

# Sur le théorème de Langton et ses généralisations

Yuenian ZHOU

## Résumé

En utilisant le complexe de Bruhat-Tits, S. G. Langton a démontré des critères valuatifs pour les fibrés vectoriels  $\mu$ -stable. V. B. Mehta et A. Ramanathan ont ensuite prouvé des résultats plus raffinés sur des fibrés vectoriels  $\chi$ -stable.

**Mots clés :** le théorème de Langton, la théorie des invariants géométriques, le sous-fibré  $\beta$ ,  $\chi$ -stabilité,  $\mu$ -stabilité.

## Table des matières

<b>1 Le théorème de Langton [Lan75]</b>	<b>1</b>
1.1 Énoncé du théorème de Langton . . . . .	1
1.2 $\chi$ -stabilité et $\mu$ -stabilité . . . . .	2
1.3 Sous-fibré $\beta$ . . . . .	2
1.4 Théorème de Langton 1. . . . .	4
1.5 La principale technologie : Le complexe de Bruhat-Tits . . . . .	5
1.6 Théorème de Langton 2. . . . .	7
<b>2 L'analogue de <math>\chi</math>-semi-stabilité pour le théorème de Langton [MR84]</b>	<b>10</b>
2.1 Énoncé de l'analogue . . . . .	10
2.2 Démonstration du Théorème (2.1.3) 1. . . . .	10
2.3 Le sous-fibré $\beta_{d-r}$ . . . . .	11
2.4 Démonstration du Théorème (2.1.3) 2. . . . .	11

## 1 Le théorème de Langton [Lan75]

### 1.1 Énoncé du théorème de Langton

(1.1.1) À partir de maintenant, nous supposons que le corps  $k$  est algébriquement clos. Soit  $R$  un anneau de valuation discrète avec un idéal maximal  $\mathfrak{m}$  généré par un paramètre uniformisant  $\pi$  et un corps résiduel  $k$ . Soit  $K$  le corps des fractions de  $R$ . Considérons le schéma  $X_R$ , un schéma irréductible lisse sur  $\text{Spec } R$ , avec une fibre générique  $X_K$  et une fibre fermée  $X_k$ . Soit  $i$  l'immersion ouverte  $X_K \hookrightarrow X_R$ , et  $j$  l'immersion fermée  $X_k \hookrightarrow X_R$ . Et soit  $\Xi$  le point générique de  $X_R$  et  $\xi$  le point générique de  $X_k$ .

**Théorème (1.1.2)** Soit  $E_K$  un faisceau sans torsion sur  $X_K$ . Alors

- Si  $E_1, E_2 \subseteq i_* E_K$  sont deux faisceaux cohérents sur  $X_R$  tels que  $i^* E_1 = i^* E_2 = E_K$  et que  $j^* E_1, j^* E_2$  sont des fibrés  $\mu$ -semi-stables sans torsion sur  $X_k$ , dont au moins l'un est  $\mu$ -stable, alors il existe un entier  $p$  tel que  $E_1 = \pi^p E_2$ .

2. Si  $E_k$  est  $\mu$ -semi-stable, alors il existe un sous-faisceau cohérent  $E \subseteq i_* E_K$  tel que  $i^* E = E_K$  et  $j^* E$  est sans torsion et  $\mu$ -semi-stable sur  $X_k$ .

**(1.1.3)** La partie (1) dit que deux extensions d'un faisceau sans torsion donné  $E_K$  sur la fibre générique (avec l'hypothèse de stabilité sur la fibre spéciale) diffèrent par une puissance de l'uniformisant. La partie (2) dit qu'une telle extension existe (encore une fois, avec l'hypothèse de stabilité sur la fibre spéciale).

## 1.2 $\chi$ -stabilité et $\mu$ -stabilité

**(1.2.1)** Soit  $X$  une variété projective lisse de dimension  $d$  sur un corps algébriquement clos  $k$ , et soit  $H$  un fibré en droites très ample. Soit  $E$  un fibré vectoriel sur  $X$ , on définit le polynôme de Hilbert  $\chi_E(n)$  comme étant le polynôme de Hilbert de  $E$ , où par définition  $\chi_E(n) = \chi [E \otimes H^n]$ . Soit  $c_1(E)$  la première classe de Chern de  $E$  et définissons

$$\mu(E) = \frac{c_1(E)H^{d-1}}{\text{rg} E}. \quad (1.1)$$

**Définition (1.2.2)** 1.  $E$  est dit être  $\mu$ -semi-stable (respectivement  $\mu$ -stable) si, pour tous les sous-fibrés propres  $F$  de  $E$ , on a

$$\mu(F) \leq \mu(E) \quad (\text{respectivement } \mu(F) < \mu(E)).$$

2.  $E$  est dit être  $\chi$ -semi-stable (respectivement  $\chi$ -stable) si, pour tous les sous-fibrés propres  $F$  de  $E$ , on a

$$\frac{\chi_F(n)}{\text{rg} F} \leq \frac{\chi_E(n)}{\text{rg} E} \quad \left( \text{respectivement } \frac{\chi_F(n)}{\text{rg} F} < \frac{\chi_E(n)}{\text{rg} E} \right)$$

pour tout  $n \gg 0$ .

**(1.2.3)** La formule de Hirzebruch-Riemann-Roch donne

$$\begin{aligned} \chi_E(n) = & \frac{\deg X \cdot \text{rg} E \cdot n^d}{d!} + \frac{(c_1(E) \cdot H^{d-1} + \frac{1}{2} \text{rg} E c_1(X) \cdot H^{d-1}) n^{d-1}}{d-1!} \\ & + \text{terms of lower degree in } n. \end{aligned}$$

## 1.3 Sous-fibré $\beta$

**Définition (1.3.1)** Soit  $E$  un fibré fixé de degré  $d$  et de rang  $r$ , et pour tout fibré  $F$  sur  $X$ , définissons

$$\beta(F) = r\deg F - d\text{rang } F.$$

**(1.3.2)** Il est clair que  $\beta(E) = \beta(0) = 0$  et que  $E$  est  $\mu$ -semi-stable si et seulement si  $\beta(F) \leq 0$  pour tous les sous-fibrés  $F \leq E$ .

**(1.3.3)** Si  $F, G \leq E$ , alors  $\beta(F) + \beta(G) \leq \beta(F \vee G) + \beta(F \cap G)$  en utilisant [Lan75, Proposition 2].

**(1.3.4)** Soit  $0 \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow K \rightarrow 0$  exacte, alors on a

$$\beta(G) = \beta(F) + \beta(K).$$

**(1.3.5)** Maintenant, supposons que  $E$  soit  $\mu$ -instable. Nous considérons les sous-fibrés propres  $F \subseteq E$  ayant la propriété suivante (A) :

(A) Soit  $G \subset F$  un sous-fibré strict de  $F$ , alors  $\beta(G) < \beta(F)$ .

De tels sous-fibrés existent dans  $E$ ; par exemple, tout sous-fibré  $F$  qui est minimal avec la propriété que  $\beta(F) > 0$  satisfait la propriété (A) car  $\beta(0) = 0$ . Remarquez également que tout  $F \subseteq E$  satisfaisant la propriété (A) a  $\beta(F) > 0$  car  $\beta(0) = 0$ .

**Lemme (1.3.6)** Soit  $F \subseteq E$  un sous-fibré maximal satisfaisant la propriété (A). Alors si  $G \supseteq F$  est un autre sous-fibré, nous avons  $\beta(G) \leq \beta(F)$ .

*Démonstration.* Sinon, prenons  $G$  comme étant le sous-fibré minimal tel que  $\beta(G) > \beta(F)$ . Il suffit de montrer que  $G$  satisfait la propriété (A) : prenons  $J \subset G$  comme étant un sous-fibré de  $G$ . Tout d'abord, supposons que  $F \subseteq J \subset G$ . Alors, par la minimalité de  $G$ , on a  $\beta(J) \leq \beta(F) < \beta(G)$ . D'autre part, si  $F \not\subseteq J$ , alors  $F \cap J \subset F$ , donc  $\beta(F \cap J) < \beta(F)$ , car  $F$  satisfait la propriété (A). En appliquant l'inégalité  $\beta(F \vee J) - \beta(J) \geq \beta(F) - \beta(F \cap J)$ , on déduit que  $\beta(F \vee J) > \beta(J)$ . Mais  $F \vee J \supseteq F$ ; donc, par le premier cas,  $\beta(F \vee J) \leq \beta(G)$ . (Ici, l'égalité se produit si et seulement si  $F \vee J = G$ .) Ainsi, on a  $\beta(G) \geq \beta(F \vee J) > \beta(J)$ . Par conséquent, nous avons montré que  $G$  satisfait la propriété (A), ce qui contredit la maximalité de  $F$ . Par conséquent,  $\beta(G) \leq \beta(F)$  pour tout  $G \supseteq F$ .  $\square$

**Lemme (1.3.7)** Avec la notation ci-dessus, si  $F'$  est un autre sous-fibré de  $E$  satisfaisant la propriété (A), alors  $F' \subseteq F$ .

