消費者理論

宋品岳

2025-09-01

目錄

當你走進便利商店，面對貨架上琳瑯滿目的商品時，是否曾思考過自己的購買決策背後隱藏著什麼經濟原理？爲什麼你會選擇購買一瓶 35 元的運動飲料而非 150 元的進口果汁？爲什麼同樣是飲料，你的選擇與隔壁顧客截然不同？這些看似簡單的日常消費行爲，實際上反映了消費者理論的核心邏輯——在有限資源下追求最大滿足的理性決策過程。

消費者理論建立在兩個基本假設之上，這兩個假設精準地刻畫了人類經濟行爲的本質特徵。首先是*慾望無窮*的現實，在經濟學中我們用「效用」這個概念來量化消費者的慾望和滿足程度。效用代表消費者從商品或服務中獲得的主觀滿足感，而人類的特質就是永遠渴望更多——更好的食物、更舒適的居住環境、更先進的科技產品、更豐富的娛樂體驗。無論我們已經擁有多少，總是能想像出更理想的生活狀態，這種對於更高效用水準的無盡追求，正是推動經濟活動的根本動力。

然而，慾望雖然無窮，資源卻是有限的。這就是第二個基本假設——*資源有限*，在數學上我們用「預算限制式」來表達這個約束條件。每一筆支出都意味著機會成本，每一次選擇某商品都暗示著放棄其他商品的可能性。時間是稀缺的，金錢是有限的，注意力是分散的——這些約束條件共同構成了消費者必須在其中做出最優選擇的現實框架。

正是在這種「無窮慾望」與「有限資源」的矛盾張力中，消費者理論應運而生。透過數學化的效用函數和預算限制，將人類複雜的消費行爲轉化爲可以精確分析的最佳化問題，揭櫫了看似隨機的購買決策實際上遵循著理性的經濟邏輯。

1 效用

站在手搖飲料店前，你可能會陷入一個熟悉的困境：是選擇平常最愛的珍珠奶茶，還是嘗試新推出的芋泥拿鐵？這個看似簡單的選擇背後，其實涉及了經濟學中最核心的概念之一——*效用*。效用不只是滿足感或快樂程度的抽象表述，它是經濟學家用來理解和預測消費者行爲的縝密工具。

效用的概念源於一個簡單但深刻的觀察：人類永遠渴望更多更好的東西。無論是品嚐美

食帶來的愉悅、購買新衣服的興奮、或是學習新知識的充實感，這些主觀體驗雖然因人而異，但都指向同一個事實——我們天生就是慾望無窮的存在。早晨起床後，你可能希望有一杯完美的咖啡；中午用餐時，你渴望品嚐美味的料理；晚上下班後，你想要舒適的休閒娛樂。即使今天的所有願望都得到滿足，明天又會有新的慾望產生。這種永無止境的慾望推動著我們不斷消費、不斷選擇，也推動著整個經濟體系的運行。效用理論的力量在於將這種主觀的、難以衡量的心理感受轉化爲可以數學化分析的客觀工具。

1.1 理性行為與選擇公理

進行消費者行爲分析以前，我們必須有一些假設或公理作爲分析準則。這些假設被稱爲理性行爲 (rational behavior)，即我們假設消費者會在面對特定的預算限制下，選擇具有最大效用的行爲，或是當目標確定時，會選擇成本最少的行爲方式。經濟學中所謂的「理性」，並非指經濟個體自利 (self-interest) 或是貪婪等情緒層面的特質，而是假設我們有能力認定某一項商品組合是否優於另一項商品組合，進而在偏好顯示下，選擇具有較高效用的組合。

爲了更好分析，通常使用 $\succ$ 符號代表我們對某一商品組合嚴格偏好 (strictly prefers) 於另一個商品組合，例如 $(x_1, y_1) \succ (x_2, y_2)$ 表示 (x_1, y_1) 組合優於 (x_2, y_2) 組合。另外若表示兩種商品組合滿足無差異 (indifferent)，例如 $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$，表示 (x_1, y_1) 組合主觀上讓消費者的滿足感與 (x_2, y_2) 組合相同，表示兩商品組合無差異。基於以上偏好關係，我們可以建立一套描述理性偏好的基本公理:

1.1.1 完整性公理 (Completeness)

定義 1.1 — 完整性公理

在 (p_x^0, p_y^0, M_0) 的預算條件下，消費者存在 $A(x_0, y_0)$ 與 $B(x_1, y_1)$ 兩商品組合可選擇，則必然發生 $A \succ B$ 或 $B \succ A$ 或 $A \sim B$，三種組合中必只僅有一組會成立，且不可能皆不成立，此稱爲完整性公理成立。

亦即消費者可明確判斷商品組合的偏好順序，否則便消費者無法明示偏好順序，則選擇將變得困難且不具完整性公理的假設。

惟在現實生活中，完整性公理不一定會成立，例如當你是一位美國 MLB 棒球的教練，設 x 爲打擊率，y 爲全壘打的數量，你如果面對 A、B 兩個球員且 A 球員爲 $(x_0, y_0) = (0.375, 10)$ 而球員 B 爲 $(x_1, y_1) = (0.250, 50)$，A 打擊率遠高於 B 表示其上壘次數會比較多，而 B 的全壘打數卻遠高於 A，顯示 B 的關鍵一擊可能會改變戰局，此時你可能會難以選擇。但在序列效用分析過程中，一定要假設完整性公理要成立，否則我們無法進行效用函數與比較分析。

1.1.2 反身性公理 (Reflexivity)

定義 1.2 — 反身性公理

表示 $(x_0, y_0) \sim (x_0, y_0)$，表示對消費者而言，任一 A 商品組合與同一 A 商品組合一樣好，簡單而言，反身性公理就是自己 (商品組合) 就是自己。

反身性一般皆出現於說明過程，故在本章分析過程中比較少用到。

1.1.3 遞移性公理 (Transitivity)

定義 1.3 — 遞移性公理

在 (p_x^0, p_y^0, M_0) 的預算條件下，若消費者存在 $A(x_0, y_0)$ 與 $B(x_1, y_1)$ 與 $C(x_2, y_2)$ 三種商品組合可以選擇，則在下任一條件成立時，我們皆稱爲 $A \succ C$:
(A) $A \succ B$ 且 $B \succ C$
(B) $A \sim B$ 且 $B \succ C$
(C) $A \succ B$ 且 $B \sim C$
另外若 $A \sim B$ 且 $B \sim C$，則依據遞移性公理則 $A \sim C$ 亦會成立。遞移性公理在現實社會裡有時難以成立，但在經濟分析中，如果遞移性公理不成立，即消費者將無法找到最佳選擇。

當我們假設 $x \succ y$ 可對應以效用函數 $U(x) > U(y)$，此處 $U(\cdot)$ 代表效用函數 (水準)。

1.1.4 單調性公理 (Monotonicity)

定義 1.4 — 單調性公理

如果我們假設所有商品皆爲喜好品 (goods)，當消費者所消費的商品數量愈多其效用愈高，即假設滿足單調性公理，亦即單調性公理只要成立，就自動表示消費者之消費行爲無飽和點 (non-satiation) 的限制，此處的飽和點是指當消費者消費至某一特定商品組合時，當商品消費提升，反會使得消費者的效用下降，以致於最適存在有飽和點的限制，以利確保在有效的模型框架中仍有較佳的狀況，藉此一商品組合就會被視爲最有效的消費狀況。

以圖形而言，我們通常假設消費者更偏好位於右上方的商品組合。因此，我們通常假設消費者消費的是有利於他們效用增加的商品，而非會降低效用下降的有害品。

單調性公理是指在 (p_x^0, p_y^0, M_0) 的條件下，若消費者存在 $A(x_0, y_0)$ 與 $B(x_1, y_1)$ 兩商品組合可以選擇，則

1. 當 $x_0 > x_1$ 且 $y_0 > y_1$ 時；或
2. 當 $x_0 \geq x_1$ 且 $y_0 > y_1$ 時；或
3. 當 $x_0 > x_1$ 且 $y_0 \geq y_1$ 時

上述任一條件成立時，皆稱爲 $A(x_0, y_0) \succ B(x_1, y_1)$。

1.1.5 凸性公理 (Convexity)

定義 1.5 — 凸性公理

凸性公理前提爲，我們先要介紹凹函數 (concave function) 的觀念。在經濟分析中要討論的凹函數，有單變數函數的凹函數與多變數函數的凹函數。集中在函數 $z = f(x)$ 且令 $\bar{x} = \theta \cdot x_0 + (1 - \theta) \cdot x_1$，當 $0 < \theta \leq 1$ 時，凹函數的分類如下:

(A) 若 $f(\bar{x}) \geq \theta \cdot f(x_0) + (1 - \theta) \cdot f(x_1)$ 成立時，則稱 z 爲*凹函數* (concave function)

(B) 若 $f(\bar{x}) > \theta \cdot f(x_0) + (1 - \theta) \cdot f(x_1)$ 成立時，則稱 z 爲*嚴格凹函數* (strictly concave function)

(C) 若 $f(\bar{x}) \leq \theta \cdot f(x_0) + (1 - \theta) \cdot f(x_1)$ 成立時，則稱 z 爲*弱凹函數* (weakly concave function)

(D) 若 $f(\bar{x}) = \theta \cdot f(x_0) + (1 - \theta) \cdot f(x_1)$ 成立時，則稱 z 爲*準凹函數*

故當加權的函數值大於函數值的加權時，此即爲凹函數。

另一種判斷函數是否具有凸性或是否爲凹函數的方法，可將兩商品組合的連線 (加權平均商品組合) 視其是否完全落於弱偏好集合之中，如下圖中 A 我們稱爲凹函數或稱爲具有凸性 (convex)，圖 B 亦爲凹函數，圖 C 則稱其函數爲凸函數 (convex function) 或稱爲具有凹性 (concave)。

1.1.6 連續性公理 (Continuity)

定義 1.6 — 連續性公理

在經濟學所研究的商品，事實上大都難以細微分割，但表示於圖形上，會導致線條非曲線，因此爲方便起見，以連續性假設商品可以任意分割。

連續性公理確保了效用函數的數學性質，使我們能夠使用微積分工具進行分析。在現實中，許多商品確實是離散的 (如汽車、房屋)，但連續性假設簡化了分析過程，且在大部分情況下不會顯著影響結論的有效性。

1.1.7 小結

上述五個公理共同構成了消費者理性行爲的基礎假設。完整性與遞移性確保偏好排序的邏輯一致性，反身性提供基本的邏輯起點，單調性反映了「多即是好」的基本假設，而凸性則隱含了邊際效用遞減和風險趨避的行爲特徵。連續性公理則爲數學分析提供了技術基礎。

透過這些公理的建立，我們能夠將主觀的消費者偏好轉化爲客觀的數學表達，爲後續的效用函數建構和最適化分析奠定堅實的理論基礎。

1.2 無異曲線

無異曲線 (indifferent curve) 的定義爲，在其他情況 (價格) 不變，清費者消費 x 及 y 兩商品 (亦可推廣至多種商品)，在維持其效用水準不變下，兩種商品間可以互換的效用水準爲爲某一特定常數，我們以下表的五種 (x, y) 組合來說明：若 x, y 兩商品皆爲喜喜好品，表中所列的商品組合 $(x, y) = (1, 12)$、此組合與 $(2, 8)$、$(3, 5)$、$(4, 3)$ 與 $(5, 2)$ ，當該給消費者具有相同 U_0 水準的滿足感，則將這些組合表示於座標上所形成的曲線，稱爲無異曲線。

組合	A	B	C	D	E
x	1	2	3	4	5
y	12	8	5	3	2

上圖中的無異曲線，在利用連續性假設後，一般我們將無異曲線畫成圖形的曲線，在同一條無異曲線上的各種商品組合，皆代表對消費者而言相同的一特定水準上所有構其爲無異曲線類型 U_0；圖形上的 F 點商品組合 $(x, y) = (3, 8)$ 依照單調性公理其效用必滿足 $(2, 8)$ 與 $(3, 5)$ 兩商品組合，因此通過 $(3, 8)$ 而且與 $(3, 5)$ 具有相同效用水準 U_1 的無異曲線可能如圖中紅色線條所示。在滿足之前所談有關描述偏好的行爲公理，在 x 與 y 兩商品皆爲喜好品的假設下，則無異曲線的特性有:

1.2.1 無異曲線的基本特性

平面上存在無限多條無異曲線

如上圖所示，紅色線條與藍色線條分別可再分出效用值介於 U_0 與 U_1 的無異曲線，因此平面上存在無限多條表達出各種不同效用值的無異曲線。

負斜率

當兩商品皆爲喜好品時，爲了維持效用水準固定不變，增加一商品的消費必須減少另一商品的消費，即依據單調性公理兩種商品都同時增加或減少，因此無異理，消費者的效用水

準必定也同時上升或下降，而無法維持效用無異。因此無異曲線爲負斜率。

定義 1.7 — 邊際替代率

邊際替代率 (marginal rate of substitution, MRS) 指在兩種財貨組合 x 與 y 及維持效用不變的條件下，消費者每得到額外一單位 x 之後要而必須放棄 y 的數量，以 MRS_{xy} 表示，其計算方式爲:

$$MRS_{xy} = -\frac{dy}{dx}\bigg|_{\bar{U}}$$

其中下標 $\bar{U}$ 表示效用維持固定。

利用效用函數 $U = U(x, y)$，對其全微分得:

$$\begin{aligned} dU = 0 &= \frac{\partial U}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot dy \\ \Rightarrow 0 &= MU_x \cdot dx + MU_y \cdot dy \\ \Rightarrow \frac{dy}{dx} &= \frac{MU_x}{MU_y} = MRS_{xy} \end{aligned}$$

其中 $dU = 0$ 的原因在於求無異曲線的 MRS_{xy} 必須是效用水準的變動值爲零。由上得知，MRS_{xy} 爲兩商品消費至最後一單位時的邊際效用函數值相除。邊際替代率 MRS_{xy} 的用途，爲可搭配效用函數來點出無異曲線的形狀，底下舉例說明。

例題 1.1 — 無異曲線斜率計算

設效用函數爲 $U(x, y) = x^2y^2$，則其無異曲線的形狀爲何？

愈往右上，效用愈高

若 x 與 y 兩商品皆爲喜好品，則單調性公理將保證愈往右上方向，x 與 y 的商品數量愈多效用愈高，愈往左下方向表示 x 與 y 商品偏好愈高的方向，且 U_1 大於 U_0。

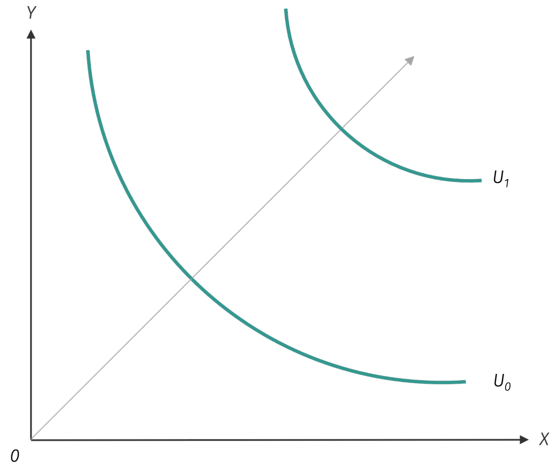

圖 1: 效用函數越往右上效用越高

任兩條無異曲線不相交[1]

設無異曲線可以相交，如下圖中之 U_0 與 U_1。假設 A 點與 B 點位於同一無異曲線 U_0 上，所以 A 點與 B 點的效用無異，且 A 點與 C 點位於同一無異曲線 U_1 上，所以 A 點與 C 點的效用無異。

利用遞移性公理，B 點的 x 數量大於 C 點的 x 數量一樣，且 B 點的 y 數量會大於 C 點的 y 數量，可知 B 點效用會大於 C 點。

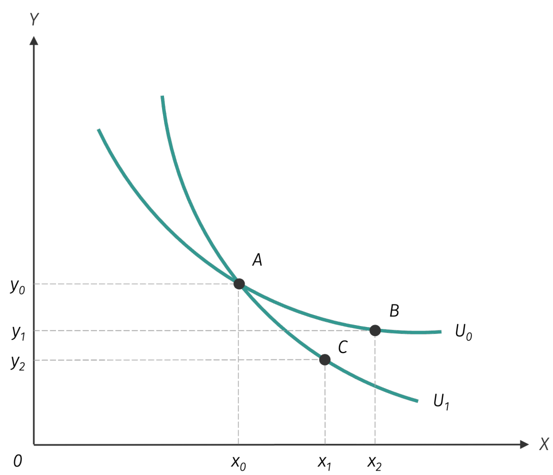

圖 2: 任兩條無異曲線不相交

圖形中顯示，B 點的 x 數量大於 C 點的 x 數量，且 B 點的 y 數量大於 C 點的 y 數量，因此利用單調性公理，我們有 B 點比 C 點的效用一致，產生矛盾，代表原假設有誤，故任兩

[1]任兩條無異曲線不可相交，是同一人且在同一時期的無異曲線不可相交。但是針對不同人之間的無異曲線，或同一人但不同時期的無異曲線則可以相交。

條無異曲線不可相交。

無異曲線會呈凸向原點

無異曲線會呈凸向原點的特性，是由於邊際效用遞減法則所致。

定義 1.8 — 邊際效用遞減法則

邊際效用遞減法則係指在一般情況下，消費者爲維持一定的效用水準，以某一特定 x 商品來替換 y 商品，通常會隨著 x 商品的數量增加，所願意犧牲的 y 商品數量會隨之減少。

下圖中由 A 點到 B 點，當消費者多消費一單位 x 商品，此時在維持 U_0 效用水準下，消費者必須犧牲 Δy_1 的 y 商品數量，而當消費者再次增加一單位 x 商品的消費 (B 點到 C 點)，此次 x 商品的消費所帶給消費者的邊際效用將不若前一單位 x 商品的邊際效用，因此在維持 U_0 效用水準下，消費者此次僅需犧牲較少的 y 商品數量可，意味著 Δy_2 必小於 Δy_1 的 y 商品數量。此會會導致隨著 x 商品數量愈多效用下降，此會會導致邊際替代率 MRS_{xy} 遞減，而呈現無異曲線會呈現凸向原點的特性，此時就導致邊際替代率遞減法則 (the law of diminishing MRS_{xy})。無異曲線會具有凸向原點的特性，此時就導致邊際替代率遞減法則成立的結果。

