數學基礎

宋品岳

2025-08-24

目錄

1 函數

想像你正站在便利商店前，看著貨架上各式各樣的飲料，從 10 元的礦泉水到 120 元的進口果汁，每種商品都有其獨特的價格。此時你心中可能會想：「這些價格是如何決定的?」、「爲什麼同樣是飲料，價格差異如此之大?」這些看似簡單的日常觀察，實際上隱含著複雜的經濟關係。

在經濟學中，我們用數學函數來描述這些關係——價格如何影響需求量、成本如何影響供給量、收入如何影響消費選擇等。函數不僅是數學工具，更是理解經濟現象的鑰匙，幫助我們建立精確的模型來預測和解釋市場行爲。

1.1 函數的基本概念

在經濟學中，函數 (function) 是描述變數之間關係的數學工具。對於函數 $f: X \to Y$，我們稱 X 爲定義域 (domain)，Y 爲值域 (range)。經濟學中最常見的函數形式包括：

- 需求函數：$Q^d = Q^d(p, p_y, M \ldots)$
- 供給函數：$Q^s = Q^s(p, w, r, T, \ldots)$

- *生產函數*：$Q = F(K, L)$
- *效用函數*：$U = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

1.2 齊次函數

現代生活中，我們經常遇到「規模」的概念：當你的收入翻倍時，是否會購買兩倍的商品？當一家公司將所有生產要素都增加一倍時，產量會如何變化？這些問題涉及的正是經濟學中極爲重要的齊次函數概念。想像一個小型麵包店，老闆雇用了 2 名員工，使用 1 台烤箱，每天能生產 100 個麵包。如果老闆決定擴大經營規模，雇用 4 名員工並購買 2 台烤箱 (即所有投入要素都增加一倍)，那麼每天的麵包產量會是多少呢？可能是 200 個 (規模報酬不變)、超過 200 個 (規模報酬遞增)，或是少於 200 個 (規模報酬遞減)。齊次函數正是用來描述這種規模變化與產出變化之間關係的數學工具，它不僅能幫助我們理解生產規模效應，更是分析消費者偏好、成本結構和市場結構的重要基礎。

1.2.1 齊次函數的定義

齊次函數 (homogeneous function) 是指當所有自變數同時乘以一個正常數 t 時，函數值會按照某個固定比例變化的函數。

齊次函數

函數 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 稱爲 k 次齊次函數，若對所有 $t > 0$ 均滿足：

$$f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = t^k f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

其中 k 稱爲*齊次度* (degree of homogeneity)。

1.2.2 齊次函數的分類

根據齊次度 k 的不同取值，齊次函數可分爲：

- $k = 1$：*一次齊次函數* (linearly homogeneous)，表示規模報酬不變
- $k > 1$：表示規模報酬遞增
- $0 < k < 1$：表示規模報酬遞減
- $k = 0$：*零次齊次函數*，表示函數值與變數規模無關

1.2.3 經濟學中的齊次函數應用

生產函數中的規模報酬

生產函數 $Q = f(K, L)$ 的齊次性決定了企業的規模報酬特性:
例子: **Cobb-Douglas** 生產函數

$$Q = AK^{\alpha}L^{\beta}$$

檢驗齊次性:

$$f(tK, tL) = A(tK)^{\alpha}(tL)^{\beta} = At^{\alpha+\beta}K^{\alpha}L^{\beta} = t^{\alpha+\beta}f(K, L)$$

因此，此函數爲 $(\alpha + \beta)$ 次齊次函數: - $\alpha + \beta = 1$: 規模報酬不變 - $\alpha + \beta > 1$: 規模報酬遞增
- $\alpha + \beta < 1$: 規模報酬遞減

需求函數中的所得同質性

消費者的需求函數經常表現出零次齊次性質。當所有價格和所得同時以相同比例變化時，實質購買力不變，因此需求量也不變:

$$Q^d(tp, tM) = t^0 Q^d(p, M) = Q^d(p, M)$$

這個性質稱爲貨幣幻覺的缺失 (absence of money illusion)。

1.2.4 歐拉定理

歐拉定理

若函數 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 爲 k 次齊次函數且可微，則:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = kf(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

歐拉定理在經濟學中有重要應用。對於一次齊次生產函數，若要素按邊際產品付酬:

$$K \cdot MP_K + L \cdot MP_L = Q$$

這意味著總產值恰好等於各要素報酬的總和，不會有剩餘或不足。

例題—齊次函數辨識

判斷下列函數的齊次度:
(A) $f(x, y) = x^2 + 3xy + 2y^2$
(B) $g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$
(C) $h(x, y) = \frac{xy}{x+y}$
(D) $u(x, y) = \frac{x^\alpha y^\beta}{x^\gamma + y^\delta}$，其中 $\alpha + \beta = \gamma = \delta$

1.3 凹函數與凸函數

你是否曾思考過爲什麼「多元化投資」會被廣泛推薦？爲什麼經濟學家認爲消費者通常偏好商品組合的多樣性，而非將所有預算都花在單一商品上？這些現象背後的數學原理正是函數的凹凸性。想像你今天有 100 元預算，可以選擇全部買咖啡、全部買蛋糕，或是各買一半。根據經驗，大多數人會選擇混合消費，因爲這樣能獲得更高的滿足感——這正反映了效用函數的凹性質。相反地，在生產活動中，企業的成本函數通常呈現凸性質：當產量增加時，邊際成本往往遞增，這就是爲什麼大規模生產雖然有規模經濟效益，但超過某個臨界點後，擴產的邊際成本會急劇上升。凹函數與凸函數的概念不僅是數學工具，更是理解消費者偏好、生產技術和風險態度的重要基礎。