*Démonstration.* Sinon,  $F' \cap F \subset F'$ . Appliquons l'inégalité  $\beta(F' \vee F) - \beta(F) \geq \beta(F') - \beta(F' \cap F)$ . Puisque  $\beta(F' \vee F) \leq \beta(F)$ , il en résulte que  $\beta(F') \leq \beta(F' \cap F)$  Lemme (1.3.6), ce qui contredit l'hypothèse selon laquelle  $F'$  satisfait la propriété (A).  $\square$

**Définition (1.3.8)** Par Lemme (1.3.7), Il existe un unique sous-fibré maximal satisfaisant la propriété (A). Nous désignerons généralement ce sous-fibré par  $B \subset E$  et l'appellerons le sous-fibré  $\beta$  de  $E$ .

**(1.3.9)** Pour un fibré  $E$  sur  $X$ , définissons les nombres rationnels  $h_i(E)$  par

$$\chi_E(n) = \sum_{i=0}^d h_i(E)n^i,$$

et pour tout sous-faisceau  $F$  de  $E$ , définissons les nombres  $\beta_i(F)$ , comme généralisation de (1.3.1), par

$$\beta_i(F) = h_i(F) \operatorname{rg} E - h_i(E) \operatorname{rg} F, \quad 0 \leq i \leq d.$$

Alors, on constate que  $E$  est  $\mu$ -semi-stable (respectivement  $\mu$ -stable) si et seulement si  $\beta_{d-1}(F) \leq 0$  (respectivement  $< 0$ ) pour tous les sous-faisceaux  $F$  de  $E$  par (1.2.3). De même,  $E$  est  $\chi$ -semi-stable (respectivement  $\chi$ -stable) si et seulement si, pour tous les sous-faisceaux  $F$  de  $E$ , les conditions  $\beta_d(F) = \dots = \beta_{d-r+1}(F) = 0$  impliquent  $\beta_{d-r}(F) \leq 0$  (respectivement  $< 0$ ) pour  $1 \leq r \leq d$ . Cela motive :

**Définition (1.3.10)** Nous disons qu'un fibré vectoriel  $E$  sur  $X$  satisfait  $P(r)$  (respectivement  $\bar{P}(r)$ ), pour  $1 \leq r \leq d$ , si, pour tous les sous-faisceaux  $F$  de  $E$  avec  $\beta_d(F) = \dots = \beta_{d-s+1}(F) = 0$ , nous avons  $\beta_{d-s}(F) \leq 0$  (respectivement  $\beta_{d-s}(F) < 0$ ), pour  $1 \leq s \leq r$ .

## 1.4 Théorème de Langton 1.

**Proposition (1.4.1)** Si  $E_1$  et  $E_2$  sont deux fibrés sur  $X_R$  tels que  $i^*E_1 = i^*E_2$ , alors  $\deg j^*E_1 = \deg j^*E_2$ .

*Démonstration.* Soit  $E$  un faisceau sans torsion de rang  $r$  sur  $X_R$ , alors en particulier  $E$  est plat sur  $\text{Spec } R$ , car les modules sans torsion sur les anneaux de valuation sont plats [Stacks, Tag 0539]. Étant donné que  $X$  est une variété projective et  $\text{Spec } R$  est un schéma connexe, en utilisant la semi-continuité [EGA3, 7.9.11] il s'ensuit que  $j^*E$  et  $i^*E$  ont le même polynôme de Hilbert. Ainsi, en utilisant la formule d'expansion pour le polynôme de Hilbert [Lan75] on obtient

$$\deg j^*E - \frac{r}{2} \deg K_k = \deg i^*E - \frac{r}{2} \deg K_K,$$

où  $K_k$  est la classe du diviseur canonique sur  $X_k$  et  $K_K$  est la classe du diviseur canonique sur  $X_K$ . En particulier, prenons  $E$  comme étant le faisceau des  $n$ -différentielles  $\Omega_{X/R}^n$ . Alors  $E$  se tire en arrière en un faisceau inversible correspondant à la classe du diviseur canonique sur  $X_k$  et  $X_K$  respectivement. Ainsi,  $(\deg K_k)/2 = (\deg K_K)/2$ . Il en découle que  $\deg j^*E = \deg i^*E$  pour tout faisceau sans torsion  $E$  sur  $X_R$ .  $\square$

**Proposition (1.4.2)** Soit  $E_K$  un faisceau sans torsion de rang  $r$  sur  $X_K$  et soit  $M \subseteq (E_K)_\Xi$  un sous-module libre de rang  $r$  sur  $\mathcal{O}_\xi$  de  $(E_K)_\Xi$  tel que  $M \otimes_{\mathcal{O}_\xi} \mathcal{O}_\Xi = (E_K)_\Xi$ . Alors il existe un unique faisceau cohérent sans torsion  $E \subseteq i_*E_K$  sur  $X_R$  tel que  $i^*E = E_K$ ,  $E_\xi = M$ , et  $j^*E$  est un faisceau sans torsion sur  $X_k$ .

*Démonstration.* Soit  $V \subseteq X_R$  un sous-ensemble affine ouvert, et soit  $V' = V \cap X_K$ . Définissons  $\tilde{E}(V)$  par

$$\tilde{E}(V) = \begin{cases} E_K(V), & \text{if } V \subseteq X_K \\ E_K(V') \cap M, & \text{if } V \cap X_k \neq \emptyset. \end{cases}$$

Ici, l'intersection a lieu dans  $(E_K)_\Xi$  puisque  $E_K(V')$  peut être considéré comme un sous-module de  $(E_K)_\Xi$ . Alors  $\tilde{E}$  est un préfaisceau défini sur les sous-ensembles affines ouverts de  $X_R$ , et il est facile de vérifier que  $\tilde{E}$  définit un faisceau quasi-cohérent  $E$  sur  $X_R$  qui coïncide avec  $\tilde{E}$  sur les sous-ensembles affines ouverts, et tel que  $i^*E = E_K$  et  $E_\xi = M$ .

Pour montrer que  $E$  est cohérent, soit  $V \subseteq X_R$  un sous-ensemble affine ouvert rencontrant  $X_k$ . Nous devons montrer que  $E(V)$  est un module fini sur  $\mathcal{O}_{X_R}(V)$ . Pour plus de détails, voir [Lan75].

Pour montrer que  $j^*E$  est sans torsion, soit  $U$  un sous-ensemble affine ouvert de  $X_k$ , et soit  $V = U \times \text{Spec } R$  le sous-ensemble affine ouvert correspondant de  $X_R$ . Nous devons montrer que  $j^*E(U) \subseteq (j^*E)_\xi$ , c'est-à-dire que  $E(V)/\pi E(V) \cong E_\xi/\pi E_\xi$ . Cela découle du fait que  $E(V) \cap \pi E_\xi = \pi E(V)$ . Mais cela est clair, car  $\pi E_K(V) = E_K(V')$ .

Enfin, nous devons vérifier l'unicité. Clairement, tout  $E'$  cohérent contenu dans  $i_*E_K$  tel que  $i^*E' = E_K$  et  $E'_\xi = M$  doit être contenu dans  $E$ . Écrivons  $0 \rightarrow E' \rightarrow E \rightarrow K \rightarrow 0$ , où  $K$  est le conoyau. En le ramenant à  $X_k$ , nous obtenons

$$0 \longrightarrow \text{Tor}_1(K, \mathcal{O}_{X_k}) \longrightarrow j^*E' \longrightarrow j^*E \longrightarrow j^*K \longrightarrow 0.$$

(Pour voir que  $\text{Tor}_1(E, \mathcal{O}_{X_k}) = 0$ , utilisez la résolution localement libre  $0 \rightarrow \pi \mathcal{O}_{X_R} \rightarrow \mathcal{O}_{X_R} \rightarrow \mathcal{O}_{X_k} \rightarrow 0$  de  $\mathcal{O}_{X_k}$  et  $E$  est sans-torsion.) Ensuite, il est clair que  $\text{Tor}_1(K, \mathcal{O}_{X_k})$  est un sous-module de torsion de  $j^*E'$ . Si  $K \neq 0$ , alors puisque  $\text{Supp } K \subseteq X_k$ , l'homomorphisme  $\pi \mathcal{O}_{X_R} \otimes K \rightarrow K$  n'est pas injectif et donc  $\text{Tor}_1(K, \mathcal{O}_{X_k}) \neq 0$ . Ainsi, si  $j^*E'$  est sans torsion, cela implique que  $E' = E$ .  $\square$

*Preuve du théorème : (1.1.2) (1).* Soient  $E_1, E_2 \subseteq i_*E_K$  tels que  $i^*E_1 = i^*E_2 = E_K$ , et que  $j^*E_1$  et  $j^*E_2$  soient sans torsion et stables sur  $X_k$ . Considérons les  $\mathcal{O}_\xi$ -modules  $E_{1,\xi}$  et  $E_{2,\xi}$ . Comme  $\mathcal{O}_\xi$  est un domaine principal (en fait un

DVR), ces modules sont libres de rang  $r$ , donc nous pouvons trouver une base  $\{e_1, \dots, e_r\}$  de  $E_{1,\xi}$  sur  $\mathcal{O}_\xi$  telle que  $\{\pi^{q_1} e_1, \dots, \pi^{q_r} e_r\}$  soit une base de  $E_{2,\xi}$ , pour des entiers  $q_i$  appropriés.

