彈性

宋品岳

2025-08-26

目錄

彈性 (elasticity) 即是在特定因素刺激下，引發的行爲反應程度。以汽油爲例，作爲一名騎車通勤的學生，如果知道油價即將漲價，前幾天就會去加油站加油；但如果平時以大衆運輸作爲通勤方式，油價漲價似乎沒有太大的關係。由上述例子可以看出，不同消費者對於同一項商品價格變動的反應皆不相同，原因正是因爲彈性不同所致。

需求與供給函數爲商品價格、其他相關性商品/原料價格等變數的函數，因此可以衡量特定商品價格變動、其他相關性商品/原料價格變動與所得變動，對於特定商品需求量與供給量的影響。

1 價格彈性

我來幫您補齊這段關於價格彈性的說明:

價格彈性 (price elasticity) 是經濟學中最基礎也最重要的彈性概念。它衡量當商品價格變化時數量的相對變化程度。若欲衡量某商品價格變動對於數量的影響，直覺而言會以 $\frac{\Delta Q}{\Delta p}$ (連續則以 $\frac{dQ}{dp}$) 作爲指標。

不過細究會發現，當使用此定義作爲價格彈性指標，針對同一項商品衡量不同國家的價格彈性時會產生問題。由於各國貨幣單位不同，即使是相同的商品，其價格的絕對數值也會因匯率而有所差異。例如，同一瓶可樂在美國可能售價 \$2，在台灣可能售價 NT\$60，直接使用 $\frac{\Delta Q}{\Delta p}$ 會導致彈性值無法進行有意義的比較。

此外，即使在同一國家內，不同商品的價格水準也大不相同。奢侈品與日常用品的價格差距可能達到數百倍，使用絕對變化量來衡量彈性會失去經濟意義。

爲了解決這個問題，經濟學家採用百分比變化的概念，將價格彈性定義爲:

$$\text{價格彈性} = \frac{\text{數量變動百分比}}{\text{價格變動百分比}} = \frac{\%\Delta Q}{\%\Delta p}$$

或者更精確地表示爲:

$$\varepsilon_p = \frac{\frac{\Delta Q}{Q}}{\frac{\Delta p}{p}} = \frac{\Delta Q}{\Delta p} \cdot \frac{p}{Q}$$

若分析的對象爲連續型需求函數，則可表示爲

$$\varepsilon_p = \frac{\frac{dQ}{Q}}{\frac{dP}{p}} = \frac{dQ}{dp} \cdot \frac{p}{Q}$$

這樣的定義使得價格彈性成爲一個*無單位*的指標，不僅可以跨國比較，也可以在不同商品間進行有意義的比較分析。

1.1 點彈性與弧彈性

在實際應用價格彈性時，經濟學家面臨一個重要的技術問題：究竟應該以哪個價格和數量作爲計算基準？這個看似簡單的問題，實際上關係到彈性測量的準確性和可比較性。爲了解決這個問題，經濟學發展出兩種不同的計算方法：*點彈性* (point elasticity) 與*弧彈性* (arc elasticity)。

這兩種方法的差異在於計算基準的選擇。點彈性使用變化前的原始價格和數量作爲基準，而弧彈性則使用變化前後的平均值作爲基準。雖然這個差異看似微小，但在實際應用中會產生不同的數值結果，尤其是當價格變化幅度較大時。

1.1.1 點彈性

*點彈性*是以變化前的原始價格和數量作爲計算基準的彈性測量方法。其公式爲：

$$\varepsilon_p = \frac{\frac{\Delta Q}{Q_1}}{\frac{\Delta p}{p_1}} = \frac{\Delta Q}{\Delta p} \cdot \frac{p_1}{Q_1}$$

其中 p_1 和 Q_1 分別爲變化前的原始價格和數量，ΔP 和 ΔQ 分別爲價格和數量的變化量。

點彈性的數學意義更爲嚴謹，特別是在微分概念下。當價格變化趨近於零時，點彈性可以表達爲：

$$\varepsilon_p = \lim_{\Delta P \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta p} \cdot \frac{p}{Q} = \frac{dQ}{dP} \cdot \frac{p}{Q}$$

這個表達式說明了點彈性實際上是需求曲線在某特定點的切線斜率，再乘以該點的價格與數量比值。

1.1.2 弧彈性

*弧彈性*是以變化前後的平均價格和平均數量作爲計算基準的彈性測量方法。在理解弧彈性的設計原理之前，我們先來看看如果不使用平均值會發生什麼問題。

假設我們天真地嘗試用變化前後數值的總和作爲基準，彈性公式會變成：

$$\varepsilon_{naive} = \frac{\frac{\Delta Q}{Q_1+Q_2}}{\frac{\Delta p}{p_1+p_2}} = \frac{\Delta Q}{\Delta p} \cdot \frac{p_1+p_2}{Q_1+Q_2}$$

這種做法會產生嚴重的計算偏誤。由於分母中的 Q_1+Q_2 和 p_1+p_2 是總和而非平均值，計算出的百分比變化會被人爲地縮小一半。具體而言，若數量從 100 變化到 80，變化量爲 -20，但如果以總和 180 作爲基準，百分比變化會被錯誤地計算爲 $\frac{-20}{180} = -11.1\%$，而實際的平均值基準應該是 $\frac{-20}{90} = -22.2\%$。

更嚴重的是，這種錯誤的計算方法會導致量綱不一致的問題。百分比變化的定義本身就是變化量除以原始量值，使用總和作爲基準會違背百分比變化的基本數學定義，使得彈性失去其「無量綱」的重要特性。

因此，除以 2 的關鍵作用在於將總和轉換爲平均值，確保計算出的百分比變化符合數學定義且具有經濟意義。正確的弧彈性公式爲:

$$\varepsilon_p = \frac{\frac{\Delta Q}{\frac{Q_1+Q_2}{2}}}{\frac{\Delta p}{\frac{p_1+p_2}{2}}} = \frac{\Delta Q}{\Delta p} \cdot \frac{\frac{p_1+p_2}{2}}{\frac{Q_1+Q_2}{2}} = \frac{\Delta Q}{\Delta p} \cdot \frac{p_1+p_2}{Q_1+Q_2}$$