1.3.1 凹函數與凸函數的定義

凹函數 (concave function) 和凸函數 (convex function) 描述了函數圖形的彎曲方向。

凹函數與凸函數

對於定義在凸集合上的函數 $f(x)$:
凹函數：對所有 x_1, x_2 在定義域內，且 $\lambda \in [0, 1]$，滿足:

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2. \geq \lambda f(x_1. + (1 - \lambda)f(x_2.$$

凸函數：對所有 x_1, x_2 在定義域內，且 $\lambda \in [0, 1]$，滿足:

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2. \leq \lambda f(x_1. + (1 - \lambda)f(x_2.$$

若不等式爲嚴格不等式，則稱爲嚴格凹函數或嚴格凸函數。

1.3.2 二階導數判定法

對於二次可微函數：- 若 $f''(x) < 0$，則 $f(x)$ 爲凹函數 - 若 $f''(x) > 0$，則 $f(x)$ 爲凸函數

對於多變數函數，使用 Hessian 矩陣判定：- 若 Hessian 矩陣負定，則函數爲凹函數 - 若 Hessian 矩陣正定，則函數爲凸函數

1.3.3 Jensen 不等式

Jensen 不等式

Jensen 不等式是凹凸函數的重要性質：
對於凹函數 $f(x)$ 和隨機變數 X：

$$f(\mathbb{E}[X]) \geq \mathbb{E}[f(X)]$$

對於凸函數 $f(x)$ 和隨機變數 X：

$$f(\mathbb{E}[X]) \leq \mathbb{E}[f(X)]$$

其中 $\mathbb{E}[\cdot]$ 表示期望值運算。

Jensen 不等式在經濟學中非常常見：

風險偏好與效用函數

風險趨避者的效用函數通常爲凹函數。對於收入的不確定性：

$$U(\mathbb{E}[Y]) > \mathbb{E}[U(Y)]$$

這表示確定收入的效用大於相同期望值隨機收入的期望效用，解釋了爲什麼人們願意購買保險。

投資組合理論

在投資決策中，若投資者效用函數爲凹函數，Jensen 不等式說明了分散投資的優勢：

$$U\left(\sum_{i=1}^{n} w_i r_i\right) > \sum_{i=1}^{n} w_i U(r_i)$$

其中 w_i 爲投資權重，r_i 爲各資產報酬率。

1.3.4 凹凸函數在經濟學中的應用

效用函數的凹性

消費者效用函數通常假設爲凹函數，反映*邊際效用遞減法則*:

$$U''(x) < 0$$

這意味著額外消費一單位商品帶來的滿足感會隨著消費量增加而遞減。

成本函數的凸性

企業的成本函數通常爲凸函數，特別是在短期內:

$$C''(Q) > 0$$

這反映了*邊際成本遞增法則*：當產量增加時，額外生產一單位商品的成本會遞增。

例題—凹凸性判定

判斷下列函數的凹凸性:
(A) 效用函數：$U(x, y) = x^{0.3}y^{0.7}$
(B) 成本函數：$C(Q) = 10 + 5Q + 2Q^2$
(C) 生產函數：$F(K, L) = K^{0.4}L^{0.5}$
(D) 需求函數：$p = 100 - 2Q - Q^2$

2 極限與連續性

當你在網路購物平台比較不同商品的價格時，是否注意到某些商品之間似乎存在著完美的替代關係，而另一些商品則必須搭配使用才有意義? 比如說，對大多數消費者而言，可口可樂和百事可樂幾乎可以完全互相替代——當其中一種漲價時，消費者很容易轉向另一種，這種近乎完美的替代關係在數學上可以用特殊的函數形式來描述。相反地，左腳鞋和右腳鞋、汽車和汽油、電腦和軟體等商品組合，則展現出強烈的互補特性——缺少其中任何一樣，另一樣的價值就會大打折扣。

這些看似簡單的日常觀察，在數學上涉及函數在極限情況下的行爲特性。透過研究函數在參數趨向特定數值時的極限行爲，我們可以理解從一般性的替代彈性函數，如何推導出完全替代和完全互補這兩種極端但重要的特殊情況。

2.1 極限的基本概念

極限 (limit) 是微積分的核心概念，描述函數在某點附近的行爲趨勢。在經濟學中，極限概念幫助我們理解經濟變數在極端情況下的表現。

函數極限

設函數 $f(x)$ 在點 a 的某個去心鄰域內有定義，若存在實數 L，使得對任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，當 $0 < |x - a| < \delta$ 時，有 $|f(x) - L| < \varepsilon$，則稱:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

2.1.1 經濟學中的極限應用

邊際概念

經濟學中的邊際 (marginal) 概念本質上就是極限:

邊際效用:

$$MU = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta x} = \frac{dU}{dx}$$

邊際成本:

$$MC = \lim_{\Delta Q \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta Q} = \frac{dC}{dQ}$$

邊際產品:

$$MP_L = \lim_{\Delta L \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta L} = \frac{\partial Q}{\partial L}$$

2.2 CES 函數與特殊情況

常替代彈性 (Constant Elasticity of Substitution, CES) 函數是經濟學中描述生產技術和消費偏好的重要工具。

2.2.1 CES 函數的一般形式

CES 函數的標準形式爲:

$$f(x_1, x_2. = A[ax_1^{-\rho} + (1-a)x_2^{-\rho}]^{-\frac{1}{\rho}}$$

其中:

