Feuille 2 corrections et remarques

Exercice 2

(i) $(3+2i)(z-1)=i$

$\Leftrightarrow\ 3z-3+2iz-2i=i$

$\Leftrightarrow\ (2i+3)z=3i+3$

$\Leftrightarrow\ z=\frac{3i+3}{2i+3}$

$\Leftrightarrow\ z=\frac{(3i+3)(2i-3)}{(2i+3)(2i-3)}=\frac{-6-9i+6i-9}{2^2+3^2}=\frac{-3i-15}{13}$

(ii). $(2-i)z+1=(3+2i)z-i$

$\Leftrightarrow\ (2-i)z-(3+2i)z=-i-1$

$\Leftrightarrow\ (-3i-1)z=-i-1$

$\Leftrightarrow\ z=\frac{i+1}{3i+1}$

$\Leftrightarrow\ z=\frac{(i+1)(3i-1)}{(3i+1)(3i-1)}=\frac{-3-i+3i-1}{3^2+1^2}=\frac{-4+2i}{10}=\frac{-2+i}{5}$

(iii) $(4-2i)z^2=(1+5i)z$

① $z=0$ est une solution.

② si $z\neq 0$, alors on dévise par z de deux côtés,

$(4-2i)z^2=(1+5i)z$

$\Leftrightarrow\ (4-2i)z=1+5i$

$\Leftrightarrow\ z=\frac{1+5i}{4-2i}$

$\Leftrightarrow\ z=\frac{(1+5i)(4+2i)}{(4-2i)(4+2i)}=\frac{4+2i+20i-10}{4^2+2^2}=\frac{-6+22i}{20}=-\frac{3}{10}+\frac{11}{10}i$

$2^{\text{ième}}$ solution Soit $z=a+bi$, $a,b\in\mathbb{R}$.

L'équation devient $(4-2i)(a+bi)^2=(1+5i)(a+bi)$

$\Leftrightarrow (4-2i)(a+bi)(a+bi)-(1+5i)(a+bi)=0$

$\Leftrightarrow \big((4-2i)(a+bi)-(1+5i)\big)(a+bi)=0.$

① $a+bi=0$.

② $a+bi\neq 0$, $(4-2i)(a+bi)-1-5i=0$

$\Leftrightarrow\ 4a+4bi-2ai+2b-1-5i=0$

$\Leftrightarrow\ (4a+2b-1)+(4b-2a-5)i=0.\ \Leftrightarrow \begin{cases}4a+2b-1=0\\4b-2a-5=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=-\frac{3}{10}\\ b=\frac{11}{10}\end{cases}$

Donc, les solution de l'eqn sont $z=0$ et $z=-\frac{3}{10}+\frac{11}{10}i$.

iv). Soit $z=a+bi$. Alors

$2z+\bar{z}=2+3i \iff 2a+2bi+a-bi=2+3i$

$\iff 3a+bi=2+3i.$

$\iff \begin{cases} 3a=2 \\ b=3 \end{cases} \iff \begin{cases} a=\frac{2}{3} \\ b=3 \end{cases}$

Donc la solution est $z=\frac{2}{3}+3i$.

v) Soit $z=a+bi$, $a,b\in\mathbb{R}$. Alors

$2a+2bi+2a-2bi=2+3i$

$\iff 4a=2+3i$

Mais $a\in\mathbb{R}$. Donc l'éqn n'a aucune solution.

Méthode 2 Formule: $z+\bar{z}=2\mathrm{Re}(z)$

$2z+2\bar{z}=2+3i \iff 2\mathrm{Re}(z)=2+3i$

Puisque $\mathrm{Re}(z)\in\mathbb{R}$, donc l'éqn n'a aucune solution.

Question de CC1 $\frac{z}{3+i+3z}=-1-i$.

D'abord, l'équation n'a aucune sens si $3+i+3z=0$.

Alors $3+i+3z\neq 0 \iff z\neq\frac{-3-i}{3}$.

Multipie par $3+i+3z$ de deux côtes, on obtient

$z=(-1-i)(3+i+3z)$

$\iff z=-3-i-3z-3i+1-3iz$

$\iff (4+3i)z=-4i-2$

$\iff z=\frac{(-4i-2)}{(4+3i)}=\frac{(-4i-2)(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)}=\frac{-16i-12-8+6i}{4^2+3^2}=\frac{-10i-20}{25}=-\frac{4}{5}-\frac{2}{5}i$

Méthode 2 Soit $z=a+bi$, $a,b\in\mathbb{R}$. Alors

$\frac{(a+bi)}{3+i+3a+3bi}=-1-i \iff a+bi=(-1-i)(3+i+3a+3bi)$

$\iff a+bi=-3-i-3a-3bi-3i+1-3ai+3b$

$\iff a+bi=-2-3a+3b+(-3b-3a-4)i$

$\iff \begin{cases} a=-2-3a+3b \\ b=-3b-3a-4 \end{cases} \iff \begin{cases} a=-\frac{4}{5} \\ b=-\frac{2}{5} \end{cases}$

Donc la solution est $z=-\frac{4}{5}-\frac{2}{5}i$.