其中 p_1, Q_1 爲變化前的價格和數量，p_2, Q_2 爲變化後的價格和數量。

弧彈性的設計理念是要避免因爲選擇不同基準點而產生的估算偏誤。由於使用平均值作爲基準，無論是從 (p_1, Q_1) 變化到 (p_2, Q_2)，還是從 (p_2, Q_2) 變化到 (p_1, Q_1)，計算出的弧彈性數值都會相同。

例題—點彈性與弧彈性計算

某商品的需求資料如下:

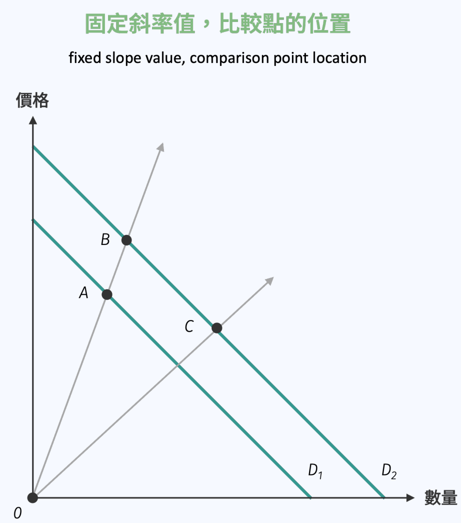
- 當價格爲 \$*20* 時，需求量爲 *100* 單位
- 當價格上漲到 \$*24* 時，需求量下降爲 *80* 單位

請分別計算:

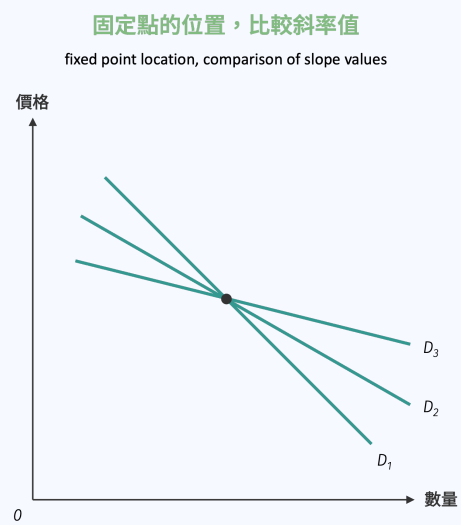
1. 以變化前後價格與爲基準的點彈性
2. 弧彈性
3. 比較三種計算結果的差異

例題—彈性計算區分

1. 底下 D_1 與 D_2 兩條需求曲線爲平行線的圖形中，A 點、B 點與 C 點三者需求價格彈性大小關係爲何?



2. 下圖中 E 點恰爲三條需求曲線上之同一交點，則 E 點位於哪個需求曲線上的需求價格彈性較大？



1.2 需求價格彈性

需求價格彈性 (price elasticity of demand) 是衡量需求量對價格變化敏感程度的重要指標。當商品價格發生變化時，消費者的需求量會如何回應。想像你是一家咖啡店的老闆，正在考慮是否調漲咖啡價格。如果將一杯咖啡從 50 元調漲到 55 元 (漲幅 10%)，而顧客的購買量從每天 100 杯減少到 90 杯 (降幅 10%)，那麼咖啡需求價格彈性就是 1，意味著價格每上漲 1%，需求量就會下降 1%。

1.2.1 需求價格彈性的定義與計算

需求價格彈性

給定需求函數爲 $Q^d = Q(p)$，則需求價格彈性定義爲:

$$\varepsilon_p^d = -\frac{dQ^d}{dp} \cdot \frac{p}{Q^d}$$

需求價格彈性在理論計算中通常會得到負值，這是因爲需求法則的存在：價格上升時需求量下降，價格下降時需求量上升。由於 $\frac{dQ^d}{dp} < 0$，所以彈性值自然爲負。然而，在實際分析中，當我們說某商品的需求價格彈性爲 1.5 時，比說 -1.5 更直觀：我們關心的是彈性的大小 (敏感程度)，而不是符號方向，因爲需求法則已經告訴我們方向必然是負的。

1.2.2 需求價格彈性的分類

一般來說，需求曲線的形狀會影響到需求彈性大小，因此底下探討需求彈性的各種情況，分爲五類:

表 1: 需求價格彈性分類

彈性數值	說明	圖形	典型例子
$\varepsilon_p^d = 0$	完全無彈性	垂直線	胰島素、食鹽
$0 < \varepsilon_p^d < 1$	無彈性	陡峭向下傾斜線	汽油、電力、基本食品
$\varepsilon_p^d = 1$	單位彈性	等軸雙曲線	理論中的特殊情況
$\varepsilon_p^d > 1$	富有彈性	平緩向下傾斜線	奢侈品、娛樂用品
$\varepsilon_p^d = \infty$	完全彈性	水平線	完全競爭市場中的個別廠商需求

完全彈性

完全彈性 (perfectly elastic) 的彈性趨近於無窮大，或記成 $\varepsilon_p^d \to \infty$。在此情境下，價格爲常數，因此價格變動的百分比爲零。完全彈性之需求曲線爲水平線，如下圖所示:

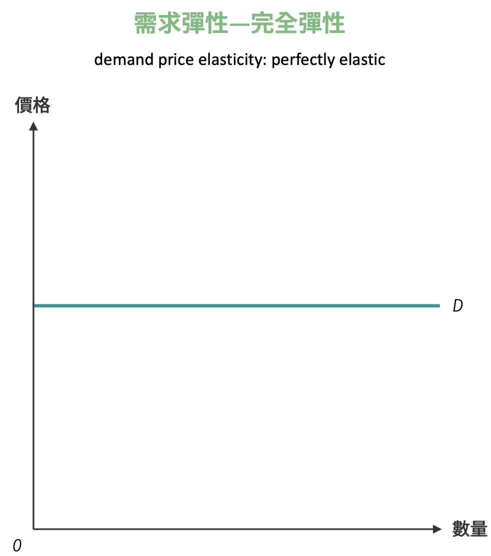


圖 1: 需求彈性—完全彈性

富有彈性

富有彈性 (elastic) 代表需求量變動百分比絕對值大於價格變動百分比絕對值。此時彈性大於 1。需求曲線平緩向下傾斜，如下圖所示:

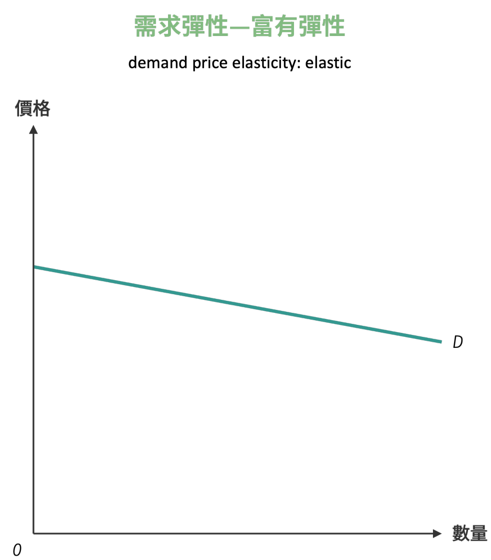


圖 2: 需求彈性—富有彈性

單位彈性

單位彈性 (unit elastic) 係需求量變動百分比等於價格變動百分比，由此可推出單一彈性的需求函數，隱含消費者的總支出爲固定額度。假設商品價格爲 p，消費者需求量爲 Q^d，固定支出爲 C。因此可得:

$$p \cdot Q^d = C \iff Q^d = c \cdot p^{-1}$$

根據需求彈性的公式，可以求得需求彈性爲 1。下圖即是單位彈性的需求函數，稱爲正等軸雙曲線 (equilateral hyperbola)。

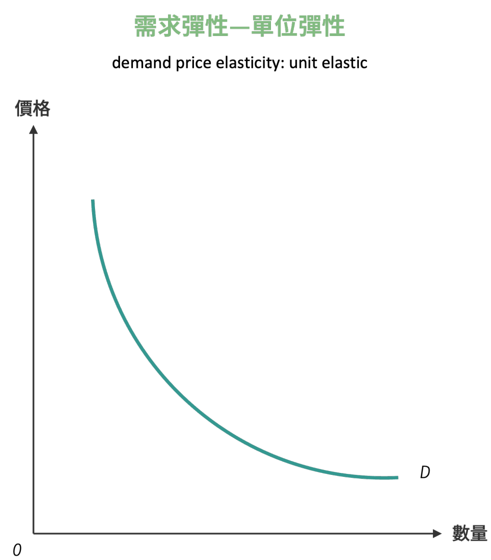


圖 3: 需求彈性—單位彈性

例題—需求單位彈性

小宋每個月的所得固定，並支用三分之一的所得在飲食上。請求出他對食品、飲品的需求彈性。

無彈性

無彈性 (inelastic) 或稱缺乏彈性，其需求量變動百分比小於價格變動百分比。需求曲線陡峭向下傾斜，如下圖所示:

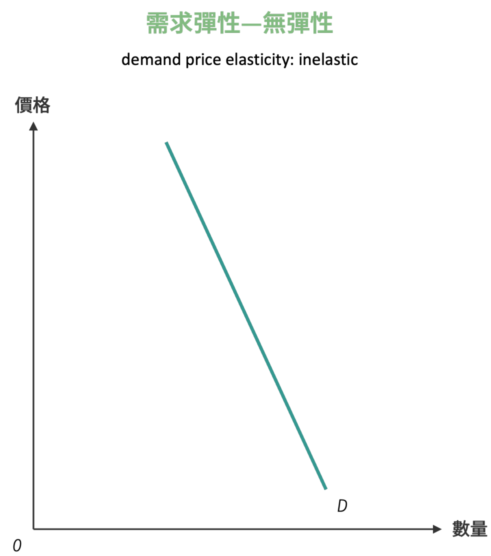


圖 4: 需求彈性—無彈性

完全無彈性

完全無彈性 (perfectly inelastic) 代表無論價格爲何，需求量皆爲定數，亦即需求量不受價格變動的影響，因此需求量變動百分比爲零。

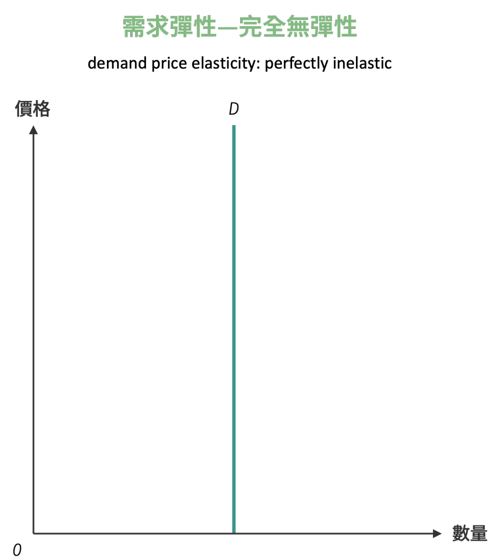


圖 5: 需求彈性—完全無彈性

1.3 供給價格彈性

供給價格彈性 (price elasticity of supply) 是衡量供給量對價格變化敏感程度的重要指標。當商品價格發生變化時，生產者的供給量會如何回應。想像你是一家服裝工廠的老闆，市場上 T 恤的價格從每件 100 元上漲到 110 元（漲幅 10%）。如果你的工廠將每週產量從 1000 件增加到 1200 件（增幅 20%），那麼 T 恤供給價格彈性就是 2，意味著價格每上漲 1%，供給量就會增加 2%。了解供給價格彈性有助於預測市場供給的調整速度和幅度，這對制定生產計畫和投資決策都極為重要。