- $A > 0$: 效率參數
- $0 < a < 1$: 分配參數

- $\rho > -1$：替代參數

  替代彈性 (elasticity of substitution) 定義爲:

$$\sigma = \frac{1}{1+\rho}$$

2.2.2 透過極限推導特殊情況

CES 函數的強大之處在於，通過讓替代參數 ρ 趨向不同的極限值，可以得到許多重要的特殊函數形式。

完全替代: $\rho \to -1$ ($\sigma \to \infty$)

當 $\rho \to -1$ 時:

$$\lim_{\rho \to -1} A[ax_1^{-\rho} + (1-a)x_2^{-\rho}]^{-\frac{1}{\rho}} = A[ax_1 + (1-a)x_2]$$

這就是線性函數，表示兩種投入要素或消費品可以完全替代。

推導過程:

$$\begin{aligned}
&\lim_{\rho \to -1}[ax_1^{-\rho} + (1-a)x_2^{-\rho}]^{-\frac{1}{\rho}} \\
&= \lim_{\rho \to -1}[ax_1^{1+\rho} + (1-a)x_2^{1+\rho}]^{\frac{1}{1+\rho}} \\
&= ax_1 + (1-a)x_2
\end{aligned}$$

Cobb-Douglas: $\rho \to 0$ ($\sigma = 1$)

當 $\rho \to 0$ 時，需要使用 L'Hôpital 法則:

$$\lim_{\rho \to 0} A[ax_1^{-\rho} + (1-a)x_2^{-\rho}]^{-\frac{1}{\rho}} = Ax_1^a x_2^{1-a}$$

這就是著名的 **Cobb-Douglas** 函數。

推導過程: 令 $g(\rho) = [ax_1^{-\rho} + (1-a)x_2^{-\rho}]^{-\frac{1}{\rho}}$

取對數:

$$\ln g(\rho) = -\frac{1}{\rho}\ln[ax_1^{-\rho} + (1-a)x_2^{-\rho}]$$

當 $\rho \to 0$ 時，分子分母皆趨向 0，使用洛必達法則:

$$\lim_{\rho \to 0} \ln g(\rho) = a\ln x_1 + (1-a)\ln x_2 = \ln(x_1^a x_2^{1-a})$$

因此:

$$\lim_{\rho \to 0} g(\rho) = x_1^a x_2^{1-a}$$

完全互補：$\rho \to +\infty$ $(\sigma \to 0)$

當 $\rho \to +\infty$ 時：

$$\lim_{\rho \to +\infty} A[ax_1^{-\rho} + (1-a)x_2^{-\rho}]^{-\frac{1}{\rho}} = A \min\left\{\left(\frac{x_1}{a}\right), \left(\frac{x_2}{1-a}\right)\right\}$$

這就是 **Leontief** 函數或完全互補函數。

例題—CES 函數極限

給定 CES 效用函數：

$$U(x_1, x_2. = [0.6x_1^{-0.5} + 0.4x_2^{-0.5}]^{-2}$$

(A) 計算替代彈性 σ

(B) 說明此函數相對於 Cobb-Douglas 函數的替代特性

(C) 若 $x_1 = x_2 = 10$，計算效用值

3 微分

站在經濟學的角度思考，當你每天早上路過同一家咖啡店時，是否曾好奇老闆如何決定咖啡的最佳價格？價格訂得太高，顧客可能會流失；訂得太低，雖然銷量增加但獲利可能下降。這個看似簡單的定價決策，實際上涉及複雜的邊際分析——老闆需要找到邊際收益等於邊際成本的那個精確點。微分正是幫助我們找到這個最佳決策點的數學工具。

從消費者角度來看，當你決定是否多買一個甜甜圈時，你的大腦其實在進行一種直觀的邊際效用計算：這額外的甜甜圈能帶來多少滿足感？是否值得它的價格？微分讓我們能夠精確量化這些「邊際變化」，無論是邊際效用、邊際成本、邊際收益，還是邊際產品，都是透過微分概念來定義和計算的。掌握微分技巧，就如同掌握了經濟分析的瑞士刀，能夠解剖各種複雜的經濟現象。

3.1 導數的定義與經濟意義

導數 (derivative) 描述函數在某點的瞬間變化率，在經濟學中對應邊際 (marginal) 概念。

導數定義

函數 $f(x)$ 在點 $x = a$ 的導數定義爲：

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

若此極限存在，則稱函數在點 a 可微 (differentiable)。

3.1.1 邊際概念在經濟學中的應用

邊際效用 (Marginal Utility)

對於效用函數 $U(x)$，邊際效用定義爲:

$$MU(x) = \frac{dU}{dx}$$

邊際效用衡量額外消費一單位商品所增加的效用。根據邊際效用遞減法則:

$$\frac{d^2U}{dx^2} < 0$$

邊際成本 (Marginal Cost)

對於總成本函數 $C(Q)$，邊際成本爲:

$$MC(Q) = \frac{dC}{dQ}$$

邊際成本表示額外生產一單位產品的成本增加量。

邊際收益 (Marginal Revenue)

對於總收益函數 $R(Q) = p(Q) \cdot Q$，邊際收益爲:

$$MR(Q) = \frac{dR}{dQ} = p(Q) + Q\frac{dp}{dQ}$$

3.1.2 微分法則

經濟分析中常用的微分法則包括:

基本微分法則

1. 常數法則: $(c)' = 0$
2. 冪函數法則: $(x^n)' = nx^{n-1}$
3. 指數函數法則: $(e^x)' = e^x$，$(a^x)' = a^x \ln a$
4. 對數函數法則: $(\ln x)' = \frac{1}{x}$，$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

運算法則

1. 加減法則：$(f \pm g)' = f' \pm g'$
2. 乘積法則：$(fg)' = f'g + fg'$
3. 商的法則：$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$
4. 鏈式法則：$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

3.1.3 經濟函數的微分應用

需求函數的微分

考慮線性需求函數 $Q^d = a - bp$：

$$\frac{dQ^d}{dp} = -b < 0$$

這確認了需求法則：價格上升時需求量下降。
對於非線性需求函數 $Q^d = ap^{-\varepsilon}$：

$$\frac{dQ^d}{dp} = -\varepsilon ap^{-\varepsilon-1} = -\varepsilon\frac{Q^d}{p} < 0$$

其中 $\varepsilon > 0$ 爲需求價格彈性。

生產函數的微分

Cobb-Douglas 生產函數 $Q = AK^\alpha L^\beta$：
對資本的邊際產品：

$$MP_K = \frac{\partial Q}{\partial K} = \alpha AK^{\alpha-1}L^\beta = \alpha\frac{Q}{K}$$

對勞動的邊際產品：

$$MP_L = \frac{\partial Q}{\partial L} = \beta AK^\alpha L^{\beta-1} = \beta\frac{Q}{L}$$

例題—邊際分析

某公司的總成本函數爲 $C(Q) = 100 + 10Q + 2Q^2$，需求函數爲 $p = 50 - Q$。
(A) 求邊際成本函數 $MC(Q)$
(B) 求總收益函數 $R(Q)$ 和邊際收益函數 $MR(Q)$
(C) 找出利潤最大化的產量水準
(D) 計算最大利潤

4 積分

想像你是一位老闆，正在評估今年的營運表現。每個月的利潤都不相同：1 月賺了 5 萬，2 月因爲春節假期只賺 2 萬，3 月景氣回升賺了 8 萬 ??。要計算全年總利潤，你需要將每個月的利潤「累積」起來。這個累積的過程，在數學上就是積分的概念。

更進一步地，如果你想計算消費者從某個商品獲得的總效用，你需要將每一單位消費帶來的邊際效用加總起來；如果你想知道在某個價格區間內的消費者剩餘，你需要計算需求曲線下方的面積。積分不僅是微分的逆運算，更是經濟學中計算「總量」概念的重要工具。從消費者剩餘、生產者剩餘的計算，到現值分析中的連續複利計算，再到經濟成長模型中的動態分析，積分在經濟學的各個領域都扮演著關鍵角色。

4.1 積分的基本概念

積分 (integration) 是微分的逆運算，用於計算函數下方的面積或累積變化量。在經濟學中，積分常用於從邊際量計算總量。

不定積分

若 $F'(x) = f(x)$，則稱 $F(x)$ 爲 $f(x)$ 的一個原函數 (primitive function) 或反導數 (antiderivative)。$f(x)$ 的所有原函數稱爲不定積分，記作：

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

其中 C 爲積分常數。

定積分

函數 $f(x)$ 在區間 $[a, b]$ 上的定積分定義爲：

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

其中 $\Delta x = \frac{b-a}{n}$，$x_i = a + i\Delta x$。
根據微積分基本定理：

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

其中 $F(x)$ 爲 $f(x)$ 的任一原函數。

4.2 基本積分公式

4.2.1 常用積分公式

1. 冪函數：$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \; (n \neq -1)$
2. 倒數函數：$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C$
3. 指數函數：$\int e^x \, dx = e^x + C$，$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
4. 對數函數：$\int \ln x \, dx = x \ln x - x + C$

4.2.2 積分技巧

分部積分法

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

換元積分法

若 $x = g(t)$，則:

$$\int f(x) \, dx = \int f(g(t))g'(t) \, dt$$

4.3 經濟學中的積分應用

4.3.1 消費者剩餘的計算

對於需求函數 $p = p(Q)$，在市場價格 p^* 下，消費者剩餘爲:

$$CS = \int_0^{Q^*} p(Q) \, dQ - p^* \cdot Q^*$$

例子：線性需求函數 $p = 100 - 2Q$

在市場價格 $p^* = 60$ 時，均衡數量 $Q^* = 20$:

$$\begin{aligned} CS &= \int_0^{20} (100 - 2Q) \, dQ - 60 \times 20 \\ &= \left[100Q - Q^2\right]_0^{20} - 1200 = 2000 - 400 - 1200 = 400 \end{aligned}$$

4.3.2 生產者剩餘的計算

對於供給函數 $p = p(Q)$，在市場價格 p^* 下，生產者剩餘爲:

$$PS = p^* \cdot Q^* - \int_0^{Q^*} p(Q) \, dQ$$

例子：線性供給函數 $p = 10 + Q$
在市場價格 $p^* = 60$ 時，均衡數量 $Q^* = 50$：

$$\begin{aligned}
PS &= 60 \times 50 - \int_0^{50} (10 + Q)\, dQ \\
&= 3000 - \left[10Q + \frac{Q^2}{2}\right]_0^{50} = 3000 - (500 + 1250) = 1250
\end{aligned}$$

4.3.3 現值計算中的積分

對於連續現金流 $f(t)$，在利率 r 下的現值爲：

$$PV = \int_0^T f(t) e^{-rt}\, dt$$

例子：永續年金現值
若每年收到固定現金流 A，利率爲 r：

$$PV = \int_0^\infty A e^{-rt}\, dt = A\left[-\frac{1}{r} e^{-rt}\right]_0^\infty = \frac{A}{r}$$

