消費者理論

宋品岳

2025-08-29

目錄

當你走進便利商店，面對貨架上琳瑯滿目的商品時，是否曾思考過自己的購買決策背後隱藏著什麼經濟原理？爲什麼你會選擇購買一瓶 35 元的運動飲料而非 150 元的進口果汁？爲什麼同樣是飲料，你的選擇與隔壁顧客截然不同？這些看似簡單的日常消費行爲，實際上反映了消費者理論的核心邏輯——在有限資源下追求最大滿足的理性決策過程。

消費者理論建立在兩個基本假設之上，這兩個假設精準地刻畫了人類經濟行爲的本質特徵。首先是*慾望無窮*的現實，在經濟學中我們用「效用」這個概念來量化消費者的慾望和滿足程度。效用代表消費者從商品或服務中獲得的主觀滿足感，而人類的特質就是永遠渴望更多——更好的食物、更舒適的居住環境、更先進的科技產品、更豐富的娛樂體驗。無論我們已經擁有多少，總是能想像出更理想的生活狀態，這種對於更高效用水準的無盡追求，正是推動經濟活動的根本動力。

然而，慾望雖然無窮，資源卻是有限的。這就是第二個基本假設——*資源有限*，在數學上我們用「預算限制式」來表達這個約束條件。每一筆支出都意味著機會成本，每一次選擇某商品都暗示著放棄其他商品的可能性。時間是稀缺的，金錢是有限的，注意力是分散的——這些約束條件共同構成了消費者必須在其中做出最優選擇的現實框架。

正是在這種「無窮慾望」與「有限資源」的矛盾張力中，消費者理論應運而生。透過數學化的效用函數和預算限制，將人類複雜的消費行爲轉化爲可以精確分析的最佳化問題，揭櫫了看似隨機的購買決策實際上遵循著理性的經濟邏輯。

1 效用

站在手搖飲料店前，你可能會陷入一個熟悉的困境：是選擇平常最愛的珍珠奶茶，還是嘗試新推出的芋泥拿鐵？這個看似簡單的選擇背後，其實涉及了經濟學中最核心的概念之一——*效用*。效用不只是滿足感或快樂程度的抽象表述，它是經濟學家用來理解和預測消費者行爲的縝密工具。

效用的概念源於一個簡單但深刻的觀察：人類永遠渴望更多更好的東西。無論是品嚐美食帶來的愉悅、購買新衣服的興奮、或是學習新知識的充實感，這些主觀體驗雖然因人而異，但都指向同一個事實——我們天生就是慾望無窮的存在。早晨起床後，你可能希望有一杯完美的咖啡；中午用餐時，你渴望品嚐美味的料理；晚上下班後，你想要舒適的休閒娛樂。即使今天的所有願望都得到滿足，明天又會有新的慾望產生。這種永無止境的慾望推動著我們不斷消費、不斷選擇，也推動著整個經濟體系的運行。效用理論的力量在於將這種主觀的、難以衡量的心理感受轉化爲可以數學化分析的客觀工具。

1.1 理性行為與選擇公理

進行消費者行爲分析以前，我們必須有一些假設或公理作爲分析準則。這些假設被稱爲理性行爲 (rational behavior)，即我們假設消費者會在面對特定的預算限制下，選擇具有最大效用的行爲，或是當目標確定時，會選擇成本最少的行爲方式。經濟學中所謂的「理性」，並非指經濟個體自利 (self-interest) 或是貪婪等情緒層面的特質，而是假設我們有能力認定某一項商品組合是否優於另一項商品組合，進而在偏好顯示下，選擇具有較高效用的組合。

爲了更好分析，通常使用 $\succ$ 符號代表我們對某一商品組合嚴格偏好 (strictly prefers) 於另一個商品組合，例如 $(x_1, y_1) \succ (x_2, y_2)$ 表示 (x_1, y_1) 組合優於 (x_2, y_2) 組合。另外若表示兩種商品組合滿足無差異 (indifferent)，例如 $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$，表示 (x_1, y_1) 組合主觀上讓消費者的滿足感與 (x_2, y_2) 組合相同，表示兩商品組合無差異。基於以上偏好關係，我們可以建立一套描述理性偏好的基本公理：

1.1.1 完整性公理 (Completeness)

完整性公理

在 (P_x^0, P_y^0, M_0) 的預算條件下，消費者存在 $A(x_0, y_0)$ 與 $B(x_1, y_1)$ 兩商品組合可選擇，則必然發生 $A \succ B$ 或 $B \succ A$ 或 $A \sim B$，三種組合中必只僅有一組會成立，且不可能皆不成立，此稱爲完整性公理成立。

亦即消費者可明確判斷商品組合的偏好順序，否則便消費者無法明示偏好順序，則選擇將變得困難且不具完整性公理的假設。

惟在現實生活中，完整性公理不一定會成立，例如當你是一位美國 MLB 棒球的教練，設 X 爲打擊率，Y 爲全壘打的數量，你如果面對 A、B 兩個球員且 A 球員爲 $(x_0, y_0) = (0.375, 10)$ 而球員 B 爲 $(x_1, y_1) = (0.250, 50)$，A 打擊率遠高於 B 表示其上壘次數會比較多，而 B 的全壘打數卻遠高於 A，顯示 B 的關鍵一擊可能會改變戰局，此時你可能會難以選擇。但在序列效用分析過程中，一定要假設完整性公理要成立，否則我們無法進行效用函數與比較分析。

1.1.2 反身性公理 (Reflexivity)

反身性公理

表示 $(x_0, y_0) \sim (x_0, y_0)$，表示對消費者而言，任一 A 商品組合與同一 A 商品組合一樣好，簡單而言，反身性公理就是自己 (商品組合) 就是自己。

反身性一般皆出現於說明過程，故在本章分析過程中比較少用到。

1.1.3 遞移性公理 (Transitivity)

遞移性公理

在 (P_x^0, P_y^0, M_0) 的預算條件下，若消費者存在 $A(x_0, y_0)$ 與 $B(x_1, y_1)$ 與 $C(x_2, y_2)$ 三種商品組合可以選擇，則在下任一條件成立時，我們皆稱爲 $A \succ C$:

1. $A \succ B$ 且 $B \succ C$
2. $A \sim B$ 且 $B \succ C$
3. $A \succ B$ 且 $B \sim C$

另外若 $A \sim B$ 且 $B \sim C$，則依據遞移性公理則 $A \sim C$ 亦會成立。遞移性公理在現實社會裡有時難以成立，但在經濟分析中，如果遞移性公理不成立，即消費者將無法找到最佳選擇。

當我們假設 $x \succ y$ 可對應以效用函數 $U(x) > U(y)$，此處 $U(\cdot)$ 代表效用函數 (水準)。

1.1.4 單調性公理 (Monotonicity)

單調性公理

如果我們假設所有商品皆爲喜好品 (goods)，當消費者所消費的商品數量愈多其效用愈高，即假設滿足單調性公理，亦即單調性公理只要成立，就自動表示消費者之消費行爲無飽和點 (non-satiation) 的限制，此處的飽和點是指當消費者消費至某一特定商品組合時，當商品消費提升，反會使得消費者的效用下降，以致於最適存在有飽和點的限制，以利確保在有效的模型框架中仍有較佳的狀況，藉此一商品組合就會被視爲最有效的消費狀況。

以圖形而言，我們通常假設消費者更偏好位於右上方的商品組合。因此，我們通常假設消費者消費的是有利於他們效用增加的商品，而非會降低效用下降的有害品。

單調性公理是指在 (P_x^0, P_y^0, M_0) 的條件下，若消費者存在 $A(x_0, y_0)$ 與 $B(x_1, y_1)$ 兩商品組合可以選擇，則

1. 當 $x_0 > x_1$ 且 $y_0 > y_1$ 時；或
2. 當 $x_0 \geq x_1$ 且 $y_0 > y_1$ 時；或
3. 當 $x_0 > x_1$ 且 $y_0 \geq y_1$ 時

上述任一條件成立時，皆稱爲 $A(x_0, y_0) \succ B(x_1, y_1)$。

1.1.5 凸性公理 (Convexity)

凸性公理

凸性公理前提爲，我們先要介紹凹函數 (concave function) 的觀念。在經濟分析中要討論的凹函數，有單變數函數的凹函數與多變數函數的凹函數。集中在函數 $z = f(x)$ 且令 $\bar{x} = \theta \cdot x_0 + (1-\theta) \cdot x_1$，當 $0 < \theta \leq 1$ 時，凹函數的分類如下:

1. 若 $f(\bar{x}) \geq \theta \cdot f(x_0) + (1-\theta) \cdot f(x_1)$ 成立時，則稱 z 爲凹函數 (concave function)
2. 若 $f(\bar{x}) > \theta \cdot f(x_0) + (1-\theta) \cdot f(x_1)$ 成立時，則稱 z 爲嚴格凹函數 (strictly concave function)
3. 若 $f(\bar{x}) \leq \theta \cdot f(x_0) + (1-\theta) \cdot f(x_1)$ 成立時，則稱 z 爲弱凹函數 (weakly concave function)
4. 若 $f(\bar{x}) = \theta \cdot f(x_0) + (1-\theta) \cdot f(x_1)$ 成立時，則稱 z 爲準凹函數

故當加權的函數值大於函數值的加權時，此即爲凹函數。

另一種判斷函數是否具有凸性或是否爲凹函數的方法，可將兩商品組合的連線 (加權平均商品組合) 視其是否完全落於弱偏好集合之中，如下圖中 A 我們稱爲凹函數或稱爲具有凸性 (convex)，圖 B 亦爲凹函數，圖 C 則稱其函數爲凸函數 (convex function) 或稱爲具有凹性 (concave)。

1.1.6 連續性公理 (Continuity)

連續性公理

在經濟學所研究的商品，事實上大都難以細微分割，但表示於圖形上，會導致線條非曲線，因此爲方便起見，以連續性假設商品可以任意分割。

連續性公理確保了效用函數的數學性質，使我們能夠使用微積分工具進行分析。在現實中，許多商品確實是離散的 (如汽車、房屋)，但連續性假設簡化了分析過程，且在大部分情況下不會顯著影響結論的有效性。

1.1.7 小結

上述五個公理共同構成了消費者理性行爲的基礎假設。完整性與遞移性確保偏好排序的邏輯一致性，反身性提供基本的邏輯起點，單調性反映了「多即是好」的基本假設，而凸性則隱含了邊際效用遞減和風險趨避的行爲特徵。連續性公理則爲數學分析提供了技術基礎。

透過這些公理的建立，我們能夠將主觀的消費者偏好轉化爲客觀的數學表達，爲後續的效用函數建構和最適化分析奠定堅實的理論基礎。

1.2 無異曲線

無異曲線 (indifferent curve) 的定義爲，在其他情況 (價格) 不變，清費者消費 x 及 y 兩商品 (亦可推廣至多種商品)，在維持其效用水準不變下，兩種商品間可以互換的效用水準爲爲某一特定常數，我們以下表的五種 (x, y) 組合來說明：若 x, y 兩商品皆爲喜喜好品，表中所列的商品組合 $(x, y) = (1, 12)$、此組合與 $(2, 8)$、$(3, 5)$、$(4, 3)$ 與 $(5, 2)$ ，當該給消費者具有相同 U_0 水準的滿足感，則將這些組合表示於座標上所形成的曲線，稱爲無異曲線。

組合	A	B	C	D	E
x	1	2	3	4	5
y	12	8	5	3	2

上圖中的無異曲線，在利用連續性假設後，一般我們將無異曲線畫成圖形的曲線，在同一條無異曲線上的各種商品組合，皆代表對消費者而言相同的一特定水準上所有構其爲無異曲線類型 U_0；圖形上的 F 點商品組合 $(x, y) = (3, 8)$ 依照單調性公理其效用必滿足 $(2, 8)$ 與 $(3, 5)$ 兩商品組合，因此通過 $(3, 8)$ 而且與 $(3, 5)$ 具有相同效用水準 U_1 的無異曲線可能如圖中紅色線條所示。在滿足之前所談有關描述偏好的行爲公理，在 x 與 y 兩商品皆爲喜好品的假設下，則無異曲線的特性有:

1.2.1 無異曲線的基本特性

平面上存在無限多條無異曲線

如上圖所示，紅色線條與藍色線條分別可再分出效用值介於 U_0 與 U_1 的無異曲線，因此平面上存在無限多條表達出各種不同效用值的無異曲線。

負斜率

當兩商品皆爲喜好品時，爲了維持效用水準固定不變，增加一商品的消費必須減少另一商品的消費，即依據單調性公理兩種商品都同時增加或減少，因此無異理，消費者的效用水準必定也同時上升或下降，而無法維持效用無異。因此無異曲線爲負斜率。

邊際替代率

邊際替代率 (marginal rate of substitution, MRS) 指在兩種財貨組合 x 與 y 及保持效用不變的條件下，消費者每得到額外一單位 x 之後要而必須放棄 y 的數量，以 MRS_{xy} 表示，其計算方式爲:

$$MRS_{xy} = -\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\bar{U}}$$

其中下標 $\bar{U}$ 表示效用維持固定。

利用效用函數 $U = U(x, y)$，對其全微分得:

$$\begin{aligned} dU = 0 &= \frac{\partial U}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot dy \\ \Rightarrow 0 &= MU_x \cdot dx + MU_y \cdot dy \\ \Rightarrow \frac{dy}{dx} &= \frac{MU_x}{MU_y} = MRS_{xy} \end{aligned}$$

其中 $dU = 0$ 的原因在於求無異曲線的 MRS_{xy} 必須是效用水準的變動值爲零。由上得知，MRS_{xy} 爲兩商品消費至最後一單位時的邊際效用函數值相除。邊際替代率 MRS_{xy} 的用途，爲可搭配效用函數來點出無異曲線的形狀，底下舉例說明。

例題—無異曲線斜率計算

設效用函數爲 $U(x, y) = x^2y^2$，則其無異曲線的形狀爲何？

愈往右上，效用愈高

若 x 與 y 兩商品皆爲喜好品，則單調性公理將保證愈往右上方向，x 與 y 的商品數量愈多效用愈高，愈往左下方向表示 x 與 y 商品偏好愈高的方向，且 U_1 大於 U_0。

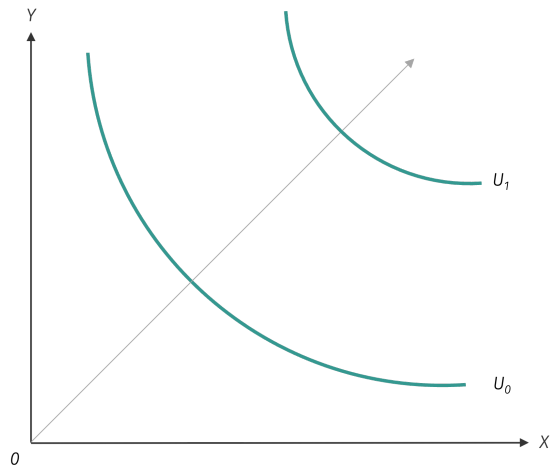

圖 1: 效用函數越往右上效用越高

任兩條無異曲線不相交[1]

設無異曲線可以相交，如下圖中之 U_0 與 U_1。假設 A 點與 B 點位於同一無異曲線 U_0 上，所以 A 點與 B 點的效用無異，且 A 點與 C 點位於同一無異曲線 U_1 上，所以 A 點與 C 點的效用無異。

利用遞移性公理，B 點的 x 數量大於 C 點的 x 數量一樣，且 B 點的 y 數量會大於 C 點的 y 數量，可知 B 點效用會大於 C 點。

[1]任兩條無異曲線不可相交，是同一人且在同一時期的無異曲線不可相交。但是針對不同人之間的無異曲線，或同一人但不同時期的無異曲線則可以相交。

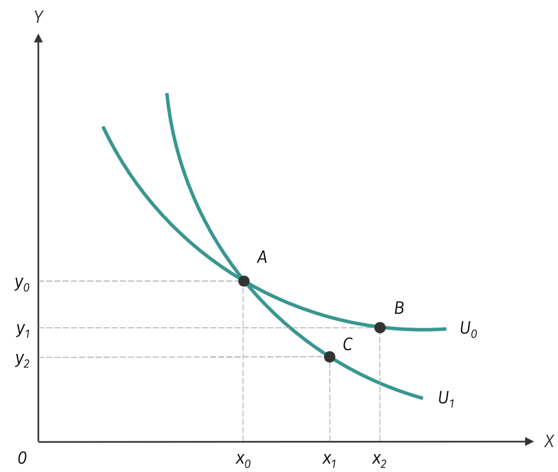

圖 2: 任兩條無異曲線不相交

圖形中顯示，B 點的 x 數量大於 C 點的 x 數量，且 B 點的 y 數量大於 C 點的 y 數量，因此利用單調性公理，我們有 B 點比 C 點的效用一致，產生矛盾，代表原假設有誤，故任兩條無異曲線不可相交。

無異曲線會呈凸向原點

無異曲線會呈凸向原點的特性，是由於邊際效用遞減法則所致。

邊際效用遞減法則

邊際效用遞減法則係指在一般情況下，消費者爲維持一定的效用水準，以某一特定 x 商品來替換 y 商品，通常會隨著 x 商品的數量增加，所願意犧牲的 y 商品數量會隨之減少。

下圖中由 A 點到 B 點，當消費者多消費一單位 x 商品，此時在維持 U_0 效用水準下，消費者必須犧牲 Δy_1 的 y 商品數量，而當消費者再次增加一單位 x 商品的消費 (B 點到 C 點)，此次 x 商品的消費所帶給消費者的邊際效用將不若前一單位 x 商品的邊際效用，因此在維持 U_0 效用水準下，消費者此次僅需犧牲較少的 y 商品數量可，意味著 Δy_2 必小於 Δy_1 的 y 商品數量。此會會導致隨著 x 商品數量愈多效用下降，此會會導致邊際替代率 MRS_{xy} 遞減，而呈現無異曲線會呈現凸向原點的特性，此時就導致邊際替代率遞減法則 (the law of diminishing MRS_{xy})。無異曲線會具有凸向原點的特性，此時就導致邊際替代率遞減法則成立的結果。

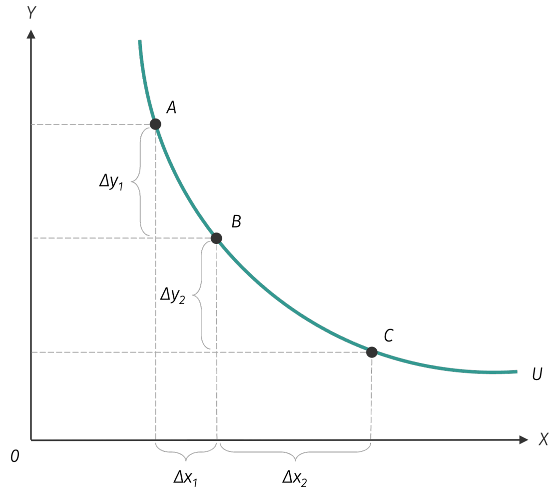

圖 3: 無異曲線會凸向原點

例題—邊際效用遞減與邊際替代率遞減

是否當所有商品的邊際效用遞減法則皆成立時，會隱含無異曲線的邊際替代率遞減法則亦會成立？如果設效用函數爲 $U = U(x, y)$ 且滿足 $U_x > 0$、$U_{xx} < 0$、$U_y > 0$、$U_{yy} < 0$，亦即 x 與 y 商品皆爲喜好商品且邊際效用皆隨消費量增加而遞減，另無異曲線的斜率可表達爲

$$\frac{dY}{dX} = -\frac{MU_x}{MU_y} = -\frac{U_x}{U_y}$$

$$U_x = U_x(x, y) = \frac{\partial U}{\partial x} = MU_x(x, y) > 0, U_{xx} = \frac{\partial U_x}{\partial x} = \frac{\partial MU_x}{\partial x} < 0$$
$$U_y = U_y(x, y) = \frac{\partial U}{\partial y} = MU_y(x, y) > 0, U_{yy} = \frac{\partial U_y}{\partial y} = \frac{\partial MU_y}{\partial y} < 0$$

且 $MRS_{xy} = -\frac{dY}{dX} = \frac{U_x}{U_y} = \frac{U_x(x, Y(x))}{U_y(x, Y(x))}$。若隨著 x 商品消費量增加，MRS_{xy} 會隨之下降，

則表示邊際替代率遞減法則成立，以數學表達即爲 $\frac{dMRS_{xy}}{dx} < 0$。底下證明成立條件:

$$\frac{dMRS_{xy}}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{U_x}{U_y}\right) = \frac{1}{U_y^2}\left[U_{xx} + U_{xy}\left(\frac{dy}{dx}\right)\right] \cdot U_y - \left[U_{yx} + U_{yy}\left(-\frac{dy}{dx}\right)\right] \cdot U_x$$

$$= \frac{1}{U_y^2}\left[U_{xx} + U_{xy}\left(-\frac{U_x}{U_y}\right)\right] \cdot U_y - \left[U_{yx} + U_{yy}\left(-\frac{U_x}{U_y}\right)\right] \cdot U_x$$

$$= \frac{1}{U_y^2}\left(U_{xx} \cdot U_y - U_{xy} \cdot U_x - U_{yx} \cdot U_x + U_{yy} \cdot \frac{U_x^2}{U_y}\right)$$

$$= \frac{1}{U_y^3}\left(U_{xx} \cdot U_y^2 - 2 \cdot U_{xy} \cdot U_x \cdot U_y + U_{yy} \cdot U_x^2\right)$$

利用 Young's theorem 得知 $U_{xy} = U_{yx}$，故上式可改爲

$$\frac{1}{U_y^3}\left(U_{xx} \cdot U_y^2 - 2 \cdot U_{xy} \cdot U_x \cdot U_y + U_{yy} \cdot U_x^2\right) < 0$$

上式中 $U_y^3 > 0$，所以 $\frac{dMRS_{xy}}{dx} < 0$ 隱含 $U_{xx} \cdot U_y^2 - 2 \cdot U_{xy} \cdot U_x \cdot U_y + U_{yy} \cdot U_x^2 < 0$ 必須要成立，若商品邊際效用遞減法則成立，則 $U_{xx} \cdot U_y^2 < 0$ 且 $U_{yy} \cdot U_x^2 < 0$ 但因爲 U_{xy} 的正負符號不確定，故無法確認 $\frac{dMRS_{xy}}{dx} < 0$，例如當 $U_{xy} < 0$，即所

- 當 $U_{xy} > 0$，亦即 $U_{xy} = \frac{dU_x}{dY} > 0$，表示消費者多消費一單位的 Y 商品，此時 x 商品的邊際效用會提升，隨含 x 與 Y 商品具有效用上的互補關係，故在 x 與 Y 商品具有效用上的互補關係時，兩商品邊際效用遞減法則成立即隱含邊際替代率遞減法則亦成立。
- 當 $U_{xy} < 0$，亦即 $U_{xy} = \frac{dU_x}{dY} < 0$，表示消費者多消費一單位的 Y 商品，此時 x 商品的邊際效用會下降，隨含 x 與 Y 商品具有效用上的替代關係，故在 x 與 Y 商品具有效用上的替代關係時，兩商品邊際效用遞減法則成立即隱含邊際替代率遞減法則亦成立。

1.3 無異曲線形狀與邊際替代率的關係

若 x 與 Y 兩商品皆爲喜好商品，則無異曲線的形狀與邊際替代率的變動關係如下圖所示:

當 $\frac{dMRS_{xy}}{dx} < 0$ 時，表示在商品邊際效用遞減法則成立的條件下，並不代表邊際替代率一定會呈現遞減的形式，亦即邊際效用遞減與邊際替代率遞減法則，兩者之間並不具有互相隱含的關係。

- $\frac{dMRS_{xy}}{dx} < 0$：無異曲線呈現凸向原點的形狀
- $\frac{dMRS_{xy}}{dx} = 0$：無異曲線呈現直線的形狀
- $\frac{dMRS_{xy}}{dx} > 0$：無異曲線呈現凹向原點的形狀