1.3.1 供給價格彈性的定義與計算

供給價格彈性

給定供給函數為 $Q^s = Q(p)$，則供給價格彈性定義為：

$$\varepsilon_s = \frac{dQ^s}{dp} \cdot \frac{p}{Q^s}$$

與需求價格彈性不同，供給價格彈性通常為正值，這符合供給法則：價格上升時供給量增加，價格下降時供給量減少。由於 $\frac{dQ^s}{dp} > 0$（供給曲線向右上傾斜），所以彈性值自然為正。

供給價格彈性為正值的原因在於利潤動機：價格上升提高了生產的潛在利潤，激勵生產者增加產量。這種正向關係反映了市場機制的資源配置功能——當某商品價格上升時，表明市場對該商品需求增加，價格信號引導更多資源流向該商品的生產。

1.3.2 供給價格彈性的分類

同理，供給彈性也可以分為以下五類：

表 2: 供給價格彈性分類

彈性數值	說明	圖形	典型例子
$\varepsilon_s = 0$	完全無彈性	垂直線	土地、古董、短期農產品
$0 < \varepsilon_s < 1$	無彈性	陡峭向上傾斜線	重工業、電力、醫療服務
$\varepsilon_s = 1$	單位彈性	45 度向上傾斜線	理論中的特殊情況
$\varepsilon_s > 1$	富有彈性	平緩向上傾斜線	服務業、勞動密集型產業
$\varepsilon_s = \infty$	完全彈性	水平線	完全競爭長期均衡

完全彈性

與需求彈性的情況類似，爲一水平線。通常來說，水平供給曲線多出現在國際貿易探討小國面對外國進口的供給曲線。

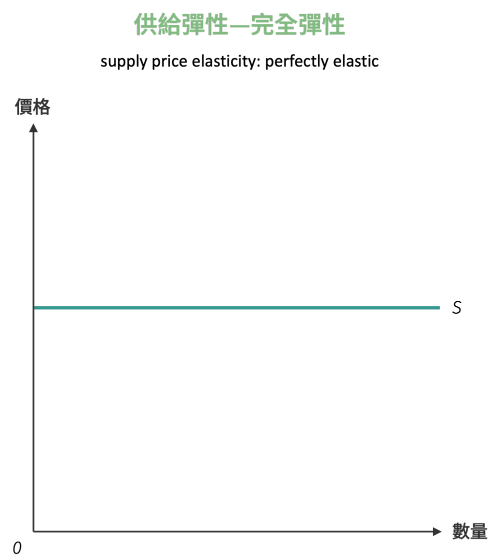


圖 6: 供給彈性—完全彈性

富有彈性

富有彈性代表供給量變動百分比絕對值大於價格變動百分比絕對值。此時彈性大於 1。供給曲線平緩向上傾斜，如下圖所示:

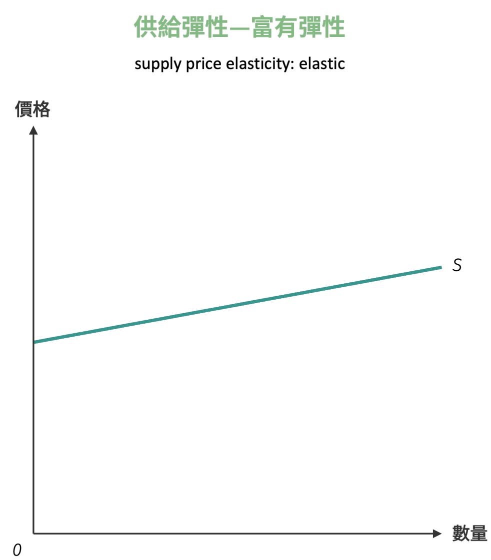


圖 7: 供給彈性—富有彈性

單位彈性

單位彈性係供給量變動百分比等於價格變動百分比，此時彈性等於 1。供給曲線具有適中的斜率向上傾斜，如下圖所示:

圖 8: 供給彈性—單位彈性

例題—供給單位彈性

為什麼單位彈性的需求線為曲線，而單位彈性的供給線卻為直線?

【解】

我們可以從彈性本身的定義來分析這個問題。首先，我們已經知道彈性的定義是「給定刺激下反應的程度」，因此價格彈性（無論是需求或供給，因此先不討論需求彈性要加上負號的情況）用數學的方式寫下來則是:

$$\varepsilon_p = \frac{dQ}{Q} / \frac{dP}{P}$$

我們可以將上面的形式改寫一下:

$$\varepsilon_p = \frac{P}{Q} / \frac{dP}{dQ}$$

假設我們令函數為 $P = aQ$，其中 $dP/dQ = a$，因此代入上面的算法可以得到:

$$\varepsilon_p = \frac{aQ}{Q} / \frac{dP}{dQ} = a/a = 1$$

可以得出如果彈性爲 1 時，函數必須爲通過原點的直線。但如果令函數爲 $P = aQ + c$，代入後得到

$$\varepsilon_p = \frac{aQ+c}{Q} \Big/ \frac{dP}{dQ} = \frac{\frac{aQ+c}{Q}}{a} = 1 + \frac{c/a}{Q}$$

由於一般的需求函數爲負斜率，代表有截距且不通過原點，因此價格的需求彈性爲 1 時，需求函數一定是正等軸雙曲線。

無彈性

無彈性其供給量變動百分比小於價格變動百分比。供給曲線陡峭向上傾斜，如下圖所示:

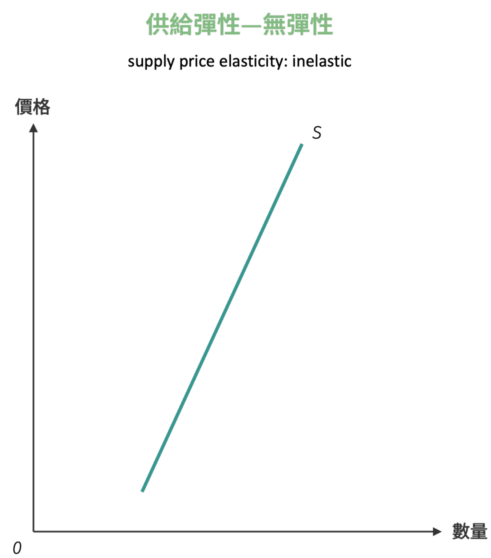


圖 9: 供給彈性—無彈性

完全無彈性

完全無彈性代表無論價格爲何，供給量皆爲定數，亦即供給量不受價格變動的影響，因此供給量變動百分比爲零。完全無彈性之供給曲線爲垂直線，如下圖所示:

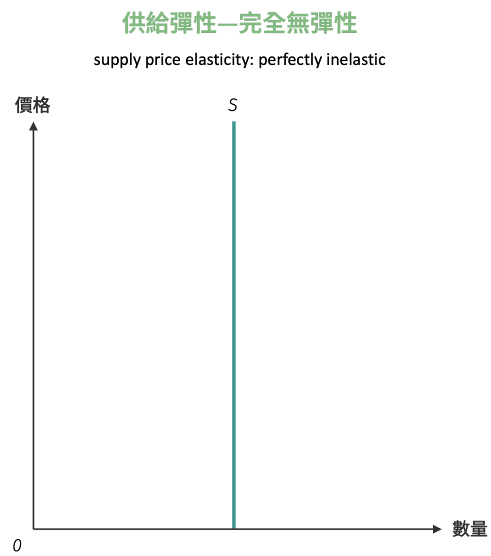


圖 10: 供給彈性—完全無彈性

2 交叉彈性與所得彈性

上述討論的彈性範疇係由商品本身價格的變動而引起需求量或供給量的變動。然而，需求函數不僅是自身價格的函數，更是其他相關商品價格或所得的函數。當其他相關商品價格變動或是所得增減對於需求量有何影響，則是本小節要討論的內容。

2.1 交叉彈性

交叉彈性 (cross-price elasticity of demand) 定義爲在其他情況不變之下，當相關商品價格變動 1% 時，對特定身品需求量變動的百分比值。

需求交叉彈性

商品 i 對商品 j 價格的需求交叉彈性定義爲：[a]

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\partial Q_x^d}{\partial p_y} \cdot \frac{p_y}{Q_x^d}$$

[a]注意到，ε_{xy} 與 ε_{yx} 的值不一定會相同，例如衡量肯德基降價對麥當勞的影響，與麥當勞降價對肯德基的影響，不應武斷地認定兩者一定相同。

由定義可知，交叉彈性用於判斷兩商品之間的關係，其中 $\frac{p_y}{x}$ 必爲正，因此交叉彈性之正負取決於 dx/dp_y 之符號，其可以區分出兩商品之間爲替代品、互補品或獨立品。

- 正值 ($\varepsilon_{xy} > 0$)：表示兩商品爲替代品，一商品價格上升會增加對另一商品的需求

- *負值* ($\varepsilon_{xy} < 0$)：表示兩商品爲*互補品*，一商品價格上升會減少對另一商品的需求
- *零值* ($\varepsilon_{xy} = 0$)：表示兩商品爲*獨立品*，彼此價格變化不會影響對方需求

例如當可口可樂漲價時，你可能會轉而購買百事可樂；但如果咖啡漲價，你對奶精的需求可能也會下降。前者反映了替代品關係，後者則體現了互補品關係。交叉彈性正是量化這些商品間相互影響程度的重要工具。

2.2 所得彈性

所得彈性 (income elasticity of demand) 的定義是，在其他情況不變之下，當消費者所得變動 1% 時，引起對特定商品需求量變動的百分比值。

所得彈性

商品需求量對消費者所得的彈性定義爲：

$$\varepsilon_M = \frac{\partial Q^d}{\partial M} \cdot \frac{M}{Q^d}$$

與交叉彈性類似，式中 $\frac{M}{x}$ 必爲正，故所得彈性之正負取決於 $\frac{dx}{dM}$，並可區分爲正常財、劣等財與中性財。

- $\varepsilon_M > 0$：*正常財* (normal goods)
- $\varepsilon_M < 0$：*劣等財* (inferior goods)
- $\varepsilon_M > 1$：*奢侈品* (luxury goods)
- $0 < \varepsilon_M < 1$：*必需品* (necessity goods)

當你的月薪從 3 萬元增加到 5 萬元時，你可能會增加外食頻率、購買更好的服裝、或者開始考慮買車。相反地，你可能會減少泡麵消費或不再光顧某些平價商店。這些消費行爲的變化正反映了不同商品的所得彈性特徵。