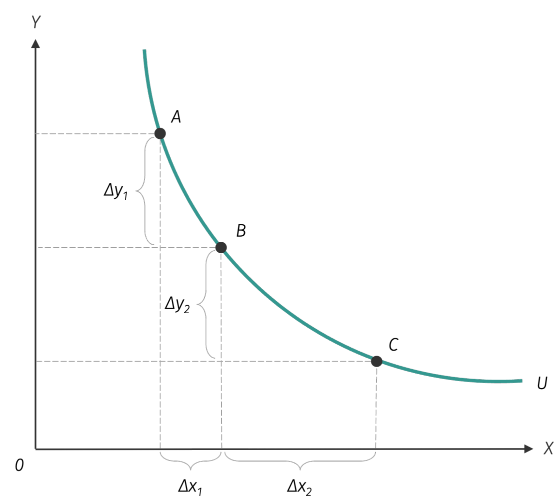

圖 3: 無異曲線會凸向原點

例題 1.2 — 邊際效用遞減與邊際替代率遞減

是否當所有商品的邊際效用遞減法則皆成立時，會隱含無異曲線的邊際替代率遞減法則亦會成立？如果設效用函數爲 $U = U(x, y)$ 且滿足 $U_x > 0$、$U_{xx} < 0$、$U_y > 0$、$U_{yy} < 0$，亦即 x 與 y 商品皆爲喜好商品且邊際效用皆隨消費量增加而遞減，另無異曲

線的斜率可表達爲

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{MU_x}{MU_y} = -\frac{U_x}{U_y}$$

$$U_x = U_x(x,y) = \frac{\partial U}{\partial x} = MU_x(x,y) > 0, U_{xx} = \frac{\partial U_x}{\partial x} = \frac{\partial MU_x}{\partial x} < 0$$
$$U_y = U_y(x,y) = \frac{\partial U}{\partial y} = MU_y(x,y) > 0, U_{yy} = \frac{\partial U_y}{\partial y} = \frac{\partial MU_y}{\partial y} < 0$$

且 $MRS_{xy} = -\frac{dy}{dx} = \frac{U_x}{U_y} = \frac{U_x(x,Y(x))}{U_y(x,Y(x))}$。若隨著 x 商品消費量增加，MRS_{xy} 會隨之下降，則表示邊際替代率遞減法則成立，以數學表達即爲 $\frac{dMRS_{xy}}{dx} < 0$。底下證明成立條件:

$$\frac{dMRS_{xy}}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{U_x}{U_y}\right) = \frac{1}{U_y^2}\left[U_{xx} + U_{xy}\left(\frac{dy}{dx}\right)\right] \cdot U_y - \left[U_{yx} + U_{yy}\left(-\frac{dy}{dx}\right)\right] \cdot U_x$$

$$= \frac{1}{U_y^2}\left[U_{xx} + U_{xy}\left(-\frac{U_x}{U_y}\right)\right] \cdot U_y - \left[U_{yx} + U_{yy}\left(-\frac{U_x}{U_y}\right)\right] \cdot U_x$$

$$= \frac{1}{U_y^2}\left(U_{xx} \cdot U_y - U_{xy} \cdot U_x - U_{yx} \cdot U_x + U_{yy} \cdot \frac{U_x^2}{U_y}\right)$$

$$= \frac{1}{U_y^3}\left(U_{xx} \cdot U_y^2 - 2 \cdot U_{xy} \cdot U_x \cdot U_y + U_{yy} \cdot U_x^2\right)$$

利用 Young's theorem 得知 $U_{xy} = U_{yx}$，故上式可改爲

$$\frac{1}{U_y^3}\left(U_{xx} \cdot U_y^2 - 2 \cdot U_{xy} \cdot U_x \cdot U_y + U_{yy} \cdot U_x^2\right) < 0$$

上式中 $U_y^3 > 0$，所以 $\frac{dMRS_{xy}}{dx} < 0$ 隱含 $U_{xx} \cdot U_y^2 - 2 \cdot U_{xy} \cdot U_x \cdot U_y + U_{yy} \cdot U_x^2 < 0$
必須要成立，若商品邊際效用遞減法則成立，則 $U_{xx} \cdot U_y^2 < 0$ 且 $U_{yy} \cdot U_x^2 < 0$
但因爲 U_{xy} 的正負符號不確定，故無法確認 $\frac{dMRS_{xy}}{dx} < 0$，例如當 $U_{xy} < 0$，即所

- 當 $U_{xy} > 0$，亦即 $U_{xy} = \frac{dU_x}{dy} > 0$，表示消費者多消費一單位的 Y 商品，此時 x 商品的邊際效用會提升，隨含 x 與 Y 商品具有效用上的互補關係，故在 x 與 Y 商品具有效用上的互補關係時，兩商品邊際效用遞減法則成立即隱含邊際替代率遞減法則亦成立。
- 當 $U_{xy} < 0$，亦即 $U_{xy} = \frac{dU_x}{dy} < 0$，表示消費者多消費一單位的 Y 商品，此時 x 商品的邊際效用會下降，隨含 x 與 Y 商品具有效用上的替代關係，故在 x 與 Y 商品具有效用上的替代關係時，兩商品邊際效用遞減法則成立即隱含邊際替代率遞減法則亦成立。

1.3 無異曲線形狀與邊際替代率的關係

若 x 與 Y 兩商品皆為喜好商品，則無異曲線的形狀與邊際替代率的變動關係如下圖所示:

當 $\frac{dMRS_{xy}}{dx} < 0$ 時，表示在商品邊際效用遞減法則成立的條件下，並不代表邊際替代率一定會呈現遞減的形式，亦即邊際效用遞減與邊際替代率遞減法則，兩者之間並不具有互相隱含的關係。

- $\frac{dMRS_{xy}}{dx} < 0$: 無異曲線呈現凸向原點的形狀
- $\frac{dMRS_{xy}}{dx} = 0$: 無異曲線呈現直線的形狀
- $\frac{dMRS_{xy}}{dx} > 0$: 無異曲線呈現凹向原點的形狀

若 x 與 y 兩商品皆為喜好品，則無異曲線的形狀與邊際替代率的變動關係如下圖所示:

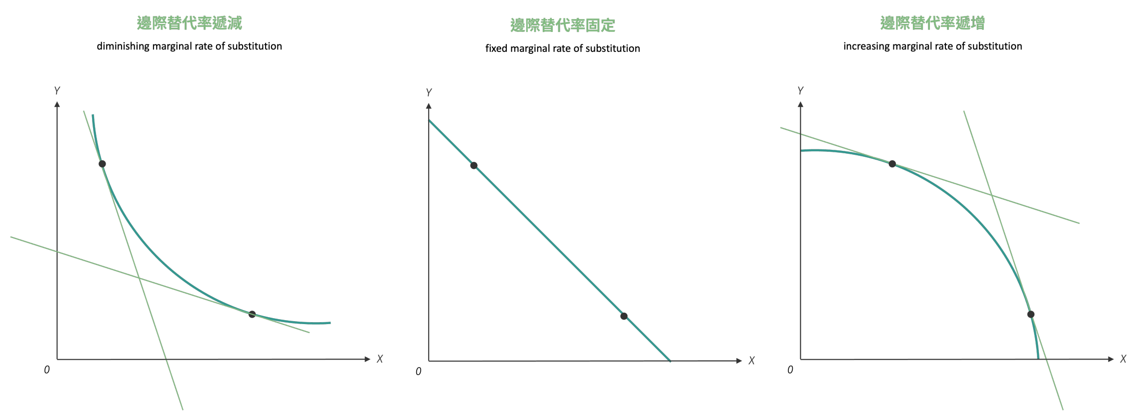

圖 4: 邊際替代率與無異曲線形狀

- 左圖: 邊際替代率呈現遞減，亦即 $\frac{dMRS_{xy}}{dx} < 0$ 成立。
- 中圖: 邊際替代率呈現固定，亦即 $\frac{dMRS_{xy}}{dx} = 0$ 成立。
- 右圖: 邊際替代率呈現遞增，亦即 $\frac{dMRS_{xy}}{dx} > 0$ 成立。

1.4 效用函數之單調遞增轉換

序列效用分析仍延續計數效用分析中之效用函數水準的偏好，在計數效用分析中的效用水準有一意義，例如當我們說效用水準為 10 util 與 20 util 可將後者的滿足感是前者滿足感的兩倍，效用水準的數字本身有絕對的觀念。

但在序列效用分析之中，用以代表效用水準的函數中皆為相對對照 (relative magnitude) 的觀念，就像是我們在測量溫度時，可採用攝氏 (Celsius) 或華氏 (Fahrenheit) 來量，0°C 等於 32°F，100°C 等於 212°F，亦好像我們在測量距離時，可採用公尺 (meters) 或英尺 (feet) 來衡量。效用水準就像上述的相對量一樣，不同的衡量基準會導致數字不同，這也不影響函數本身具有相同間好的消費者。你現在有多快樂？乙回答:「我現在很有幸福快樂。」甲回答:「乙會回答:『我現在在萬分快樂。』」其中的甲的『十分』與乙的『萬分』，其實可能表達

出一樣的滿足感。這隱含不同的效用函數可能可以表達出相同的價好水準，但其順序不同的效用水準的數字不同。

定義 1.9 — 單調轉換

單調轉換 (monotonic transformation)，代表隨著不同的效用函數之效用值之間具有正/負相關。設效用函數 $U = U(x, y)$，則存在另一效用函數 $V = f(U) = f[U(x, y)]$。

- 若 $\frac{dV}{dU} = f'(U) > 0$，稱 V 爲 U 之單調遞增轉換 (monotonic increasing transformation)。亦即兩個函數之間若互爲單調遞增轉換時，則兩函數的無異曲線形狀會相同，但偏好方向相同，但相同商品組合的效用值不會相同。
- 若 $\frac{dV}{dU} = f'(U) < 0$，稱 V 爲 U 之單調遞減轉換 (monotonic decreasing transformation)，亦即兩個函數之間若互爲單調遞減轉換時，則兩函數的無異曲線形狀會相同，但偏好方向相反，但相同商品組合的效用值不會相同。

假設現存在消費者 A，其效用函數爲 $U = xy$，由 $MU_x = \frac{\partial U}{\partial x} = y$，$MU_y = \frac{\partial U}{\partial y} = x$，可得 $MRS_{xy} = \frac{MU_x}{MU_y} = \frac{y}{x}$，亦隱含無異曲線的斜率爲 $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$。再配合效用函數 $U = xy$，我們可以畫出無異曲線的形狀爲

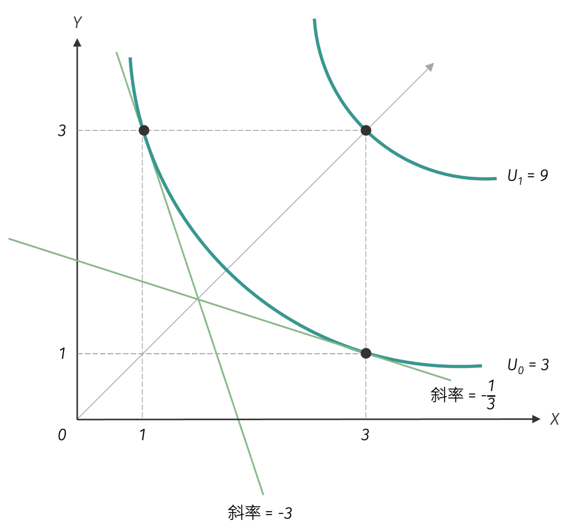

圖 5: 限量政策

若存在另一消費者 B，其效用函數爲 $V = 2xy$，由 $MU_x = \frac{\partial V}{\partial x} = 2y$，$MU_y = \frac{\partial V}{\partial y} = 2x$，可得 $MRS_{xy} = \frac{MU_x}{MU_y} = \frac{y}{x}$，亦隱含無異曲線的斜率爲 $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$。再配合效用函數 $V = 2xy$，我們可以畫出無異曲線的形狀爲

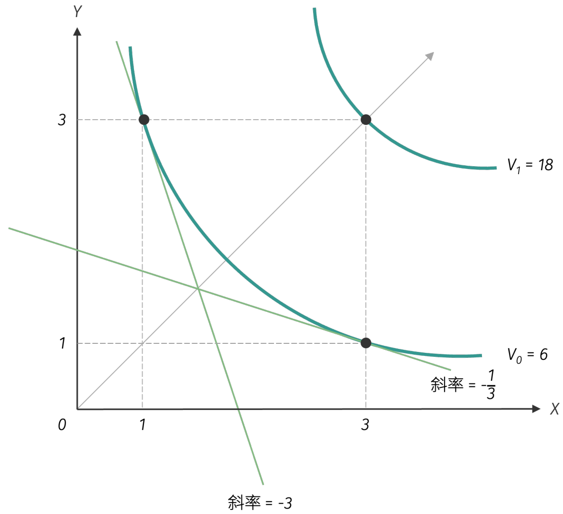

圖 6: 單調遞增轉換消費者 B

若存在一消費者 C，其效用函數為 $w = \frac{1}{xy}$，由 $MU_x = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{-1}{x^2 y}$，$MU_y = \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{-1}{xy^2}$，可得 $MRS_{xy} = \frac{MU_x}{MU_y} = \frac{y}{x}$，亦隱含無異曲線的斜率為 $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$。再配合效用函數 $w = \frac{1}{xy}$，我們可以畫出無異曲線的形狀為

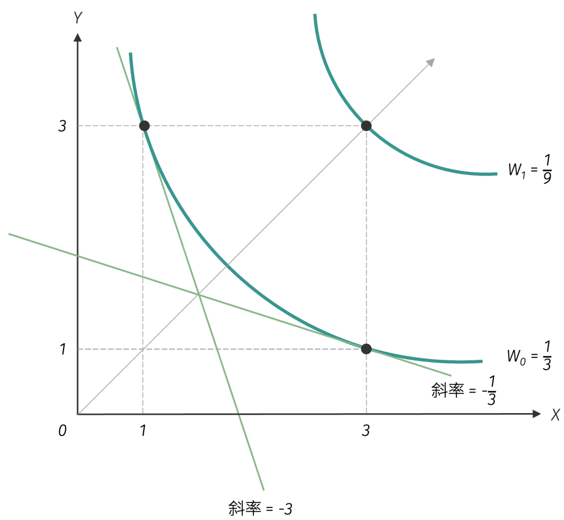

圖 7: 單調遞增轉換消費者 C

我們可以發現三位消費者的無異曲線群完全相同，僅效用水準值有異，因此三者的效用函數互為彼此的單調遞增轉換。如下表所示，前述 A、B 與 C 三位消費者，在不同消費組合下的效用水準如下:

商品組合 (x, y)	A 的效用水準	B 的效用水準	C 的效用水準
$(x, y) = (1, 1)$	$U_1 = 1$ util	$V_1 = 2$ util	$W_1 = 1$ util
$(x, y) = (2, 2)$	$U_2 = 4$ util	$V_2 = 8$ util	$W_2 = 1/4$ util
$(x, y) = (3, 3)$	$U_3 = 9$ util	$V_3 = 18$ util	$W_3 = 1/9$ util

例題 1.3 — 單調遞增轉換函數

下列那些效用函數爲效用函數 $U(x, y) = xy$ 的單調遞增轉換函數?