Comme nous essayons de prouver que  $E_1 = \pi^p E_2$  pour un certain  $p$ , nous pouvons multiplier  $E_{2,\xi}$  par  $\pi^m$ , si nécessaire, afin que tous les  $q_i$  soient  $\geq 0$ , et qu'au moins l'un des  $q_i = 0$ , disons  $q_j = 0$ . Si tous les  $q_i = 0$ , nous avons terminé; donc nous pouvons aussi supposer qu'un  $q_i$  est  $> 0$ , disons  $q_l > 0$ . Alors nous avons  $E_{2,\xi} \subseteq E_{1,\xi}$ . Ainsi  $E_2 \subseteq E_1$ , car si  $V$  est un sous-ensemble affine ouvert de  $X_R$  rencontrant  $X_k$ , nous avons  $E_2(V) = E_K(V') \cap E_{2,\xi} \subseteq E_K(V') \cap E_{1,\xi} = E_1(V)$ , où  $V' = V \cap X_K$ . Cette inclusion induit un homomorphisme  $\alpha : j^* E_2 \rightarrow j^* E_1$  de fibrés stables sur  $X_k$ .

Remarquez que  $j^* E_2$  et  $j^* E_1$  ont évidemment le même rang, et selon la Proposition (1.4.1), ils ont également le même degré. Maintenant,  $\alpha$  n'est pas un isomorphisme car l'élément  $\overline{\pi^q e_l} \in (j^* E_2)_\xi$  est dans le noyau de  $\alpha$ . (Ici,  $\overline{w}$  désigne l'image dans  $(j^* E_2)_\xi$  de l'élément  $w \in E_{2,\xi}$ ) Mais  $\alpha$  n'est pas non plus nul, car l'élément  $\overline{e_j} \in (j^* E_2)_\xi$  n'est pas dans le noyau. Cela contredit [Lan75, Proposition 4], qui dit que les homomorphismes entre des fibrés vectoriels  $\mu$ -semi-stables ayant le même rang et le même degré (dont au moins l'un est stable) ne peuvent être que 0 ou un isomorphisme en codimension 1. Par conséquent,  $E_1 = \pi^p E_2$  pour un certain  $p$ .

□

## 1.5 La principale technologie : Le complexe de Bruhat-Tits

(1.5.1) Soit  $\mathfrak{M}$  l'ensemble de tous les sous-modules libres de rang  $r$  de  $(E_K)_\Xi$  sur  $\mathcal{O}_\xi$ , donc tous les éléments  $\otimes_{\mathcal{O}_\xi} \mathcal{O}_\Xi$  sont  $(E_K)_\Xi$ . Introduisons une relation d'équivalence dans  $\mathfrak{M}$  par  $M \sim \pi^p M$  pour  $p \in \mathbb{Z}$ . Soit  $\mathcal{G}$  l'ensemble des classes d'équivalence dans  $\mathfrak{M}$ .

(1.5.2) Deux classes d'équivalence  $[M]$  et  $[M']$  sont dites adjacentes si  $M$  possède une base  $\{e_1, \dots, e_r\}$  sur  $\mathcal{O}_\xi$  telle que  $M' = (e_1, \dots, e_s, \pi e_{s+1}, \dots, \pi e_r)$ .

(1.5.3) Si  $0 \subset N_1 \subset N_2 \subset \dots \subset N_t \subset M$  forment une chaîne de sous-modules telle que chaque  $N_i$  est un facteur direct de  $M$ , alors les  $t+1$  sommets mutuellement adjacents  $[M]$ ,  $[M_1] = [N_1 + \pi M], \dots, [M_t] = [N_t + \pi M]$  sont dits former un  $t$ -simplexe dans  $\mathcal{G}$ . Cette définition transforme  $\mathfrak{M}$  en un complexe simplicial de dimension  $r$ . Les classes d'équivalence  $[M]$  seront appelées les sommets de  $\mathfrak{M}$ .

**Proposition (1.5.4)** Soit  $[E_\xi]$  un sommet de  $\mathcal{G}$ , avec le fibré correspondant  $\overline{E}$  sur  $X_k$ , alors il existe une correspondance naturelle bijective entre les arêtes dans  $\mathcal{G}$  au point  $[E_\xi]$  et les sous-faisceaux propres de  $\overline{E}$ . De plus, si  $\overline{F} \subseteq \overline{E}$  est un sous-faisceau, correspondant à l'arête  $[E_\xi] - [E'_\xi]$ , et si  $\overline{Q}' \subseteq \overline{E}'$  est le sous-faisceau de  $\overline{E}'$  correspondant à l'arête  $[E'_\xi] - [E_\xi]$  en  $[E'_\xi]$ , alors il existe un homomorphisme de faisceaux  $\overline{E}' \rightarrow \overline{E}$  avec le noyau  $\overline{Q}'$  et l'image  $\overline{F}$ , ainsi qu'un homomorphisme de faisceaux  $\overline{E} \rightarrow \overline{E}'$  avec le noyau  $\overline{F}$  et l'image  $\overline{Q}'$ .

*Démonstration.*

i. Construction de l'équivalence.

a. De l'arête au sous-faisceau propre.

Soit  $E_\xi = (e_1, \dots, e_r)$  représente un sommet donné dans  $\mathcal{G}$ , et soit  $E'_\xi = (e_1, \dots, e_s, \pi e_{s+1}, \dots, \pi e_r)$  représente un sommet adjacent. Par  $E'_\xi \subseteq E_\xi$ , Il découle de la construction dans la preuve de (1.4.2) que  $E' \subseteq E$ . Si nous notons  $j^* E$  par  $\overline{E}$  et  $j^* E'$  par  $\overline{E}'$ , cette inclusion induit un homomorphisme  $\overline{E}' \rightarrow \overline{E}$  de faisceaux sur  $X_k$ .

Considérons maintenant l'image de faisceaux  $\text{Im}(\overline{E}' \rightarrow \overline{E})$ , qui est un sous-faisceau de  $\overline{E}$ . Considérons d'abord les germes au point générique  $\xi$  de  $X_k$ . Il est clair que l'image de  $\overline{E}'_\xi$  dans  $\overline{E}_\xi$  est un sous-espace linéaire de dimension

$s$  de  $\bar{E}_\xi$ , à savoir l'espace engendré par  $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_s$ , où  $\bar{e}_j$  désigne l'image canonique de  $e_j$  sous l'opération  $\otimes \mathcal{O}_\xi / \pi \mathcal{O}_\xi$ . Désignons ce sous-espace par  $\bar{F}_\xi$ . Alors, selon [Lan75, Proposition 1], il existe un unique sous-faisceau  $\bar{F} \subseteq \bar{E}$  ayant  $\bar{F}_\xi$  comme son germe générique. Ensuite, nous obtenons une suite exacte  $0 \rightarrow \bar{F} \rightarrow \bar{E} \rightarrow \bar{Q} \rightarrow 0$  de faisceaux sur  $X_k$ .

En identifiant  $\bar{E}$  avec  $j_* \bar{E}$ , puisque  $j$  est une immersion fermée, il existe un homomorphisme canonique surjectif  $E \rightarrow \bar{E}$ , puis nous obtenons un homomorphisme surjectif  $E \rightarrow \bar{Q}$  de faisceaux sur  $X_R$ .

Nous affirmons que  $E' = \text{Ker}(E \rightarrow \bar{Q})$ , c'est-à-dire que nous avons

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & E' & \longrightarrow & E & \longrightarrow & \bar{Q} \longrightarrow 0 \\ & & & & \downarrow j^* & & \downarrow \text{id} \\ 0 & \longrightarrow & \bar{F} & \longrightarrow & \bar{E} & \longrightarrow & \bar{Q} \longrightarrow 0 \end{array} \quad (1)$$

$$(2)$$

Tout d'abord, il est clair que  $E'_\xi = \text{Ker}(E_\xi \rightarrow \bar{Q}_\xi)$  par définition. D'autre part,  $E'|_{X_K} = \text{Ker}(E \rightarrow \bar{Q})|_{X_K}$ , car  $\text{Supp}(\bar{Q})$  est soutenu dans  $X_k$ . Maintenant, soit  $V \subseteq X_R$  un sous-ensemble ouvert affine rencontrant  $X_k$ . Nous avons un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} E(V) & \longrightarrow & \bar{Q}(V) \\ \downarrow & & \downarrow \\ E_\xi & \longrightarrow & \bar{Q}_\xi, \end{array}$$

ici  $\bar{Q}(V)$  est défini comme  $\bar{Q}(U)$ , où  $U = V \cap X_k$ , et  $\bar{Q}(V) \hookrightarrow \bar{Q}_\xi$  est injectif car  $\bar{Q}$  est sans torsion. Ainsi, si  $f \in E(V)$  est dans  $\text{Ker}(E_\xi \rightarrow \bar{Q}_\xi) = \text{Ker}(E \rightarrow \bar{Q})_\xi$ , il en découle que  $f \in \text{Ker}(E(V) \rightarrow \bar{Q}(V))$ . Par conséquent,

$$\begin{aligned} \text{Ker}(E \rightarrow \bar{Q})(V) &= E(V) \cap \text{Ker}(E \rightarrow \bar{Q})_\xi \\ &= E_K(V) \cap \text{Ker}(E \rightarrow \bar{Q})_\xi \\ &= E_K(V) \cap E'_\xi = E'(V). \end{aligned}$$

Rappelons que  $V' = V \cap X_K$ . Ainsi,  $E' = \text{Ker}(E \rightarrow \bar{Q})$ .