例題—積分應用

某商品的需求函數爲 $Q^d = 50 - p^2$，供給函數爲 $Q^s = 2p - 10$。
(A) 求市場均衡點 (p^*, Q^*)
(B) 計算消費者剩餘
(C) 計算生產者剩餘
(D) 求總社會福利 (消費者剩餘 + 生產者剩餘)

5 偏微分

在現實的經濟決策中，我們很少面對只有單一變數的簡單情況。想像一位餐廳經理正在制定下個月的營運策略：他需要同時考慮食材成本、員工薪資、租金、廣告支出等多個因素對獲利的影響。當食材成本上漲 10% 時，在其他條件不變的情況下，獲利會如何變化？當他決定增加廣告預算時，假設其他成本維持不變，營收又會如何響應？這種「其他條件不變」的分析方式，正是偏微分的核心概念。

在經濟學中，偏微分被廣泛應用於分析多變數經濟函數，比如消費者面對多種商品的效用最大化問題、廠商在多種投入要素下的成本最小化問題，以及政府在考慮多種政策工具時的社會福利最大化問題。偏微分讓我們能夠在複雜的多變數環境中，分離並量化單一變數變化的純淨效應，這種「控制其他變數」的分析能力是現代經濟學不可或缺的核心技能。

5.1 偏微分的定義

對於多變數函數 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$，偏微分 (partial differentiation) 研究函數對其中一個變數的變化率，同時保持其他變數不變。

偏導數

函數 $f(x, y)$ 對 x 的偏導數定義爲:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

類似地，對 y 的偏導數爲:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$$

5.1.1 偏微分的計算法則

偏微分的計算與一般微分類似，只需將其他變數視爲常數:
例子：$f(x, y) = x^3 + 2x^2y + y^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 4xy, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2 + 2y$$

5.2 經濟學中的偏微分應用

5.2.1 邊際效用

對於效用函數 $U(x_1, x_2.$，各商品的邊際效用爲:

$$MU_1 = \frac{\partial U}{\partial x_1}, \quad MU_2 = \frac{\partial U}{\partial x_2}$$

例子：Cobb-Douglas 效用函數 $U(x_1, x_2. = x_1^\alpha x_2^\beta$

$$MU_1 = \alpha x_1^{\alpha-1} x_2^\beta = \alpha \frac{U}{x_1}$$
$$MU_2 = \beta x_1^\alpha x_2^{\beta-1} = \beta \frac{U}{x_2}$$

5.2.2 邊際替代率

邊際替代率 (Marginal Rate of Substitution, MRS) 衡量消費者願意用一種商品替代另一種商品的比率:

$$MRS_{12} = -\frac{MU_1}{MU_2} = -\frac{\partial U/\partial x_1}{\partial U/\partial x_2}$$

5.2.3 生產函數的邊際產品

對於生產函數 $Q = f(K, L)$:

邊際產品:

$$MP_K = \frac{\partial Q}{\partial K}, \quad MP_L = \frac{\partial Q}{\partial L}$$

邊際技術替代率 (Marginal Rate of Technical Substitution, MRTS):

$$MRTS_{LK} = -\frac{MP_L}{MP_K} = -\frac{\partial Q/\partial L}{\partial Q/\partial K}$$

5.2.4 彈性的偏微分表示

需求價格彈性:

$$\varepsilon_p = \frac{\partial Q^d}{\partial p} \cdot \frac{p}{Q^d}$$

需求所得彈性:

$$\varepsilon_M = \frac{\partial Q^d}{\partial M} \cdot \frac{M}{Q^d}$$

需求交叉彈性:

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\partial Q_x^d}{\partial p_y} \cdot \frac{p_y}{Q_x^d}$$

5.3 高階偏導數

5.3.1 二階偏導數

對於函數 $f(x, y)$，存在四個二階偏導數:

1. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}$：對 x 的二階偏導數
2. $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}$：對 y 的二階偏導數

3. $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy}$：混合偏導數
4. $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{yx}$：混合偏導數

5.3.2 Hessian 矩陣

Hessian 矩陣是二階偏導數組成的矩陣:

$$H = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}$$

Hessian 矩陣用於判定函數的凹凸性和極值性質。

5.3.3 Young 定理

在多變數微積分中，Young 定理保證了「混合偏導數」在適當條件下可交換，這對稱性使得 Hessian 矩陣可以視爲對稱矩陣，進而簡化最適化與比較靜態分析。

Young 定理

設 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，若 $f_{x_i x_j}$ 與 $f_{x_j x_i}$ 在一開集 U 上存在且連續 (或更弱的條件如在該點鄰域可微且二階偏導在該點連續)，則對所有 $(x_1, \ldots, x_n) \in U$，

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

經濟學意義:

- Hessian 矩陣 H_f 可視爲對稱：$H_f = H_f^{\top}$。
- 在效用/生產/成本等函數的二階分析、二階充分條件與泰勒展開時，公式更簡潔。
- 對於需求系統的整合性 (integrability) 與潛在函數存在性，有助於檢驗一致性。

例題—偏微分計算

給定效用函數 $U(x, y) = x^{0.4} y^{0.6}$，價格分別爲 $p_x = 2$，$p_y = 3$，所得爲 $M = 120$。
(A) 計算兩商品的邊際效用 MU_x 和 MU_y
(B) 求邊際替代率 MRS_{xy}
(C) 在均衡點，$MRS_{xy} = p_x/p_y$，求均衡消費組合
(D) 驗證預算約束是否滿足