1. $V(x, y) = 2xy$
2. $W(x, y) = \frac{1}{xy}$
3. $Z(x, y) = xy + 10$
4. $A(x, y) = xy - 10$
5. $B(x, y) = 10 - xy$
6. $C(x, y) = x^2y^2$
7. $D(x, y) = x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$
8. $E(x, y) = \ln(xy)$
9. $F(x, y) = x^3y^3$
10. $H(x, y) = \ln x + \ln y$

表 3: 原效用函數、單調遞增轉換的函數與單調遞減轉換函數之間的關係

與原效用函數比較	單調遞增轉換	單調遞減轉換
效用函數	不同	不同
邊際效用函數	不同	不同
邊際替代率函數	相同	相同
無異曲線的形狀	相同	相同
偏好方向	相同	相反

定義 1.10 — 齊序函數

若效用函數 $U = U(x, y)$ 爲一階齊次函數，則效用函數透過單調遞增轉換所構成的效用函數版稱爲齊序函數 (homothetic function)。
當效用函數 $U = U(x, y)$ 具有一階齊次的數的特性時，則表示下式會成立:

$$\lambda U = U(\lambda x, \lambda y)$$

令 $\lambda = \frac{1}{x}$，可得 $\frac{U}{x} = U\left(1, \frac{y}{x}\right)$，或可整理爲 $U = x \cdot u\left(\frac{y}{x}\right)$，則我們可計算出

$$MU_x = \frac{\partial U}{\partial x} = u\left(\frac{y}{x}\right) + u'\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \frac{-y}{x^2} \cdot x = u\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \frac{y}{x} \cdot u'\left(\frac{y}{x}\right)$$
$$MU_y = \frac{\partial U}{\partial y} = x \cdot u'\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \frac{1}{x} = u'\left(\frac{y}{x}\right)$$

故可得 $MRS_{xy} = \frac{MU_x}{MU_y} = \frac{u\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \frac{y}{x} \cdot u'\left(\frac{y}{x}\right)}{u'\left(\frac{y}{x}\right)} = f\left(\frac{y}{x}\right)$，此顯示效用函數具有一階齊次的特性時，在相同射線下的不同無異曲線，其 MRS_{xy} 數值會相同的特性。

求算單調遞增轉換之齊序效用函數 $V = F(U) = F[U(x,y)]$ 的 MRS_{xy} 函數，則

$$MRS_V = \frac{f' \frac{\partial U}{\partial x}}{f' \frac{\partial U}{\partial y}} = \frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{\frac{\partial U}{\partial y}} = \frac{MU_x}{MU_y} = MRS_U$$

我們會發現其 MRS_{xy} 與原效用函數相同，故亦表示齊序效用函數亦具有在相同射線下的不同無異曲線，其 MRS_{xy} 數值會相同的特性。

1.5 各類效用函數

在現實生活中，不同消費者面對商品選擇時展現出截然不同的偏好模式：有些人認爲咖啡與茶完全可以互相替代，有些人則堅持左脚穿左鞋、右脚穿右鞋的固定搭配。看似個人化的消費習慣，實際上反映了深層的偏好結構差異。經濟學透過構建不同類型的效用函數來精確刻畫這些偏好特徵，每一種效用函數都是理解特定消費行爲的數學工具，爲消費者理論提供了豐富的分析框架，並奠定後續消費者選擇之理論基礎。

1.5.1 飽和效用函數

當消費者對 x 與 y 兩商品的消費組合爲 (x_0, y_0) 時的效用達到極大。

- 當任一商品消費數量小於 x_0 或 y_0 時，商品均爲喜好品，表示此時若增加任一商品的消費數量皆會增加效用。
- 當任一商品消費數量大於 x_0 或 y_0 時，商品均爲厭惡品，表示此時若增加任一商品的消費數量皆會減少效用。

此時稱 (x_0, y_0) 爲*極樂點* (bliss point) 或是*飽和點* (satiation point)，效用函數表示爲：

$$U(x,y) = c - a(x - x_0)^2 - b(y - y_0)^2, \quad a,b,c \in \mathbb{R}^+$$

效用函數圖形如下圖所示：

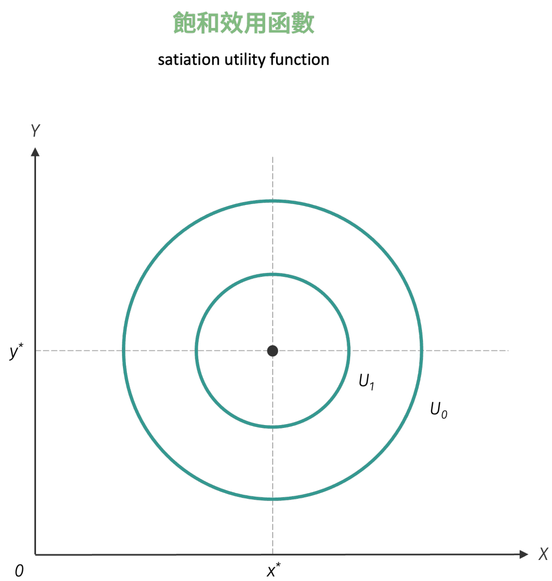

圖 8: 飽和效用函數

1.5.2 完全替代型效用函數

描述完全替代 (perfect substitutes) 型之偏好的效用函數可以用下式表達:

$$U(x, y) = ax + by$$

其中 a、b 爲大於零的常數。假設效用水準不變，且固定爲常數 c，則

- 當 $x = 0$ 時，$y = \frac{c}{b}$
- 當 $y = 0$ 時，$y = \frac{c}{a}$

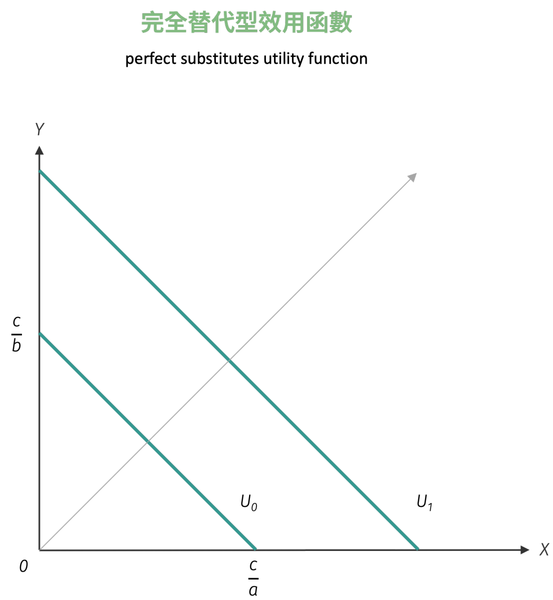

圖 9: 完全替代型效用函數

由圖可以看出，完全替代型效用函數爲一直線，故又稱爲線性 (linear) 效用函數。經過簡單計算後，可得完全替代型效用函數之邊際替代率爲

$$MRS_{xy} = \frac{a}{b}$$

邊際替代率爲常數，不符合邊際替代率遞減法則。注意到以下效用函數均爲效用函數 $U(x, y) = ax + by$ 之單調遞增轉換函數，可自行驗證。

- $V(x, y) = \sqrt{ax + by}$
- $W(x, y) = ax + by - k$
- $Z(x, y) = a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2$

1.5.3 完全互補型效用函數

若消費者偏好特殊，喜歡依特定比例搭配 x 與 y 商品，則稱其偏好爲完全互補型 (perfect complement)。以數學式表達如下:

$$U(x, y) = \min\{ax, by\}$$

上式效用函數中的 a、b 爲正的常數，其中 min 的意義爲選取括號中兩數較小者爲效用值。例如商品組合 $(10, 10)$、$(10, 11)$ 與 $(11, 10)$ 皆帶給消費者同樣爲 10 util 的效用水準。或者換句話說，當 $x = 10$ 且 $y \geq 10$ 或 $y = 10$ 且 $x \geq 10$ 時，無論另一項商品數量爲何，均不影響效用值。

如下圖所示，此種消費偏好型態必須滿足 x 與 y 兩商品爲特定數量比例消費，超過的部分如圖中所示之垂直或水平線段，不會再增加消費者的效用水準。此外，拗折點 (kinky point) 必出現在 $ax = by$ 或是 $\frac{y}{x} = \frac{a}{b}$ 之射線上。

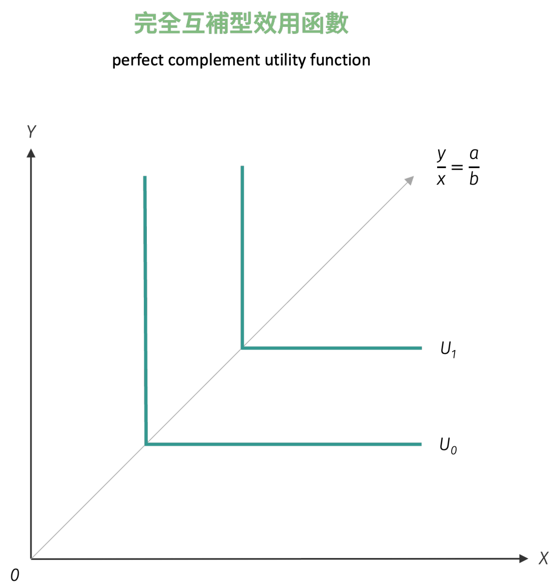

圖 10: 完全互補型效用函數

注意到此種偏好型態之邊際替代率不存在，原因在於拗折點的切線斜率可以爲任意數值，或由數學觀點而言，拗折點「不可微分」。

以下效用函數均爲效用函數 $U(x,y) = \min\{ax, by\}$ 之單調遞增轉換函數:

- $V(x,y) = k \cdot \min\{ax, by\}$
- $W(x,y) = k \cdot \min\{x, \frac{b}{a}y\}$
- $Z(x,y) = \ln \min\{ax, by\}$

1.5.4 Cobb-Douglas 效用函數

Cobb-Douglas 效用函數爲經濟學中最常見的效用函數之一，其具有良好的特性。利用數學函數表達 Cobb-Douglas 效用函數圖形如下圖所示:

$$U(x,y) = Ax^{\alpha}y^{\beta}$$

其中 A、α 與 β 均爲正的常數，A 稱爲效用因子 (utility factor)。經過簡單的計算，可以得到 Cobb-Douglas 效用函數的邊際替代率爲

$$MRS_{xy} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{y}{x}$$

根據 Cobb-Douglas 效用函數之邊際替代率可得以下特性:

邊際效用可爲遞增、固定或遞減

由兩商品的邊際效用與效用函數對該商品之二次微分:

$$U_x = \alpha A x^{\alpha-1} y^{\beta}, U_{xx} = \alpha(\alpha-1) x^{\alpha-2} y^{\beta}$$
$$U_y = \beta A x^{\alpha} y^{\beta-1}, U_{yy} = \beta(\beta-1) x^{\alpha} y^{\beta-2}$$

可得以下情況:

- 當 $\alpha > 1$ $(\beta > 1)$ 時，則 $U_{xx} > 0$ $(U_{yy} > 0)$，隱含邊際效用遞增。
- 當 $\alpha = 1$ $(\beta = 1)$ 時，則 $U_{xx} = 0$ $(U_{yy} = 0)$，隱含邊際效用固定。
- 當 $\alpha < 1$ $(\beta < 1)$ 時，則 $U_{xx} < 0$ $(U_{yy} < 0)$，隱含邊際效用遞減。

無異曲線凸向原點[2]

以 x 商品爲例，將邊際替代率對 x 進行微分後，可得

$$\begin{aligned}\frac{dMRS_{xy}}{dx} &= \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\frac{dy}{dx} \cdot x - y}{x^2} \\ &= \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{-\frac{\alpha}{\beta}\frac{y}{x} \cdot x - y}{x^2} \\ &= -\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\left(1 + \frac{\alpha}{\beta}\right) y}{x^2} < 0\end{aligned}$$

即可知無異曲線凸向原點。

無論 x 商品與 y 商品的邊際效用呈現遞增、固定或遞減，邊際替代率皆會

以下效用函數均爲效用函數 $U(x, y) = Ax^{\alpha}y^{\beta}$ 之單調遞增轉換函數:

- $V(x, y) = x^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \cdot x^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}$
- $W(x, y) = \ln(x^{\alpha}y^{\beta})$
- $Z(x, y) = \alpha \ln x + \beta \ln y$

---

[2]在證明邊際替代率是否遞減時，必須將其中一項商品視爲另一項商品的函數，而不能將其視爲常數。原因是：當某一商品的數量發生變動時，整體商品組合也隨之改變；若錯誤地將另一商品視爲常數，則無法正確反映邊際替代率隨商品組合變動而調整的特性。因此下述證明是錯誤的，請牢記於心:

$$\frac{dMRS_{xy}}{dx} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{0 \cdot x - y}{x^2} = -\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{y}{x^2} < 0$$

1.5.5 準線性效用函數

準線性效用函數 (quasi-linear utility function) 可以表達如下:

$$U(x,y)=f(x)+y \quad \text{或} \quad U(x,y)=x+f(y)$$

以前者說明，其中 $f'>0$ 且 $f''<0$。一般常見形式有:

- $U(x,y)=\ln x+y$
- $U(x,y)=\sqrt{x}+y$

準線性效用函數的邊際替代率爲 f' 之值，因此有以下特性:

無異曲線凸向原點

由邊際替代率以及二階微分可得證，請自行證明。

邊際替代率僅受一項商品數量影響

已知準線性效用函數之邊際替代率如下:

$$MRS_{xy}=f'(x)$$

顯示僅受到 x 商品數量的影響，不受 y 商品數量影響。因此當 x 商品數量固定時，所有無異曲線的邊際替代率均相同，如下圖所示:

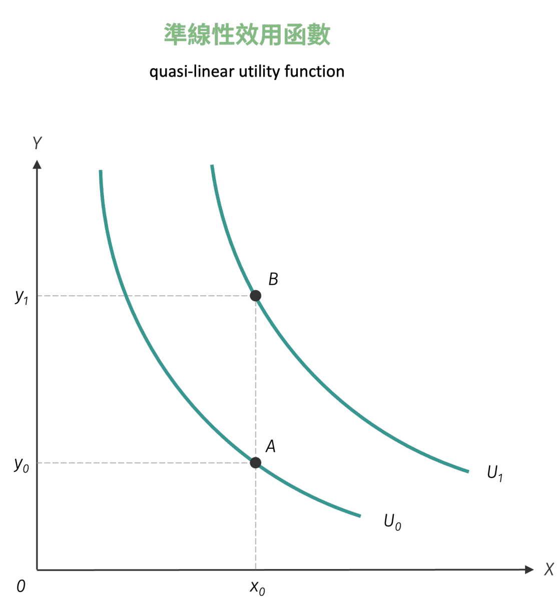

圖 11: 準線性效用函數

1.5.6 固定替代彈性效用函數

固定替代彈性效用函數 (constant elasticity of substitution utility function, CES utility function) 是暨 Cobb-Douglas 效用函數，另一個常見的效用函數形式，其效用函數形如:

$$U(x,y)=A\cdot\left[\delta\cdot x^{-\rho}+(1-\delta)y^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}}$$

上式中的 $A>0$，$\delta\in[0,1]$，$-1<\rho\neq 0$，其中 A 爲效用因子 (與 Cobb-Douglas 效用函數的相同)，δ 爲分配因子 (distribution parameter)，ρ 則是替代因子 (substitution parameter)。由上式可求算出 x 與 y 兩商品的邊際效用爲:

$$\begin{aligned}
MU_x&=A\cdot\left(-\frac{1}{\rho}\right)\left[\delta\cdot x^{-\rho}+(1-\delta)y^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}-1}\cdot\delta\cdot(-\rho)\cdot x^{-\rho-1}\\
MU_y&=A\cdot\left(-\frac{1}{\rho}\right)\left[\delta\cdot x^{-\rho}+(1-\delta)y^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}-1}\cdot(1-\delta)\cdot(-\rho)\cdot y^{-\rho-1}
\end{aligned}$$

因此由邊際效用可求算固定替代彈性效用函數之邊際替代率爲

$$MRS_{xy}=\frac{\delta}{1-\delta}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)^{1+\rho}$$

固定替代彈性效用函數的一項特性是，當替代因子 ρ 大小不同時，會轉變成前述已知的效用函數形式。

$\rho\to -1$

當 $\rho\to -1$ 時，CES 效用函數轉變爲完全替代型效用函數或稱線性效用函數。

$$\begin{aligned}
\lim_{\rho\to -1}U(x,y)&=\lim_{\rho\to -1}A\cdot\left[\delta\cdot x^{-\rho}+(1-\delta)y^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}}\\
&=\lim_{\rho\to -1}A\cdot\left[\delta\cdot x^{-(-1)}+(1-\delta)y^{-(-1)}\right]^{-\frac{1}{-1}}\\
&=\lim_{\rho\to -1}A\cdot[\delta\cdot x+(1-\delta)y]^{1}\\
&=A\cdot[\delta\cdot x+(1-\delta)y]
\end{aligned}$$

$\rho\to 0$

當 $\rho\to 0$ 時，CES 效用函數轉變爲 **Cobb-Douglas 效用函數**。令:

$$f(\rho)=-\frac{1}{\rho}\ln\left[\delta\cdot x^{-\rho}+(1-\delta)y^{-\rho}\right]$$

則原效用函數可寫爲 $U(x,y)=A\cdot e^{f(\rho)}$，當 $\rho\to 0$ 時:

$$\lim_{\rho\to 0} f(\rho) = \lim_{\rho\to 0} \frac{-\ln\left[\delta\cdot x^{-\rho} + (1-\delta)y^{-\rho}\right]}{\rho}$$

由於分子分母均趨於 0，使用 L'Hôpital 法則:

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\rho\to 0} \frac{-\frac{d}{d\rho}\ln\left[\delta\cdot x^{-\rho} + (1-\delta)y^{-\rho}\right]}{1} \\
&= \lim_{\rho\to 0} \frac{-\frac{\delta\cdot x^{-\rho}(-\ln x)+(1-\delta)\cdot y^{-\rho}(-\ln y)}{\delta\cdot x^{-\rho}+(1-\delta)y^{-\rho}}}{1} \\
&= \lim_{\rho\to 0} \frac{\delta\cdot x^{-\rho}\ln x + (1-\delta)\cdot y^{-\rho}\ln y}{\delta\cdot x^{-\rho} + (1-\delta)y^{-\rho}} \\
&= \frac{\delta\ln x + (1-\delta)\ln y}{\delta + (1-\delta)} \\
&= \delta\ln x + (1-\delta)\ln y \\
&= \ln(x^{\delta}y^{1-\delta})
\end{aligned}$$

因此:

$$\begin{aligned}
\lim_{\rho\to 0} U(x,y) &= A\cdot e^{\ln(x^{\delta}y^{1-\delta})} \\
&= A\cdot x^{\delta}y^{1-\delta}
\end{aligned}$$

此即為 Cobb-Douglas 效用函數，表示兩商品具有單位替代彈性。

$\rho\to\infty$

當 $\rho\to\infty$ 時，CES 效用函數轉變為完全互補型效用函數。當 $\rho\to\infty$ 時，考慮 $x^{-\rho}$ 和 $y^{-\rho}$ 的行為:

$$\lim_{\rho\to\infty}\left[\delta\cdot x^{-\rho} + (1-\delta)y^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}}$$

不失一般性 (without loss of generality, WLOG), 假設 $x < y$, 則當 $\rho\to\infty$ 時, $x^{-\rho}\to\infty$ 且 $y^{-\rho}\to 0$。因為 $x^{-\rho}$ 項會主導整個括號內的表達式，所以:

$$\begin{aligned}
\lim_{\rho\to\infty}\left[\delta\cdot x^{-\rho} + (1-\delta)y^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}} &= \lim_{\rho\to\infty}\left[\delta\cdot x^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}} \\
&= \lim_{\rho\to\infty}\delta^{-\frac{1}{\rho}}\cdot x \\
&= 1\cdot x = x
\end{aligned}$$