Appliquons  $j^*$  à la suite exacte (2), nous avons

$$0 \longrightarrow \text{Tor}_1(\bar{Q}, \mathcal{O}_{X_k}) \longrightarrow \bar{E}' \longrightarrow \bar{E} \longrightarrow \bar{Q} \longrightarrow 0,$$

puisque  $\text{Tor}_1(\bar{E}, \mathcal{O}_{X_k}) = 0$ , car  $\bar{E}$  est sans torsion. Comparée à la séquence exacte (2), nous voyons que  $\text{Im}(\bar{E}' \rightarrow \bar{E}) = \bar{F}$ , donc  $\text{Im}(\bar{E}' \rightarrow \bar{E})$  est effectivement un sous-fibré de  $\bar{E}$ . Nous disons que  $\bar{F}$  est le sous-fibré associé à l'arête  $[E_\xi] - [E'_\xi]$ .

b. À partir d'un sous-fibré propre jusqu'à une arête.

Étant donné un sous-fibré propre  $\bar{F} \subseteq \bar{E}$ . Nous définissons un sous-faisceau  $E' \subseteq E$  par  $E' = \text{Ker}(E \rightarrow \bar{Q})$ , où  $\bar{Q}$  est le coker( $\bar{F} \rightarrow \bar{E}$ ). Si  $\bar{F}_\xi = (\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_s)$ , où  $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_r\}$  soit une base de  $\bar{E}_\xi$ , alors  $E'_\xi = (e_1, \dots, e_s, \pi e_{s+1}, \dots, \pi e_r)$ ; en d'autres termes,  $[E'_\xi]$  est adjacent à  $[E_\xi]$ . De plus, l'argument dans la preuve de (1.4.2) montre que  $E'$  est l'extension cohérente de  $E_K$  induite par  $E'_\xi$ .

ii. One-to-one correseponce.

Désignons par  $\bar{Q}'$  le terme  $\text{Tor}_1(\bar{Q}, \mathcal{O}_{X_k})$  dans la suite exacte

$$0 \longrightarrow \text{Tor}_1(\bar{Q}, \mathcal{O}_{X_k}) \longrightarrow \bar{E}' \longrightarrow \bar{E} \longrightarrow \bar{Q} \longrightarrow 0.$$

Puisque  $\text{Im}(\bar{E}' \rightarrow \bar{E}) = \bar{F}$ , Nous avons une suite exacte  $0 \rightarrow \bar{Q}' \rightarrow \bar{E}' \rightarrow \bar{F} \rightarrow 0$ . Comme nous savons que  $\bar{F}$  est sans torsion,  $\bar{Q}'$  est un sous-fibré de  $\bar{E}'$ . Par conséquent,  $\bar{Q}'$  correspond à une arête dans le complexe au sommet  $[E_\xi]$ . Pour trouver cette arête, posons  $E'' = \text{Ker}(\bar{E}' \rightarrow \bar{F})$ . Il n'est pas difficile de voir que  $E''_\xi = (\pi e_1, \dots, \pi e_r)$ ; en d'autres termes,  $E''_\xi$  représente le même sommet que  $E_\xi$ . Ainsi, le sous-fibré  $\bar{Q}' \subseteq \bar{E}'$  correspond à l'arête au sommet  $[E'_\xi]$  qui ramène au sommet d'origine  $[E_\xi]$ .

En tensorisant la suite exacte  $0 \rightarrow \pi\mathcal{O}_{X_R} \rightarrow \mathcal{O}_{X_R} \rightarrow \mathcal{O}_{X_k} \rightarrow 0$  par  $\bar{Q}$ , on a

$$0 \longrightarrow \text{Tor}_1(\bar{Q}, \mathcal{O}_{X_k}) \longrightarrow \bar{Q} \otimes \pi\mathcal{O}_{X_R} \longrightarrow \bar{Q} \xrightarrow{\cong} \bar{Q} \longrightarrow 0,$$

donc

$$\bar{Q}' = \text{Tor}_1(\bar{Q}, \mathcal{O}_{X_k}) \cong \bar{Q} \otimes \pi\mathcal{O}_{X_R} \cong \bar{Q}.$$

En appliquant cet isomorphisme à la suite exacte  $0 \rightarrow \bar{F} \rightarrow \bar{E} \rightarrow \bar{Q} \rightarrow 0$ , nous obtenons une suite exacte  $0 \rightarrow \bar{F} \rightarrow \bar{E} \rightarrow \bar{Q}' \rightarrow 0$ . Le morphisme composé  $\bar{E} \rightarrow \bar{Q}' \subset \bar{E}'$  est simplement le relèvement à  $X_k$  du morphisme naturel  $E \xrightarrow{\cong} \pi E \subset E'$  sur  $X_R$ .

□

## 1.6 Théorème de Langton 2.

**(1.6.1)** Maintenant, étant donné un sommet  $[E_\xi]$  de  $\mathcal{G}$  tel que le fibré correspondant  $\bar{E}$  sur  $X_k$  n'est pas  $\mu$ -semi-stable, soit  $\bar{B} \subseteq \bar{E}$  le  $\beta$ -sous-faisceau de  $\bar{E}$ , soit  $[E_{1,\xi}]$  le sommet dans  $\mathcal{G}$  déterminé par l'arête correspondant au sous-faisceau  $\bar{B} \subseteq \bar{E}$  et soit  $\bar{E}_1$  le fibré vectoriel correspondant sur  $X_k$ . Soit  $\bar{F}_1 \subseteq \bar{E}_1$  l'image de l'homomorphisme canonique  $\bar{E} \rightarrow \bar{E}_1$  (c'est le noyau de l'homomorphisme  $\bar{E}_1 \rightarrow \bar{E}$ ).

**Lemme (1.6.2)** Si  $\bar{G}_1 \subseteq \bar{E}_1$  est un sous-fibré de  $\bar{E}_1$ , alors  $\beta(\bar{G}_1) \leq \beta(\bar{B})$ , égalité possible seulement si  $\bar{G}_1 \vee \bar{F}_1 = \bar{E}_1$ .

*Démonstration.* De la suite exacte  $0 \rightarrow \bar{B} \rightarrow \bar{E} \rightarrow \bar{F}_1 \rightarrow 0$ , nous avons  $\beta(\bar{B}) + \beta(\bar{F}_1) = \beta(\bar{E}) = 0$ . Puisque  $\beta(\bar{B}) > 0$ , nous avons  $\beta(\bar{F}_1) < 0$ .

Maintenant, considérons  $\bar{G}_1$  tel que  $\bar{G}_1 \cong \bar{F}_1$ . Sous l'isomorphisme  $\bar{E}/\bar{B} \cong \bar{F}_1$ , le sous-fibré  $\bar{G} \subseteq \bar{F}_1$  correspond à un fibré  $\bar{G} \subseteq \bar{E}$ ,  $\bar{G} \supseteq \bar{B}$ , tel que  $\bar{G}/\bar{B} \cong \bar{G}_1$ . Par la définition de  $\bar{B}$ ,  $\beta(\bar{G}) \leq \beta(\bar{B})$ , donc  $\beta(\bar{G}_1) = \beta(\bar{G}) - \beta(\bar{B}) \leq 0 < \beta(\bar{B})$ .

Par conséquent, nous pouvons supposer que  $\bar{G}_1 \not\subseteq \bar{F}_1$ . Soit  $\bar{J}_1 = \bar{G}_1 \vee \bar{F}_1$  et  $\bar{I}_1 = \bar{G}_1 \cap \bar{F}_1$ . Alors nous avons  $\bar{I}_1 \subseteq \bar{F}_1 \subset \bar{J}_1$ . Comme  $\bar{I}_1 \subseteq \bar{F}_1$ ,  $\beta(\bar{I}_1) \leq 0$  d'après l'argument précédent ; donc  $\beta(\bar{G}_1) \leq \beta(\bar{G}_1) - \beta(\bar{I}_1)$ . Mais  $\beta(\bar{G}_1) - \beta(\bar{I}_1) \leq \beta(\bar{J}_1) - \beta(\bar{F}_1)$ . Maintenant, sous l'isomorphisme  $\bar{E}_1/\bar{F}_1 \cong \bar{B}$ ,  $\bar{J}_1 \supset \bar{F}_1$  correspond à un sous-fibré  $\bar{J} \cong \bar{B}$  tel que  $\bar{J} \cong \bar{J}_1/\bar{F}_1$ . Par conséquent,  $\beta(\bar{J}_1) - \beta(\bar{F}_1) = \beta(\bar{J}) \leq \beta(\bar{B})$ , avec égalité uniquement si  $\bar{J} = \bar{B}$ , c'est-à-dire si  $\bar{J}_1 = \bar{E}_1$ . Il s'ensuit que  $\beta(\bar{G}_1) \leq \beta(\bar{B})$ , avec égalité possible uniquement si  $\bar{G}_1 \vee \bar{F}_1 = \bar{E}_1$ .