若 x 與 y 兩商品皆爲喜好品，則無異曲線的形狀與邊際替代率的變動關係如下圖所示:

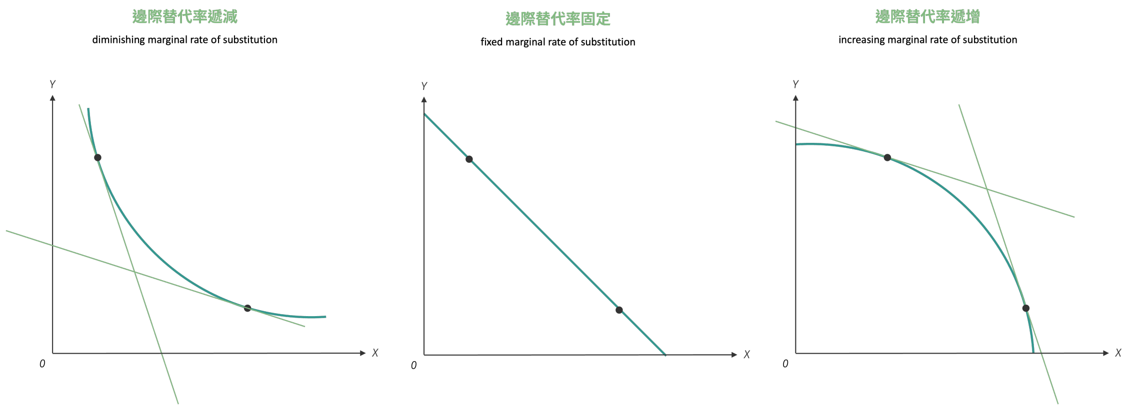

圖 4: 邊際替代率與無異曲線形狀

- 左圖：邊際替代率呈現遞減，亦即 $\frac{dMRS_{xy}}{dx} < 0$ 成立。
- 中圖：邊際替代率呈現固定，亦即 $\frac{dMRS_{xy}}{dx} = 0$ 成立。
- 右圖：邊際替代率呈現遞增，亦即 $\frac{dMRS_{xy}}{dx} > 0$ 成立。

1.4 效用函數之單調遞增轉換

序列效用分析仍延續計數效用分析中之效用函數水準的偏好，在計數效用分析中的效用水準有一意義，例如當我們說效用水準爲 10 util 與 20 util 可將後者的滿足感是前者滿足感的兩倍，效用水準的數字本身有絕對的觀念。

但在序列效用分析之中，用以代表效用水準的函數中皆爲相對對照 (relative magnitude) 的觀念，就像是我們在測量溫度時，可採用攝氏 (Celsius) 或華氏 (Fahrenheit) 來量，0°C 等於 32°F，100°C 等於 212°F，亦好像我們在測量距離時，可採用公尺 (meters) 或英尺 (feet) 來衡量。效用水準就像上述的相對量一樣，不同的衡量基準會導致數字不同，這也不影響函數本身具有相同間好的消費者。你現在有多快樂？乙回答:「我現在很有幸福快樂。」甲回答:「乙會回答:『我現在在萬分快樂。』」其中的甲的『十分』與乙的『萬分』，其實可能表達出一樣的滿足感。這隱含不同的效用函數可能可以表達出相同的價好水準，但其順序不同的效用水準的數字不同。

單調轉換

單調轉換 (monotonic transformation)，代表隨著不同的效用函數之效用值之間具有正/負相關。設效用函數 $U = U(x, y)$，則存在另一效用函數 $V = f(U) = f[U(x, y)]$。

- 若 $\frac{dV}{dU} = f'(U) > 0$，稱 V 爲 U 之單調遞增轉換 (monotonic increasing transformation)。亦即兩個函數之間若互爲單調遞增轉換時，則兩函數的無異曲線形狀會相同，但偏好方向相同，但相同商品組合的效用值不會相同。
- 若 $\frac{dV}{dU} = f'(U) < 0$，稱 V 爲 U 之單調遞減轉換 (monotonic decreasing transformation)，亦即兩個函數之間若互爲單調遞減轉換時，則兩函數的無異曲線形狀會相同，但偏好方向相反，但相同商品組合的效用值不會相同。

假設現存在消費者 A，其效用函數爲 $U = xy$，由 $MU_x = \frac{\partial U}{\partial x} = y$，$MU_y = \frac{\partial U}{\partial y} = x$，可得 $MRS_{xy} = \frac{MU_x}{MU_y} = \frac{y}{x}$，亦隱含無異曲線的斜率爲 $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$。再配合效用函數 $U = xy$，我們可以畫出無異曲線的形狀爲

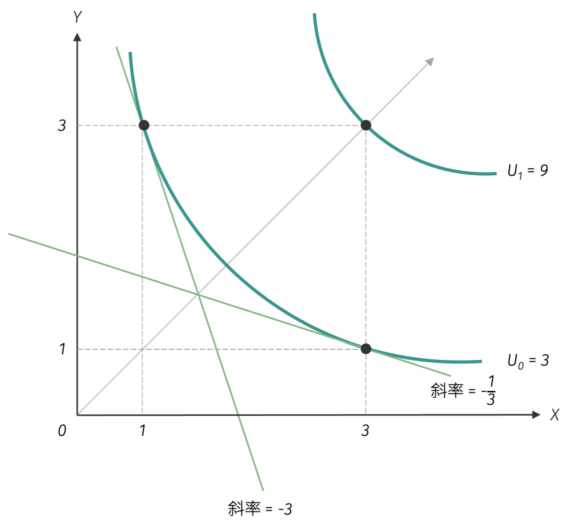

圖 5: 限量政策

若存在另一消費者 B，其效用函數爲 $V = 2xy$，由 $MU_x = \frac{\partial V}{\partial x} = 2y$，$MU_y = \frac{\partial V}{\partial y} = 2x$，可得 $MRS_{xy} = \frac{MU_x}{MU_y} = \frac{y}{x}$，亦隱含無異曲線的斜率爲 $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$。再配合效用函數 $V = 2xy$，我們可以畫出無異曲線的形狀爲

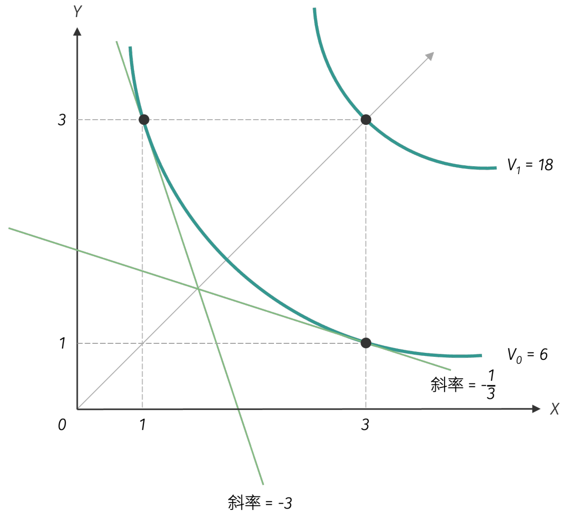

圖 6: 單調遞增轉換消費者 B

若存在一消費者 C，其效用函數爲 $w = \frac{1}{xy}$，由 $MU_x = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{-1}{x^2 y}$，$MU_y = \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{-1}{xy^2}$，可得 $MRS_{xy} = \frac{MU_x}{MU_y} = \frac{y}{x}$，亦隱含無異曲線的斜率爲 $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$。再配合效用函數 $w = \frac{1}{xy}$，我們可以畫出無異曲線的形狀爲

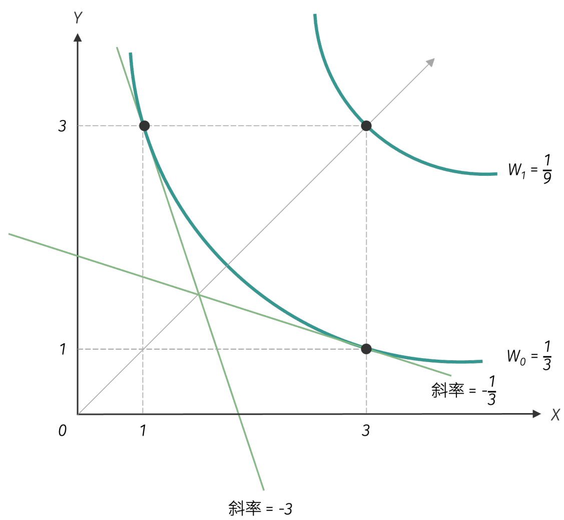

圖 7: 單調遞增轉換消費者 C

我們可以發現三位消費者的無異曲線群完全相同，僅效用水準值有異，因此三者的效用函數互爲彼此的單調遞增轉換。如下表所示，前述 A、B 與 C 三位消費者，在不同消費組合下的效用水準如下:

商品組合 (x, y)	A 的效用水準	B 的效用水準	C 的效用水準
$(x, y) = (1, 1)$	$U_1 = 1$ util	$V_1 = 2$ util	$W_1 = 1$ util
$(x, y) = (2, 2)$	$U_2 = 4$ util	$V_2 = 8$ util	$W_2 = 1/4$ util
$(x, y) = (3, 3)$	$U_3 = 9$ util	$V_3 = 18$ util	$W_3 = 1/9$ util

例題—單調遞增轉換函數

下列那些效用函數爲效用函數 $U(x, y) = xy$ 的單調遞增轉換函數?

1. $V(x, y) = 2xy$
2. $W(x, y) = \frac{1}{xy}$
3. $Z(x, y) = xy + 10$
4. $A(x, y) = xy - 10$
5. $B(x, y) = 10 - xy$
6. $C(x, y) = x^2y^2$
7. $D(x, y) = x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$
8. $E(x, y) = \ln(xy)$
9. $F(x, y) = x^3y^3$
10. $H(x, y) = \ln x + \ln y$

表 3: 原效用函數、單調遞增轉換的函數與單調遞減轉換函數之間的關係

與原效用函數比較	單調遞增轉換	單調遞減轉換
效用函數	不同	不同
邊際效用函數	不同	不同
邊際替代率函數	相同	相同
無異曲線的形狀	相同	相同
偏好方向	相同	相反

齊序函數

若效用函數 $U = U(x, y)$ 爲一階齊次函數，則效用函數透過單調遞增轉換所構成的效用函數版稱爲齊序函數 (homothetic function)。
當效用函數 $U = U(x, y)$ 具有一階齊次的數的特性時，則表示下式會成立:

$$\lambda U = U(\lambda x, \lambda y)$$

令 $\lambda = \frac{1}{x}$，可得 $\frac{U}{x} = U\left(1, \frac{y}{x}\right)$，或可整理爲 $U = x \cdot u\left(\frac{y}{x}\right)$，則我們可計算出

$$MU_x = \frac{\partial U}{\partial x} = u\left(\frac{y}{x}\right) + u'\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \frac{-y}{x^2} \cdot x = u\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \frac{y}{x} \cdot u'\left(\frac{y}{x}\right)$$
$$MU_y = \frac{\partial U}{\partial y} = x \cdot u'\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \frac{1}{x} = u'\left(\frac{y}{x}\right)$$

故可得 $MRS_{xy} = \frac{MU_x}{MU_y} = \frac{u\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \frac{y}{x} \cdot u'\left(\frac{y}{x}\right)}{u'\left(\frac{y}{x}\right)} = f\left(\frac{y}{x}\right)$，此顯示效用函數具有一階齊次的特性時，在相同射線下的不同無異曲線，其 MRS_{xy} 數值會相同的特性。

求算單調遞增轉換之齊序效用函數 $V = F(U) = F[U(x,y)]$ 的 MRS_{xy} 函數，則

$$MRS_V = \frac{f' \frac{\partial U}{\partial x}}{f' \frac{\partial U}{\partial y}} = \frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{\frac{\partial U}{\partial y}} = \frac{MU_x}{MU_y} = MRS_U$$