類似地，若 $y < x$，則極限為 y。因此，當 $\rho\to\infty$ 時:

$$\lim_{\rho\to\infty} U(x,y) = A\cdot\min\{x,y\}$$

此即爲 Leontief 效用函數，表示兩商品爲完全互補品，消費者總是以固定比例消費兩商品。

1.5.7 Stone-Geary 效用函數

Stone-Geary 效用函數的函數型態爲

$$U(x, y) = (x - x_0)^{\alpha}(y - y_0)^{\beta}$$

式中的 (x_0, y_0) 可視爲消費者維持基本生活的消費商品組合，且消費者對於 x 或 y 商品的消費數量必須超過基本水準方能獲得正效用。經過計算，可得 Stone-Geary 效用函數的邊際替代率爲

$$MRS_{xy} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

Stone-Geary 效用函數之圖形如下所示:

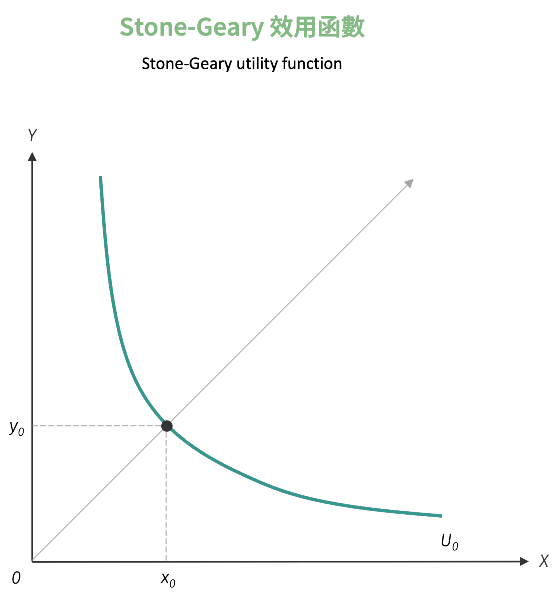

圖 12: Stone-Geary 效用函數

2 預算限制式

走進便利商店挑選飲料時，你心中可能同時浮現兩種聲音：一是對各式商品的渴望，二是對錢包厚度的現實考量。這個日常場景完美詮釋了經濟學的基本矛盾——無窮慾望與有限資源的對峙。預算限制式正是這種資源稀缺性的數學表達，它如同一條無形的繩索，將消費者的選擇空間框定在現實可行的範圍內。透過價格機制與所得水準的約束，預算限制式 (budget contraint) 或稱爲消費可能曲線 (consumption possibility curve) 不僅決定了消費者的可購買商品組合，更深層地影響著整個市場的資源配置效率。

在分析消費者所面對的無異曲線時，是假設消費者主觀上對於特定商品組合之偏好程度，同條無異曲線上的商品組合皆代表消費者相同程度的滿足感。但在現實中，不同的消費者面對不同的商品價格與相同的所得，不同商品組合的消費支出恰巧會不同，表示並非所有的商品組合對消費者而言皆爲預算限制式的概念，來表示消費者在既定商品價格與所得水準下，有能力購買的各種商品與消費組合即是預算限制式。

一般我們分析在消費者面對 x 與 y 兩商品其所有可能購買組合的方程式，以數學表達爲

$$p_x \cdot x + p_y \cdot y \leq M$$

當然亦可推廣爲多商品的分析，一般而言，在經濟學中爲簡化分析，經常假設商品的狀況，其中一個爲分析中所主要分析的商品，另一個則稱爲合成商品 (composite good)，同學可將其視爲是其他商品的加權組合。例如分析在 N 種商品時則預算限制式爲

$$p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + p_3 x_3 + \cdots + p_N x_N \leq M$$

可簡化運算爲

$$p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot \left(x_2 + \frac{p_3}{p_2} x_3 + \cdots + \frac{p_N}{p_2} x_N \right) \leq M$$

並且若設 $x_1 = x$，則

$$\left(x_2 + \frac{p_3}{p_2} x_3 + \cdots + \frac{p_N}{p_2} x_N \right) = y$$

則 N 種商品之預算限制式與兩商品之預算限制式其實相同。

利用兩商品的預算限制式，我們取等號 (支出等於所得，表示所得完全支出) 可將其轉換爲

$$y = \frac{M}{p_y} - \frac{p_x}{p_y} \cdot x$$

此式如果劃在 x-y 平面上，當消費者完全不消費 y 商品時，x 商品最多可消費 $\frac{M}{p_x}$ 數量，故 x 軸截距爲 $\frac{M}{p_x}$，同理當消費者完全不消費 x 商品時，y 商品最多可消費 $\frac{M}{p_y}$ 數量，y 軸截距爲 $\frac{M}{p_y}$。此一線性直線方程式的斜率爲 $-\frac{p_x}{p_y}$，顯示出兩商品的相對價格比率。因此若預算限制式意涵表示兩商品之間的相對價格下跌，反之預算限制式變得更平坦。

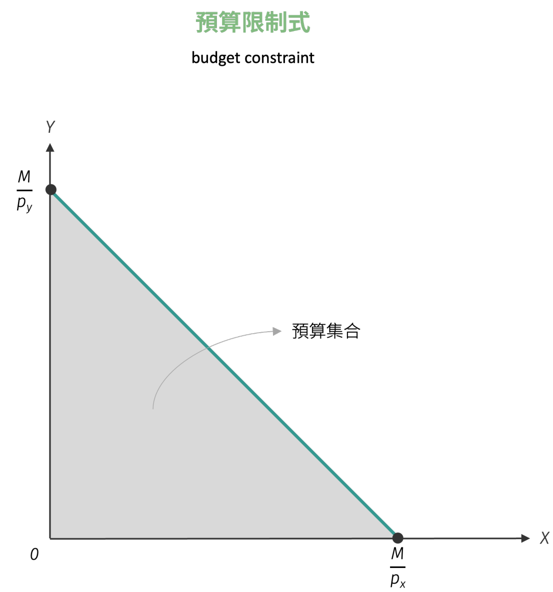

圖 13: 預算限制式

利用簡單的代數運算，底下的過程可以輕易地說明預算限制式的斜率。原預算限制式 $p_x \cdot x + p_y \cdot y = M$，在所得及商品相對價格不變之下，消費者欲改變 x 與 y 之消費量，即 x 消費變動 Δx 單位，y 消費變動 Δy 單位，當然此處之 Δx 與 Δy 之正負號必爲相反，即 $p_x \cdot (x + \Delta x) + p_y \cdot (y + \Delta y) = M$。利用後式減去前式，可得 $p_x \cdot \Delta x + p_y \cdot \Delta y = 0$，經過移項整理即得 $\frac{\Delta x}{\Delta y} = -\frac{p_y}{p_x}$。

預算限制式的斜率爲 $-\frac{p_x}{p_y}$，其經濟意義在於，當消費者面對一定的所得及商品價格下消費 x 與 y 兩商品，若消費者爲多購買一單位的 x 商品，就必須放棄此斜率值的 y 商品數量，這樣的觀念經濟學家通常稱爲消費者消費某商品的*機會成本* (opportunity cost)。機會成本的概念簡單而言即爲消費者消費某定商品所必須放棄的其他商品數量，我們會在以下章節中再詳細介紹。至此我們應可瞭解，無異曲線是描述消費者「主觀」的偏好，而預算限制式則是說明了消費者在市場上「客觀」的商品選擇條件。

2.1 預算限制變動

瞭解了預算限制式的意義後，接著我們來看預算限制式的變動。當商品價格或消費者所得變動後，消費者所能夠購買的商品組合亦應該有所變動，或者預算集合會有所變動。底下我們分列出各種變動狀況分析

2.1.1 特定商品價格變動

當消費者的所得及 y 商品價格不變下，x 商品的價格由 p_x^0 下跌至 p_x^1，則此時消費者所能購買的最大 y 商品數量 (縱軸截距) 不受影響，但是 x 商品的最大購買量會增加，亦即 x 商

品價格下跌會導致預算限制式向外旋轉，使得預算集合擴大，並導致預算限制式斜率變得更加平坦。

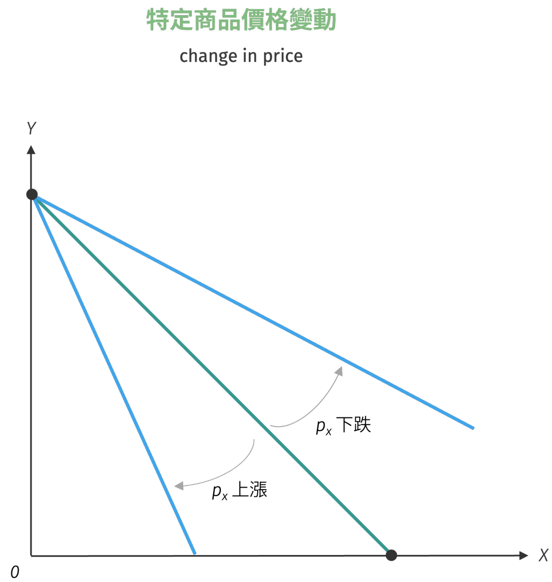

圖 14: 特定商品價格變動

2.1.2 所得變動或商品相對價格同方向同比例變動

當商品價格不變而消費者的所得由 M 增加爲 M' 時，則 x 軸的截距變爲 $\frac{M'}{p_x}$，y 軸的截距變爲 $\frac{M'}{p_y}$，但因爲商品價格不變，所以預算限制式斜率會整條平行外移。反之，當商品價格不變而消費者的所得減少，則預算限制式會整條平行內移。圖形如下:

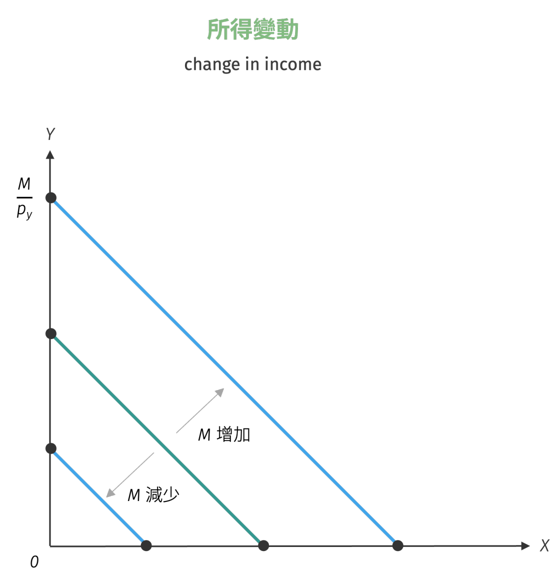

圖 15: 所得變動

當消費者所得不變，預算限制式仍然有可能平行外移，例如當 x 與 y 商品價格同時下跌同一比例，即預算限制式會平行外移，又或者 x 與 y 商品價格同時上漲同一比例，則預算限制式會平行內移。

當消費者所得不變，預算限制式斜率必與原預算限制式的斜率相同。

2.1.3 限制消費數量

有時某些經濟事件會引起政府或生產者限制消費者對某特定商品的消費，例如戰時期的政府限制消費者對民生用品消費的數量，發生某些極端與民衆搶買現象水量，或生產者限制消費者每人限購 2 單位等。此時消費者面臨的預算限制式將如圖所示，若 x 商品被限制最多僅能消費 x_0 數量，則預算集合爲深色所圍之區域。

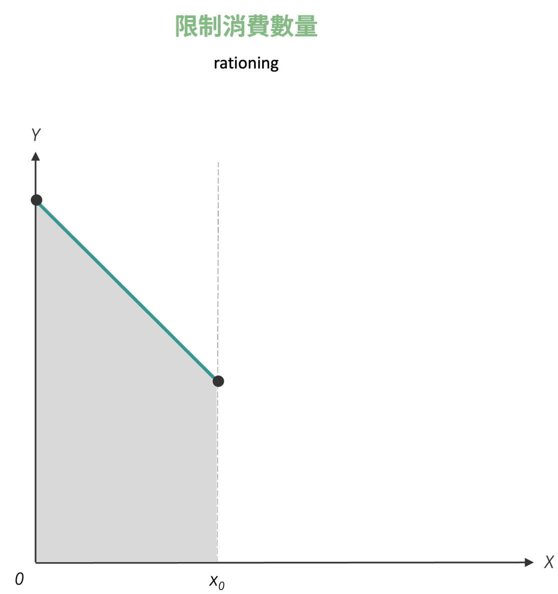

圖 16: 限制消費數量

存在消費量的限制式時，預算限制式表達爲

$$p_x \cdot x + p_y \cdot y = M, \quad x \leq x_0$$

2.1.4 對特定商品課稅

當政府欲對特定商品課稅，以抑制消費者之消費量，可以對商品採從量稅或從價稅。

若對 x 商品採從量稅，將使得 x 商品價格由 p_x 上升至 $(p_x + t)$，此處的 t 可以假設爲單位稅額完全前轉由消費者負擔或部分前轉後價格提升的幅度。此舉會使 x 與 y 量商品的相對價格由 $\frac{p_x}{p_y}$ 提高至 $\frac{p_x+t}{p_y}$。

若對 x 商品採從價稅，x 商品價格則會由 p_x 上升至 $p_x(1+t\%)$，則 x 與 y 量商品的相對價格將由 $\frac{p_x}{p_y}$ 提高至 $\frac{p_x(1+t\%)}{p_y}$。

因此由上述簡單推導可知，無論課徵從量稅或從價稅，皆會使預算限制式變得更陡峭，如下圖所示:

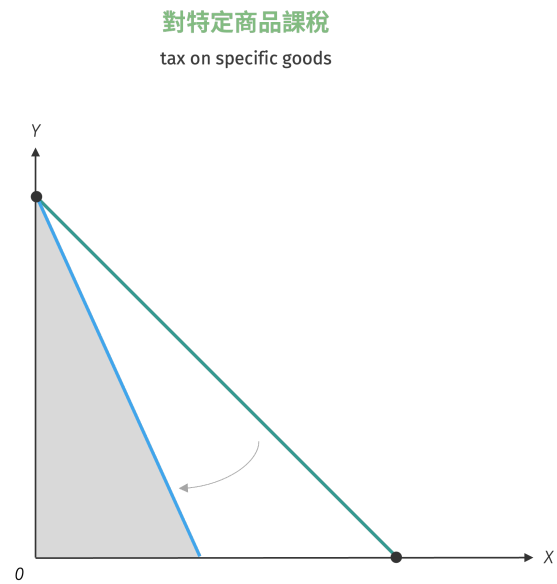

圖 17: 對特定商品課稅

對於商品的課稅也可以修改爲消費數量超過 x_0 後才課稅，此時預算限制式就變成分段函數:

$$\begin{cases} p_x^0 \cdot x + p_y^0 \cdot y = M, & x \leq x_0 \\ p_x^1 \cdot (x - x_0) + p_y^0 \cdot y = M - p_x^0 \cdot x_0, & x > x_0 \end{cases}$$

圖形如下所示:

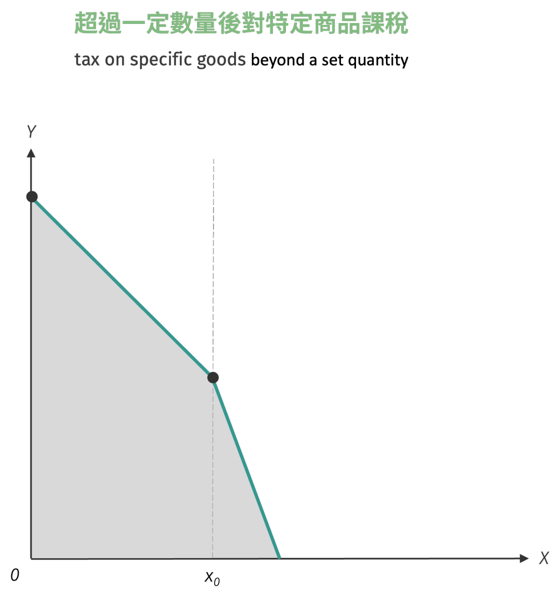

圖 18: 超過一定數量後對特定商品課稅

2.1.5 對特定商品補貼

對特定商品補貼與課稅相似，只是將稅額改爲補貼額，圖形與結論皆爲相反，請自行證明與繪圖。

2.1.6 商品數量補貼

商品數量補貼 (subsidy in-kind) 是指，消費者可免費直接獲得一定數量的特定商品的補貼，但不是金錢上價格上的優惠，因此消費者面對的商品價格皆不變。在這些免費補助商品不得轉售的情況下，如果消費者的所得完全花費在 x 商品上，除可消費 $\frac{M}{p_x}$ 數量的 x 商品外，另可額外獲得消費 x_0 數量的 x 商品，因此最多可消費 $\left(\frac{M}{p_x}+x_0\right)$ 數量之 x 商品，如圖中之 C 點。若消費者將所得完全花費在 y 商品上，則除可消費 $\frac{M}{p_y}$ 外，亦可額外消費 x_0 數量的 x 商品，如圖中 A 點可右移至 B 點，因此我們可以說當消費者獲得 x_0 數量的 x 商品實物補貼後，會使得原來的預算限制式整個往右移，至於 $\overline{AB}$ 線段的部分，在假設消費者可自由拋棄 (free disposal) 任何所獲致的 x_0 數量下即會成立。

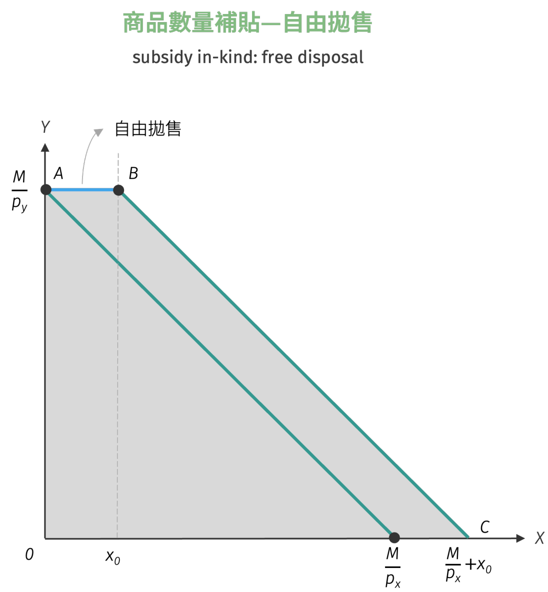

圖 19: 商品數量補貼—自由拋售

當商品補貼的商品在可以全額轉售 (resale) 的情形下，則消費者可以將 $\overline{AB}$ 線段的 x 商品轉售後再以 $\frac{p_x}{p_y}$ 的相對價格來消費 y 商品，此時的預算限制式將由 $\overline{ABC}$ 線段轉為 $\overline{DBC}$ 線段，此時與所得增加對預算限制式的影響相同。圖形如下:

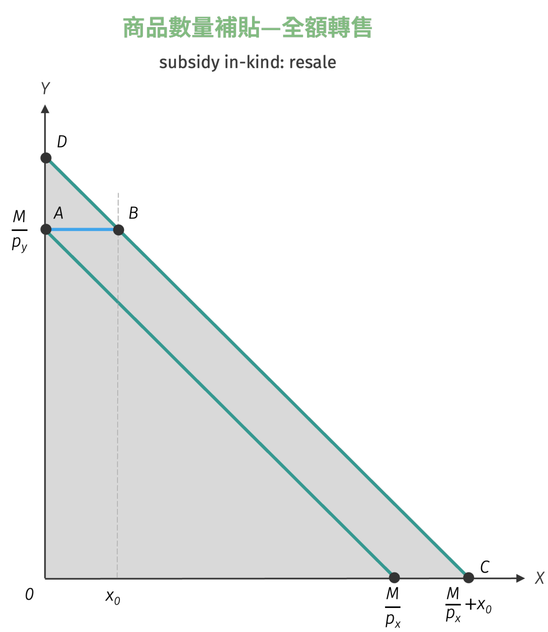

圖 20: 商品數量補貼—全額轉售

2.2 標準商品

當消費者的所得及所有商品價格皆變動同一倍數或比率，則其預算限制式在圖形上的圖樣不受影響，例如當所得與所有商品價格皆變動 λ 倍，即新的預算限制式爲

$$(\lambda p_x) \cdot x + (\lambda p_y) \cdot y = (\lambda M)$$

此式與原預算限制式 $p_x \cdot x + p_y \cdot y = M$ 在商品絕對價格與絕對所得而言有所不同，但就相對價格與相對所得而言則相同。令 $\lambda = \frac{1}{p_y}$，則預算限制式可寫爲

$$\frac{p_x}{p_y} \cdot x + 1 \cdot y = \frac{M}{p_y}$$

假設 $\frac{p_x}{p_y} = \hat{p}_x$，$\frac{M}{p_y} = \hat{M}$，則此新的預算限制式即爲

$$\hat{p}_x \cdot x + 1 \cdot y = \hat{M}$$

顯見 y 商品相對價格現爲單位元，此時的 y 商品被稱爲*標準商品* (numeraire)。標準商品可定義爲將市場所有商品相對價格與消費者之所得，利用一比例與方向進行標準化後，將其中一商品的相對價格轉化爲單位元。

3 消費者最適選擇

當消費者手握有限的預算，面對商品架上琳瑯滿目的選擇時，如何在預算限制下做出最理性的決策？這個問題的核心在於找到無異曲線與預算限制線的最適切點。在經濟學中，消費者最適選擇問題可視爲一個約束最適化問題：在預算限制的約束條件下，尋求效用函數的最大值。這個看似抽象的數學問題，實際上精確地刻畫了日常生活中每一次消費決策的理性邏輯。透過拉格朗日乘數法等數學工具，我們能夠將主觀的消費偏好與客觀的市場約束整合爲一套完整的分析框架，不僅能夠預測消費者行爲，更能深入理解價格機制如何引導資源的有效配置。

3.1 最適化問題

消費者最適選擇問題的本質是一個約束最適化問題，這類問題在經濟學分析中具有核心地位。消費者作爲理性的經濟個體，必須在有限資源的約束下做出選擇，以實現其效用的最大化。

設消費者的效用函數爲 $U(x, y)$，捕捉了消費者對不同商品組合的偏好排序。消費者面臨預算限制 $p_x x + p_y y = M$，其中 p_x、p_y 分別爲商品 x、y 的市場價格，M 爲消費者的名目所得。消費者的決策目標是在既定的預算限制下，選擇最適的商品組合 (x^*, y^*) 以最大化其效

用水準。此過程涉及在可行集合中尋找最優解，其中可行集合由預算限制和非負約束條件共同定義。非負約束條件 $x \geq 0, y \geq 0$ 反映了現實中消費數量不能爲負數的物理限制。

從數學角度而言，此最適化問題可以形式化表述爲:

$$\begin{aligned} \max_{x,y} \quad & U(x,y) \\ \text{s.t.} \quad & p_x x + p_y y = M \\ & x \geq 0, y \geq 0 \end{aligned}$$

3.2 圖解分析

從圖形角度來看，消費者最適選擇問題可以透過無異曲線與預算限制線的幾何關係來直觀理解。這種圖解方法不僅提供了數學解的視覺化呈現，更重要的是揭示了最適化條件背後的經濟直觀。

消費者的最適選擇通常出現在無異曲線與預算限制線的切點。在此切點處，兩條曲線具有相同的斜率，代表無異曲線的斜率等於預算限制線的斜率。數學上此條件可以表達爲:

$$MRS_{xy} = \frac{p_x}{p_y}$$

圖形即如下圖所示:

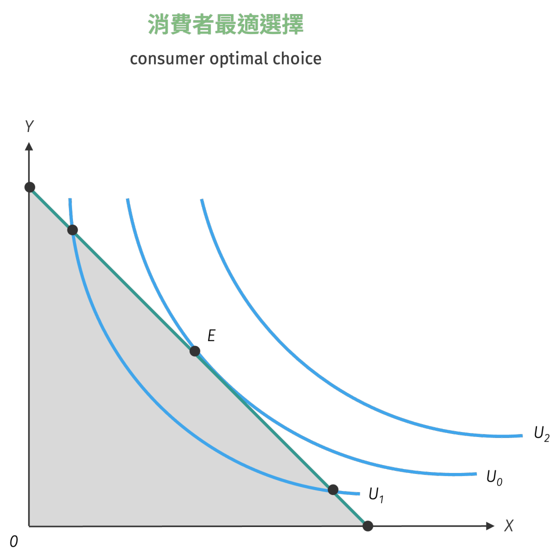

圖 21: 消費者最適選擇

邊際替代率事實上反映的是消費者的主觀評價：爲了多獲得一單位商品 x，消費者願意放棄多少單位的商品 y，同時維持效用水準不變。而價格比 $\frac{p_x}{p_y}$ 則反映了市場的客觀交換比例:在市場上用一單位商品 x 可以換取多少單位商品 y。換言之，消費者在最適點處，其主觀的

商品替代率 (邊際替代率) 必須等於市場的客觀替代率 (價格比) 。若此條件不滿足，消費者可透過調整商品組合來提高效用水準。

當 $MRS_{xy} = \frac{p_x}{p_y}$ 時，消費者的主觀評價與市場的客觀交換比例達成一致，此時已無法透過調整消費組合來進一步提升效用。若這個等式不成立，消費者就有動機改變其消費組合:

- 當 $MRS_{xy} > \frac{p_x}{p_y}$ 時：消費者對商品 x 的主觀評價高於市場價格，應該增加 x 的消費，減少 y 的消費。
- 當 $MRS_{xy} < \frac{p_x}{p_y}$ 時：消費者對商品 x 的主觀評價低於市場價格，應該減少 x 的消費，增加 y 的消費。

綜上，從圖形上觀之，最適點必須滿足以下條件:

- 可行性條件：該點必須位於或內於預算限制線所界定的可行集合內
- 最適性條件：在所有可行點中，該點必須位於最高的無異曲線上
- 切點條件：當最適解爲內點解時，無異曲線與預算線必須相切

注意到，切點條件僅適用於內點解的情況。當最適解出現在預算線的端點時 (即消費者完全不消費某種商品)，我們得到的是邊界解，此時切點條件不再適用。

3.2.1 邊界解的情形

當最適解出現在預算線的端點時 (即 $x^* = 0$ 或 $y^* = 0$)，稱爲*邊界解* (corner solution) 或*角解*。此時 $MRS_{xy} \neq \frac{p_x}{p_y}$，消費者完全不消費其中一種商品。邊界解通常出現在:

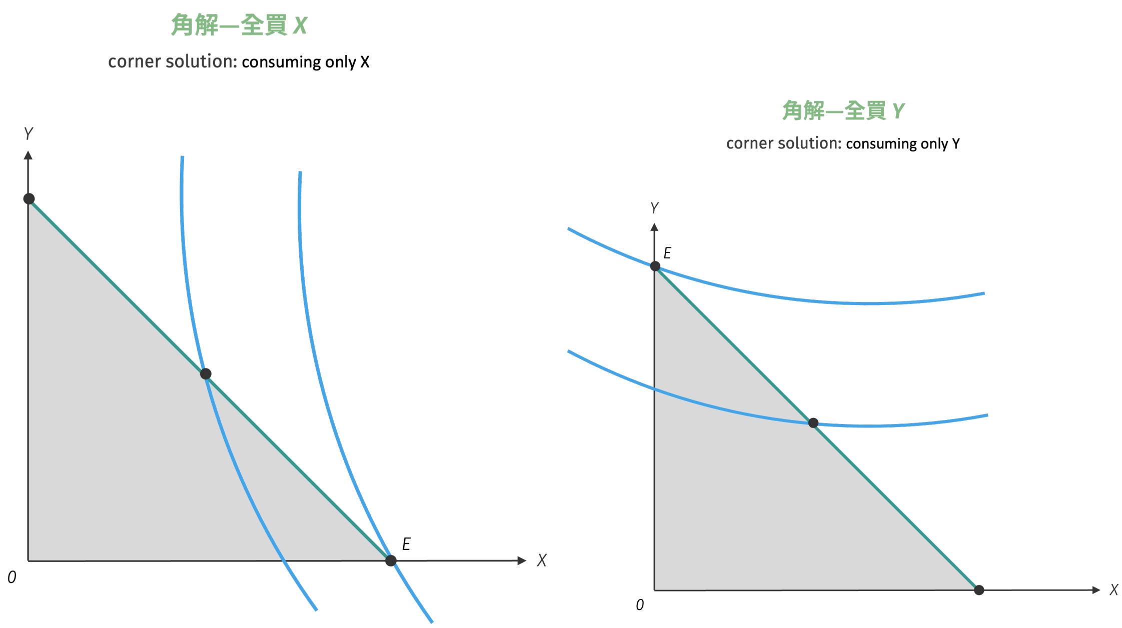

圖 22: 角解圖示

邊界解通常出現在以下情況:

- 商品間替代性很高的情況 (如完全替代品)：當兩種商品可以完全相互替代時，消費者會根據相對價格選擇成本較低的商品。若 $\frac{MU_x}{MU_y} > \frac{p_x}{p_y}$，消費者會全部購買商品 x；反之則全部購買商品 y。完全替代型效用函數是這種情況的典型例子。
- 某商品價格相對過高：即使兩商品具有一定的互補性，當其中一種商品的價格過於昂貴時，消費者可能會選擇完全放棄該商品。這種情況在奢侈品市場中較爲常見，例如當珠寶價格過高時，一般消費者可能完全不購買珠寶，而將所得全部用於其他必需品。
- 消費者對某商品的偏好極低：某些商品可能與消費者的個人偏好、文化背景或價值觀不符，導致消費者對該商品的邊際效用極低。在這種情況下，即使價格不高，消費者仍可能選擇完全不消費該商品。

3.2.2 內點解的條件

當最適解滿足 $x^* > 0$ 且 $y^* > 0$ 時，稱爲內點解 (interior solution)。內點解的一階必要條件爲:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \lambda p_x$$
$$\frac{\partial U}{\partial y} = \lambda p_y$$
$$p_x x + p_y y = M$$

其中 $\lambda > 0$ 爲拉格朗日乘數，具有重要的經濟意義：它表示額外一單位所得能帶來的邊際效用增加量，即所得的邊際效用 (marginal utility of income)。

由前兩個條件可得:

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{\frac{\partial U}{\partial y}} = \frac{MU_x}{MU_y} = MRS_{xy} = \frac{p_x}{p_y}$$

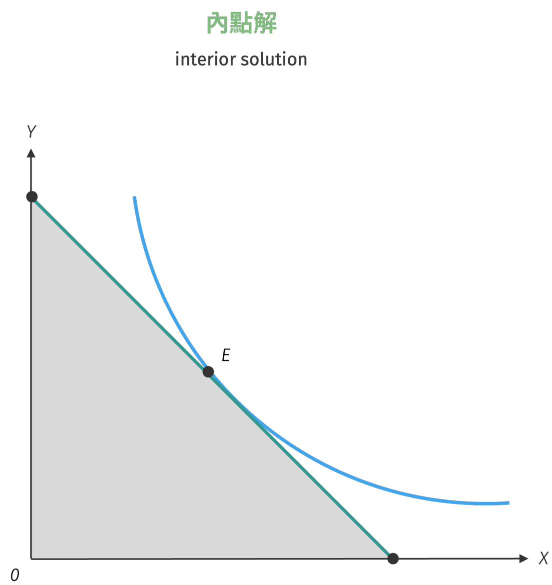

圖 23: 內點解圖示

內點解的另一個重要特徵是其對參數變化的敏感性。與邊界解不同，內點解通常對價格和所得的小幅變化都會產生連續的反應。從政策分析的角度來看，內點解的消費者通常對價格變化更敏感，因爲他們同時購買多種商品，價格變化會透過替代效應和所得效應同時影響其消費決策。

3.3 拉格朗日乘數法

拉格朗日乘數法 (Lagrangian 乘數法) 是解決約束最適化問題的標準數學工具。對於消費者選擇問題，我們構造拉格朗日函數:

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = U(x, y) - \lambda(p_x x + p_y y - M)$$

其中 λ 爲拉格朗日乘數，代表約束條件的影子價格 (shadow price)。

一階條件 (First-Order Conditions, FOCs)

對拉格朗日函數分別對 x、y 和 λ 求偏微分並令其等於零:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} &= \frac{\partial U}{\partial x} - \lambda p_x = 0 \quad \Rightarrow \quad MU_x = \lambda p_x \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} &= \frac{\partial U}{\partial y} - \lambda p_y = 0 \quad \Rightarrow \quad MU_y = \lambda p_y \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} &= -(p_x x + p_y y - M) = 0 \quad \Rightarrow \quad p_x x + p_y y = M
\end{aligned}$$

從前兩個條件可以得到:

$$\frac{MU_x}{p_x} = \frac{MU_y}{p_y} = \lambda$$

這個條件被稱爲*等邊際原理* (equimarginal principle)：在最適選擇下，消費者花在每種商品上的最後一元錢所帶來的邊際效用必須相等。若此條件不滿足，消費者可透過重新分配支出來提高總效用。

3.3.1 二階條件 (Second-Order Conditions, SOCs)

爲確保求得的是最大值而非最小值，必須檢驗二階條件。二階條件是約束最適化問題中的關鍵步驟，因爲一階條件只能確保我們找到了駐點 (stationary point)，但無法保證該駐點是最大值、最小值還是鞍點 (saddle point)。

在約束最適化問題中，我們需要使用*有界* **Hessian** *矩陣* (bordered Hessian matrix) 來檢驗二階條件。對於消費者選擇問題，有界 Hessian 矩陣形如:

$$\bar{H} = \begin{bmatrix} 0 & -p_x & -p_y \\ -p_x & U_{xx} & U_{xy} \\ -p_y & U_{yx} & U_{yy} \end{bmatrix}$$

其中:

- *左上角的零*：反映了約束條件本身不含二階項
- *第一行和第一列的價格項*：來自預算限制的係數 $-p_x$ 和 $-p_y$
- *右下角的 2×2 子矩陣*：包含效用函數的所有二階偏微分，即無約束 Hessian 矩陣

爲了確保最適解是最大值，我們需要檢驗有界 Hessian 矩陣的*行列式* (determinant) 的符號。對於最大化問題，二階條件要求：$\det(\bar{H}) < 0$。逐步計算這個行列式，使用第一行展開，可得到:

$$\begin{aligned}
\det(\bar{H}) &= 0 \cdot \begin{vmatrix} U_{xx} & U_{xy} \\ U_{yx} & U_{yy} \end{vmatrix} - (-p_x) \cdot \begin{vmatrix} -p_x & U_{xy} \\ -p_y & U_{yy} \end{vmatrix} + (-p_y) \cdot \begin{vmatrix} -p_x & U_{xx} \\ -p_y & U_{yx} \end{vmatrix} \\
&= p_x(-p_x U_{yy} + p_y U_{xy}) - p_y(-p_x U_{yx} + p_y U_{xx}) \\
&= -p_x^2 U_{yy} + p_x p_y U_{xy} + p_x p_y U_{yx} - p_y^2 U_{xx}
\end{aligned}$$

利用 Young's theorem ($U_{xy} = U_{yx}$)，得到:

$$\det(\bar{H}) = -p_x^2 U_{yy} - p_y^2 U_{xx} + 2 p_x p_y U_{xy}$$

因此，二階條件要求:

$$-p_x^2 U_{yy} - p_y^2 U_{xx} + 2 p_x p_y U_{xy} < 0$$

重新整理可得更直觀的形式爲:

$$p_x^2U_{yy}+p_y^2U_{xx}-2p_xp_yU_{xy}>0$$

二階條件的經濟意義

注意到上述不等式可以寫成:

$$\begin{bmatrix}p_x & p_y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U_{xx} & U_{xy}\\ U_{yx} & U_{yy}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_x\\ p_y\end{bmatrix}>0$$

代表無約束 Hessian 矩陣

$$H_U=\begin{bmatrix}U_{xx} & U_{xy}\\ U_{yx} & U_{yy}\end{bmatrix}$$

在價格向量 (p_x,p_y) 方向上必爲正定 (positive definite)。從經濟角度來看，此條件確保了以下幾點非常重要的性質:

