrow \forall x_1 H(x_1,x_2,x_3))$ 量词辖域扩张等值式

$\Leftrightarrow \forall x_4 \forall x_5 \forall x_1 ((F(x_4,x_2) \rightarrow G(x_5)) \rightarrow H(x_1,x_2,x_3))$ 量词辖域扩张等值式

§ 5.3 一阶逻辑的推理理论

一、谓词逻辑推理的形式结构

从前提$A_1,A_2,\ldots A_k$出发推结论B的推理，其形式结构为蕴含式

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow B。$$

若该蕴含式为永真式，则称推理正确，否则称推理不正确。

二、谓词逻辑推理定律

第一组：**命题逻辑推理定律的代换实例**都是谓词逻辑的推理定律。

如：$\forall x\, F(x) \wedge \forall y\, G(y) \Rightarrow \forall x\, F(x)$

$$\forall x\, F(x) \Rightarrow \forall x\, F(x) \vee \exists y\, G(y)$$

$$\forall x\, F(x) \Rightarrow \neg\neg \forall x\, F(x)$$

$$\neg\neg \forall x\, F(x) \Rightarrow \forall x\, F(x)$$

等。

第二组：由基本等值式生成的推理定律。每个等值式可生成两个推理定律。

如：由量词否定等值式 $\neg\forall xA(x)\Leftrightarrow\exists x\neg A(x)$生成两个定律：

$$\neg\forall x\, A(x)\Rightarrow\exists x\neg A(x),$$

$$\exists x\neg A(x)\Rightarrow\neg\forall x\, A(x)$$

由量词辖域扩张等值式 $\forall x(A(x)\vee B)\Leftrightarrow\forall xA(x)\vee B$ 生成：

$$\forall x(A(x)\vee B)\Rightarrow\forall x\, A(x)\vee B\ ,$$

$$\forall xA(x)\vee B\Rightarrow\forall x(A(x)\vee B)$$

由量词分配等值式 $\forall x(A(x)\wedge B(x))\Leftrightarrow\forall xA(x)\wedge\forall xB(x)$ 生成：

$$\forall x(A(x)\wedge B(x))\Rightarrow\forall xA(x)\wedge\forall xB(x),$$

$$\forall xA(x)\wedge\forall xB(x)\Rightarrow\forall x(A(x)\wedge B(x))$$

等等。

第三组：其它重要推理定律。如：

(1) $\forall x\, A(x) \lor \forall x\, B(x) \Rightarrow \forall x(A(x) \lor B(x))$

(2) $\exists x(A(x) \land B(x)) \Rightarrow \exists x\, A(x) \land \exists x\, B(x)$

(3) $\forall x(A(x) \to B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \to \forall x\, B(x)$

(4) $\exists x(A(x) \to B(x)) \Rightarrow \exists x\, A(x) \to \exists x\, B(x)$

三、谓词逻辑推理规则

在谓词逻辑中，除了**命题逻辑中的推理规则**继续有效外，还有以下四条规则。设前提$\Gamma= \{A_1,A_2,\ldots,A_k\}$。

1. 全称量词消去规则（记为∀ -）：

$$\frac{\forall x\, A(x)}{\therefore\ A(y)} \quad \text{或} \quad \frac{\forall x\, A(x)}{\therefore\ A(c)}$$

其中x,y是个体变项符号，c是个体常项符号；

且在A中x不在$\forall y$和$\exists y$的辖域内自由出现。

例：取个体域为实数域，F(x, y): x>y, A(x)=∃y F(x,y), 则

$$\forall x A(x) \Rightarrow A(z)=\exists y\, F(z,y),$$

而不能 $\forall x\, A(x) \Rightarrow A(y)=\exists y\, F(y,y).$

三、谓词逻辑推理规则

2． 全称量词引入规则 (记为∀+)：

$$\frac{A(x)}{\therefore\ \forall x\, A(x)}$$

其中x是个体变项符号，且不在Γ的任何公式中自由出现。

3． 存在量词消去规则 (记为∃-)：

$$\frac{A(x)\rightarrow B}{\therefore\ \exists x A(x)\rightarrow B}$$

其中x是个体常项符号，且不在Γ的任何公式和B中自由出现。

三、谓词逻辑推理规则

CHAPTER FIVE

4. 存在量词引入规则 (记为∃+)：

$$\frac{A(y)}{\therefore\ \exists x A(x)} \quad \text{或} \quad \frac{B \to A(y)}{\therefore\ B \to \exists x A(x)}$$

$$\frac{A(c)}{\therefore\ \exists x A(x)} \quad \text{或} \quad \frac{B \to A(c)}{\therefore\ B \to \exists x A(x)}$$