Exercice 3 $z+i\bar{z} = a+bi+i(a-bi) = a+bi+ai+b = (a+b)+(a+b)i$

$$\frac{\bar{z}}{z} = \frac{a-bi}{a+bi} = \frac{(a-bi)(a-bi)}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a^2-2abi-b^2}{a^2+b^2} = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} - \frac{2ab}{a^2+b^2}i$$

$$\frac{iz}{\bar{z}} = \frac{i(a+bi)}{a-bi} = \frac{i(a+bi)(a+bi)}{(a-bi)(a+bi)} = \frac{i(a^2+2abi-b^2)}{a^2+b^2} = \frac{-2ab}{a^2+b^2} + \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}i$$

Exercice 4 Imaginaire pur $\Leftrightarrow$ Re $= 0$.

$\frac{1+z}{1-z}$ est imaginaire pur $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Re}\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = 0$

le conjugé de $(1-a)-bi$ est $1-a+bi$

Soit $z = a+bi$, $a, b \in \mathbb{R}$. Alors $\frac{1+z}{1-z} = \frac{1+a+bi}{1-a-bi} = \frac{(1+a+bi)(1-a+bi)}{(1-a-bi)(1-a+bi)}$

$$= \frac{(1+a)(1-a)+(1+a)bi+(1-a)bi-b^2}{(1-a)^2+(1-a)bi-bi(1-a)+b^2}$$

$$= \frac{1-a^2-b^2+2bi}{(1-a)^2+b^2}$$

Alors la partie réel de $\frac{1+z}{1-z} = \frac{1-a^2-b^2}{(1-a)^2+b^2}$.

$\mathrm{Re}\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{1-a^2-b^2}{(1-a)^2+b^2} = 0 \Leftrightarrow a^2+b^2 = 1$.

$|z|^2 = a^2+b^2$ alors $|z| = 1$.

Exercice 5

La foreme trigonométrique : $z = |z|\left(\cos(\mathrm{Arg}(z)) + i\sin(\mathrm{Arg}(z))\right)$

La forme exponentielle. $z = |z|\, e^{i\,\mathrm{Arg}(z)}$.

i). On note $\mathrm{Arg}(z) = \theta$.

$z = -1$, alors $|z| = 1$, $z = 1\cdot(\cos\theta + i\sin\theta)$.

Alors $\cos\theta = -1$, $\sin\theta = 0$. On en déduire que $\theta = \pi$.

Donc $z = -1 = 1\cdot(\cos\pi + i\sin\pi) = 1\cdot e^{i\pi}$.

ii). $|z| = \sqrt{(-2)^2} = 2$

$z = 2(\cos\theta + i\sin\theta) = 0-2i$, alors $\cos\theta = 0$. $\sin\theta = -1$.

Alors $\theta = -\frac{\pi}{2}$.

Donc $z = -2i = 2\cdot\left(\cos(-\frac{\pi}{2}) + i\sin(-\frac{\pi}{2})\right) = 2\cdot e^{i\cdot(-\frac{\pi}{2})}$.

iii) $|z| = \sqrt{3^2+3^2} = 3\sqrt{2}$

$z = 3\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 3\sqrt{2}(\cos\theta + i\sin\theta)$.

$\begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta = -\frac{\pi}{4}$. Donc $z = 3-3i = 3\sqrt{2}\left(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4})\right)$

$= 3\sqrt{2}\, e^{-\frac{\pi}{4}i}$.

Exercice 6

Soit $r = |z|$, $\theta = Arg(z)$. Alors $z = re^{i\theta}$.

$W_1 = z^2 = (re^{i\theta})^2 = r^2 e^{2i\theta}$, $|W_1| = r^2$, $Arg(W_1) = 2\theta (+2k\pi)$

$W_2 = \bar{z} = re^{-i\theta}$, $|W_2| = r$, $Arg(W_2) = -\theta$

$W_3 = \frac{1}{z} = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r}\cdot e^{-i\theta}$, $|W_3| = \frac{1}{r}$, $Arg(W_3) = -\theta$

$W_4 = -z = -re^{i\theta} = re^{i\pi - i\theta}$, $|W_4| = r$, $Arg(W_4) = \pi - \theta (+2k\pi)$

$W_5 = z^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$, $|W_5| = r^n$, $Arg(W_5) = n\theta$ $(+2k\pi)$.