- 無異曲線的凸性: 確保無異曲線向原點凸出，這與邊際替代率遞減的假設一致
- 效用函數的凹性限制: 雖然不要求效用函數全域凹 (globally concave)，但要求其在最適點附近沿預算限制方向具有適當的曲率
- 穩定性條件: 保證小幅價格變動不會導致最適點發生劇烈跳躍

檢驗二階條件的實際步驟

1. 計算效用函數的二階偏微分: U_{xx}、U_{yy}、$U_{xy}=U_{yx}$
2. 將最適解代入: 將從一階條件求得的 (x^*,y^*) 代入上述二階偏微分
3. 計算判別式: 計算 $p_x^2U_{yy}+p_y^2U_{xx}-2p_xp_yU_{xy}$ 的值
4. 檢查符號: 若結果大於零，則二階條件滿足；若小於等於零，則需要進一步分析

二階條件失效的情況

當二階條件不滿足時，可能出現以下情況:

- 鞍點: 駐點既不是最大值也不是最小值
- 邊界解: 眞正的最大值可能出現在可行集合的邊界上
- 多重均衡: 存在多個局部最大值

在這些情況下，需要採用其他方法 (如比較各候選點的目標函數值) 來確定眞正的最適解。

3.3.2 拉格朗日乘數的經濟意義

拉格朗日乘數 λ 的經濟意義如下:

- 邊際效用價值：$\lambda = \frac{MU_x}{p_x} = \frac{MU_y}{p_y}$ 表示額外一單位所得的邊際效用
- 影子價格：反映預算限制的緊峭程度
- 效用函數的量綱：當效用函數乘以常數 k 時，λ 也會乘以 k

定義 3.1 — 影子價格

影子價格 (shadow price) 反映了放寬預算限制對消費者福利的邊際改善。

$$\frac{\partial U^*}{\partial M} = \lambda$$

其中 U^* 是最適化問題的最大效用值。代表如果消費者的所得增加一個微小單位，其最大可達成的效用水準將增加 λ 單位。從政策分析角度來看，λ 的大小反映了預算限制的「緊峭程度」:

- λ 值較大：表示額外的一元錢對消費者來說價值很高，預算限制較緊
- λ 值較小：表示額外的一元錢對消費者的改善有限，預算限制相對寬鬆

拉格朗日乘數 λ 其實不只是數學解題時的技巧，在經濟學裡它有更貼近直覺的用法。它告訴我們，在資源有限的情況下，消費者怎麼分配才算「最划算」。同時，它也常被拿來分析福利和政策影響。簡單說，λ 就像是一個翻譯器，把效用最大化這種很抽象的理論，轉換成我們在市場裡能觀察到的行為，讓理論跟現實之間有了更清楚的連結。

例題 3.1 — 不同效用函數下的最適選擇

設消費者面臨預算限制 $p_x x + p_y y = M$，求以下四種效用函數下的最適消費組合:

1. 完全替代型效用函數：$U(x, y) = ax + by$
2. 完全互補型效用函數：$U(x, y) = \min\{ax, by\}$
3. Cobb-Douglas 效用函數：$U(x, y) = Ax^\alpha y^\beta$
4. 準線性效用函數：$U(x, y) = \ln x + y$

【解】

1. 最適化問題可以表達爲以下形式

$$\max\ U(x, y) = ax + by$$
$$\text{s.t. } p_x x + p_y y = M$$

完全替代型效用函數的無異曲線爲線性形式，因此消費者最適選擇與無異曲線之邊際替代率大小有關。

- 若 $MRS_{xy} > \frac{p_x}{p_y}$，則消費者最適組合爲 $(x^*, y^*) = (\frac{M}{p_x}, 0)$
- 若 $MRS_{xy} < \frac{p_x}{p_y}$，則消費者最適組合爲 $(x^*, y^*) = (0, \frac{M}{p_y})$
- 若 $MRS_{xy} = \frac{p_x}{p_y}$，隱含無異曲線與預算限制式重疊，因此預算限制式上任何一點

均可能是消費者的最適選擇，但消費者僅能選擇其中一點，因此表達最適選擇爲

$$\{(x^*, y^*)\} = \{p_x x + p_y y = M\}$$

2. 最適化問題可以表達爲以下形式:

$$\max\ U(x, y) = \min\{ax, by\}$$
$$\text{s.t. } p_x x + p_y y = M$$

從圖形來看，完全互補型效用函數之消費者最適選擇必定位於預算限制式與商品消費固定比例射線上，亦即求解以下聯立:

$$\begin{cases} ax = by \\ p_x x + p_y y = M \end{cases}$$

由上式得 $y = \frac{a}{b}x$，代入預算限制式，可得

$$p_x x + p_y \cdot \frac{a}{b} x = M$$

求解後可得 x 與 y 兩商品之需求函數爲

$$x^* = \frac{bM}{bp_x + ap_y}, \quad y^* = \frac{aM}{bp_x + ap_y}$$

3. 最適化問題可以表達爲以下形式:

$$\max\ U(x, y) = Ax^\alpha y^\beta$$
$$\text{s.t. } p_x x + p_y y = M$$

由邊際替代率

$$MRS_{xy} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{y}{x} = \frac{p_x}{p_y}$$

整理後可得:

$$\frac{y}{x} = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{p_x}{p_y} \cdot x$$

代入預算限制式後可得

$$p_x x + p_y \cdot \left(\frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{p_x}{p_y} \cdot x \right) = M$$

求解後可得 x 與 y 兩商品之需求函數爲

$$x^* = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \cdot \frac{M}{p_x}, \quad y^* = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \cdot \frac{M}{p_y}$$

4. 最適化問題可以表達爲以下形式:

$$\max\ U(x,y) = \ln x + y$$
$$\text{s.t. } p_x x + p_y y = M$$

由邊際替代率

$$MRS_{xy} = \frac{1}{x} = \frac{p_x}{p_y}$$

即可立刻求得 x 與 y 商品的最適需求量爲:

$$x^* = \frac{p_y}{p_x}, \quad y^* = \frac{M}{p_y} - 1$$

但必須滿足 $\frac{M}{p_y} > 1$ 的條件。因此

- 若 $\frac{M}{p_y} > 1$ 成立，則 $(x^*, y^*) = (\frac{p_y}{p_x}, \frac{M}{p_y} - 1)$。
- 若 $\frac{M}{p_y} \leq 1$ 成立，則 $(x^*, y^*) = (\frac{M}{p_x}, 0)$。

4 分解價格效果

當百貨公司特定專櫃化妝品價格下跌後，會發現每位消費者對此價格變動反應不一：有些消費者會大量增加消費數量，有些則會增加購買量但增幅有限，而有些無動於衷，維持與過往相同的消費量。

造成上述消費者購買行爲的差異主要原因爲何？此種當商品改變後始消費者消費數量改變的效果稱爲價格效果，因此本節目的即是分解價格效果，分析是因爲何種深層原因使得不同消費者面對價格變動時，呈現不同的消費行爲。

4.1 價格效果

定義 4.1 — 價格效果

價格效果 (price effect) 係指在其他條件不變之下，特定商品的價格變動對此商品需求量變動的效果。

繪製價格效果之方式，以 x 商品爲例，給定消費者偏好的無異曲線 (假設符合無異曲線所有良好的假設) 與其面對的預算限制式，以及價格變動的幅度，記變動前爲 p_x^0，變動後爲 p_x^1。在價格變動後，預算限制式會旋轉，並與無異曲線相切，得到 x 在價格變動前後的最適需求量，記作 x_0 與 x_2，則 $\Delta x = x_2 - x_0$ 即爲價格效果。接著在 x-y 平面下方繪製價量平面，

橫軸爲 x、縱軸爲 p_x，將上述步驟得到的價量組合繪製在平面上並連線，即可推導出 x 的需求曲線。

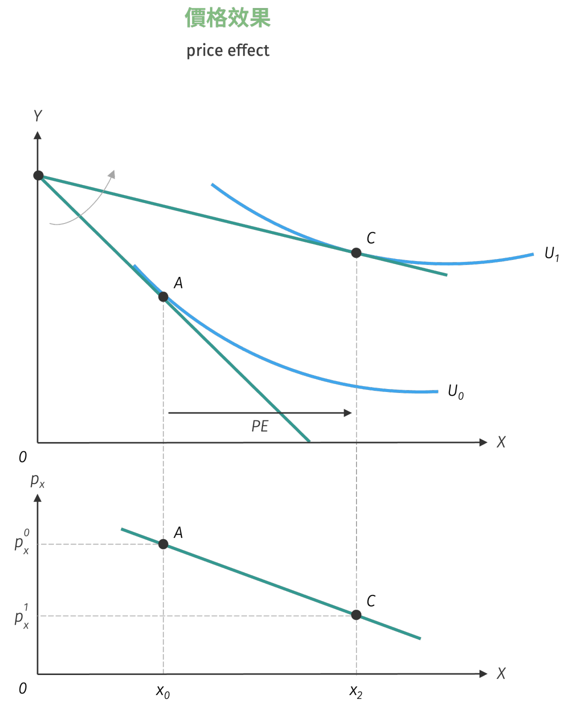

圖 24: 價格效果

4.1.1 價格效果與需求曲線範例

根據分解價格效果的步驟與繪製需求曲線的方法，以下就常見的偏好型態作爲範例。

首先爲完全替代型偏好，當 x 商品價格高於 p_x^0，如上方預算限制式爲 AB 線段時，當預算限制線 x 商品價格逐漸下跌後，當預算限制線與消費者最適選擇下之 x 消費量爲 0，隨著 x 商品價格逐漸下跌後，亦即 x 商品價格爲 p_x^0 時，x 之最適消費數與 U_0 效用水準之無異曲線重疊時，開始消費者的選擇，因此此時 x 商品的消費量可能是預算限制式上任何一點，開始消費者的選擇，因此此時 x 商品需求量隨價格數量可能由 0 到 $\frac{M}{p_x^0}$，當 x 商品價格下跌至小於 p_x^0 時，則 x 商品需求量隨價格下跌而增加，如無異曲線圖形所示，此時不論價格下跌至何種水準，消費者最適選擇皆爲角解僅消費 x 商品，故需求曲線呈現負斜率且漸進趨近於 x 軸。

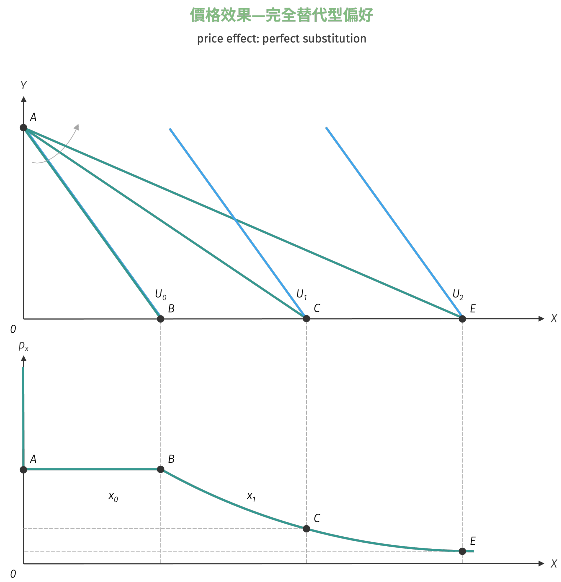

圖 25: 價格效果—完全替代型偏好

在上圖中的 B、C、E 點皆為角解僅買 x 商品，表示 x 商品的需求函數必為

$$x = \frac{M}{p_x}$$

低型態的需求函數滿足 $p_x \cdot x = M$ 亦即等軸雙曲線的型態。

接著是完全互補型偏好，完全互補型效用函數的消費者其最適均衡在兩商品模型中為:

$$x^* = \frac{bM}{bp_x + ap_y}, \quad y^* = \frac{aM}{bp_x + ap_y}$$

由

$$\frac{\partial x^*}{\partial p_x} = \frac{-b^2 M}{(bp_x + ap_y)^2} < 0$$

顯見 x 商品之需求函數符合需求法則 (y 商品亦同)，可求算出 x 商品之需求曲線的斜率值為

$$\frac{\partial p_x}{\partial x} = \frac{(bp_x + ap_y)^2}{-b^2 M} < 0$$

如下圖所示 x 商品的需求曲線為曲線型態。

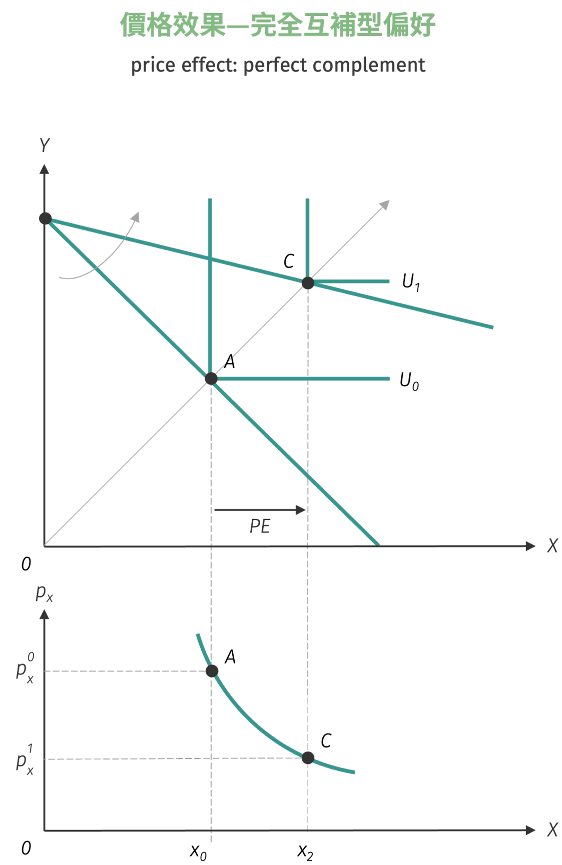

圖 26: 價格效果—完全互補型偏好

例題 4.1 — 特殊的完全互補型偏好

給定效用函數爲 $U(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2^2\}$，預算限制式爲 $p_1x_1 + p_2x_2 = M$。

1. 求出消費者最適選擇[a]。
2. 請在 x_1-x_2 平面上繪製無異曲線。
3. 假設 x_1 價格下跌，設原本價格爲 p_1^*，下跌後價格爲 p_1'。請在 x_1-x_2 平面上繪製價格效果。

[a]提示：最適選擇尚需寫出特定條件。

最後則是 Cobb-Douglas。具有 Cobb-Douglas 效用函數的消費者其最適選擇在兩商品模型中分別爲

$$x^* = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \cdot \frac{M}{p_x}, \quad y^* = \frac{\beta}{\alpha+\beta} \cdot \frac{M}{p_y}$$

其中

$$\frac{\partial x^*}{\partial p_x} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \cdot \frac{M}{p_x^2} < 0$$

表示 x 商品之需求函數符合需求法則且其斜率值爲

$$\frac{\partial p_x}{\partial x^*} = -\frac{\alpha+\beta}{\alpha}\cdot\frac{p_x^2}{M}$$

另由 $\frac{\partial y^*}{\partial p_x} = 0$ 得知當 x 商品價格下跌後，x 商品的消費量增加但 y 商品的消費量不受影響，如下圖中 A 點移至 C 點之情形。且由 x 商品的需求函數，可得知會滿足

$$p_x \cdot X = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\cdot M$$

亦即總支出爲所得的部分比例，當所得不變時，則此部分比例爲常數，因此表示 x 與 y 商品的需求函數爲等軸雙曲線的型態。

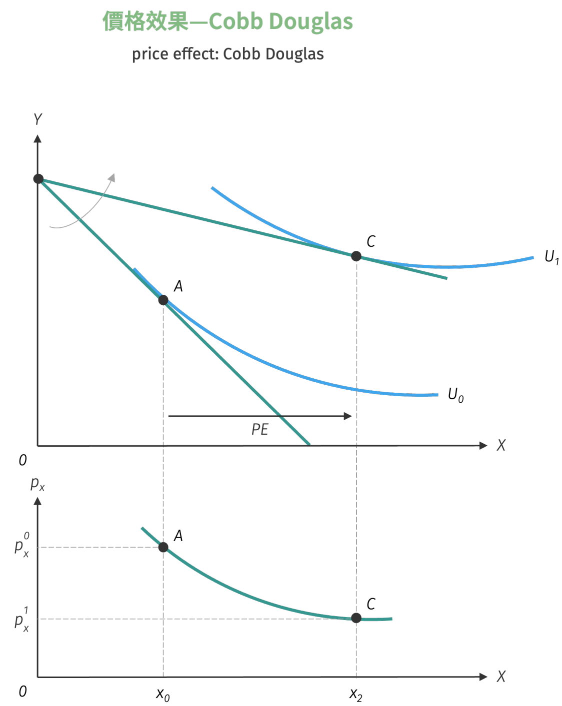

圖 27: 價格效果—Cobb Douglas

4.1.2 價格消費曲線

定義 4.2 — 價格消費曲線

在其他商品價格與消費者所得不變之下，消費者對於特定商品在各種不同的價格下，消費者最適消費選擇組合點的連線，稱之爲*價格消費曲線* (price consumption curve, PCC), 又稱爲*價格擴張曲線* (price expansion path) 或*價格提供曲線* (price offer curve)。

如下圖所示，隨著 x 商品價格持續性的下跌，消費者最適選擇均衡點亦逐漸由 A 點過向 B 點及 C 點，因此價格消費曲線亦即上述價格效果的應用，故可由價格消費曲線來推導消費