例題—檢查混合偏導是否可交換

令 $f(x, y) = x^2 y + e^{xy}$。
1. 計算 f_{xy} 與 f_{yx}。
2. 說明爲何在 $\mathbb{R}^2$ 內它們必然相等。

6 全微分

想像你是一位投資顧問，客戶詢問:「如果股市上漲 5%，同時利率下降 1%，我的投資組合價值會如何變化?」這個問題涉及多個變數同時變動對結果的綜合影響——也就是全微分 (total differential) 所刻畫的「一小步變動會讓函數值改變多少」。全微分提供了線性近似的語言，讓我們在多變數環境下做敏感度分析與比較靜態。

6.1 全微分的定義與矩陣表示

全微分

設 $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 在點 $\mathbf{x}=(x_1,\dots,x_n)$ 可微，對於小變化 $dx_1,\dots,dx_n$，有

$$df \;\approx\; \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})\,dx_i \;=\; \nabla f(\mathbf{x})^\top d\mathbf{x},$$

其中 $\nabla f(\mathbf{x})=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^\top$，$d\mathbf{x}=(dx_1,\dots,dx_n)^\top$。忽略高於一次的小量，$df$ 給出 f 在 $\mathbf{x}$ 附近的線性近似。

若各自變數又都依賴某外生變數 t，以全導數 (total derivative) 表示為

$$\frac{df}{dt} \;=\; \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} \;=\; \nabla f^\top \frac{d\mathbf{x}}{dt}.$$

6.1.1 經濟詮釋：線性近似與邊際貢獻分解

在需求 $Q=Q(p,M,p_y,\dots)$ 的例子裡，

$$dQ \;\approx\; Q_p\,dp + Q_M\,dM + Q_{p_y}\,dp_y + \cdots,$$

每一項都是「邊際效果 × 該變數的小變化」，可用來做影響來源分解 (哪個外生變動貢獻較大) 。

6.1.2 對數微分與彈性分解

將上式改寫為比例變動的線性近似 (對數全微分)：

$$d\ln f \;\approx\; \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{x_i}{f}}_{\text{彈性}\varepsilon_i}\, d\ln x_i,$$

其中 ε_i 即 f 對 x_i 的彈性。在實務上，這常用來解釋「多少 % 的 x_i 變動帶來多少 % 的 f 變動」。

6.2 經濟學中的基本應用

- 需求敏感度：$dQ \approx Q_p dp + Q_M dM$，量化「價格調整」與「所得變動」對數量的即時影響。
- 成本敏感度：總成本 $C(\mathbf{w}, Q)$ 滿足 $dC \approx \sum_i C_{w_i} dw_i + C_Q dQ$。在最適成本下，Shephard's lemma 告訴我們 $C_{w_i} = x_i^*(\mathbf{w}, Q)$ (條件要素需求)，於是

$$dC \approx \sum_i x_i^* \, dw_i + MC \, dQ.$$

- 利潤敏感度：$\pi(p, \mathbf{w}) = \max_Q pQ - C(\mathbf{w}, Q)$ 的最適值函數對參數的敏感度，將在「包絡定理」段落精確給出。

6.3 多變量鏈式法則 (Composite ／ Nested Models)

很多經濟模型是巢狀的：$y = f\big(g(x,z),\, h(x,z)\big)$。令 $u = g(x,z)$、$v = h(x,z)$，則

$$\frac{\partial y}{\partial x} = f_u \, g_x + f_v \, h_x, \qquad \frac{\partial y}{\partial z} = f_u \, g_z + f_v \, h_z,$$

其中 $f_u \equiv \dfrac{\partial f}{\partial u}$、$g_x \equiv \dfrac{\partial g}{\partial x}$ 等。
矩陣寫法爲

$$dy \;=\; \nabla f(u,v)^{\top} \begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix} \;=\; J_{(g,h)} \begin{bmatrix} dx \\ dz \end{bmatrix},$$

故有

$$dy \;=\; \nabla f(u,v)^{\top} J_{(g,h)} \, d \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}.$$

6.4 隱函數定理與比較靜態

當經濟關係以方程 $F(x,y) = 0$ 給定 (例如市場均衡、最適條件)，且 $F_y \neq 0$，則存在函數 $y = \phi(x)$ 使得

隱函數定理的一階比較靜態

$$\frac{dy}{dx} \;=\; -\frac{F_x}{F_y}.$$

更一般地，對參數向量 $\boldsymbol{\theta}$ 有 $F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) = 0$，若 $J_{\mathbf{x}} F$ 可逆，則比較靜態 (small-change sensitivity) 爲

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\boldsymbol{\theta}} = -\left(J_{\mathbf{x}} F\right)^{-1} J_{\boldsymbol{\theta}} F.$$

例 (壟斷者最適產量)： 一階條件 $F(Q, p) \equiv MR(Q, p) - MC(Q) = 0$，

$$\frac{dQ^*}{dp} = -\frac{F_p}{F_Q} = -\frac{\partial MR/\partial p}{\partial MR/\partial Q - \partial MC/\partial Q}.$$

6.5 包絡定理 (Envelope Theorem)