我們會發現其 MRS_{xy} 與原效用函數相同，故亦表示齊序效用函數亦具有在相同射線下的不同無異曲線，其 MRS_{xy} 數值會相同的特性。

1.5 各類效用函數

在現實生活中，不同消費者面對商品選擇時展現出截然不同的偏好模式：有些人認爲咖啡與茶完全可以互相替代，有些人則堅持左脚穿左鞋、右脚穿右鞋的固定搭配。看似個人化的消費習慣，實際上反映了深層的偏好結構差異。經濟學透過構建不同類型的效用函數來精確刻畫這些偏好特徵，每一種效用函數都是理解特定消費行爲的數學工具，爲消費者理論提供了豐富的分析框架，並奠定後續消費者選擇之理論基礎。

1.5.1 飽和效用函數

當消費者對 x 與 y 兩商品的消費組合爲 (x_0, y_0) 時的效用達到極大。

- 當任一商品消費數量小於 x_0 或 y_0 時，商品均爲喜好品，表示此時若增加任一商品的消費數量皆會增加效用。
- 當任一商品消費數量大於 x_0 或 y_0 時，商品均爲厭惡品，表示此時若增加任一商品的消費數量皆會減少效用。

此時稱 (x_0, y_0) 爲*極樂點* (bliss point) 或是*飽和點* (satiation point)，效用函數表示爲：

$$U(x,y) = c - a(x-x_0)^2 - b(y-y_0)^2, \quad a,b,c \in \mathbb{R}^+$$

效用函數圖形如下圖所示：

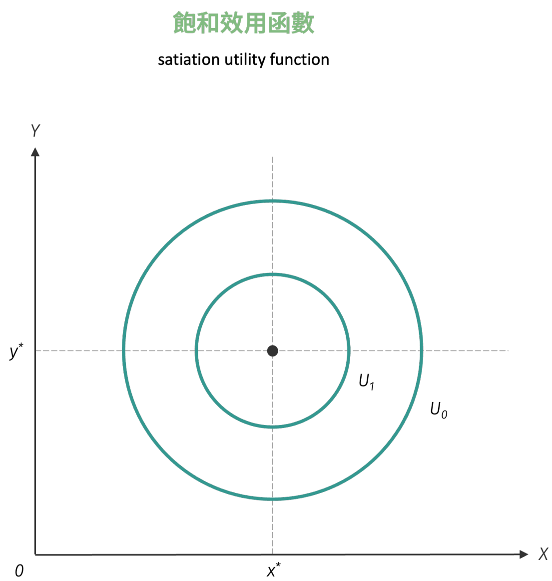

圖 8: 飽和效用函數

1.5.2 完全替代型效用函數

描述完全替代 (perfect substitutes) 型之偏好的效用函數可以用下式表達:

$$U(x, y) = ax + by$$

其中 a、b 爲大於零的常數。假設效用水準不變，且固定爲常數 c，則

- 當 $x = 0$ 時，$y = \frac{c}{b}$
- 當 $y = 0$ 時，$y = \frac{c}{a}$

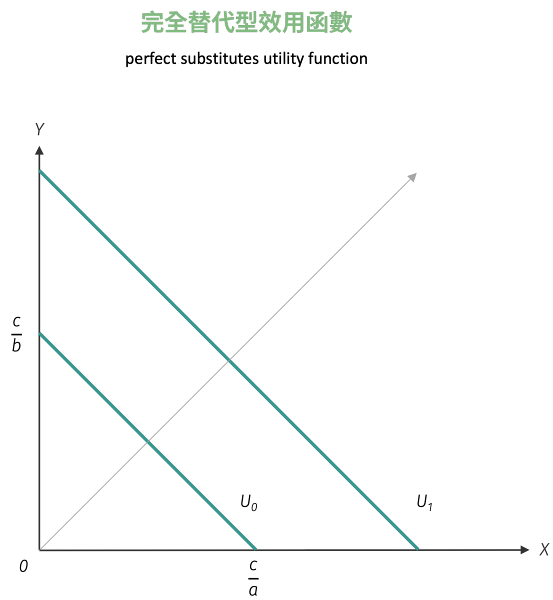

圖 9: 完全替代型效用函數

由圖可以看出，完全替代型效用函數爲一直線，故又稱爲線性 (linear) 效用函數。經過簡單計算後，可得完全替代型效用函數之邊際替代率爲

$$MRS_{xy} = \frac{a}{b}$$

邊際替代率爲常數，不符合邊際替代率遞減法則。注意到以下效用函數均爲效用函數 $U(x,y) = ax + by$ 之單調遞增轉換函數，可自行驗證。

- $V(x,y) = \sqrt{ax + by}$
- $W(x,y) = ax + by - k$
- $Z(x,y) = a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2$

1.5.3 完全互補型效用函數

若消費者偏好特殊，喜歡依特定比例搭配 x 與 y 商品，則稱其偏好爲完全互補型 (perfect complement)。以數學式表達如下:

$$U(x,y) = \min\{ax, by\}$$

上式效用函數中的 a、b 爲正的常數，其中 min 的意義爲選取括號中兩數較小者爲效用值。例如商品組合 $(10,10)$、$(10,11)$ 與 $(11,10)$ 皆帶給消費者同樣爲 10 util 的效用水準。或者換句話說，當 $x = 10$ 且 $y \geq 10$ 或 $y = 10$ 且 $x \geq 10$ 時，無論另一項商品數量爲何，均不影響效用值。

如下圖所示，此種消費偏好型態必須滿足 x 與 y 兩商品爲特定數量比例消費，超過的部分如圖中所示之垂直或水平線段，不會再增加消費者的效用水準。此外，拗折點 (kinky point) 必出現在 $ax = by$ 或是 $\frac{y}{x} = \frac{a}{b}$ 之射線上。

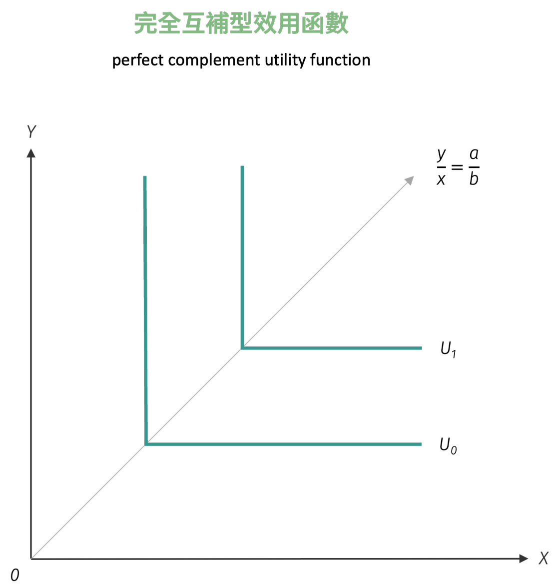

圖 10: 完全互補型效用函數

注意到此種偏好型態之邊際替代率不存在，原因在於拗折點的切線斜率可以爲任意數值，或由數學觀點而言，拗折點「不可微分」。

以下效用函數均爲效用函數 $U(x, y) = \min\{ax, by\}$ 之單調遞增轉換函數:

- $V(x, y) = k \cdot \min\{ax, by\}$
- $W(x, y) = k \cdot \min\{x, \frac{b}{a}y\}$
- $Z(x, y) = \ln \min\{ax, by\}$

1.5.4 Cobb-Douglas 效用函數

Cobb-Douglas 效用函數爲經濟學中最常見的效用函數之一，其具有良好的特性。利用數學函數表達 Cobb-Douglas 效用函數圖形如下圖所示:

$$U(x, y) = Ax^{\alpha}y^{\beta}$$

其中 A、α 與 β 均爲正的常數，A 稱爲效用因子 (utility factor)。經過簡單的計算，可以得到 Cobb-Douglas 效用函數的邊際替代率爲

$$MRS_{xy} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{y}{x}$$

根據 Cobb-Douglas 效用函數之邊際替代率可得以下特性:

邊際效用可爲遞增、固定或遞減

由兩商品的邊際效用與效用函數對該商品之二次微分:

$$U_x = \alpha A x^{\alpha-1} y^{\beta}, U_{xx} = \alpha(\alpha-1) x^{\alpha-2} y^{\beta}$$
$$U_y = \beta A x^{\alpha} y^{\beta-1}, U_{yy} = \beta(\beta-1) x^{\alpha} y^{\beta-2}$$

可得以下情況:

- 當 $\alpha > 1$ ($\beta > 1$) 時，則 $U_{xx} > 0$ ($U_{yy} > 0$)，隱含邊際效用遞增。
- 當 $\alpha = 1$ ($\beta = 1$) 時，則 $U_{xx} = 0$ ($U_{yy} = 0$)，隱含邊際效用固定。
- 當 $\alpha < 1$ ($\beta < 1$) 時，則 $U_{xx} < 0$ ($U_{yy} < 0$)，隱含邊際效用遞減。

無異曲線凸向原點[2]

以 x 商品爲例，將邊際替代率對 x 進行微分後，可得

$$\begin{aligned}\frac{dMRS_{xy}}{dx} &= \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\frac{dy}{dx} \cdot x - y}{x^2} \\ &= \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{-\frac{\alpha}{\beta}\frac{y}{x} \cdot x - y}{x^2} \\ &= -\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\left(1 + \frac{\alpha}{\beta}\right) y}{x^2} < 0\end{aligned}$$

即可知無異曲線凸向原點。

無論 x 商品與 y 商品的邊際效用呈現遞增、固定或遞減，邊際替代率皆會

以下效用函數均爲效用函數 $U(x, y) = Ax^{\alpha} y^{\beta}$ 之單調遞增轉換函數:

- $V(x, y) = x^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \cdot x^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}$
- $W(x, y) = \ln(x^{\alpha} y^{\beta})$
- $Z(x, y) = \alpha \ln x + \beta \ln y$

---

[2]在證明邊際替代率是否遞減時，必須將其中一項商品視爲另一項商品的函數，而不能將其視爲常數。原因是：當某一商品的數量發生變動時，整體商品組合也隨之改變；若錯誤地將另一商品視爲常數，則無法正確反映邊際替代率隨商品組合變動而調整的特性。因此下述證明是錯誤的，請牢記於心:

$$\frac{dMRS_{xy}}{dx} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{0 \cdot x - y}{x^2} = -\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{y}{x^2} < 0$$

1.5.5 準線性效用函數

準線性效用函數 (quasi-linear utility function) 可以表達如下:

$$U(x,y) = f(x) + y \quad 或 \quad U(x,y) = x + f(y)$$

以前者說明，其中 $f' > 0$ 且 $f'' < 0$。一般常見形式有:

- $U(x,y) = \ln x + y$
- $U(x,y) = \sqrt{x} + y$

準線性效用函數的邊際替代率爲 f' 之值，因此有以下特性:

無異曲線凸向原點

由邊際替代率以及二階微分可得證，請自行證明。

邊際替代率僅受一項商品數量影響

已知準線性效用函數之邊際替代率如下:

$$MRS_{xy} = f'(x)$$

顯示僅受到 x 商品數量的影響，不受 y 商品數量影響。因此當 x 商品數量固定時，所有無異曲線的邊際替代率均相同，如下圖所示:

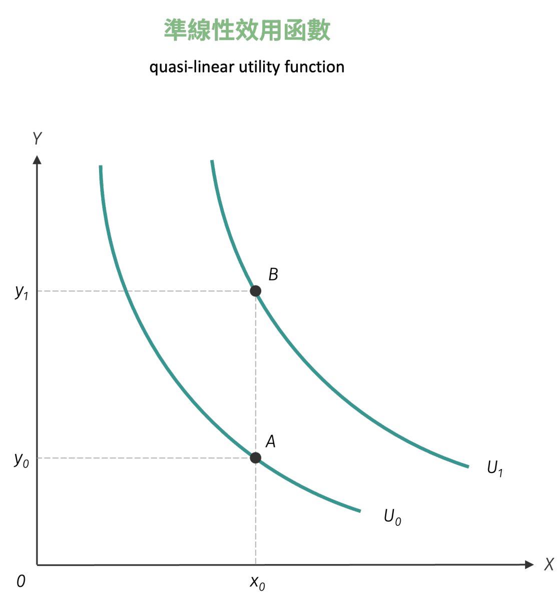

圖 11: 準線性效用函數

1.5.6 固定替代彈性效用函數

固定替代彈性效用函數 (constant elasticity of substitution utility function, CES utility function) 是暨 Cobb-Douglas 效用函數，另一個常見的效用函數形式，其效用函數形如:

$$U(x, y) = A \cdot \left[\delta \cdot x^{-\rho} + (1-\delta) y^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}}$$