□

**(1.6.3) Construction du chemin.** On va définir le chemin  $\mathcal{P}$ . Démarrer avec n'importe quel sommet de  $\mathcal{G}$ . Si  $[E_\xi]$  est un sommet de  $\mathcal{P}$  tel que le fibré correspondant  $\bar{E}$  n'est pas  $\mu$ -semi-stable, nous laissons le sommet suivant être celui déterminé par l'arête correspondant au sous-fibré distingué  $B \subseteq E$ . Si  $\mathcal{P}$  atteint un sommet  $[E_\xi^{(m)}]$  dont le fibré correspondant  $\bar{E}^{(m)}$  est semi-stable, le processus s'arrête automatiquement, car  $\beta(\bar{F}) \leq 0$  pour tout  $\bar{F} \leq \bar{E}^{(m)}$ . Si  $\mathcal{P}$  n'atteint jamais un sommet correspondant à une réduction semi-stable, alors le processus continue indéfiniment. Nous allons maintenant montrer que la deuxième alternative est impossible.

Dénotons par  $\bar{B}^{(m)}$  le sous-fibré distingué de  $\bar{E}^{(m)}$ , et soit  $\beta_m = \beta(\bar{B}^{(m)})$ . Par le Lemme (1.6.2),  $\beta_{m+1} \leq \beta_m$ . D'autre part, nous devons avoir  $\beta_m > 0$  sauf si  $\bar{E}^{(m)}$  est semi-stable. Par conséquent, si le chemin  $\mathcal{P}$  se poursuit indéfiniment, nous devons avoir  $\beta_m = \beta_{m+1} = \dots$  pour  $m$  suffisamment grand. Il en découle que  $\bar{B}^{(m)} \vee \bar{K}^{(m)} = \bar{E}^{(m)}$ , où  $\bar{K}^{(m)} = \text{Ker}(\bar{E}^{(m)} \rightarrow \bar{E}^{(m-1)})$ . Cela implique que  $\text{rang } \bar{B}^{(m)} + \text{rang } \bar{K}^{(m)} \geq r$ . Mais  $\text{rang } \bar{K}^{(m)} = r - \text{rang } \bar{B}^{(m-1)}$  par la construction ; donc nous avons  $\text{rang } \bar{B}^{(m)} \geq \text{rang } \bar{B}^{(m-1)}$  pour  $m$  suffisamment grand. Puisque  $\text{rang } \bar{B}^{(m)} < r$  pour tout  $m$ , il s'ensuit que pour  $m$  suffisamment grand,  $\text{rang } \bar{B}^{(m)} = \text{rang } \bar{B}^{(m+1)} = \dots$ . Par conséquent,  $\text{rang } \bar{B}^{(m)} + \text{rang } \bar{K}^{(m)} = r$ . Par conséquent,  $\bar{B}^{(m)} \cap \bar{K}^{(m)} = (0)$  et le homomorphisme canonique  $\bar{E}^{(m)} \rightarrow \bar{E}^{(m-1)}$  envoie  $\bar{B}^{(m)} \subset \bar{B}^{(m-1)}$  de manière injective. Comme  $\beta(\bar{B}^{(m)})$  et  $\text{rang } \bar{B}^{(m)}$  sont tous deux constants, il en résulte que  $\deg \bar{B}^{(m)} = \deg \bar{B}^{(m+1)} = \dots$ .

**Lemme (1.6.4)** Supposons que l'anneau de valuation discrète  $R$  soit complet. Soit  $\mathcal{R}$  un chemin infini dans  $\mathcal{G}$ , avec des sommets  $[E_\xi], [E'_\xi], [E''_\xi], \dots$ . Notons  $\text{Im}(\bar{E}^{(m+1)} \rightarrow \bar{E}^{(m)}) = \bar{F}^{(m)}$ . Supposons que  $\text{rang } \bar{F} = \text{rang } \bar{F}' = \dots = p$ , que le morphisme canonique  $\bar{E}^{(m+1)} \rightarrow \bar{E}^{(m)}$  envoie  $\bar{F}^{(m+1)} \hookrightarrow \bar{F}^{(m)}$  de manière injective, et que  $\deg \bar{F} = \deg \bar{F}' = \dots$ . Alors  $\deg \bar{F} \leq p(d/r)$ ; c'est-à-dire,  $\beta(\bar{F}) \leq 0$ .

*Démonstration.* Depuis  $\deg \bar{F} = \deg \bar{F}^{(m)}$ , il suffit de prouver que  $\deg \bar{F}^{(m)} \leq p(d/r)$  pour  $m$  suffisamment grand.

Les inclusions  $\dots \subseteq E^{(m)} \subseteq \dots \subseteq E' \subseteq E$  induisent des homomorphismes  $\dots \rightarrow \bar{E}^{(m)} \rightarrow \dots \rightarrow \bar{E}' \rightarrow \bar{E}$ , de telle sorte que pour chaque  $m \geq 0$ ,  $\text{Im}(\bar{E}^{(m+1)} \rightarrow \bar{E}^{(m)}) = \bar{F}^{(m)}$ . Désignons par  $\bar{Q}^{(m)}$  le noyau  $\text{Ker}(\bar{E}^{(m)} \rightarrow \bar{E}^{(m-1)})$  pour  $m \geq 1$ . Alors, l'hypothèse selon laquelle  $\bar{F}^{(m)} \subset \bar{F}^{(m-1)}$  est injective signifie que  $\bar{F}^{(m)} \cap \bar{Q}^{(m)} = (0)$ .

Considérons maintenant les homomorphismes inverses  $\dots \leftarrow \bar{E}^{(m)} \leftarrow \dots \leftarrow \bar{E}' \leftarrow \bar{E}$ . Nous savons par la Proposition (1.5.4) que  $\bar{Q}^{(m)} = \text{Im}(\bar{E}^{(m-1)} \rightarrow \bar{E}^{(m)})$  et  $\bar{F}^{(m)} = \text{Ker}(\bar{E}^{(m)} \rightarrow \bar{E}^{(m+1)})$ . Comme  $\bar{F}^{(m)} \cap \bar{Q}^{(m)} = (0)$ , l'application induite  $\bar{Q}^{(m)} \rightarrow \bar{Q}^{(m+1)}$  est injective.

À partir de la suite exacte  $0 \rightarrow \bar{F}^{(m-1)} \rightarrow \bar{E}^{(m-1)} \rightarrow \bar{Q}^{(m)} \rightarrow 0$ , nous avons  $\deg \bar{F}^{(m-1)} + \deg \bar{Q}^{(m)} = d$ . Comme  $\deg \bar{F} = \deg \bar{F}' = \dots = \deg \bar{F}^{(m)} = \dots$ , nous avons  $\deg \bar{Q}' = \deg \bar{Q}'' = \dots = \deg \bar{Q}^{(m)} = \dots$ . Par conséquent, les injections  $\bar{Q}^{(m)} \subset \bar{Q}^{(m+1)}$  sont des isomorphismes en codimension 1 [Lan75]. Comme les injections canoniques  $\bar{Q}^{(m)} \subset \bar{Q}^{(m)}$  sont des isomorphismes en codimension 1 [Stacks, Tag 0AVC], et que chaque  $\bar{Q}^{(m)}$  est déterminé par ses fibres aux points de codimension 1, nous avons des isomorphismes  $\bar{Q}'^{**} \xrightarrow{\cong} \bar{Q}''^{**} \xrightarrow{\cong} \bar{Q}^{(m)*} \xrightarrow{\cong} \dots$ . Ainsi, nous avons une séquence d'inclusions

$$\bar{Q}' \subset \bar{Q}'' \hookrightarrow \dots \subset \bar{Q}^{(m)} \hookrightarrow \dots \subset \bar{Q}^{**}.$$

Comme  $\bar{Q}^{**}$  est un faisceau cohérent sur  $X_k$ , il découle de la condition de chaîne ascendante que  $\bar{Q}^{(m)} \xrightarrow{\cong} \bar{Q}^{(m+1)} \xrightarrow{\cong} \dots$  pour  $m$  suffisamment grand.

Nous pouvons également supposer qu'il existe un sous-faisceau  $\bar{Q} \subseteq \bar{E}$  tel que  $\bar{Q} \cong \bar{Q}'$ . Par conséquent, pour chaque  $m \geq 0$ , la suite exacte  $0 \rightarrow \bar{F}^{(m)} \rightarrow \bar{E}^{(m)} \rightarrow \bar{Q}^{(m+1)} \rightarrow 0$  se scinde, et nous avons  $\bar{E}^{(m)} = \bar{F}^{(m)} \oplus \bar{Q}^{(m)}$ . Ensuite, la suite exacte  $0 \rightarrow \bar{Q}^{(m+1)} \rightarrow \bar{F}^{(m+1)} \oplus \bar{Q}^{(m+1)} \rightarrow \bar{F}^{(m)} \rightarrow 0$  montre que  $\bar{F}^{(m+1)} \xrightarrow{\cong} \bar{F}^{(m)}$ . Ainsi, nous avons  $\bar{F}^{(m)} \xrightarrow{\cong} \bar{F}$  pour tout  $m$ .