其中x,y是个体变项符号, c是个体常项符号,

并且在A中y和 c分别不在$\exists x$和$\forall x$的辖域内自由出现和出现。

四、自然推理系统$\mathcal{N}_{\mathcal{L}}$

定义5.3 自然推理系统$\mathcal{N}_{\mathcal{L}}$下由如下要素构成。

1. **字母表**：见定义4.1
2. **合式公式**：见定义4.4
3. **推理规则**：

(1) 前提引入规则	(2) 结论引入规则
(3) 置换规则	(4) 假言推理规则
(5) 附加规则	(6) 化简规则
(7) 拒取式规则	(8) 假言三段论规则
(9) 析取三段论规则	(10) 构造性二难推理规则
(11) 合取引入规则	(12) ∀-规则
(13) ∀ +规则	(14) ∃+规则
(15) ∃ -规则	

其中规则 (1)~(11) 与命题逻辑中的推理规则相同。

四、自然推理系统N_L

例 前提P(x)→Q(x), P(x)推出结论∀ xQ(x)的证明。

① P(x)→Q(x)　　前提引入

② P(x)　　前提引入

③ Q(x)　　①②假言推理

④ ∀xQ(x)　　③∀+

取解释：个体域 I为整数集合；

P(x): x是偶数；Q(x): x被2整除。

在I下，P(x)→Q(x)为真, ∀xQ(x)为假,

而P(x)的真值不确定。

故上述推理是错误的。

例5.9在自然推理系统N_L中，构造下面推理的证明：

任何自然数都是整数，存在着自然数，所以存在着整数。个体域为实数集R。

解：先将原子命题符号化，

设$F(x)$：x为自然数，$G(x)$：x为整数

前提：$\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$，$\exists xF(x)$

结论：$\exists xG(x)$

证明：
① $\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$　　前提引入
② $F(x)\rightarrow G(x)$　　①∀-
③ $F(x)\rightarrow \exists xG(x)$　　②∃+
④ $\exists xF(x)\rightarrow \exists xG(x)$　　③∃-
⑤ $\exists xF(x)$　　前提引入
⑥ $\exists x\, G(x)$　　④⑤假言推理

例5.10 在自然推理系统$\mathcal{N}_{\mathcal{L}}$中，构造下面推理的证明：

前提：$\forall x\,(F(x)\rightarrow G(x))$，$\exists x(F(x)\land H(x))$

结论：$\exists x(G(x)\land H(x))$

证明：

① $\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$ 前提引入

② $F(x)\rightarrow G(x)$ ①$\forall$-

③ $F(x)\land H(x)\rightarrow F(x)$ 化简规则

④ $F(x)\land H(x)\rightarrow G(x)$ ③②假三

⑤ $F(x)\land H(x)\rightarrow H(x)$ 化简规则

⑥ $\neg(F(x)\land H(x))\lor G(x)$ ④置换

⑦ $\neg(F(x)\land H(x))\lor H(x)$ ⑤置换

⑧ $(\neg(F(x)\land H(x))\lor G(x))\land(\neg(F(x)\land H(x))\lor H(x))$ ⑥⑦合取引入

⑨ $(\neg(F(x)\land H(x))\lor(G(x)\land H(x))$ ⑧置换

⑩ $(F(x)\land H(x)\rightarrow G(x)\land H(x)$ ⑨置换

⑪ $(F(x)\land H(x)\rightarrow\exists x(G(x)\land H(x))$ ⑩$\exists$+

⑫ $\exists x(F(x)\land H(x))\rightarrow\exists x(G(x)\land H(x))$ ⑪$\exists$-

⑬ $\exists x(F(x)\land H(x))$ 前提引入

⑭ $\exists x(G(x)\land H(x))$ ⑫⑬假推

例5.11 在$\mathcal{N}_{\mathcal{L}}$中构造下面推理的证明 (个体域为实数集):

不存在能表示出分数的无理数，有理数都能表示成分数，因此，有理数都不是无理数。

解：设F(x): x为无理数；G(x): x为有理数；H(x)：x能表示成分数。

前提：$\neg\exists x(F(x)\wedge H(x))$, $\forall x(G(x)\rightarrow H(x))$

结论：$\forall x(G(x)\rightarrow\neg F(x))$

证明：

① $\neg\exists x(F(x)\wedge H(x))$	前提引入
② $\forall x(\neg F(x)\vee\neg H(x))$	①置换
③ $\forall x(F(x)\rightarrow\neg H(x))$	②置换
④ $F(x)\rightarrow\neg H(x)$	③ $\forall-$
⑤ $\forall x(G(x)\rightarrow H(x))$	前提引入
⑥ $G(x)\rightarrow H(x)$	⑤ $\forall-$
⑦ $H(x)\rightarrow\neg F(x)$	④置换
⑧ $G(x)\rightarrow\neg F(x)$	⑥⑦假言三段论
⑨ $\forall x(G(x)\rightarrow\neg F(x))$	⑧$\forall +$