者對特定商品的需求曲線。一般而言價格消費曲線的出發點爲縱軸上的 D 點，因爲當 x 商品價格過高時，消費者傾向完全不解偶消費 y 商品。

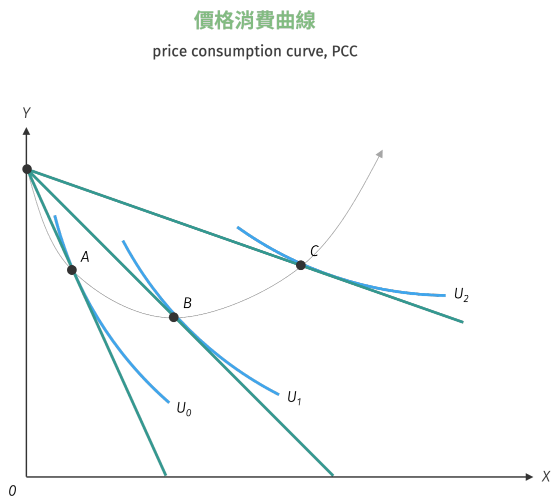

圖 28: 價格消費曲線

由於價格消費曲線是表達外生變數 p_x 變動對內生變數 y 與 x 的路徑軌跡，因此實際上價格消費曲線方程式看不到 p_x 變數，只會看到 y 與 x 的相互變動關係，因此在一般存在有內解的無異曲線，價格消費曲線方程式會滿足以下兩式

- $MRS_{xy} = \frac{p_x}{p_y}$
- $p_x x + p_y y = M$

將上兩式整理過後，可得價格消費曲線方程式:

$$y = \frac{M}{p_y} - MRS_{xy} \cdot x$$

例題 4.2 — 價格消費曲線與方程式

寫出並繪製下列效用函數的價格消費方程式:

1. $U(x, y) = x^{\alpha} \cdot y^{\beta}$
2. $U(x, y) = \min\{ax, by\}$
3. $U(x, y) = \sqrt{x} + y$
4. $U(x, y) = \ln x + y$
5. $U(x, y) = x + y$

4.2 所得效果

定義 4.3 — 所得效果

所得效果 (income effect) 是指在商品相對價格不變之下，分析由於所得的變動，引起對特定商品需求量變動的影響效果。

原消費者最適選擇爲 B 點，當消費者所得增加後，會使得預算限制式向外平行外移，從而擴大預算集合，因此消費者最適選擇將會由 U_1 選擇至效用更高的 U_2 消費，因而得到新的最適選擇點 C 點。原本需求量爲 x_1，所得增加後爲 x_2，所得效果爲 $\Delta x = x_2 - x_1$，記成 IE。

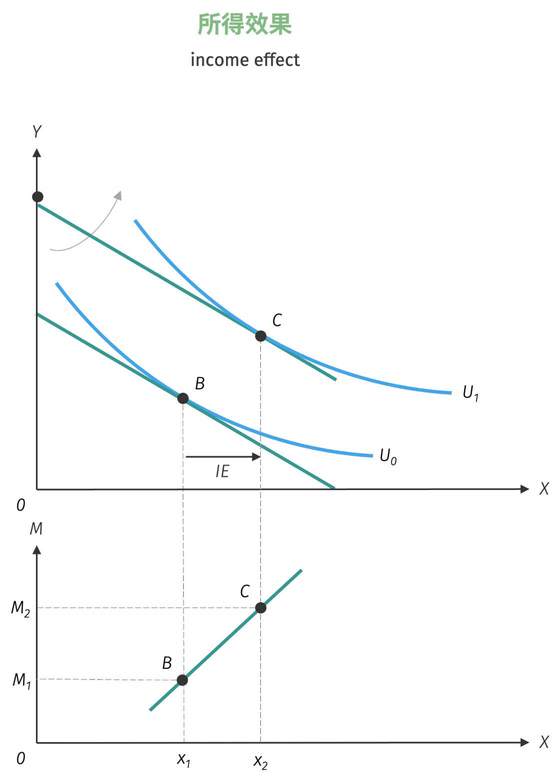

圖 29: 所得效果

4.2.1 所得效果與恩格爾曲線

利用所得效果，可以推導出不同所得水準與需求量的曲線，即是在彈性一章提及過的恩格爾曲線。底下常見的偏好型態，計算恩格爾曲線斜率值非常簡單：給定商品的最適需求量，對所得微分後可得 $\frac{\partial x^*}{\partial M}$，將結果取倒數即可求得 $\frac{\partial M}{\partial x^*}$，此即恩格爾曲線的斜率值。

- 完全互補型：x 商品爲正常財，x 商品之恩格爾曲線的斜率值爲

$$\frac{\partial M}{\partial x^*} = \frac{bp_x + ap_y}{b} > 0$$

- 準線性效用函數：x 商品爲所得中性財，x 商品之恩格爾曲線的斜率值爲 0。
- Cobb-Douglas 效用函數：x 商品爲正常財，恩格爾曲線的斜率值爲

$$\frac{\partial M}{\partial x^*} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha} \cdot p_x > 0$$

定義 4.4 — 恩格爾法則

統計學家 Engel 調查家戶商品的消費支出所得之比例分析，將家庭所得區分爲貧困、中產、富裕三個級距，並令食物支出占所得的比例爲*恩格爾係數* (Engel coefficient)，可得到如下之結論。

1. 隨所得水準提高，用於食物支出的比例會之減少，亦即恩格爾係數隨之下降，顯示食物的所得彈性小於一。
2. 隨所得水準提高，用於衣、住等支出亦提高但維持固定比例，即恩格爾係數爲常數，顯示衣、住等之所得彈性爲一。
3. 隨所得水準提高，用於育、樂、醫療等支出亦提高且比例亦之增加，亦即恩格爾係數隨所得增加而上升，顯示育、樂、醫療等之所得彈性大於一。

4.2.2 所得消費曲線

定義 4.5 — 所得消費曲線

消費者對於特定商品在各種不同的所得下，消費者最適選擇均衡點的連線，稱之爲*所得消費曲線* (income consumption curve, ICC)，又稱爲*所得擴張曲線* (income expansion path)。

如下圖所示，隨著所得持續增加，消費者最適選擇均衡點亦逐漸由 A 點過向 B 點及 C 點，因此所得消費曲線亦即前述所得效果的應用，故可由所得消費曲線來推導消費者對特定商品的恩格爾曲線。一般而言所得消費曲線的出發點爲原點，表示當所得爲零時，消費者對於 x 與 y 兩商品的最適選擇亦皆爲零。當所得消費曲線爲正斜率時，表示時，消費者對於 x 與 y 兩商品的最適選擇亦皆爲零，若所得消費曲線爲呈現負斜率的區段，則表示其中一種商品必爲劣等財。

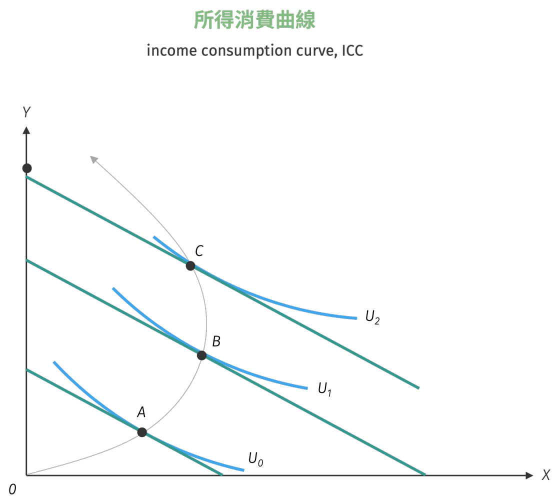

圖 30: 所得消費曲線

由於所得消費曲線是表達外生變數 M 變動對內生變數 y 與 x 的路徑軌跡，因此實際上所得消費曲線方程式看不到 M 變數，只會看到 y 與 x 的相互變動關係，因此在一般存在有內解的無異曲線，所得消費曲線方程式會滿足下式

$$MRS_{xy} = \frac{p_x}{p_y}$$

由上式經過整理即可得所得消費曲線方程式爲

$$y = f(x)$$

上述的所得消費曲線方程式計算僅限於存在有內解的型態適用，如果是效用函數本身即不可微分，或會存在有角解的型態時，則有時利用 M 變動的圖形即可得知所得消費曲線方程式。

4.3 替代效果

在討論替代效果之前，有必要對於名目所得與實質所得兩個名詞加以說明。

定義 4.6 — 名目所得與實質所得

名目所得 (nominal income, M) 爲以貨幣數值衡量之所得，而*實質所得* (real income) 則是名目所得除以物價水準後衡量實質購買力的所得，即 $\left(\frac{M}{P}\right)$。

例題 4.3 — 實質所得不變

假設小宋現在在台北上班月薪爲 $M = \$10,000$，面對 x 與 y 兩商品可消費，x 與 y 兩商品在台北的價格分別爲 $p_x = \$100$，$p_y = \$100$。若假定小宋的效用函數爲 $U(x,y) = x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$。現在小宋在台北的最適選擇爲 $(x^*, y^*) = (50, 50)$，如下圖中之 A 點 (B_1 預算限制式)，此時小宋的效用水準爲 $U = 50$ util。小宋的老闆有意將他調任 x、y 商品物價分別爲 $p_x = \$25$，$p_y = \$100$ 的高雄就職，且仍然給予相同的薪水，則小宋在高雄的最適選擇爲 $(x^*, y^*) = (200, 50)$，小宋的效用水準會因此而提升至 $U = 100$ util，如下圖中的 C 點 (B_2 預算限制式)。

當小宋被調到高雄上班後，小宋的老闆覺得高雄的物價相對低於台北的物價，如果不減少名目所得而讓小宋維持以前在台北的效用水準，因此對老闆而言對在固定效用下求支出極小化問題，此模型爲:

$$\begin{cases} \min & 25x + 100y \\ s.t & U = 50 = x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

求解後得最適選擇爲 $(x^*, y^*) = (100, 25)$，表示小宋以在高雄的商品物價水準而要能夠達到過去在台北的效用水準，消費 $(x^*, y^*) = (100, 25)$ 的商品組合將使得小宋的效用水準就與在台北相同。因此小宋的老闆現在只要支薪 $25 \times 100 + 100 \times 25 = \$5,000$，就可以讓小宋「實質」上在高雄 \$5,000，如圖形中之 B_1 預算限制式平行內移至 B_3 預算限制式，此時在高雄面對較低之相對物價亦較低的名目所得，但效用水準不受影響，如圖形中之 A 與 B 點皆爲維持實質所得不變。

表 4: 消費者最適選擇與所得變化

消費者最適選擇	名目所得	實質所得
A 點至 C 點	不變	提升
A 點至 B 點	減少	不變
B 點至 C 點	增加	增加

有了名目所得與實質所得的概念後，即可說明替代效果在經濟學的意涵:

定義 4.7 — 替代效果

替代效果 (substitution effect) 是指當商品相對價格變動後，爲維持實質所得不變，而對消費者的名目所得加以扣除或補償，以維持在商品相對價格變動前之效用水準，進而衡量消費者會以相對價格較低商品來取代相對價格較高商品之需求量變動影響。

如下圖所示，設原預算限制式爲 B_0 線段，消費者最適選擇爲 A 點之效用水準 U_0。當 x

商品相對價格下跌後，會使得消費者的預算限制式虛轉右移至 B_2 線段，新的消費者最適選擇爲 C 點之效用水準 U_1，此時名目所得不變，但消費者的實質所得會因爲預算集合擴大而增加，爲使消費者在商品相對價格下跌後，仍然維持在先的 U_0 效用水準，扣除補償變量後消費者之預算限制式將由較鬆弛的 B_0 移至較平且之 B_1，顯示出 x 商品相對價格下跌商品 (預算限制式由較傾斜的 B_0 移至較平且之 B_1，顯示 x 商品相對價格下跌或說 y 商品相對價格上漲)，如圖形中的 A 點至 B 點，x 商品消費數量增加而 y 商品消費數量減少的過程，稱爲替代效果，以圖形中之 SE 表達。

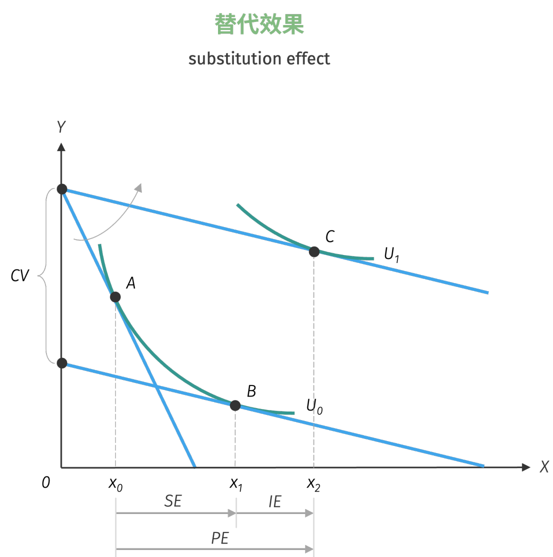

圖 31: 替代效果

一般而言當不同消費者面對特定商品價格下跌時，有些會出現搶購的情形，而有些僅會較往常多買一些，而有些人則會減少其消費量。造成不同消費量改變的價格效果之差異，源自於替代效果與所得效果的組合不同，亦即消費者偏好的差異，導致兩種效果的強度不一樣。底下將商品分爲正常財、所得中性財、劣等財、獨立品與季芬財分述之，並假設 x 商品價格下跌，價格效果均由 A 點至 C 點，其中包含:

- 替代效果: A 點至 B 點
- 所得效果: B 點至 C 點

此外，利用價格效果推導出的需求曲線稱爲 **Marshall 需求曲線** (Marshal demand curve)，以 D_M 表示，此即一般的需求曲線。而根據替代效果推導出的需求曲線稱爲**受補償需求曲線** (compensated demand curve) 或稱爲 **Hicks 需求曲線** (Hicksian demand curve)。

4.3.1 正常財

替代效果疊加所得效果，增加商品相對價格下跌後的消費數量。

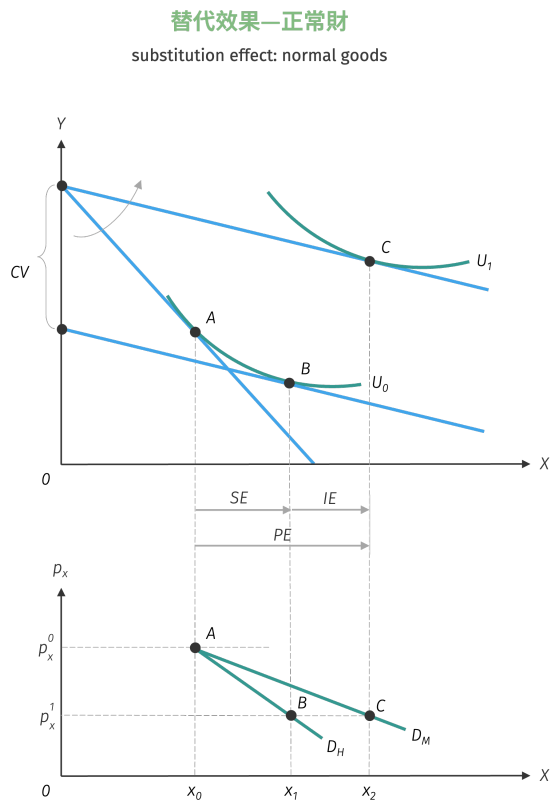

圖 32: 替代效果—正常財

4.3.2 所得中性財

在此情況下，B 點至 C 點衡量的所得效果爲 0，因此所得中性財的價格效果完全來自於替代效果。事實上，所得中性財可以理解爲所得上升後也不會多消費該特定商品。

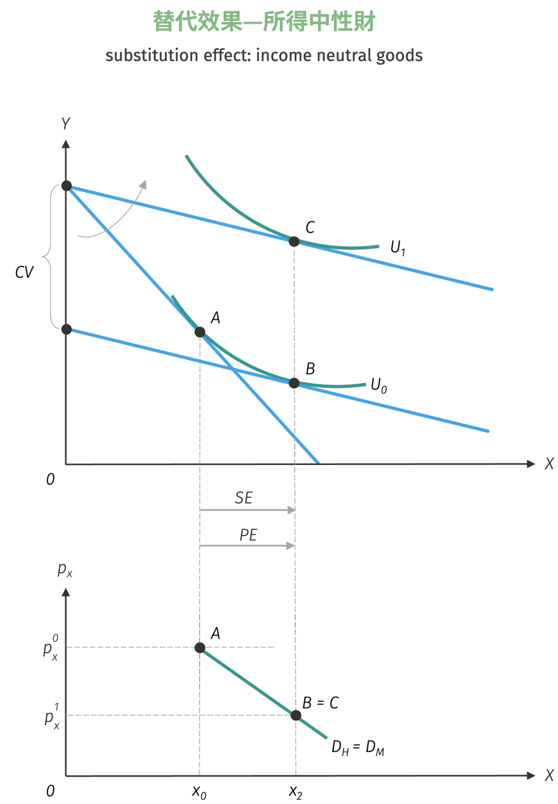

圖 33: 替代效果—所得中性財

可以自行驗證準線性效用函數分解價格效果後，呈現出的圖形即爲所得中性財。

4.3.3 劣等財

根據劣等財的定義：當所得上升後，反而會減少特定商品的消費數量。因此在下圖中，實質所得增加後，消費量卻減少了。此時替代效果強於反向的所得效果，因此價格效果仍會推升 x 商品的消費數量。

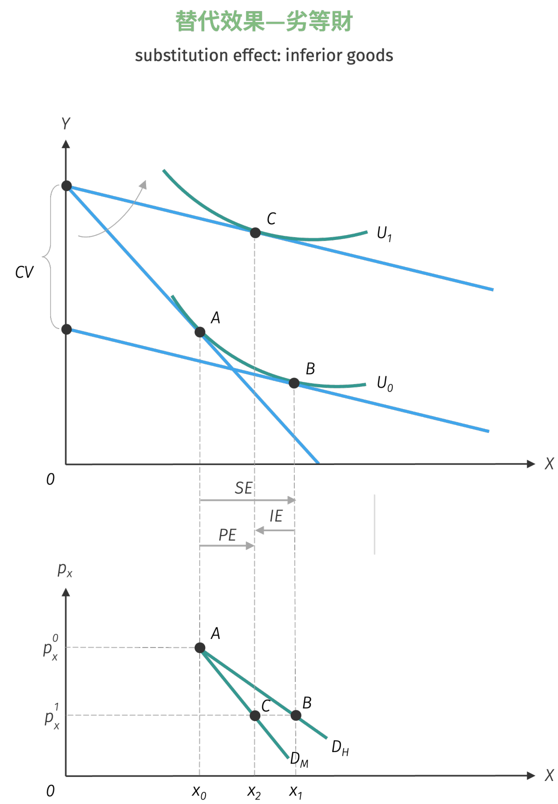

圖 34: 替代效果—劣等財

4.3.4 獨立品

所謂獨立品 (independent goods) 係針對商品本身價格獨立，而非兩商品之間的獨立。由下圖可知，此時替代效果與反向的所得效果會相互抵銷，從而造成衡量的價格效果爲 *0*。