Pour tout  $m$ , désignons par  $X_m$  le sous-schéma fermé  $X_R \otimes (\mathcal{O}/\pi^m \mathcal{O})$  de  $X_R$ . Ainsi, en particulier,  $X_1 = X_k$ . Si  $G$  est un faisceau cohérent sur  $X_R$ , désignons par  $G_m$  le pullback de  $G$  sur  $X_m$ .

Soit  $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_p\}$  une base de  $\bar{F}_\xi^{(m)} \xrightarrow{\cong} \bar{F}_\xi$ . Étendons-la à une base  $\{e_1, \dots, e_r\}$  de  $\bar{E}_\xi$ . Par le lemme de Nakayama, cette base se lève à une base  $\{e_1, \dots, e_r\}$  de  $E_\xi$ . Alors  $E_\xi^{(m)} = (e_1, \dots, e_p, \pi^m e_{p+1}, \dots, \pi^m e_r)$ . En tirant en arrière l'inclusion  $E^{(m)} \subseteq E$  sur  $X_m$ , nous obtenons un homomorphisme  $E_m^{(m)} \rightarrow E_m$ . Désignons par  $F_m$  l'image de ce homomorphisme. Ainsi, en particulier,  $F_1 = \bar{F}$ .

Remarquons que pour tout  $l \geq 0$ ,  $E_m^{(l)}$  est sans torsion au sens où pour tout ensemble ouvert  $U \subseteq X_m$ ,  $E_m^{(l)}(U) \cong$

$E_{m,\xi}^{(l)}$ . Cela découle du même argument que dans la preuve de la Proposition 6, en remplaçant simplement  $\pi$  par  $\pi^m$ . De plus, remarquons que le sous-faisceau  $F_m \subseteq E_m$  est en fait un sous-fibré au sens où pour tout ensemble ouvert  $U \subseteq X_m$ ,

$$F_m(U) = E_m(U) \cap F_{m,\xi}.$$

Nous pouvons prouver que  $j_{m,m'}^* F_m = F_{m'}$  pour tous les  $m, m'$  avec  $m' \leq m$ . Pour plus de détails, voir [Lan75, Lemma 2]. Il en découle que  $\varprojlim F_m$  est un sous-faisceau cohérent de  $\varprojlim E_m = \widehat{E}$  sur le schéma formel  $\widehat{X}_R$ , où  $\wedge$  désigne la complétion formelle le long de la fibre fermée  $X_k \subseteq X_R$ . Par conséquent, selon le théorème d'existence de Grothendieck [EGA3, 5.1.5 et 5.1.3], il existe un sous-faisceau cohérent  $F \subseteq E$  sur  $X_R$  tel que  $\widehat{F} = \varprojlim F_m$ . (C'est ici que nous utilisons l'hypothèse que l'anneau de valuation discrète  $R$  est complet.) En particulier, en ramenant à  $X_k$ , nous obtenons  $j^* F = \overline{F}$ . Par conséquent,  $\deg \overline{F} = \deg F_K$ , où  $F_K = i^* F$ . Par le corollaire de la [Lan75, Proposition 1], il existe un unique sousfibré  $F'_K \cong E_K$  de rang  $p$  contenant  $F_K$ . Mais comme  $E_K$  est  $\mu$ -semi-stable par hypothèse, il s'ensuit que  $\deg F'_K \leq p(d/r)$ . Ainsi,

$$\deg \overline{F} = \deg F_K \leq \deg F'_K \leq p \frac{d}{r}.$$

Cela complète la preuve.  $\square$

*Preuve du Théorème (1.1.2) (2).*

(i) *Cas particulier : l'anneau de valuation discrète  $R$  est complet.*

Il découle de la lemme (1.6.4) qu'après un nombre fini d'étapes, le sous-fibré  $\beta$  sera  $\mu$ -semi-stable, puis le  $\overline{E}^{(m)}$  correspondant sera  $\mu$ -semi-stable.

(ii) *General case.* Formons la complétion  $\widehat{R}$ . Nous avons un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} X_k & \xrightarrow{j} & X_{\widehat{R}} & \xleftarrow{i} & X_{\widehat{K}} \\ \downarrow & & \downarrow p & & \downarrow p \\ X_k & \xrightarrow{j} & X_R & \xleftarrow{i} & X_K \end{array}$$

Étant donné le fibré semi-stable  $E_K$  sur  $X_K$ , considérons le fibré  $E_{\widehat{K}} = p^* E_K$  sur  $X_{\widehat{K}}$ . Par [Lan75, Proposition 3],  $E_{\widehat{K}}$  est  $\mu$ -semi-stable. Par conséquent, si nous choisissons un sommet quelconque  $[E_{\widehat{R},\xi}]$  dans le complexe de Bruhat-Tits sur  $\widehat{R}$ , il existe un chemin fini menant à un sommet dont le fibré correspondant sur  $X_k$  est  $\mu$ -semi-stable.

Maintenant, soit  $[E_\xi]$  un sommet quelconque dans le complexe de Bruhat-Tits sur  $R$ , et prenons  $[E_{\widehat{R},\xi}]$  comme étant le sommet dans le complexe de Bruhat-Tits sur  $\widehat{R}$  donné par  $E_{\widehat{R},\xi} = E_\xi \otimes_R \widehat{R}$ , c'est-à-dire, le germe en  $\xi$  du faisceau cohérent  $E_{\widehat{R}} = p^* E$  sur  $X_{\widehat{R}}$ . Remarquons que ces deux sommets donnent le même fibré  $\overline{E}$  sur  $X_k$ . Si  $\overline{E}$  n'est pas  $\mu$ -semi-stable, soit  $\overline{F}$  le  $\beta$ -sous-faisceau, et  $\overline{Q} = \text{Coker}(\overline{F} \rightarrow \overline{E})$ . Alors il est clair que les arêtes induites par  $\overline{F}$  dans les deux complexes de Bruhat-Tits correspondent sous l'opération  $p^*$ . En effet, si  $0 \rightarrow E' \rightarrow E \rightarrow \overline{Q} \rightarrow 0$  est exact, alors  $0 \rightarrow p^* E' \rightarrow E_{\widehat{R}} \rightarrow \overline{Q} \rightarrow 0$  est exact, puisque  $p$  est plat. Par conséquent, le chemin ci-dessus dans le complexe sur  $\widehat{R}$  peut être imité dans le complexe sur  $R$ . Par conséquent, il existe un fibré  $E^{(m)} \subseteq i_* E_K$  tel que  $\overline{E}^{(m)}$  soit  $\mu$ -semi-stable. Cela achève la preuve du deuxième critère valuatif.  $\square$

## 2 L'analogue de $\chi$ -semi-stabilité pour le théorème de Langton [MR84]

### 2.1 Énoncé de l'analogue

(2.1.1) Rappelez-vous qu'à la (1.3.10), on a défini un fibré vectoriel  $E$  sur  $X$  satisfait  $P(r)$  (ou  $\bar{P}(r)$ ), et en utilisant cette définition, on peut reformuler le Théorème pour fibré vectoriel (1.1.3) comme suit :

**Théorème (2.1.2)** 1. Soient  $E_1$  et  $E_2$  des fibrés vectoriels sur  $X_R$  tels que  $i^*(E_1) \simeq i^*(E_2)$  et que à la fois  $j^*(E_1)$  et  $j^*(E_2)$  sont des fibrés vectoriels sur  $X_k$  et tous deux satisfont à  $\bar{P}(1)$ . Alors il existe un entier  $p$  tel que  $E_1 = \pi^p E_2$ .

2. Soit  $E_K$  un fibré vectoriel sur  $X_K$ . Alors, si  $E_K$  satisfait à  $P(1)$ , il existe un sous-faisceau cohérent  $E \subset i_* E_K$  tel que  $i^* E \simeq E_K$  et que  $j^*(E)$  est un fibré vectoriel sur  $X$  qui satisfait également à  $P(1)$ .

V. B. Mehta et A. Ramanathan ont démontré la généralisation suivante :

**Théorème (2.1.3)** 1. Supposons que  $E_K$  soit un fibré vectoriel sur  $X_K$ . Suppose que  $E_1$  et  $E_2$  sont des faisceaux cohérents sur  $X_R$  tels que (a)  $E_1, E_2 \subset i_* E_K$  and (b)  $i^* E_1 \simeq i^* E_2 \simeq E_K$ . Supposons en outre que  $j^* E_1$  et  $j^* E_2$  sont tous deux des fibrés vectoriels sur  $X$  satisfaisant  $\bar{P}(r)$  pour un certain  $r$  avec  $1 \leq r \leq d$ . Alors, il existe un entier  $p \geq 0$  tel que  $E_1 = \pi^p E_2$ .