上式中的 $A > 0$，$\delta \in [0, 1]$，$-1 < \rho \neq 0$，其中 A 爲效用因子 (與 Cobb-Douglas 效用函數的相同)，δ 爲分配因子 (distribution parameter)，ρ 則是替代因子 (substitution parameter)。由上式可求算出 x 與 y 兩商品的邊際效用爲:

$$\begin{aligned}
MU_x &= A \cdot \left(-\frac{1}{\rho}\right) \left[\delta \cdot x^{-\rho} + (1-\delta) y^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}-1} \cdot \delta \cdot (-\rho) \cdot x^{-\rho-1} \\
MU_y &= A \cdot \left(-\frac{1}{\rho}\right) \left[\delta \cdot x^{-\rho} + (1-\delta) y^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}-1} \cdot (1-\delta) \cdot (-\rho) \cdot y^{-\rho-1}
\end{aligned}$$

因此由邊際效用可求算固定替代彈性效用函數之邊際替代率爲

$$MRS_{xy} = \frac{\delta}{1-\delta} \cdot \left(\frac{y}{x}\right)^{1+\rho}$$

固定替代彈性效用函數的一項特性是，當替代因子 ρ 大小不同時，會轉變成前述已知的效用函數形式。

$\rho \to -1$

當 $\rho \to -1$ 時，CES 效用函數轉變爲完全替代型效用函數或稱線性效用函數。

$$\begin{aligned}
\lim_{\rho \to -1} U(x, y) &= \lim_{\rho \to -1} A \cdot \left[\delta \cdot x^{-\rho} + (1-\delta) y^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}} \\
&= \lim_{\rho \to -1} A \cdot \left[\delta \cdot x^{-(-1)} + (1-\delta) y^{-(-1)}\right]^{-\frac{1}{-1}} \\
&= \lim_{\rho \to -1} A \cdot [\delta \cdot x + (1-\delta) y]^{1} \\
&= A \cdot [\delta \cdot x + (1-\delta) y]
\end{aligned}$$

$\rho \to 0$

當 $\rho \to 0$ 時，CES 效用函數轉變爲 **Cobb-Douglas** 效用函數。令:

$$f(\rho) = -\frac{1}{\rho} \ln \left[\delta \cdot x^{-\rho} + (1-\delta) y^{-\rho}\right]$$

則原效用函數可寫爲 $U(x, y) = A \cdot e^{f(\rho)}$，當 $\rho \to 0$ 時:

$$\lim_{\rho\to 0} f(\rho) = \lim_{\rho\to 0} \frac{-\ln\left[\delta\cdot x^{-\rho} + (1-\delta)y^{-\rho}\right]}{\rho}$$

由於分子分母均趨於 0，使用 L'Hôpital 法則:

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\rho\to 0} \frac{-\frac{d}{d\rho}\ln\left[\delta\cdot x^{-\rho} + (1-\delta)y^{-\rho}\right]}{1} \\
&= \lim_{\rho\to 0} \frac{-\frac{\delta\cdot x^{-\rho}(-\ln x)+(1-\delta)\cdot y^{-\rho}(-\ln y)}{\delta\cdot x^{-\rho}+(1-\delta)y^{-\rho}}}{1} \\
&= \lim_{\rho\to 0} \frac{\delta\cdot x^{-\rho}\ln x + (1-\delta)\cdot y^{-\rho}\ln y}{\delta\cdot x^{-\rho} + (1-\delta)y^{-\rho}} \\
&= \frac{\delta\ln x + (1-\delta)\ln y}{\delta + (1-\delta)} \\
&= \delta\ln x + (1-\delta)\ln y \\
&= \ln(x^{\delta}y^{1-\delta})
\end{aligned}$$

因此:

$$\begin{aligned}
\lim_{\rho\to 0} U(x,y) &= A\cdot e^{\ln(x^{\delta}y^{1-\delta})} \\
&= A\cdot x^{\delta}y^{1-\delta}
\end{aligned}$$

此即為 Cobb-Douglas 效用函數，表示兩商品具有單位替代彈性。

$\rho\to\infty$

當 $\rho\to\infty$ 時，CES 效用函數轉變為完全互補型效用函數。當 $\rho\to\infty$ 時，考慮 $x^{-\rho}$ 和 $y^{-\rho}$ 的行為:

$$\lim_{\rho\to\infty}\left[\delta\cdot x^{-\rho} + (1-\delta)y^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}}$$

不失一般性 (without loss of generality, WLOG), 假設 $x<y$, 則當 $\rho\to\infty$ 時, $x^{-\rho}\to\infty$ 且 $y^{-\rho}\to 0$。因為 $x^{-\rho}$ 項會主導整個括號內的表達式，所以:

$$\begin{aligned}
\lim_{\rho\to\infty}\left[\delta\cdot x^{-\rho} + (1-\delta)y^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}} &= \lim_{\rho\to\infty}\left[\delta\cdot x^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}} \\
&= \lim_{\rho\to\infty}\delta^{-\frac{1}{\rho}}\cdot x \\
&= 1\cdot x = x
\end{aligned}$$

類似地，若 $y<x$，則極限為 y。因此，當 $\rho\to\infty$ 時:

$$\lim_{\rho\to\infty} U(x,y) = A\cdot\min\{x,y\}$$

此即爲 Leontief 效用函數，表示兩商品爲完全互補品，消費者總是以固定比例消費兩商品。

1.5.7 Stone-Geary 效用函數

Stone-Geary 效用函數的函數型態爲

$$U(x, y) = (x - x_0)^\alpha (y - y_0)^\beta$$

式中的 (x_0, y_0) 可視爲消費者維持基本生活的消費商品組合，且消費者對於 x 或 y 商品的消費數量必須超過基本水準方能獲得正效用。經過計算，可得 Stone-Geary 效用函數的邊際替代率爲

$$MRS_{xy} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

Stone-Geary 效用函數之圖形如下所示:

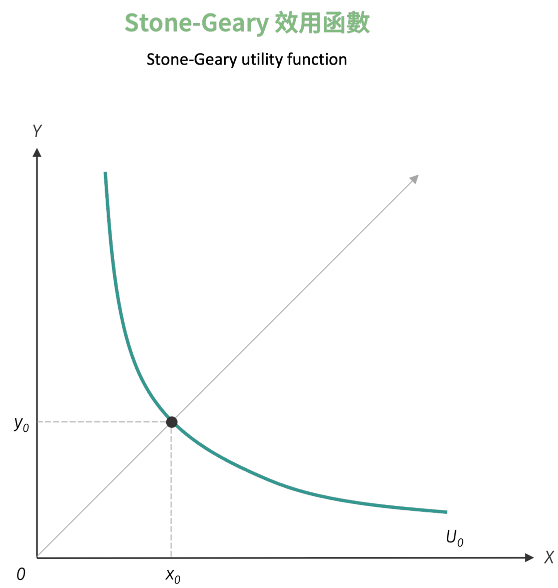

圖 12: Stone-Geary 效用函數

2 預算限制式

走進便利商店挑選飲料時，你心中可能同時浮現兩種聲音：一是對各式商品的渴望，二是對錢包厚度的現實考量。這個日常場景完美詮釋了經濟學的基本矛盾——無窮慾望與有限資源的對峙。預算限制式正是這種資源稀缺性的數學表達，它如同一條無形的繩索，將消費者的選擇空間框定在現實可行的範圍內。透過價格機制與所得水準的約束，預算限制式 (budget contraint) 或稱爲*消費可能曲線* (consumption possibility curve) 不僅決定了消費者的可購買商品組合，更深層地影響著整個市場的資源配置效率。

在分析消費者所面對的無異曲線時，是假設消費者主觀上對於特定商品組合之偏好程度，同條無異曲線上的商品組合皆代表消費者相同程度的滿足感。但在現實中，不同的消費者面對不同的商品價格與相同的所得，不同商品組合的消費支出恰巧會不同，表示並非所有的商品組合對消費者而言皆爲預算限制式的概念，來表示消費者在既定商品價格與所得水準下，有能力購買的各種商品與消費組合即是預算限制式。

一般我們分析在消費者面對 x 與 y 兩商品其所有可能購買組合的方程式，以數學表達爲

$$p_x \cdot x + p_y \cdot y \leq M$$

當然亦可推廣爲多商品的分析，一般而言，在經濟學中爲簡化分析，經常假設商品的狀況，其中一個爲分析中所主要分析的商品，另一個則稱爲合成商品 (composite good)，同學可將其視爲是其他商品的加權組合。例如分析在 N 種商品時則預算限制式爲

$$p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + p_3 x_3 + \cdots + p_N x_N \leq M$$

可簡化運算爲

$$p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot \left(x_2 + \frac{p_3}{p_2} x_3 + \cdots + \frac{p_N}{p_2} x_N \right) \leq M$$

並且若設 $x_1 = x$，則

$$\left(x_2 + \frac{p_3}{p_2} x_3 + \cdots + \frac{p_N}{p_2} x_N \right) = y$$

則 N 種商品之預算限制式與兩商品之預算限制式其實相同。

利用兩商品的預算限制式，我們取等號 (支出等於所得，表示所得完全支出) 可將其轉換爲

$$y = \frac{M}{p_y} - \frac{p_x}{p_y} \cdot x$$

此式如果劃在 x-y 平面上，當消費者完全不消費 y 商品時，x 商品最多可消費 $\frac{M}{p_x}$ 數量，故 x 軸截距爲 $\frac{M}{p_x}$，同理當消費者完全不消費 x 商品時，y 商品最多可消費 $\frac{M}{p_y}$ 數量，y 軸截距爲 $\frac{M}{p_y}$。此一線性直線方程式的斜率爲 $-\frac{p_x}{p_y}$，顯示出兩商品的相對價格比率。因此若預算限制式意涵表示兩商品之間的相對價格下跌，反之預算限制式變得更平坦。

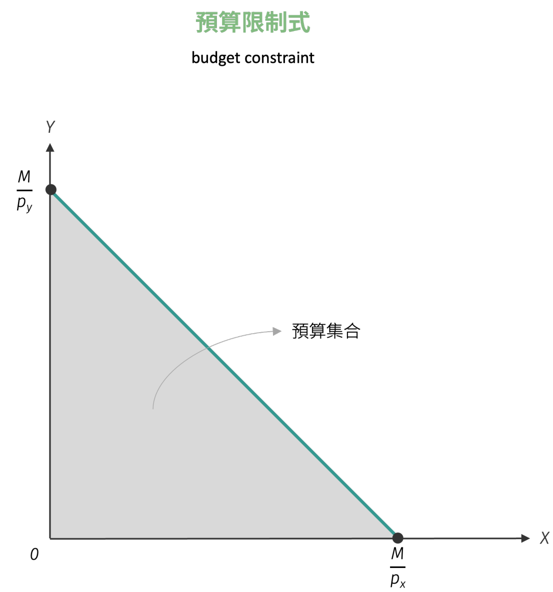

圖 13: 預算限制式

利用簡單的代數運算，底下的過程可以輕易地說明預算限制式的斜率。原預算限制式 $p_x \cdot x + p_y \cdot y = M$，在所得及商品相對價格不變之下，消費者欲改變 x 與 y 之消費量，即 x 消費變動 Δx 單位，y 消費變動 Δy 單位，當然此處之 Δx 與 Δy 之正負號必爲相反，即 $p_x \cdot (x + \Delta x) + p_y \cdot (y + \Delta y) = M$。利用後式減去前式，可得 $p_x \cdot \Delta x + p_y \cdot \Delta y = 0$，經過移項整理即得 $\frac{\Delta x}{\Delta y} = -\frac{p_y}{p_x}$。