恩格爾曲線

恩格爾曲線 (Engel Curve) 是指在其他條件不變之下，表達出所得與需求量之間關係的關係曲線。其可表達出正常財、劣等財與所得中性財等關係。

- 正常財：恩格爾曲線將呈現正斜率，表示所得愈高需求量亦愈高。

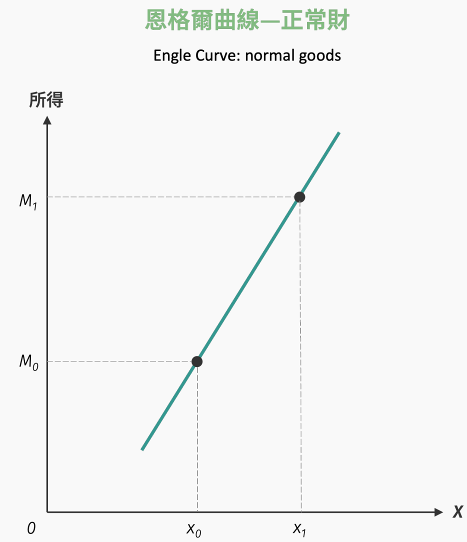


圖 11: 恩格爾曲線—正常財

- 劣等財：恩格爾曲線將呈現負斜率，表示所得愈高需求量愈低。

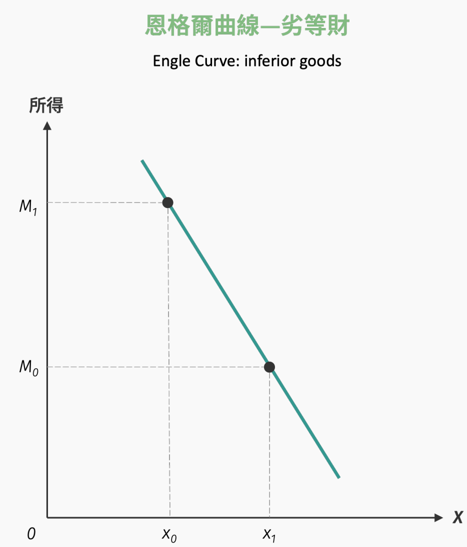


圖 12: 恩格爾曲線—劣等財

- 所得中性財：恩格爾曲線將呈現垂直直線，表示所得高低不影響需求量。

但如下面圖所示，A 點以下的恩格爾曲線爲正斜率的意義爲，當所得低到一定水準後，消費者的需求量亦將隨所得的減少而減少，仍爲中性財。

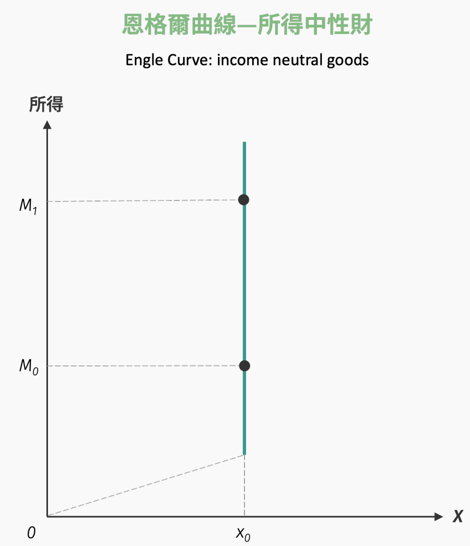


圖 13: 恩格爾曲線—所得中性財

若是給定兩點座標時，則必須以弧彈性的方法來計算。我們仍以中點座標:

$$\left(\frac{x_0+x_1}{2},\frac{M_0+M_1}{2}\right)$$

作爲 x 數量變動百分比與所得變動百分比以求解彈性。因此所得彈性的弧彈性公式爲:

$$\varepsilon_{xy}=\frac{\frac{x_1-x_0}{\frac{x_0+x_1}{2}}}{\frac{M_1-M_0}{\frac{M_0+M_1}{2}}}=\frac{x_1-x_0}{x_0+x_1}\cdot\frac{M_0+M_1}{M_1-M_0}$$

由上述公式計算的所得彈性數值，其爲正號、零或負號時所代表的意義與點彈性相同。

3 彈性應用

彈性的概念不僅具有分析上的意義，更在實務層面具有廣泛的應用。廠商在制定價格策略時，往往需要根據需求彈性來判斷是否調價能帶來收益的提升。此外，透過彈性分析，我們亦能理解總支出或總收入如何隨價格變動而改變，進而預測政策或市場變動對總體銷售的影響。本節將探討訂價策略、總支出與總收入的關係，並說明彈性在決策應用中的角色。

3.1 訂價策略

利用彈性的性質，可以分析商品的價格變動對於消費者總支出 (total expenditure) 的影響，又或是換一個面向來看，即是生產者的總收入 (total revenue)。

3.1.1 總支出或總收入函數

總支出或是總收入可以表達爲價格乘上數量，即:

$$TE = p \times Q \quad \text{或} \quad TR = p \times Q$$

爲了方便討論，以下皆以生產者的視角分析，使用總收入函數。假設需求函數爲 $Q = Q(p)$，或表達爲反需求函數 $p = p(Q)$，則總收入函數可區分爲底下兩種表達方法:

- 爲價格的函數: $TR = p \times Q = p \times Q(p)$
- 爲數量的函數: $TR = p \times Q = p(Q) \times Q$

兩種表達意義實際上是相同的，但是因爲分析標的不同，彈性主要探討價格變動對於數量的影響，因此採用第一種形式，即總收入函數爲價格的函數，而後者則需待產業分析方會使用。

3.1.2 總收入與需求彈性之關係

重述總收入函數的形式:

$$TR = p \times Q(p)$$

將其對價格微分後可得:

$$\begin{aligned}
\frac{dTR}{dp} &= Q(p) \cdot \frac{dp}{dp} + p \cdot \frac{dQ}{dp} \\
&= Q + p \cdot \frac{dQ}{dp} \\
&= Q\left(1 + \frac{dQ^d}{dp} \cdot \frac{dp}{dQ^d}\right) \\
&= Q \cdot (1 - \varepsilon_p^d)
\end{aligned}$$

上式的 $\frac{dTR}{dp}$ 代表價格變動對於總收入的影響。此外，在分析中，鮮少會討論非正數的數量，因此 $\frac{dTR}{dp}$ 的正負需視 ε_p^d 而定。

1. 需求彈性大於 **1**: 隱含 $\frac{dTR}{dp} < 0$，代表消費者的總支出會與價格變動方向呈反向變動，亦即當生產者銷售商品的需求彈性大於 1 時，爲增加收入，應採用降價策略。
2. 需求彈性等於 **1**: 此時 $\frac{dTR}{dp} = 0$，消費者的總支出不會受到價格變動的影響，無論生產者訂價策略爲何，總收入不會變動。
3. 需求彈性小於 **1**: 隱含 $\frac{dTR}{dp} > 0$，代表消費者的總支出會與價格變動方向呈同向變動，亦即當生產者銷售商品的需求彈性小於 1 時，爲增加收入，應採用漲價策略。

由上述說明，可以將其結論表格化如下:

表 3: 需求彈性與總支出的關係

需求彈性	價格上漲	價格下跌
$\varepsilon_p^d > 1$	總支出減少	總支出增加
$\varepsilon_p^d = 1$	總支出不變	總支出不變
$\varepsilon_p^d < 1$	總支出增加	總支出減少

例題—彈性應用：訂價策略

美國許多書商在出書時，多半都先出售精裝版 (hard–backed)，再出平裝版 (paper–backed)，試以需求彈性分析此現象。

【解】

- 甫出書：無論再貴都願意買，代表 $\varepsilon_p^d < 1$，因此訂定高價出售。
- 上市一陣子：市場上出現許多替代書籍，代表 $\varepsilon_p^d > 1$，因此訂定低價出售

例題—彈性應用：中點訂價

試證明需求函數爲負斜率直線型時，生產者於需求函數之中點訂價可使收入極大。

3.2 彈性性質

爲了更深入理解彈性的數學與經濟含義，我們需進一步探討其推導公式與理論性質。彈性不僅可透過點與弧的方式計算，其交叉彈性與所得彈性亦能揭示商品間的替代與互補關係。此外，彈性與需求函數的關聯，也反映在個人與市場層次上的變動。最後，透過庫諾加總、恩格爾加總與外生變數分析，從而完整掌握彈性在均衡理論中的角色與限制。

3.2.1 彈性的另類計算方法

由對數函數微分的基本性質

$$d\ln x = \frac{dx}{x}, \quad d\ln p_x = \frac{dp_x}{p_x}$$

我們即可得需求價格彈性的定義可以變化爲:

$$\varepsilon_x^d = \frac{dx}{dp_x}\cdot\frac{p_x}{x} = \frac{dx}{d\ln p_x}\cdot\frac{1}{x} = \frac{d\ln x}{d\ln p_x}$$

化爲:

$$\varepsilon_x^d = \frac{dx}{dp_x}\cdot\frac{p_x}{x} = \frac{d\ln x}{d\ln p_x} = \frac{dx}{d\ln p_x}\cdot\frac{1}{x}$$

因此同理交叉彈性與所得彈性亦可定義爲:

交叉彈性

$$\varepsilon_{xy} = \frac{dx}{dp_y} \cdot \frac{p_y}{x} = \frac{x}{dp_y} \cdot \frac{1}{x} \cdot p_y = \frac{d\ln x}{d\ln p_y} = \frac{dx}{d\ln p_y} \cdot \frac{1}{x}$$

所得彈性

$$\varepsilon_{xM} = \frac{dx}{dM} \cdot \frac{M}{x} = \frac{d\ln x}{d\ln M} = \frac{dx}{d\ln M} \cdot \frac{1}{x}$$

例題—彈性的另類計算方法

設某消費者對 x 商品的需求函數爲:

$$\ln x = (-0.5) \cdot \ln p_x + 0.3 \cdot \ln p_y + 0.2 \cdot \ln M$$

求 x 商品的需求價格彈性、所得彈性與對 y 商品價格的交叉彈性各爲何?

3.2.2 個人與市場需求彈性

假設社會中有 n 位消費者,每人對價格 p 的需求函數爲 $q_i(p)$,則市場總需求爲:

$$Q(p) = \sum_{i=1}^{n} q_i(p)$$

對上式兩邊對 p 微分,可得:

$$\begin{aligned}
\frac{dQ}{dp} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{dq_i}{dp} \\
\Rightarrow \quad \frac{dQ}{dp} \cdot \frac{p}{Q} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{dq_i}{dp} \cdot \frac{p}{Q} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{q_i}{Q} \cdot \frac{dq_i}{dp} \cdot \frac{p}{q_i} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{q_i}{Q} \cdot \varepsilon_p^i \right)
\end{aligned}$$

因此,市場需求價格彈性爲:

$$\varepsilon_p^d = \sum_{i=1}^{n} \theta_i \varepsilon_p^i$$

其中 $\theta_i = \frac{q_i}{Q}$ 爲佔比，並滿足:

$$\sum_{i=1}^{n} \theta_i = 1, \quad 0 \le \theta_i \le 1$$

例題—個人與市場需求彈性

Microsoft 想要計算在全球對其 Excel 銷售實施 5% 降價後的銷售變化效果。Microsoft 在美國、日本與歐洲以不同價格銷售 Excel。在降價前，美國的銷售量是日本與歐洲的兩倍。若美國、日本與歐洲的需求價格彈性分別爲 -3、-4 與 -2，則全球總銷售量將上升多少?

(A) 10%

(B) 15%

(C) 20%

(D) 25%

(E) 以上皆非

3.2.3 庫諾加總性質 (Cournot Aggregation Condition)

假設市場中僅有 x 與 y 兩種商品，預算限制式爲:

$$p_x \cdot x(p_x, p_y, M) + p_y \cdot y(p_x, p_y, M) = M$$

對 p_x 兩邊微分，有:

$$\frac{d}{dp_x}(p_x \cdot x + p_y \cdot y) = \frac{dM}{dp_x} = 0$$

$$\Rightarrow \quad x + p_x \cdot \frac{\partial x}{\partial p_x} + p_y \cdot \frac{\partial y}{\partial p_x} = 0$$

兩邊同除以 M 並整理得:

$$\frac{p_x \cdot x}{M}\left(1 + \frac{\partial x}{\partial p_x} \cdot \frac{p_x}{x}\right) = -\frac{p_y \cdot y}{M} \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial p_x} \cdot \frac{p_x}{y}\right)$$

亦即:

$$\beta_x \cdot (1 - \varepsilon_x^d) = -\beta_y \cdot \varepsilon_{yx}$$

其中:

- $\beta_x = \dfrac{p_x x}{M}$ 爲商品 x 在總支出中的支出比重

- $\varepsilon_x^d = -\frac{\partial x}{\partial p_x} \cdot \frac{p_x}{x}$ 爲商品 x 的自價格彈性
- $\varepsilon_{yx} = \frac{\partial y}{\partial p_x} \cdot \frac{p_x}{y}$ 爲商品 y 對於 x 價格的交叉彈性