2. Soit  $E_K$  un fibré vectoriel sur  $X_K$  qui satisfait  $P(r)$  pour un certain  $r$  avec  $1 \leq r \leq d$ . Alors, il existe un fibré vectoriel  $E$  sur  $X_R$  tel que  $i^* E \simeq E_K$  et tel que  $j^*(E)$  soit un fibré vectoriel sur  $X$  satisfaisant  $P(r)$ .

La démonstration est assez similaire à celle de Langton, puisque Langton a prouvé le cas  $r = 1$ ; nous faisons alors une induction sur  $r$ .

### 2.2 Démonstration du Théorème (2.1.3) 1.

**Lemme (2.2.1)** Soient  $E_1$  et  $E_2$  des fibrés vectoriels sur  $X$ . Supposons que  $\bar{P}(r)$  est vraie pour  $E_1, E_2$  et un certain  $r$  tel que  $1 \leq r \leq d$ , et que  $h_i(E_1) = h_i(E_2)$  pour  $d - r \leq i \leq d$ . Alors toute application  $f: E_1 \rightarrow E_2$  est soit nulle, soit un isomorphisme en codimension  $r$ .

*Démonstration.* Considérons les suites exactes

$$0 \rightarrow K \rightarrow E_1 \rightarrow I \rightarrow 0$$

et

$$0 \rightarrow J \rightarrow E_2 \rightarrow C \rightarrow 0$$

où  $K = \ker f$  et  $J$  est le sous-fibré de  $E_2$  engendré par  $I = \text{Im } f$ . Alors  $K$  est un sous-fibré de  $E_1$  et il existe un entier  $s \leq r$  tel que  $\beta_d(K) = \dots = \beta_{d-s+1}(K) = 0$  et  $\beta_{d-s}(K) < 0$ . Pour ce  $s$ , nous avons  $\beta_d(J) = \dots = \beta_{d-s+1}(J) = 0$  et  $\beta_{d-s}(J) > 0$ , ce qui contredit  $\bar{P}(r)$  sur  $E_2$ . Par conséquent,  $K = 0$  et  $f: E_1 \rightarrow E_2$  est une injection. Mais alors, selon nos hypothèses sur  $E_1$  et  $E_2$ ,  $\text{coker } f$  ne peut avoir de support que dans une codimension supérieure à  $r$ .  $\square$

Remplacer [Lan75, Proposition 4.] par Lemme (2.2.1), la preuve est presque la même que celle de Théorème (1.1.3) (1) .

## 2.3 Le sous-fibré $\beta_{d-r}$

**(2.3.1)** Supposons que  $E$  soit un fibré sur  $X_k$  et si  $E$  ne satisfait pas  $P(r)$  pour un certain  $r \geq 2$ , nous pouvons supposer que  $r$  est le plus petit entier pour lequel  $P(r)$  ne tient pas pour  $E$ .

Considérons l'ensemble  $S = \{G \subset E \mid \beta_d(G) = \dots = \beta_{d-r+1}(G) = 0\}$ . Comme  $r \geq 2$  et pour tout  $G \in S$ , nous avons  $1 \leq \text{rg } G \leq \text{rg } E$ , il découle de [Gro61] que  $S$  est une famille bornée de faisceaux sur  $X$ . En particulier, nous pouvons définir  $\beta_{d-r} = \sup_{G \in S} \beta_{d-r}(G)$  et  $T = \{G \in S \mid \beta_{d-r}(G) = \beta_{d-r}\}$ . Soit  $B$  un élément de  $T$  de rang minimal et soit  $\widehat{B}$  le sous-fibré de  $E$  engendré par  $B$ . Alors  $\beta_d(\widehat{B}) = 0$  (ceci est vrai pour tout sous-faisceau de tout fibré vectoriel sur  $X_k$  par (1.2.3)), et comme  $B \subset \widehat{B}$ , nous avons  $h_{d-1}(B) \leq h_{d-1}(\widehat{B})$ . Ainsi,  $\beta_{d-1}(\widehat{B}) \geq 0$ .

Si  $\beta_{d-1}(B) > 0$ , alors cela contredit  $P(1)$ . Donc,  $\beta_{d-1}(\widehat{B}) = 0$ . De même,  $\beta_{d-2}(\widehat{B}) = \dots = \beta_{d-r+1}(\widehat{B}) = 0$ . Ainsi,  $\widehat{B} \in S$  et, comme  $B \subset \widehat{B}$ , nous avons  $\beta_{d-r}(B) \leq \beta_{d-r}(\widehat{B})$  et, par maximalité de  $\beta_{d-r}(B)$ , nous obtenons  $\beta_{d-r}(B) = \beta_{d-r}(\widehat{B})$ . Donc, nous pouvons supposer  $B = \widehat{B}$  et donc obtenir que  $B$  est un sous-fibré dans  $S$  de plus petit rang avec  $\beta_{d-r}(B) = \beta_{d-r}$ .

**(2.3.2)** En outre, nous affirmons que  $B$  est le sous-fibré unique dans  $S$  de plus petit rang avec  $\beta_{d-r}(B) = \beta_{d-r}$ .

En effet, soit  $F$  un autre sous-fibré dans  $S$  avec  $\beta_{d-r}(F) = \beta_{d-r}(B)$ . Nous affirmons que  $F \cap B$  et  $F + B$  appartiennent tous deux à  $S$ . Tout d'abord, prenons  $F \cap B$ . Nous avons  $\beta_d(F \cap B) = 0$  et donc  $\beta_{d-1}(F \cap B) \leq 0$ . Si  $\beta_{d-1}(F \cap B) < 0$ , alors dans l'isomorphisme  $B/(F \cap B) \simeq (F + B)/F$ , nous obtenons  $\beta_{d-1}(B/(F \cap B)) > 0$ , et donc  $\beta_{d-1}((F + B)/F) > 0$ , ce qui implique à son tour que  $\beta_{d-1}(F + B) > 0$ , une contradiction. Ainsi,  $\beta_{d-1}(F \cap B) = 0$ . De même,  $\beta_{d-2}(F \cap B) = \dots = \beta_{d-r+1}(F \cap B) = 0$ , et aussi  $\beta_{d-1}(F + B) = \dots = \beta_{d-r+1}(F + B) = 0$ . Par conséquent,  $F \cap B$  et  $F + B$  appartiennent tous deux à  $S$ . Maintenant, nous affirmons que  $\beta_{d-r}(F \cap B) = \beta_{d-r}(B)$ . Dans tous les cas,  $\beta_{d-r}(F \cap B) \leq \beta_{d-r}(B)$ . Supposons qu'il y ait une stricte inégalité. Alors,  $\beta_{d-r}(B/(F \cap B)) > 0 \Rightarrow \beta_{d-r}((F + B)/F) > 0 \Rightarrow \beta_{d-r}(F + B) > \beta_{d-r}(F) = \beta_{d-r}$ , une contradiction. Maintenant,  $\text{rg}(B \cap F) \leq \text{rg } B$ , et donc, par la définition de  $B$ ,  $B \cap F = B$  ou  $F \supset B$ . Ainsi, l'unicité de  $B$  est donc établie.

**(2.3.3)** Maintenant, nous pouvons prouver que  $\text{Hom}_{\mathcal{O}_{X_k}}(B, E/B) = 0$ .

Sinon, soit  $f: B \rightarrow E/B$  une application avec pour image  $G/B$  et pour noyau  $K$ , où  $B \subset G \subset E$ . À partir des deux suites exactes

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow B \rightarrow G \rightarrow \frac{G}{B} \rightarrow 0, \\ 0 \rightarrow K \rightarrow B \rightarrow \frac{G}{B} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

nous obtenons :

- (1)  $\beta_i(G) = \beta_i(G/B)$  pour  $d - r + 1 \leq i \leq d$ ,
- (2)  $\beta_i(G/B) + \beta_i(K) = 0$  pour  $d - r + 1 \leq i \leq d$ .

Ainsi,  $\beta_i(G) + \beta_i(K) = 0$  pour  $d - r + 1 \leq i \leq d$ . Mais alors nous devons avoir  $\beta_i(G) = \beta_i(K) = 0$  pour  $d - r + 1 \leq i \leq d$ , car si l'un d'entre eux, disons  $\beta_i(K) > 0$ , alors  $\beta_d(K) = \beta_{d-1}(K) = \dots = \beta_{i+1}(K) = 0$ ,  $\beta_i(K) > 0$ , ce qui contredit le fait qu' $E$  satisfait  $P(1) \dots P(r-1)$ . Donc, à la fois  $K$  et  $G$  appartiennent à  $S$ . De (2), nous obtenons  $2\beta_{d-r}(B) = \beta_{d-r}(K) + \beta_{d-r}(G)$ . Maintenant, à la fois  $\beta_{d-r}(G)$  et  $\beta_{d-r}(K)$  sont inférieurs ou égaux à  $\beta_{d-r}(B)$  et donc tous les deux sont égaux à  $\beta_{d-r}(B)$ , ce qui contredit le fait que  $B$  est le sous-fibré de  $S$  de plus petit rang avec  $\beta_{d-r}(B) = \beta_{d-r}$ . Par conséquent,  $G = B$  et  $f = 0$ . Dans la suite, nous appellerons  $B$  le sous-fibré  $\beta_{d-r}$  de  $E$ .