當我們關心最適值函數對參數的變化率，而非最適解本身如何變動，包絡定理提供了極其有效的捷徑。

6.5.1 無約束情形

令

$$V(\theta) = \max_x f(x, \theta),$$

最適解 $x^*(\theta)$ 滿足 $f_x(x^*, \theta) = 0$。若規則性條件成立，則

包絡定理 (無約束)

$$\frac{dV}{d\theta} = \left.\frac{\partial f(x, \theta)}{\partial \theta}\right|_{x=x^*(\theta)}.$$

也就是說，不需要追蹤 $x^*(\theta)$ 的變動，只要在最適點把 x 當常數、直接對 θ 偏微分。

例 (壟斷利潤對價格參數的敏感度)： $\pi^*(p) = \max_Q \{ pQ - C(Q) \}$，則

$$\frac{d\pi^*}{dp} = \left.\frac{\partial(pQ - C)}{\partial p}\right|_{Q=Q^*(p)} = Q^*(p).$$

6.5.2 有約束情形

令

$$V(\theta) = \max_x f(x, \theta) \text{ s.t. } g(x, \theta) = 0,$$

拉氏量 $\mathcal{L} = f(x, \theta) + \lambda\, g(x, \theta)$。在最適 (x^*, λ^*) 下，

包絡定理 (等式約束)

$$\frac{dV}{d\theta} = \left(\frac{\partial f}{\partial \theta} + \lambda \frac{\partial g}{\partial \theta}\right)\bigg|_{(x^*,\lambda^*)}.$$

例 (成本函數與要素價格)： 成本最小化

$$C(\mathbf{w}, Q) = \min_{\mathbf{x}} \sum_i w_i x_i \quad \text{s.t.} \quad f(\mathbf{x}) \geq Q$$

的包絡定理給出

$$\frac{\partial C}{\partial w_i} = x_i^*(\mathbf{w}, Q) \quad \text{(Shephard's lemma)}, \qquad \frac{\partial C}{\partial Q} = \lambda^* = \text{MC}.$$

6.6 二階全微分與曲率

更精細的近似可以加入二階項:

$$df \;\approx\; \nabla f^{\top} d\mathbf{x} \;+\; \tfrac{1}{2}\, d\mathbf{x}^{\top} H_f\, d\mathbf{x},$$

其中 H_f 為 Hessian 矩陣；這與前述凹凸性判斷緊密相關，常用於二階比較靜態或福利變化二階近似。

例題—全微分與彈性分解 (需求敏感度)

某商品需求 $Q(p, M) = A\, M^{\eta}\, p^{-\varepsilon}$，其中 $A > 0$、$\eta, \varepsilon > 0$。

(A) 推導 dQ 的全微分表示式。

(B) 以對數微分形式寫出 $d \ln Q$，並解釋兩個彈性 η, ε 的經濟意義。

(C) 令 $A = 1$, $\eta = 0.6$, $\varepsilon = 1.2$；若 $dp/p = +5\%$、$dM/M = +4\%$，用線性近似預測 dQ/Q。

(D) 設 $p = 10$, $M = 100$，計算上題中的 dQ 數值近似。

例題—隱函數定理與比較靜態 (均衡)

市場由需求 $Q^d = 60 - 2p + \alpha M$、供給 $Q^s = -10 + 3p$ 決定均衡 $F(p, M) \equiv Q^d - Q^s = 0$。

(A) 寫出 $F(p, M) = 0$ 並求 $\dfrac{\partial p^*}{\partial M}$。

(B) 解釋 $\alpha > 0$ 時，所得上升對均衡價格的影響方向。

(C) 令 $\alpha = 0.2$，在 $M = 100$ 的附近估算 $dM = +5$ 對 p^* 的近似變動。

例題—包絡定理 (利潤敏感度)

壟斷者面對線性需求 $p = a - bQ$、成本 $C(Q) = F + cQ + \frac{1}{2}\gamma Q^2$。定義最適利潤

$$\pi^*(a) = \max_Q \Big[(a - bQ)Q - C(Q)\Big].$$

(A) 用一階條件求最適 $Q^*(a)$。

(B) 用包絡定理求 $\dfrac{d\pi^*}{da}$ 並詮釋其意義。

(C) 比較直接對最適利潤函數微分 vs. 先代回 $Q^*(a)$ 再微分的難易差異。

7 泰勒級數與泰勒展開

泰勒展開提供了以局部低階多項式近似函數的工具，是做線性化 (first-order approximation) 與二階比較靜態的基礎。

一變數泰勒展開

對 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，在 x_0 的 n 階泰勒展開：

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \; + \; R_{n+1}(x),$$

其中 (Lagrange 餘項) 存在某 ξ 介於 x 與 x_0 使

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1.}(\xi)}{(n+1.!}(x - x_0)^{n+1}.$$

多變數泰勒展開

對 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，在 $\mathbf{x}_0$ 的二階展開 (忽略高於二階的小量)：

$$f(\mathbf{x}_0 + \Delta\mathbf{x}) \;\approx\; f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0)^\top \Delta\mathbf{x} + \tfrac{1}{2}\, \Delta\mathbf{x}^\top H_f(\mathbf{x}_0)\, \Delta\mathbf{x},$$

其中 ∇f 爲梯度、H_f 爲 Hessian 矩陣。餘項可寫爲 $o(\|\Delta\mathbf{x}\|^2.$。

常見用法

- 線性化：只取一階項，用於敏感度與彈性近似。
- 二階近似：加入曲率項，用於福利變化的二階近似、最適化的充分條件判別。
- 對數線性化：套用於 $\ln f(\cdot)$，利於彈性解讀。