庫諾加總性質的經濟意義在於，當經濟社會僅有 x 與 y 兩種商品時，若其中 x 商品的需求價格彈性大於 1，表示若 x 價格上漲時，則其需求量會大量減少，在 y 商品價格及所得不變且所得必須消耗完畢的情況下，隱含 x 商品此時的支出會減少，y 商品的消費量就會比之前來的更多，則 x 與 y 兩商品之間的關係必爲替代；反之當 x 商品的需求價格彈性小於 1，則 x 價格變動後，x 與 y 商品之關係必爲互補。

3.2.4 恩格爾加總性質 (Engel Aggregation Condition)

假設市場僅有 x, y 兩種商品財貨，由預算限制式（budget constraint）$p_x \cdot x + p_y \cdot y = M$ 可將其改寫爲:

$$p_x \cdot x(p_x, p_y, M) + p_y \cdot y(p_x, p_y, M) = M$$

式中兩邊對所得微分，

$$p_x \cdot \frac{\partial x}{\partial M} + p_y \cdot \frac{\partial y}{\partial M} = 1$$

可調整爲

$$\left(\frac{p_x \cdot x}{M}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial M} \cdot \frac{M}{x}\right) + \left(\frac{p_y \cdot y}{M}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial M} \cdot \frac{M}{y}\right) = 1$$

經過整理可得

$$\beta_x \cdot \varepsilon_x^M + \beta_y \cdot \varepsilon_y^M = 1$$

其中 ε_x^M 與 ε_y^M 代表 x 與 y 商品的所得彈性，β_x, β_y 則分別表示爲 x 與 y 商品之總支出佔所得的比例，且滿足 $0 \leq \beta_x \leq 1$, $0 \leq \beta_y \leq 1$ 及 $\beta_x + \beta_y = 1$。

式中由於 β_x, β_y 皆爲介於 0 到 1 之間的正數，此表示若社會僅有 x 與 y 兩商品，且必須滿足預算限制式所代表的所得分配條件下，則不可能同時 x 與 y 兩商品皆爲劣等財（因爲 $\varepsilon_x^M, \varepsilon_y^M$ 皆不可能同時皆爲負值）或是奢侈多品（因爲 $\varepsilon_x^M, \varepsilon_y^M$ 不可能同時皆爲大於 1 之數值）或必需品（因爲 $\varepsilon_x^M, \varepsilon_y^M$ 不可能同時皆爲小於 1 之間的數值)，但可能兩種商品同時爲正常財，或一爲正常財、一爲劣等財之情況。直覺而言，當我們所得增加之後，在所得必須耗盡的條件下，我們可能兩種商品同時都增加購買，或一增一減，但不可能同時兩商品都減少購買或大量增加購買量。

依據前述推導過程，我們亦可推導出具有 N 種商品時之數學式會滿足

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i \cdot \varepsilon_i^M = 1$$

三種商品以上之情況，仍符合不可能所有商品皆爲劣等財或奢侈品的條件；但其餘的狀況就有多種組合，因篇幅關係在此不贅述，請自行證明。

3.2.5 恩格爾法則 (Engel's Law)

表達商品支出比例與所得變動之間的關係法則。若假設 x 商品的支出比例爲

$$\beta_x = \frac{p_x \cdot x}{M} = \frac{p_x \cdot x(p_x, p_y, M)}{M}$$

兩邊對所得 M 微分:

$$\begin{aligned}\frac{d\beta_x}{dM} &= \frac{p_x \cdot \frac{\partial x}{\partial M} \cdot M - p_x \cdot x}{M^2} \\ &= \frac{p_x \cdot x}{M^2} \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial M} \cdot \frac{M}{x} - 1\right) \\ &= \frac{p_x \cdot x}{M^2} \cdot (\varepsilon_{xM} - 1)\end{aligned}$$

可得結論有:

- 當所得彈性 $\varepsilon_{xM} > 1$ 時，得 $\dfrac{d\beta_x}{dM} > 0$，表示所得愈高支出比例會愈高。
- 當所得彈性 $\varepsilon_{xM} = 1$ 時，得 $\dfrac{d\beta_x}{dM} = 0$，表示支出比例不受所得變動影響。
- 當所得彈性 $\varepsilon_{xM} < 1$ 時，得 $\dfrac{d\beta_x}{dM} < 0$，表示所得愈高支出比例會愈低。

3.2.6 外生變數變動對商品均衡價格的影響

設供需模型如下:

$$\begin{aligned}Q^d &= Q^d(p, M) \\ Q^s &= Q^s(p)\end{aligned}$$

並設供需符合需求法則與供給法則，即:

$$\frac{\partial Q^d}{\partial p} < 0, \quad \frac{dQ^s}{dp} > 0$$

均衡時必滿足 $Q^d(p, M) = Q^s(p)$。對此式全微分可得:

$$\frac{\partial Q^d}{\partial p}\, dp + \frac{\partial Q^d}{\partial M}\, dM = \frac{dQ^s}{dp}\, dp$$

整理後得:

$$\frac{\partial Q^d}{\partial M}\, dM = \left(\frac{dQ^s}{dp} - \frac{\partial Q^d}{\partial p}\right) dp$$

再整理可得:

$$\frac{\partial Q^d}{\partial M} \cdot \frac{M}{Q} = \left(\frac{dQ^s}{dp} - \frac{\partial Q^d}{\partial p}\right) \cdot \frac{p}{Q}$$

故可得 $\varepsilon_M \cdot \dfrac{dM}{M} = (\varepsilon_p^s + \varepsilon_p^d) \cdot \dfrac{dp}{p}$，因此可得：

$$\frac{dp}{p} = \frac{\varepsilon_M}{\varepsilon_p^s + \varepsilon_p^d} \cdot \frac{dM}{M}$$

即可得當所得變動某特定百分比時，對均衡價格的變動影響百分比。同理若我們分析的外生變數爲供給面的部分亦可得到商品市場均衡價格變動百分比。