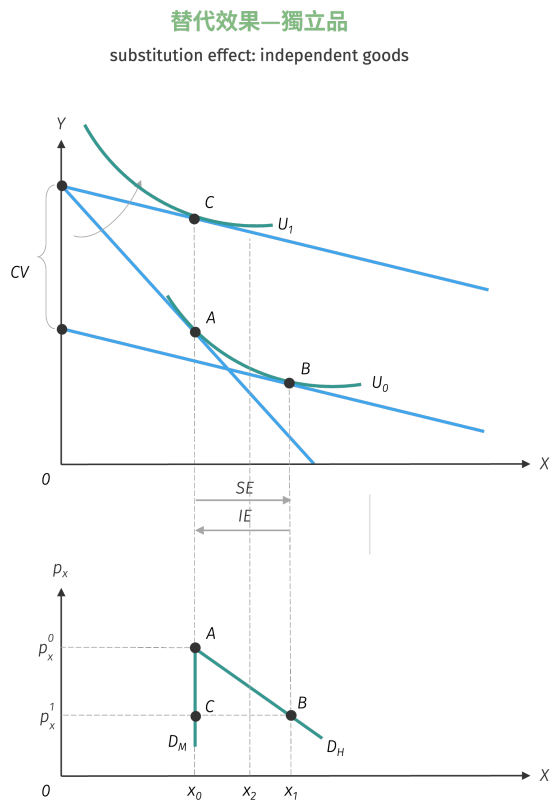

圖 35: 替代效果—獨立品

4.3.5 季芬財

季芬財 (Giffen goods) 即是描述當商品價格變動時，需求量也會同向變動，明顯違反需求法則。究其原因，即是因爲實質所得變動後，消費者大幅減少消費量，強過於替代效果，引申出的價格效果造成商品的消費數量減少。

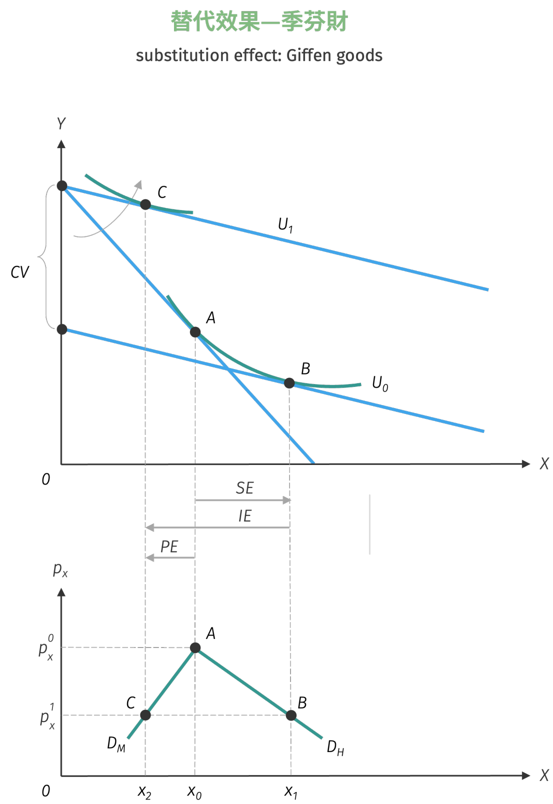

圖 36: 替代效果—季芬財

由上圖即可得知，一般需求曲線已明顯違反需求法則，但受補償需求曲線仍爲負斜率。此外，比較劣等財與季芬財，可以得出以下結論：*劣等財不一定爲季芬財，但季芬財必爲劣等財*。

定義 4.8 — Slutsky 方程式

Slutsky *方程式* (Slutsky equation) 係用於描述替代效果與所得效果之合併對價格效果的影響，用數學式表達爲：

$$\frac{\partial x}{\partial p_x} = \left.\frac{\partial x}{\partial p_x}\right|_{U=U_0}^{\text{SE}} + \left.\frac{\partial x}{\partial p_x}\right|^{\text{IE}} = \underbrace{\left.\frac{\partial x}{\partial p_x}\right|_{U=U_0}}_{\text{替代效果}} \underbrace{-x \cdot \frac{\partial x}{\partial M}}_{\text{所得效果}}$$

綜上，對於價格效果的分解，可以表示爲以下的表格。

表 5: 價格效果、替代效果與所得效果關係表

商品項目	價格效果	替代效果	所得效果
正常財	$-$	$-$	$-$
所得中性財	$-$	$-$	0
劣等財	$-$	$-$	$+$
獨立品	0	$-$	$+$
季芬財	$+$	$-$	$+$

:::

由上述分析可知，在無異曲線呈現凸向原點的條件下，分析 x 商品價格下跌後的替代效果必定造成 x 商品的消費數量增加，且此結論不因商品的性質而異；所得效果則會因爲商品性質而呈現不同的幅度。直觀來說，替代效果與所得效果可以這樣理解:

- 替代效果: 用較便宜替代較貴的
- 所得效果: 物價降低，消費者實質所得提升

例題 4.4 — 價格效果

給定效用函數爲 $U(x, y) = xy$，預算限制式爲 $p_x x + p_y y = M$。請求算:

1. x 商品的 Marshall 需求曲線與需求彈性
2. x 商品的 Hicks 需求曲線與需求彈性

【解】

1. 略。
2. 令原效用水準爲 $\bar{U}$。由支出極小化

$$\begin{aligned} &\min\ p_x x + p_y y \\ &\text{s.t. } xy = \bar{U} \end{aligned}$$

根據一階條件，可求出 $y = \frac{p_x}{p_y} \cdot x$ 的關係，代入限制式後得到

$$x^H(p_x, p_y, \bar{U}) = \sqrt{\frac{p_y}{p_x} \cdot \bar{U}}$$

5 消費者福利分析

延續前述的內容，分析當商品相對價格改變後，不同的消費者偏好型態以及效用水準如何互動。而衡量效用水準的目的是量化價格變動對消費者造成的實際損益

5.1　消費者剩餘

當消費者在既定的商品價格與所得下，若其全部持有標準商品 y (即 $p_y = 1$) 而不購買任何 x 商品，則原效用水準爲 U_0，如下圖 A 點。若此時消費者轉換商品組合至 B 點，亦即持有 x 與 y 兩商品的數量分別爲 x_0 與 y_1，此時雖然其效用水準仍維持於 U_0，並願意支付 $\overline{Ay_1}$ 的所得消費 x_0 單位的 x 商品，但實際上消費者之無異曲線與預算限制式相切之 E 點爲最適點，此時效用可達 U_1 水準，較原先的效用水準高，顯示實際購買僅需支付 $\overline{Ay_0}$ 即可消費相同數量的 x 商品。因此消費者消費 x_0 數量之 x 商品，願付數額減去實付數額之差額即是消費者剩餘 ($\overline{y_0y_1}$)，或可以理解爲效用水準 U_1 減去 U_0 的差。

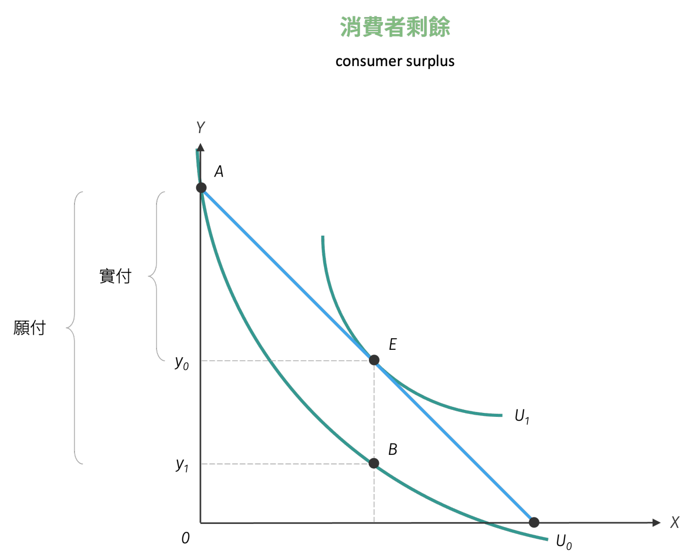

圖 37: 消費者剩餘

由上述對消費者剩餘的定義，可得在 x 價格未下跌下的消費者剩餘爲 $U_1 - U_0$，下跌後的消費者剩餘爲 $U_2 - U_0$，則

$$U_2 - U_1 = (U_2 - U_0) - (U_1 - U_0) = CS_2 - CS_1 = \Delta CS$$

表示不同價格下效用水準差額即爲消費者剩餘的變動量。

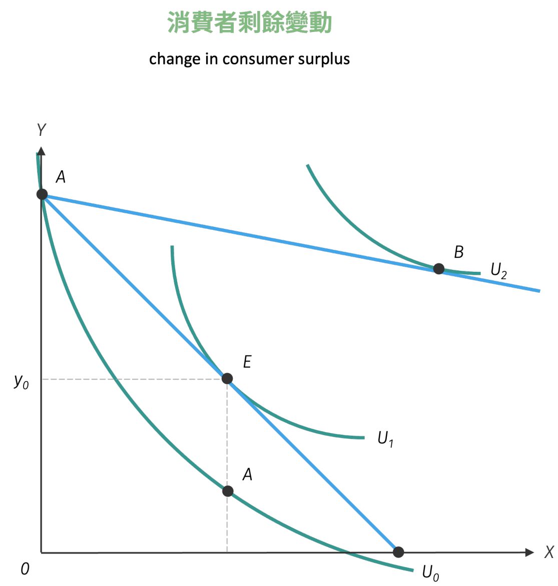

圖 38: 消費者剩餘變動

5.2 對偶分析[3]

在分解價格效果的過程中，有時求算的是在預算限制之下，不同商品相對價格的最適選擇，有時限制則是來源於效用水準，此即消費者選擇理論之對偶性 (duality)。

5.2.1 效用極大化

根據效用極大化求得的最適消費組合即爲 Marshall 需求函數，通常表示爲

$$x^M = x(p_x, p_y, M), \quad y^M = y(p_x, p_y, M)$$

將 Marshall 需求函數代入原效用函數，即可求出間接效用函數 (indirect utility function):

$$V(p_x, p_y, M) = U\left(x^M, y^M\right)$$

而間接效用函數經過以下運算可反推 Marshal 需求函數，此即 Roy's Identity:

$$x^M = -\frac{\dfrac{\partial V}{\partial p_x}}{\dfrac{\partial V}{\partial M}}, \quad y^M = -\frac{\dfrac{\partial V}{\partial p_y}}{\dfrac{\partial V}{\partial M}}$$

[3]對偶分析的證明與數學極爲複雜，有興趣的讀者可自行參閱其他進階個體經濟學的書籍。

5.2.2 支出極小化

相對於效用極大化，消費者在選擇最適消費組合時，可以轉換爲固定效用水準，使得其支出極小。而透過支出極小化求得的需求函數即爲 Hicks 需求函數。將 Hicks 需求函數代回目標函數 (即固定效用水準下的效用函數)，即可求得*支出函數* (expenditure function):

$$E(p_x, p_y, \bar{U}) = p_x x^H(p_x, p_y, \bar{U}) + p_y y^H(p_x, p_y, \bar{U})$$

由支出函數搭配 Shephard Lemma，可反推 Hicks 需求函數:

$$x^H = \frac{\partial E}{\partial p_x}, \quad y^H = \frac{\partial E}{\partial p_y}$$

5.2.3 對偶分析實際操作

將效用極大化與支出極小化兩個命題合併，可以得到兩者存在諸多重要的函數關係，如下圖所示:

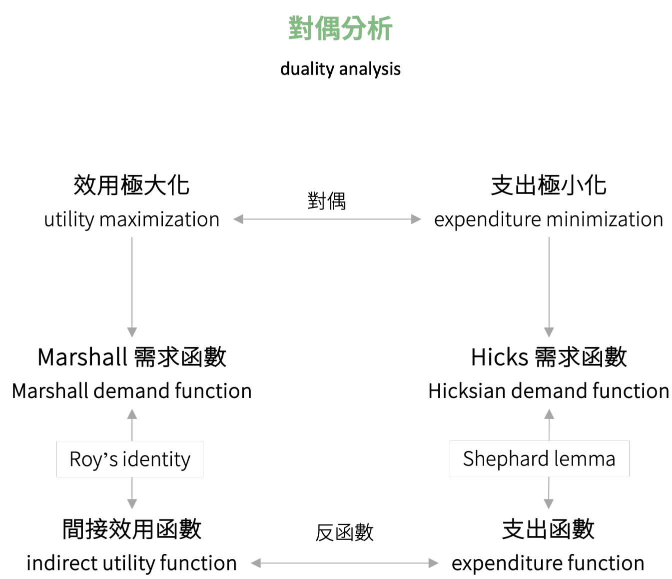

圖 39: 對偶分析

- 間接效用函數與支出函數：兩者互爲反函數
- 間接效用函數與 Marshall 需求函數：將間接效用函數代入 Hicks 需求函數的固定效用，即可得到 Marshall 需求函數
- 支出函數與 Hicks 需求函數：將支出函數代入 Marshall 需求函數的所得，即可得到 Hicks 需求函數

5.3 補償變量與對等變量

定義 5.1 — 補償變量與對等變量

- 補償變量 (compensated variation, CV) 係在商品相對價格變動後，爲能以變動後的相對價格維持變動前的效用水準，必須給予補償或扣除的數額。
- 對等變量 (equivalent variation, EV) 係在商品相對價格變動後，爲能以變動前的相對價格維持變動後的效用水準，必須給予補償或扣除的數額。

利用對偶分析所得出的函數關係，補償變量與對等變量可以表示爲以下的數學形式:

$$CV = \int_{p_x^0}^{p_x^1} x^H|_{U_0} = \int_{p_x^0}^{p_x^1} \left.\frac{\partial E}{\partial p_x}\right|_{U_0} dp_x = |E(p_x^0, p_y^0, U_0) - E(p_x^1, p_y^0, U_0)|$$

$$EV = \int_{p_x^0}^{p_x^1} x^H|_{U_1} = \int_{p_x^0}^{p_x^1} \left.\frac{\partial E}{\partial p_x}\right|_{U_1} dp_x = |E(p_x^0, p_y^0, U_1) - E(p_x^1, p_y^0, U_1)|$$

以 x 商品價格下跌爲例。原預算限制式 B_0 下選擇 A 點消費，當 x 價格下跌至預算限制式 B_2 時，消費者選擇 C 點消費，此時對名目所得加以扣除維持原本效用水準 U_0，可得預算限制式爲 B_1，最適消費組合爲 B 點。由此即可求出補償變量之大小，即圖中 $p_x^0ABp_x^1$ 圍成的面積。

若以原本相對價格對名目所得加以補償至變動後的效用水準 U_1，可得預算限制式爲 B_3，最適消費組合爲 D 點，由此可求出對等變量之大小，即圖中 $p_x^0DCp_x^1$ 圍成的面積。。

而由一般需求曲線可得，當 x 商品價格下跌後，消費者剩餘會額外增加 $p_x^0ACp_x^1$ 的面積，此即 x 商品價格下跌後的福利增量。

不過必須注意到，補償變量與對等變量的大小關係是不固定的，必須端視消費者偏好呈現的效用函數之型態，又或者是說消費者對於特定商品所呈現的消費行爲是何種商品類型。但無論補償變量與對等變量之關係爲何，消費者剩餘變動必定介於兩者之間。

例題 5.1 — 補償變量與對等變量

延續例題 4.3 對效用函數、所得與商品價格極其變動的假設，試回答下列問題:

1. 利用效用極大化模型，求算 Marshall 需求函數、間接效用函數，並驗證 Roy's Identity。
2. 利用支出極小化模型，求算 Hicks 需求函數、支出函數，並驗證 Shephard Lemma。
3. 根據上述結果，求算補償變量、對等變量，以及消費者剩餘變動量。

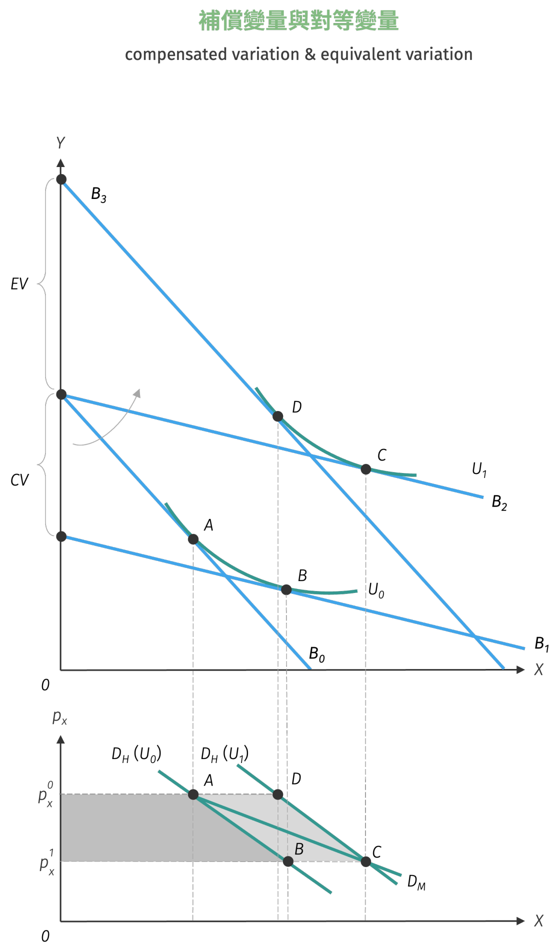

圖 40: 補償變量與對等變量