預算限制式的斜率爲 $-\frac{p_x}{p_y}$，其經濟意義在於，當消費者面對一定的所得及商品價格下消費 x 與 y 兩商品，若消費者爲多購買一單位的 x 商品，就必須放棄此斜率值的 y 商品數量，這樣的觀念經濟學家通常稱爲消費者消費某商品的*機會成本* (opportunity cost)。機會成本的概念簡單而言即爲消費者消費某定商品所必須放棄的其他商品數量，我們會在以下章節中再詳細介紹。至此我們應可瞭解，無異曲線是描述消費者「主觀」的偏好，而預算限制式則是說明了消費者在市場上「客觀」的商品選擇條件。

2.1 預算限制變動

瞭解了預算限制式的意義後，接著我們來看預算限制式的變動。當商品價格或消費者所得變動後，消費者所能夠購買的商品組合亦應該有所變動，或者預算集合會有所變動。底下我們分列出各種變動狀況分析

2.1.1 特定商品價格變動

當消費者的所得及 y 商品價格不變下，x 商品的價格由 p_x^0 下跌至 p_x^1，則此時消費者所能購買的最大 y 商品數量 (縱軸截距) 不受影響，但是 x 商品的最大購買量會增加，亦即 x 商

品價格下跌會導致預算限制式向外旋轉，使得預算集合擴大，並導致預算限制式斜率變得更加平坦。

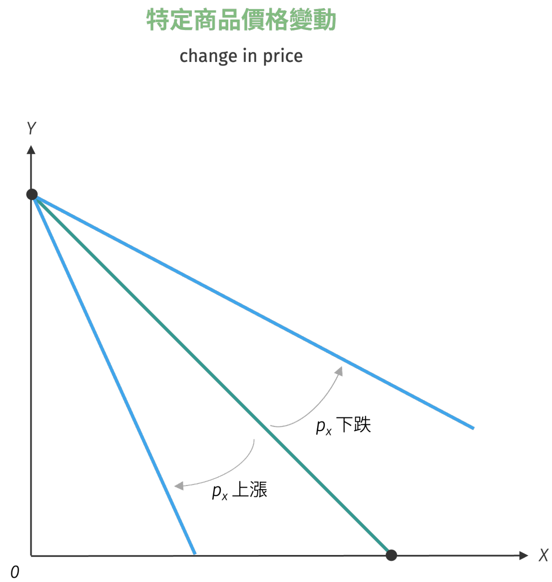

圖 14: 特定商品價格變動

2.1.2 所得變動或商品相對價格同方向同比例變動

當商品價格不變而消費者的所得由 M 增加爲 M' 時，則 x 軸的截距變爲 $\frac{M'}{p_x}$，y 軸的截距變爲 $\frac{M'}{p_y}$，但因爲商品價格不變，所以預算限制式斜率會整條平行外移。反之，當商品價格不變而消費者的所得減少，則預算限制式會整條平行內移。圖形如下:

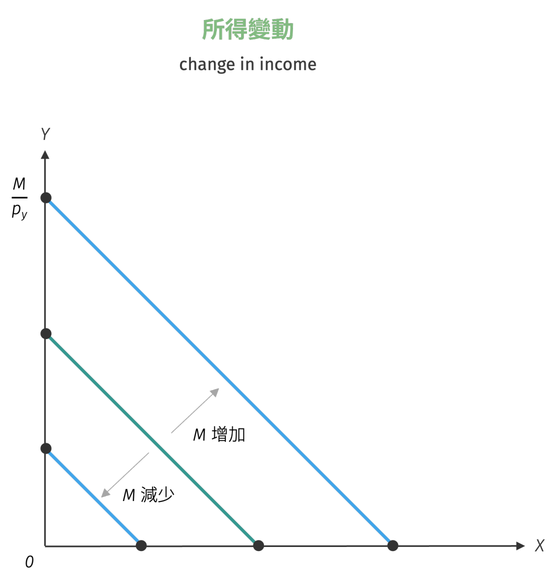

圖 15: 所得變動

當消費者所得不變，預算限制式仍然有可能平行外移，例如當 x 與 y 商品價格同時下跌同一比例，即預算限制式會平行外移，又或者 x 與 y 商品價格同時上漲同一比例，則預算限制式會平行內移。

當消費者所得不變，預算限制式斜率必與原預算限制式的斜率相同。

2.1.3 限制消費數量

有時某些經濟事件會引起政府或生產者限制消費者對某特定商品的消費，例如戰時期的政府限制消費者對民生用品消費的數量，發生某些極端與民衆搶買現象水量，或生產者限制消費者每人限購 2 單位等。此時消費者面臨的預算限制式將如圖所示，若 x 商品被限制最多僅能消費 x_0 數量，則預算集合爲深色所圍之區域。

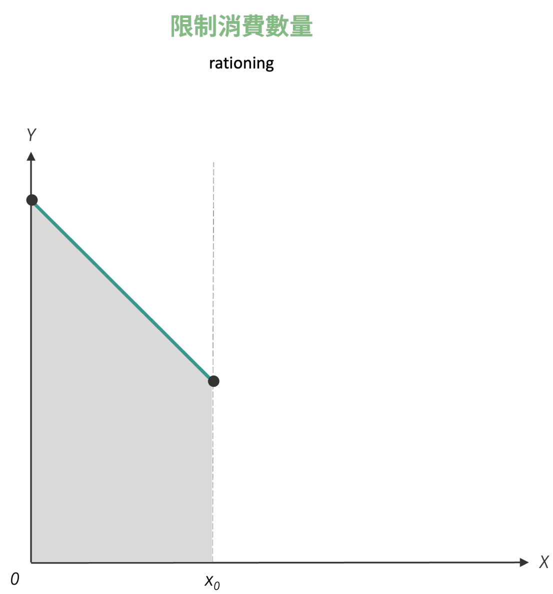

圖 16: 限制消費數量

存在消費量的限制式時，預算限制式表達爲

$$p_x \cdot x + p_y \cdot y = M, \quad x \leq x_0$$

2.1.4 對特定商品課稅

當政府欲對特定商品課稅，以抑制消費者之消費量，可以對商品採從量稅或從價稅。

若對 x 商品採從量稅，將使得 x 商品價格由 p_x 上升至 $(p_x + t)$，此處的 t 可以假設爲單位稅額完全前轉由消費者負擔或部分前轉後價格提升的幅度。此舉會使 x 與 y 量商品的相對價格由 $\frac{p_x}{p_y}$ 提高至 $\frac{p_x+t}{p_y}$。

若對 x 商品採從價稅，x 商品價格則會由 p_x 上升至 $p_x(1+t\%)$，則 x 與 y 量商品的相對價格將由 $\frac{p_x}{p_y}$ 提高至 $\frac{p_x(1+t\%)}{p_y}$。

因此由上述簡單推導可知，無論課徵從量稅或從價稅，皆會使預算限制式變得更陡峭，如下圖所示:

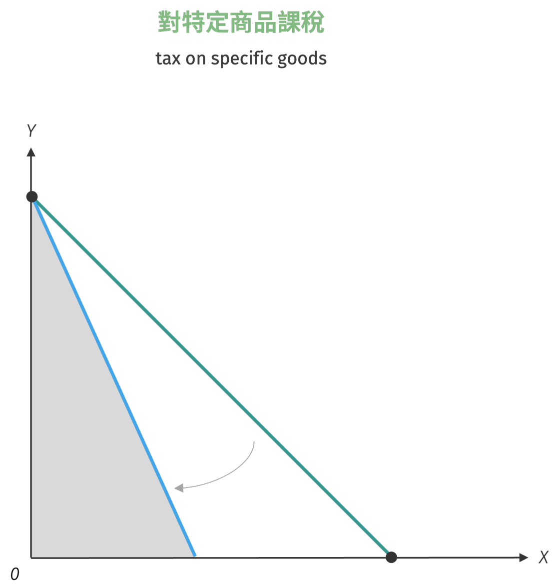

圖 17: 對特定商品課稅

對於商品的課稅也可以修改爲消費數量超過 x_0 後才課稅，此時預算限制式就變成分段函數:

$$\begin{cases} p_x^0 \cdot x + p_y^0 \cdot y = M, & x \leq x_0 \\ p_x^1 \cdot (x - x_0) + p_y^0 \cdot y = M - p_x^0 \cdot x_0, & x > x_0 \end{cases}$$

圖形如下所示:

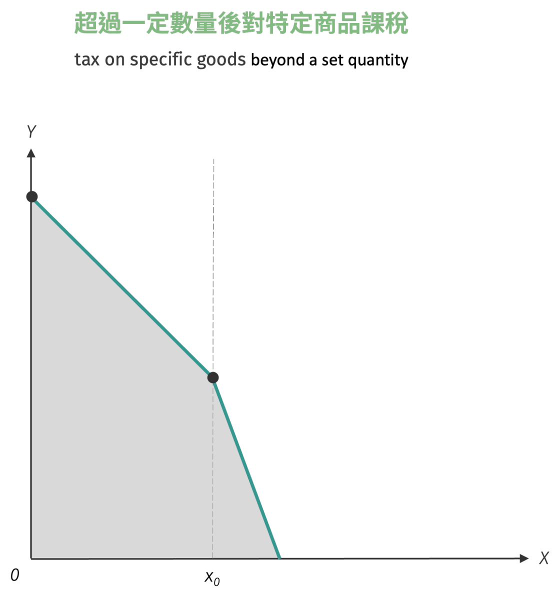

圖 18: 超過一定數量後對特定商品課稅

2.1.5 對特定商品補貼

對特定商品補貼與課稅相似，只是將稅額改爲補貼額，圖形與結論皆爲相反，請自行證明與繪圖。

2.1.6 商品數量補貼

商品數量補貼 (subsidy in-kind) 是指，消費者可免費直接獲得一定數量的特定商品的補貼，但不是金錢上價格上的優惠，因此消費者面對的商品價格皆不變。在這些免費補助商品不得轉售的情況下，如果消費者的所得完全花費在 x 商品上，除可消費 $\frac{M}{p_x}$ 數量的 x 商品外，另可額外獲得消費 x_0 數量的 x 商品，因此最多可消費 $\left(\frac{M}{p_x}+x_0\right)$ 數量之 x 商品，如圖中之 C 點。若消費者將所得完全花費在 y 商品上，則除可消費 $\frac{M}{p_y}$ 外，亦可額外消費 x_0 數量的 x 商品，如圖中 A 點可右移至 B 點，因此我們可以說當消費者獲得 x_0 數量的 x 商品實物補貼後，會使得原來的預算限制式整個往右移，至於 $\overline{AB}$ 線段的部分，在假設消費者可自由拋棄 (free disposal) 任何所獲致的 x_0 數量下即會成立。

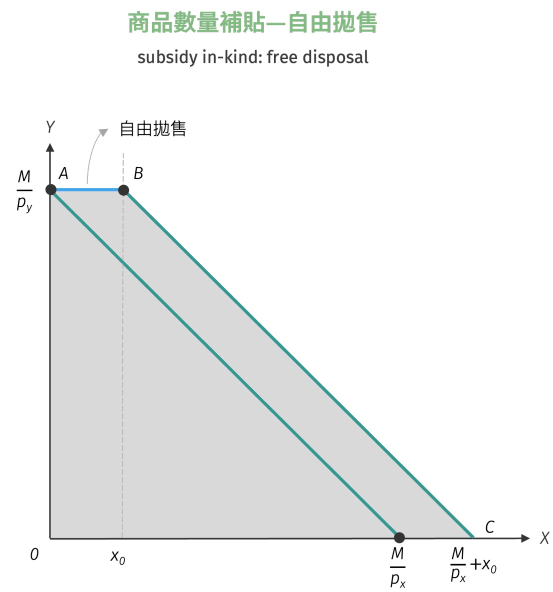

圖 19: 商品數量補貼—自由拋售

當商品補貼的商品在可以全額轉售 (resale) 的情形下，則消費者可以將 $\overline{AB}$ 線段的 x 商品轉售後再以 $\frac{p_x}{p_y}$ 的相對價格來消費 y 商品，此時的預算限制式將由 $\overline{ABC}$ 線段轉為 $\overline{DBC}$ 線段，此時與所得增加對預算限制式的影響相同。圖形如下:

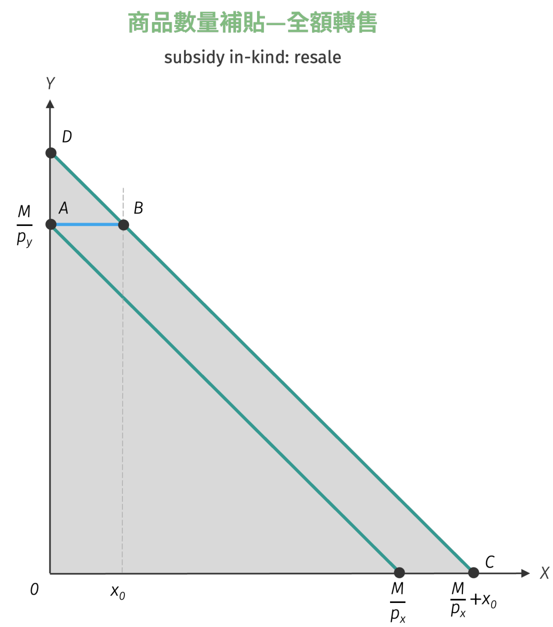

圖 20: 商品數量補貼—全額轉售

2.2 標準商品

當消費者的所得及所有商品價格皆變動同一倍數或比率，則其預算限制式在圖形上的圖樣不受影響，例如當所得與所有商品價格皆變動 λ 倍，即新的預算限制式爲

$$(\lambda p_x) \cdot x + (\lambda p_y) \cdot y = (\lambda M)$$

此式與原預算限制式 $p_x \cdot x + p_y \cdot y = M$ 在商品絕對價格與絕對所得而言有所不同，但就相對價格與相對所得而言則相同。令 $\lambda = \frac{1}{p_y}$，則預算限制式可寫爲

$$\frac{p_x}{p_y} \cdot x + 1 \cdot y = \frac{M}{p_y}$$

假設 $\frac{p_x}{p_y} = \hat{p}_x$，$\frac{M}{p_y} = \hat{M}$，則此新的預算限制式即爲

$$\hat{p}_x \cdot x + 1 \cdot y = \hat{M}$$

顯見 y 商品相對價格現爲單位元，此時的 y 商品被稱爲*標準商品* (numeraire)。標準商品可定義爲將市場所有商品相對價格與消費者之所得，利用一比例與方向進行標準化後，將其中一商品的相對價格轉化爲單位元。

3 消費者最適選擇

當消費者手握有限的預算，面對商品架上琳瑯滿目的選擇時，如何在預算限制下做出最理性的決策？這個問題的核心在於找到無異曲線與預算限制線的最適切點。在經濟學中，消費者最適選擇問題可視爲一個約束最適化問題：在預算限制的約束條件下，尋求效用函數的最大值。這個看似抽象的數學問題，實際上精確地刻畫了日常生活中每一次消費決策的理性邏輯。透過拉格朗日乘數法等數學工具，我們能夠將主觀的消費偏好與客觀的市場約束整合爲一套完整的分析框架，不僅能夠預測消費者行爲，更能深入理解價格機制如何引導資源的有效配置。

3.1 最適化問題

消費者最適選擇問題的本質是一個約束最適化問題，這類問題在經濟學分析中具有核心地位。消費者作爲理性的經濟個體，必須在有限資源的約束下做出選擇，以實現其效用的最大化。

設消費者的效用函數爲 $U(x, y)$，捕捉了消費者對不同商品組合的偏好排序。消費者面臨預算限制 $p_x x + p_y y = M$，其中 p_x、p_y 分別爲商品 x、y 的市場價格，M 爲消費者的名目所得。消費者的決策目標是在既定的預算限制下，選擇最適的商品組合 (x^*, y^*) 以最大化其效

用水準。此過程涉及在可行集合中尋找最優解，其中可行集合由預算限制和非負約束條件共同定義。非負約束條件 $x \geq 0, y \geq 0$ 反映了現實中消費數量不能爲負數的物理限制。

從數學角度而言，此最適化問題可以形式化表述爲:

$$\begin{aligned} \max_{x,y} \quad & U(x,y) \\ \text{s.t.} \quad & p_x x + p_y y = M \\ & x \geq 0, y \geq 0 \end{aligned}$$

3.2 圖解分析

從圖形角度來看，消費者最適選擇問題可以透過無異曲線與預算限制線的幾何關係來直觀理解。這種圖解方法不僅提供了數學解的視覺化呈現，更重要的是揭示了最適化條件背後的經濟直觀。

消費者的最適選擇通常出現在無異曲線與預算限制線的切點。在此切點處，兩條曲線具有相同的斜率，代表無異曲線的斜率等於預算限制線的斜率。數學上此條件可以表達爲:

$$MRS_{xy} = \frac{p_x}{p_y}$$

圖形即如下圖所示:

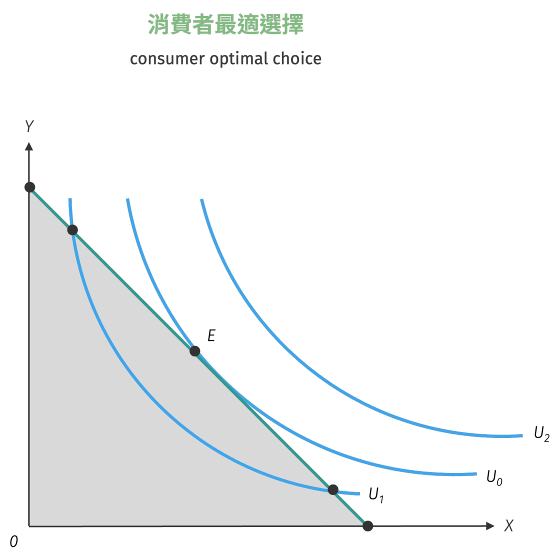

圖 21: 消費者最適選擇

邊際替代率事實上反映的是消費者的主觀評價: 爲了多獲得一單位商品 x，消費者願意放棄多少單位的商品 y，同時保持效用水準不變。而價格比 $\frac{p_x}{p_y}$ 則反映了市場的客觀交換比例: 在市場上用一單位商品 x 可以換取多少單位商品 y。換言之，消費者在最適點處，其主觀的

商品替代率 (邊際替代率) 必須等於市場的客觀替代率 (價格比) 。若此條件不滿足，消費者可透過調整商品組合來提高效用水準。

當 $MRS_{xy} = \frac{p_x}{p_y}$ 時，消費者的主觀評價與市場的客觀交換比例達成一致，此時已無法透過調整消費組合來進一步提升效用。若這個等式不成立，消費者就有動機改變其消費組合:

- 當 $MRS_{xy} > \frac{p_x}{p_y}$ 時：消費者對商品 x 的主觀評價高於市場價格，應該增加 x 的消費，減少 y 的消費。
- 當 $MRS_{xy} < \frac{p_x}{p_y}$ 時：消費者對商品 x 的主觀評價低於市場價格，應該減少 x 的消費，增加 y 的消費。

綜上，從圖形上觀之，最適點必須滿足以下條件:

- 可行性條件：該點必須位於或內於預算限制線所界定的可行集合內
- 最適性條件：在所有可行點中，該點必須位於最高的無異曲線上
- 切點條件：當最適解爲內點解時，無異曲線與預算線必須相切

注意到，切點條件僅適用於內點解的情況。當最適解出現在預算線的端點時 (即消費者完全不消費某種商品) ，我們得到的是邊界解，此時切點條件不再適用。

3.2.1 邊界解的情形

當最適解出現在預算線的端點時 (即 $x^* = 0$ 或 $y^* = 0$) ，稱爲邊界解 (corner solution) 或角解。此時 $MRS_{xy} \neq \frac{p_x}{p_y}$，消費者完全不消費其中一種商品。邊界解通常出現在:

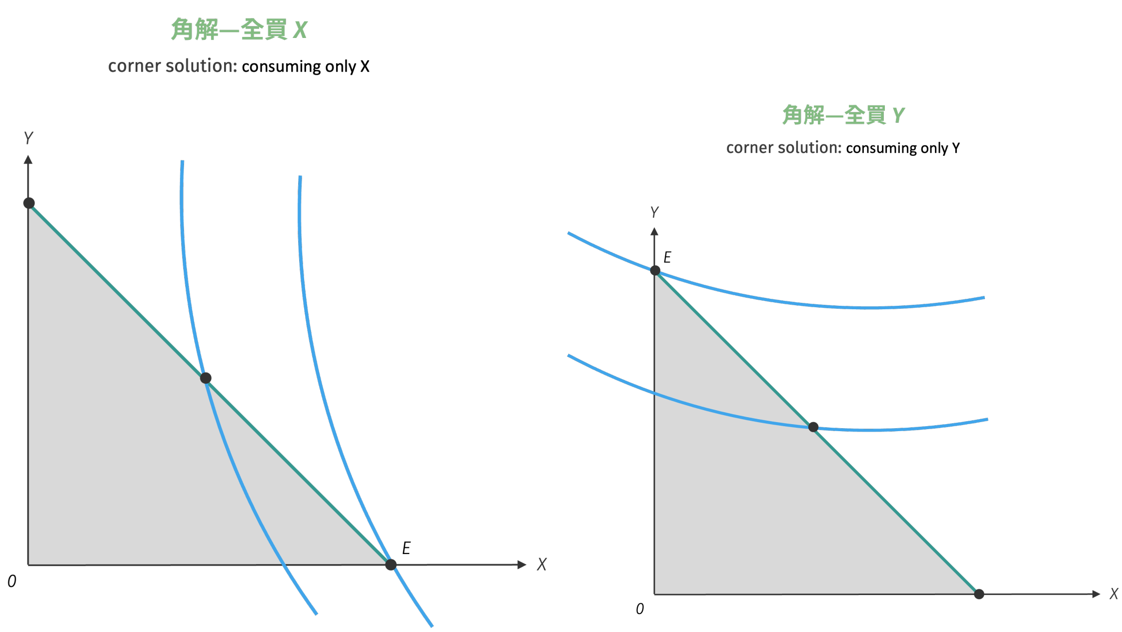

圖 22: 角解圖示

邊界解通常出現在以下情況:

- 商品間替代性很高的情況 (如完全替代品)：當兩種商品可以完全相互替代時，消費者會根據相對價格選擇成本較低的商品。若 $\frac{MU_x}{MU_y} > \frac{p_x}{p_y}$，消費者會全部購買商品 x；反之則全部購買商品 y。完全替代型效用函數是這種情況的典型例子。
- 某商品價格相對過高：即使兩商品具有一定的互補性，當其中一種商品的價格過於昂貴時，消費者可能會選擇完全放棄該商品。這種情況在奢侈品市場中較爲常見，例如當珠寶價格過高時，一般消費者可能完全不購買珠寶，而將所得全部用於其他必需品。
- 消費者對某商品的偏好極低：某些商品可能與消費者的個人偏好、文化背景或價值觀不符，導致消費者對該商品的邊際效用極低。在這種情況下，即使價格不高，消費者仍可能選擇完全不消費該商品。

3.2.2 內點解的條件

當最適解滿足 $x^* > 0$ 且 $y^* > 0$ 時，稱爲內點解 (interior solution)。內點解的一階必要條件爲：

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \lambda p_x$$
$$\frac{\partial U}{\partial y} = \lambda p_y$$
$$p_x x + p_y y = M$$

其中 $\lambda > 0$ 爲拉格朗日乘數，具有重要的經濟意義：它表示額外一單位所得能帶來的邊際效用增加量，即所得的邊際效用 (marginal utility of income)。

由前兩個條件可得：

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{\frac{\partial U}{\partial y}} = \frac{MU_x}{MU_y} = MRS_{xy} = \frac{p_x}{p_y}$$