## 2.4 Démonstration du Théorème (2.1.3) 2.

**(2.4.1)** Rappelons notre notation (1.1.1). Laissons  $E_K$  être un fibré vectoriel sur  $X_K$  qui satisfait à  $P(r)$ . Nous pouvons ensuite étendre  $E_K$  à un fibré vectoriel  $E$  sur  $X_R$  par Proposition (1.4.2). Si  $r = 1$ , alors, d'après Théorème

(2.1.3) 2, nous pouvons supposer que  $j^*(E) = \bar{E}$  satisfait également à  $P(1)$ . Nous supposons donc que  $r \geq 2$  et nous supposons également, par récurrence sur  $r$ , que  $\bar{E}$  satisfait à  $P(1) \dots P(r-1)$ . Soit  $\bar{B}$  le sous-fibré  $\beta_{d-r}$  de  $\bar{E}$  et examinons

$$0 \rightarrow \bar{B} \rightarrow \bar{E} \rightarrow \bar{F}_1 \rightarrow 0, \quad (2.1)$$

Soit  $E_1$  le noyau de l'application canonique  $E \rightarrow \bar{F}_1 \rightarrow 0$ . Alors  $E$  et  $E_1$  sont génériquement isomorphes. Considérons

$$0 \rightarrow E_1 \rightarrow E \rightarrow \bar{F}_1 \rightarrow 0. \quad (2.2)$$

Tensorisons (2.1) par  $\mathcal{O}_{X_k}$  et utilisons la séquence exacte  $0 \rightarrow \pi\mathcal{O}_{X_R} \rightarrow \mathcal{O}_{X_R} \rightarrow \mathcal{O}_{X_k} \rightarrow 0$  pour obtenir

$$0 \rightarrow \bar{F}_1 \rightarrow \bar{E}_1 \rightarrow \bar{E} \rightarrow \bar{F}_1 \rightarrow 0. \quad (2.3)$$

Séparons (2.3) en

$$0 \rightarrow \bar{F}_1 \rightarrow \bar{E}_1 \rightarrow \bar{B} \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad 0 \rightarrow \bar{B} \rightarrow \bar{E} \rightarrow \bar{F}_1 \rightarrow 0.$$

Nous avons la proposition :

**Proposition (2.4.2)**  $\bar{E}_1$  satisfait également  $P(1) \dots P(r-1)$ .

*Démonstration.* Soit  $G$  un sous-faisceau de  $\bar{E}_1$  avec  $\beta_d(G) = \dots \beta_{d-s+1}(G) = 0$  pour un certain  $s$  tel que  $0 \leq s \leq r-1$ . Tout d'abord, supposons que  $G \subset \bar{F}_1$ . Alors  $G = \bar{G}_0/\bar{B}_0$  où  $\bar{B}_0 \subset \bar{G}_0 \subset \bar{E}_0$ . Par conséquent,  $\beta_i(G) = \beta_i(\bar{G}_0) - \beta_i(\bar{B}_0)$  pour  $d-s+1 \leq i \leq d$ . Mais  $\beta_i(G) = \beta_i(\bar{B}_0) = 0$  pour  $d-s+1 \leq i \leq d$ , donc  $\beta_i(\bar{G}_0) = 0$  pour  $d-s+1 \leq i \leq d$ . Ainsi,  $\beta_{d-s}(\bar{G}_0) \leq 0$  car  $\bar{E}_0$  satisfait  $P(r-1)$ . Mais  $\beta_{d-s}(G) = \beta_{d-s}(\bar{B}_0) \leq 0$ . Donc maintenant, supposons que  $G \not\subseteq \bar{F}_1$ . Considérons  $G/G \cap \bar{F}_1 \simeq G + \bar{F}_1/\bar{F}_1 \subset \bar{E}_1/\bar{F}_1 = \bar{B}_0$ . Nous avons  $\beta_{d-s}(G/G \cap \bar{F}_1) = \beta_{d-s}(G) - \beta_{d-s}(G \cap \bar{F}_1) \geq \beta_{d-s}(G)$  et pour  $G/G \cap \bar{F}_1 \subset \bar{E}_0$ , nous avons  $\beta_d(G/G \cap \bar{F}_1) \dots \beta_{d-s+1}(G/G \cap \bar{F}_1) = 0$ . Par [MR84, Lemma 2],  $\beta_{d-s}(G/G \cap \bar{F}_1) \leq 0$ , ce qui implique que  $\beta_{d-s}(G) \leq 0$ , complétant ainsi la preuve de la Proposition.  $\square$

Si  $\bar{E}_1$  satisfait  $P(r)$ , alors le Théorème (2.1.3) 2 est prouvé. Sinon, nous pouvons continuer à obtenir une séquence de faisceaux  $E = E_0, E_1 \dots E_i$  sur  $X_R$ , tous isomorphes de manière générique et chacun  $\bar{E}_i$  ne satisfaisant pas  $P(r)$  sur  $X_k$ . Similaire à la proposition , nous avons la Proposition

**Proposition (2.4.3)** Nous avons  $\beta_{d-r}(\bar{B}_1) \leq \beta_{d-r}(\bar{B}_0)$  et si l'égalité est vérifiée, alors le sous-faisceau de  $\bar{E}_1$  engendré par  $\bar{B}_1$  et  $\bar{F}_1$  est  $\bar{E}_1$  lui-même. Ici,  $\bar{B}_1$  est le sous-faisceau de rang  $\beta_{d-r}$  de  $\bar{E}_1$ .

Maintenant, nous obtenons une séquence de faisceaux  $\bar{E}_m$  sur  $X_k$  et pour chaque  $m$ ,  $\bar{B}_m$  est le sous-faisceau  $\beta_{d-r}$  de  $\bar{E}_m$ . Nous avons également des applications  $\bar{E}_m \rightarrow \bar{E}_{m-1}$  et  $\bar{B}_m = \text{Image}(\bar{E}_{m+1} \rightarrow \bar{E}_m)$  pour chaque  $m$  et  $\beta_{d-r}(\bar{B}_m)$  est une fonction décroissante de  $m$ . Posons  $\bar{K}_m = \ker(\bar{E}_m \rightarrow \bar{E}_{m-1})$  pour chaque  $m \geq -1$ . Comme  $\beta_{d-r}(\bar{B}_m) > 0$  pour tous les  $m$ , nous devons avoir  $\beta_{d-r}(\bar{B}_m) = \beta_{d-r}(\bar{B}_{m+1}) = \dots$  pour  $m \gg 0$ . Cela implique que  $\bar{B}_m \vee \bar{K}_m = \bar{E}_m$ . Ainsi,  $\text{rg } \bar{B}_m + \text{rg } \bar{K}_m \geq \text{rg } \bar{E}_m = r$ . Mais  $\text{rg } \bar{K}_m = r - \text{rg } \bar{B}_{m-1}$  et comme  $\text{rg } \bar{B}_m < r$  pour tous les  $m$ , nous avons  $\text{rg } \bar{B}_m = \text{rg } \bar{B}_{m+1}$  pour  $m \gg 0$ . Par conséquent,  $\text{rg } \bar{B}_m + \text{rg } \bar{K}_m = r$  pour  $m \gg 0$  et par conséquent,  $\bar{B}_m \cap \bar{K}_m = (0)$  pour  $m \gg 0$ . Ainsi, l'application canonique  $\bar{E}_m \rightarrow \bar{E}_{m-1}$  envoie  $\bar{B}_m$  injectivement dans  $\bar{B}_{m-1}$ . Pour obtenir une contradiction, il suffit de citer [Lan75, Lemma 2].

## Références

- [EGA3] A. Grothendieck. éléments de géométrie algébrique : III. étude cohomologique des faisceaux cohérents, Première partie. *Publications Mathématiques de l'IHÉS*, 11 :5–167, 1961. URL [http://www.numdam.org/item/PMIHES\\_1961\\_\\_11\\_\\_5\\_0/](http://www.numdam.org/item/PMIHES_1961__11__5_0/).

- [Gro61] A. Grothendieck. Techniques de construction et théorèmes d’existence en géométrie algébrique IV : les schémas de Hilbert. In *Séminaire Bourbaki : années 1960/61, exposés 205-222*, number 6 in Séminaire Bourbaki, pages 249–276. Société mathématique de France, 1961. URL [http://www.numdam.org/item/SB\\_1960-1961\\_\\_6\\_\\_249\\_0/](http://www.numdam.org/item/SB_1960-1961__6__249_0/). talk :221.
- [Lan75] S. G. Langton. Valuative criteria for families of vector bundles on algebraic varieties. *Annals of Mathematics*, 101(1) :88–110, 1975. URL <http://www.jstor.org/stable/1970987>.
- [MR84] V. B. Mehta and A. Ramanathan. An analogue of langton’s theorem on valuative criteria for vector bundles. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh : Section A Mathematics*, 96(1–2) :39–45, 1984. doi :10.1017/s0308210500020424.
- [Stacks] Stacks Project Authors. *Stacks Project*. <https://stacks.math.columbia.edu>, 2024.