例題—泰勒近似的誤差控制

(A) 用一階展開近似 $f(x) = \ln x$ 於 $x_0 = 1$；上界化 $|R_2(x)|$。

(B) 對 $f(x, y) = \sqrt{xy}$ 於 $(1, 1.$ 做二階展開 (寫出梯度與 Hessian 矩陣)。

8 聯立方程式的求解

當線性方程組滿秩 (行列式非零) 時，Cramer 法則給出閉式解，方便比較靜態與符號分析。

Cramer 法則

考慮 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$，其中 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$、$\det(A) \neq 0$。記 $A_i(\mathbf{b})$ 爲以 $\mathbf{b}$ 取代 A 的第 i 欄所得矩陣，則

$$x_i = \frac{\det\big(A_i(\mathbf{b})\big)}{\det(A)}, \qquad i = 1, \dots, n.$$

2×2 範例

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, \quad \det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0.$$

$$x_1 = \frac{\det \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{bmatrix}}{\det(A)}, \qquad x_2 = \frac{\det \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{bmatrix}}{\det(A)}.$$

經濟應用：

- 局部線性化後的一階條件可寫成 $A\, d\mathbf{x} = \mathbf{b}$，用 Cramer 法則觀察 $d\mathbf{x}$ 的符號與參數依賴。
- 兩市場兩方程的比較靜態、投入產出模型的局部分析。

例題—用 Cramer 法則求解比較靜態

聯立

$$\begin{cases} 2p+q=10 \\ -p+3q=5 \end{cases}$$

1. 求 (p,q)。2. 若常數項向量改爲 $(10+\delta,\,5)$，用 Cramer 法則寫出 $dp/d\delta,\ dq/d\delta$。

9 最適化

等式約束下的最適化可透過 Lagrangian 將約束內生化，FOC 給出必要條件；在凹性/凸性假設下亦爲充分。

等式約束最大化的 Lagrangian 與 FOC

問題:

$$\max_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \quad \text{s.t.} \quad g_j(\mathbf{x})=c_j,\ \ j=1,\dots,m.$$

Lagrangian:

$$\mathcal{L}(\mathbf{x},\boldsymbol{\lambda})=f(\mathbf{x})+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\,[\,c_j-g_j(\mathbf{x})\,].$$

FOC (必要條件)：

$$\nabla_{\mathbf{x}}\mathcal{L}=\nabla f(\mathbf{x})-\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\nabla g_j(\mathbf{x})=0, \qquad g_j(\mathbf{x})=c_j\ \ (j=1,\dots,m).$$

充分性 (常見情形)

- 若 f 嚴格凹且可行集爲非空的仿射子集 (等式約束線性獨立)，則解唯一。
- 對極小化與凸性假設類推；不等式約束則升級爲 **KKT** 條件 (此處略)。

經濟詮釋 (影子價格)

- 乘數 λ_j 爲約束 $g_j(\mathbf{x})=c_j$ 的影子價格：放鬆 c_j 一小單位帶來的最適值變化率。
- 由包絡定理得 $\dfrac{\partial V}{\partial c_j}=\lambda_j^*$。

例題—效用最大化的 Lagrangian

令效用極大化問題爲:

$$\max\ U(x_1,x_2) = x_1^{\alpha}x_2^{1-\alpha}$$

$$\text{s.t.}\quad p_1x_1 + p_2x_2 = M$$

1. 寫出 Lagrangian 並推導 FOC。
2. 求最適需求 (x_1^*, x_2^*)。
3. 說明 λ^* 的經濟意義。

10 現值與未來值

以利率 r 爲貼現率，時間價値可用離散/連續複利表示；年金、成長年金與永續年金皆有封閉解。

單筆金額的現值與未來值 (離散/連續)

離散複利 (每期利率 r、n 期)：

$$FV = PV(1+r)^n, \qquad PV = \frac{FV}{(1+r)^n}.$$

連續複利 (連續利率 r、時間 t)：

$$FV = PV\,e^{rt}, \qquad PV = FV\,e^{-rt}.$$

等額年金與永續年金 (離散時間)

等額年金 (每期收 A，共 N 期)：

$$PV_{\text{annuity}} = A\,\frac{1-(1+r)^{-N}}{r}, \qquad FV_{\text{annuity}} = A\,\frac{(1+r)^N - 1}{r}.$$

成長年金 (首期 A_1、成長率 g，$r \neq g$)：

$$PV_{\text{g-annuity}} = A_1\,\frac{1-\left(\frac{1+g}{1+r}\right)^N}{r-g}.$$

永續年金:

$$PV_{\text{perp}} = \frac{A}{r}, \qquad PV_{\text{g-perp}} = \frac{A_1}{r-g} \quad (r > g).$$

NPV 與貼現因子

- NPV:

$$\mathrm{NPV} = \sum_{t=0}^{N} \frac{C_t}{(1+r)^t}.$$

- 設貼現因子 $\beta = \dfrac{1}{1+r}$，則 $\mathrm{NPV} = \sum_{t=0}^{N} \beta^t C_t$。
- 連續時間：$PV = \int_0^T f(t)e^{-rt}\,dt$ (與你前文一致) 。

例題—年金與投資決策

(A) 給定 $A = 100$、$r = 5\%$、$N = 10$，求 PV_{annuity} 與 FV_{annuity}。

(B) 一專案現金流 $C_0 = -800,\ C_1 = \cdots = C_5 = 200$；$r = 8\%$，計算 NPV 並判斷是否投資。

(C) 連續收入流 $f(t) = \alpha e^{gt}$ $(0 \le t \le T)$，$r > g$，求其現值。