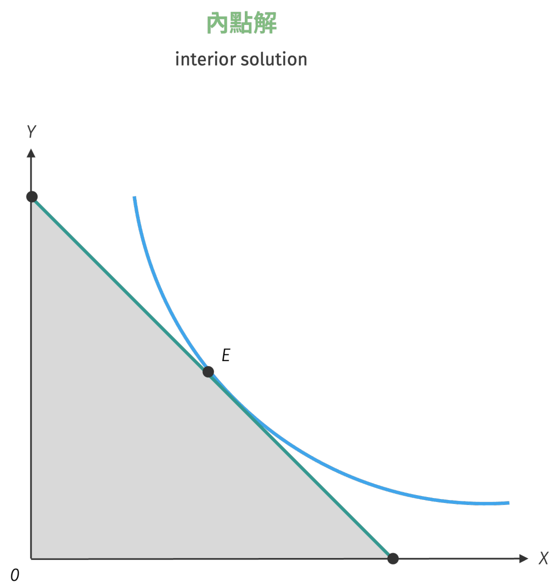

圖 23: 內點解圖示

內點解的另一個重要特徵是其對參數變化的敏感性。與邊界解不同，內點解通常對價格和所得的小幅變化都會產生連續的反應。從政策分析的角度來看，內點解的消費者通常對價格變化更敏感，因爲他們同時購買多種商品，價格變化會透過替代效應和所得效應同時影響其消費決策。

3.3 拉格朗日乘數法

拉格朗日乘數法 (Lagrangian 乘數法) 是解決約束最適化問題的標準數學工具。對於消費者選擇問題，我們構造拉格朗日函數:

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = U(x, y) - \lambda(p_x x + p_y y - M)$$

其中 λ 爲拉格朗日乘數，代表約束條件的影子價格 (shadow price)。

一階條件 (First-Order Conditions, FOCs)

對拉格朗日函數分別對 x、y 和 λ 求偏微分並令其等於零:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} &= \frac{\partial U}{\partial x} - \lambda p_x = 0 \quad \Rightarrow \quad MU_x = \lambda p_x \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} &= \frac{\partial U}{\partial y} - \lambda p_y = 0 \quad \Rightarrow \quad MU_y = \lambda p_y \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} &= -(p_x x + p_y y - M) = 0 \quad \Rightarrow \quad p_x x + p_y y = M
\end{aligned}$$

從前兩個條件可以得到:

$$\frac{MU_x}{p_x} = \frac{MU_y}{p_y} = \lambda$$

這個條件被稱爲*等邊際原理* (equimarginal principle)：在最適選擇下，消費者花在每種商品上的最後一元錢所帶來的邊際效用必須相等。若此條件不滿足，消費者可透過重新分配支出來提高總效用。

3.3.1 二階條件 (Second-Order Conditions, SOCs)

爲確保求得的是最大值而非最小值，必須檢驗二階條件。二階條件是約束最適化問題中的關鍵步驟，因爲一階條件只能確保我們找到了駐點 (stationary point) ，但無法保證該駐點是最大值、最小值還是鞍點 (saddle point) 。

在約束最適化問題中，我們需要使用*有界* **Hessian** *矩陣* (bordered Hessian matrix) 來檢驗二階條件。對於消費者選擇問題，有界 Hessian 矩陣形如:

$$\bar{H} = \begin{bmatrix} 0 & -p_x & -p_y \\ -p_x & U_{xx} & U_{xy} \\ -p_y & U_{yx} & U_{yy} \end{bmatrix}$$

其中:

- *左上角的零*：反映了約束條件本身不含二階項
- *第一行和第一列的價格項*：來自預算約束的係數 $-p_x$ 和 $-p_y$
- *右下角的 2×2 子矩陣*：包含效用函數的所有二階偏微分，即無約束 Hessian 矩陣

爲了確保最適解是最大值，我們需要檢驗有界 Hessian 矩陣的*行列式* (determinant) 的符號。對於最大化問題，二階條件要求：$\det(\bar{H}) < 0$。逐步計算這個行列式，使用第一行展開，可得到:

$$\begin{aligned}\det(\bar{H}) &= 0 \cdot \begin{vmatrix} U_{xx} & U_{xy} \\ U_{yx} & U_{yy} \end{vmatrix} - (-p_x) \cdot \begin{vmatrix} -p_x & U_{xy} \\ -p_y & U_{yy} \end{vmatrix} + (-p_y) \cdot \begin{vmatrix} -p_x & U_{xx} \\ -p_y & U_{yx} \end{vmatrix} \\ &= p_x(-p_x U_{yy} + p_y U_{xy}) - p_y(-p_x U_{yx} + p_y U_{xx}) \\ &= -p_x^2 U_{yy} + p_x p_y U_{xy} + p_x p_y U_{yx} - p_y^2 U_{xx}\end{aligned}$$

利用 Young's theorem ($U_{xy} = U_{yx}$) ，得到:

$$\det(\bar{H}) = -p_x^2 U_{yy} - p_y^2 U_{xx} + 2 p_x p_y U_{xy}$$

因此，二階條件要求:

$$-p_x^2 U_{yy} - p_y^2 U_{xx} + 2 p_x p_y U_{xy} < 0$$

重新整理可得更直觀的形式爲:

$$p_x^2 U_{yy} + p_y^2 U_{xx} - 2p_x p_y U_{xy} > 0$$

二階條件的經濟意義

注意到上述不等式可以寫成:

$$\begin{bmatrix} p_x & p_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{xx} & U_{xy} \\ U_{yx} & U_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix} > 0$$

代表無約束 Hessian 矩陣

$$H_U = \begin{bmatrix} U_{xx} & U_{xy} \\ U_{yx} & U_{yy} \end{bmatrix}$$

在價格向量 (p_x, p_y) 方向上必爲正定 (positive definite)。從經濟角度來看，此條件確保了以下幾點非常重要的性質:

- 無異曲線的凸性: 確保無異曲線向原點凸出，這與邊際替代率遞減的假設一致
- 效用函數的凹性限制: 雖然不要求效用函數全域凹 (globally concave)，但要求其在最適點附近沿預算約束方向具有適當的曲率
- 穩定性條件: 保證小幅價格變動不會導致最適點發生劇烈跳躍

檢驗二階條件的實際步驟

1. 計算效用函數的二階偏微分: U_{xx}、U_{yy}、$U_{xy} = U_{yx}$
2. 將最適解代入: 將從一階條件求得的 (x^*, y^*) 代入上述二階偏微分
3. 計算判別式: 計算 $p_x^2 U_{yy} + p_y^2 U_{xx} - 2p_x p_y U_{xy}$ 的值
4. 檢查符號: 若結果大於零，則二階條件滿足；若小於等於零，則需要進一步分析

二階條件失效的情況

當二階條件不滿足時，可能出現以下情況:

- 鞍點: 駐點既不是最大值也不是最小值
- 邊界解: 眞正的最大值可能出現在可行集合的邊界上
- 多重均衡: 存在多個局部最大值

在這些情況下，需要採用其他方法 (如比較各候選點的目標函數值) 來確定眞正的最適解。

3.3.2 拉格朗日乘數的經濟意義

拉格朗日乘數 λ 的經濟意義如下:

- 邊際效用價值：$\lambda = \frac{MU_x}{p_x} = \frac{MU_y}{p_y}$ 表示額外一單位所得的邊際效用
- 影子價格：反映預算限制的緊峭程度
- 效用函數的量綱：當效用函數乘以常數 k 時，λ 也會乘以 k

影子價格

影子價格 (shadow price) 反映了放寬預算約束對消費者福利的邊際改善。

$$\frac{\partial U^*}{\partial M} = \lambda$$

其中 U^* 是最適化問題的最大效用值。代表如果消費者的所得增加一個微小單位，其最大可達成的效用水準將增加 λ 單位。從政策分析角度來看，λ 的大小反映了預算約束的「緊峭程度」：

- λ 值較大：表示額外的一元錢對消費者來說價值很高，預算約束較緊
- λ 值較小：表示額外的一元錢對消費者的改善有限，預算約束相對寬鬆

拉格朗日乘數 λ 其實不只是數學解題時的技巧，在經濟學裡它有更貼近直覺的用法。它告訴我們，在資源有限的情況下，消費者怎麼分配才算「最划算」。同時，它也常被拿來分析福利和政策影響。簡單說，λ 就像是一個翻譯器，把效用最大化這種很抽象的理論，轉換成我們在市場裡能觀察到的行爲，讓理論跟現實之間有了更清楚的連結。

例題—不同效用函數下的最適選擇

設消費者面臨預算限制 $p_x x + p_y y = M$，求以下四種效用函數下的最適消費組合：

1. 完全替代型效用函數：$U(x, y) = ax + by$
2. 完全互補型效用函數：$U(x, y) = \min\{ax, by\}$
3. Cobb-Douglas 效用函數：$U(x, y) = Ax^{\alpha} y^{\beta}$
4. 準線性效用函數：$U(x, y) = \ln x + y$

【解】

1. 最適化問題可以表達爲以下形式

$$\max\ U(x, y) = ax + by$$
$$\text{s.t. } p_x x + p_y y = M$$

完全替代型效用函數的無異曲線爲線性形式，因此消費者最適選擇與無異曲線之邊際替代率大小有關。

- 若 $MRS_{xy} > \frac{p_x}{p_y}$，則消費者最適組合爲 $(x^*, y^*) = (\frac{M}{p_x}, 0)$
- 若 $MRS_{xy} < \frac{p_x}{p_y}$，則消費者最適組合爲 $(x^*, y^*) = (0, \frac{M}{p_y})$
- 若 $MRS_{xy} = \frac{p_x}{p_y}$，隱含無異曲線與預算限制式重疊，因此預算限制式上任何一點

均可能是消費者的最適選擇，但消費者僅能選擇其中一點，因此表達最適選擇爲

$$\{(x^*, y^*)\} = \{p_x x + p_y y = M\}$$

2. 最適化問題可以表達爲以下形式:

$$\max\ U(x,y) = \min\{ax, by\}$$
$$\text{s.t. } p_x x + p_y y = M$$

從圖形來看，完全互補型效用函數之消費者最適選擇必定位於預算限制式與商品消費固定比例射線上，亦即求解以下聯立:

$$\begin{cases} ax = by \\ p_x x + p_y y = M \end{cases}$$

由上式得 $y = \frac{a}{b}x$，代入預算限制式，可得

$$p_x x + p_y \cdot \frac{a}{b}x = M$$

求解後可得 x 與 y 兩商品之需求函數爲

$$x^* = \frac{bM}{bp_x + ap_y}, \quad y^* = \frac{aM}{bp_x + ap_y}$$

3. 最適化問題可以表達爲以下形式:

$$\max\ U(x,y) = Ax^\alpha y^\beta$$
$$\text{s.t. } p_x x + p_y y = M$$

由邊際替代率

$$MRS_{xy} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{y}{x} = \frac{p_x}{p_y}$$

整理後可得:

$$\frac{y}{x} = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{p_x}{p_y} \cdot x$$

代入預算限制式後可得

$$p_x x + p_y \cdot \left(\frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{p_x}{p_y} \cdot x\right) = M$$

求解後可得 x 與 y 兩商品之需求函數爲

$$x^* = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \cdot \frac{M}{p_x}, \quad y^* = \frac{\beta}{\alpha+\beta} \cdot \frac{M}{p_y}$$

4. 最適化問題可以表達爲以下形式:

$$\max\ U(x,y) = \ln x + y$$
$$\text{s.t. } p_x x + p_y y = M$$

由邊際替代率

$$MRS_{xy} = \frac{1}{x} = \frac{p_x}{p_y}$$

即可立刻求得 x 與 y 商品的最適需求量爲:

$$x^* = \frac{p_y}{p_x}, \quad y^* = \frac{M}{p_y} - 1$$

但必須滿足 $\frac{M}{p_y} > 1$ 的條件。因此

- 若 $\frac{M}{p_y} > 1$ 成立，則 $(x^*, y^*) = (\frac{p_y}{p_x}, \frac{M}{p_y} - 1)$。
- 若 $\frac{M}{p_y} \leq 1$ 成立，則 $(x^*, y^*) = (\frac{M}{p_x}, 0)$。