Rem Il est aussi possible de trouver les réponces à l'aide de l'affixe de z. (par dessin).

Exercice 7

Formule d'Euler : $\cos\alpha = \frac{1}{2}(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})$, $\sin\alpha = \frac{1}{2i}(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha})$

On prend $\alpha = \frac{\theta-\phi}{2}$, alors $\cos(\frac{\theta-\phi}{2}) = \frac{1}{2}(e^{i\cdot\frac{\theta-\phi}{2}} + e^{-i\cdot\frac{\theta-\phi}{2}})$ ①

$\sin(\frac{\theta-\phi}{2}) = \frac{1}{2i}(e^{i\cdot\frac{\theta-\phi}{2}} - e^{-i\cdot\frac{\theta-\phi}{2}})$ ②

$$① \Rightarrow 2\cos(\frac{\theta-\phi}{2})e^{i\frac{\theta+\phi}{2}} = 2\cdot\frac{1}{2}(e^{i(\frac{\theta-\phi}{2})} + e^{-i(\frac{\theta-\phi}{2})})\, e^{i\frac{\theta+\phi}{2}}$$
$$= e^{i\frac{\theta-\phi}{2}}\cdot e^{i\frac{\theta+\phi}{2}} + e^{-i(\frac{\theta-\phi}{2})}\cdot e^{i\frac{\theta+\phi}{2}}$$
$$= e^{i\theta} + e^{i\phi}$$

$$② \Rightarrow 2i\sin(\frac{\theta-\phi}{2})e^{i\frac{\theta+\phi}{2}} = 2i\cdot\frac{1}{2i}(e^{i\frac{\theta-\phi}{2}} - e^{-i(\frac{\theta-\phi}{2})})\, e^{i\frac{\theta+\phi}{2}}$$
$$= e^{i\theta} - e^{i\phi}$$

□

On prend $\phi = 0$, alors $e^{i\theta} + 1 = 2\cos(\frac{\theta}{2})\cdot e^{i\frac{\theta}{2}}$ (i)

et $e^{i\theta} - 1 = 2i\sin(\frac{\theta}{2})e^{i\frac{\theta}{2}}$ (ii)

$$\frac{(i)}{(ii)} \Rightarrow \frac{e^{i\theta}+1}{e^{i\theta}-1} = \frac{2\cos(\frac{\theta}{2})\, e^{i\frac{\theta}{2}}}{2i\sin(\frac{\theta}{2})\, e^{i\frac{\theta}{2}}} = \frac{1}{i}\cdot\frac{1}{\tan(\frac{\theta}{2})}$$

Alors, $\frac{e^{i\theta}+1}{1-e^{i\theta}} = i\cdot\frac{1}{\tan\frac{\theta}{2}}$

$$\left[\frac{\sin(\frac{\theta}{2})}{\cos(\frac{\theta}{2})} = \tan(\frac{\theta}{2})\right].$$

Rem Pour démontrer les deux égalités, il est naturel de comencer par la côté droite, mais le but de cet exercice est d'introduire la technique de l'argument moitié. C-à-d

que l'on peut écrire

$$\boxed{\begin{cases} \theta = \dfrac{\theta+\phi}{2} + \dfrac{\theta-\phi}{2} \\ \phi = \dfrac{\theta+\phi}{2} - \dfrac{\theta-\phi}{2} \end{cases}}$$

Exercice 8

On calcul $(\sqrt{3}-i)(1+i)$:

$(\sqrt{3}-i)(1+i) = \sqrt{3}+\sqrt{3}i - i - i^2 = \sqrt{3}+\sqrt{3}i - i + 1 = \sqrt{3}+1+(\sqrt{3}-1)i$

D'autre part, On écrit $\sqrt{3}-i$ et $1+i$ sous la forme exponentielle:

$z_1 = \sqrt{3}-i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) \Rightarrow \mathrm{Arg}(z_1) = -\frac{\pi}{6}$, $z_1 = 2e^{i\cdot(-\frac{\pi}{6})}$

$z_2 = 1+i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) \Rightarrow \mathrm{Arg}\, z_2 = \frac{\pi}{4}$, $z_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

Puisque $(\sqrt{3}-i)(1+i) = z_1 z_2 = 2e^{i(-\frac{\pi}{6})} \cdot \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6})} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$

$= 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$

Alors $\begin{cases} 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{3}+1 \\ 2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{3}-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\ \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{cases}$

Exercice 10 (Linéarisation)

i). $\cos^3(\theta) - \cos^2(\theta) + 2$.

$\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$.

Linéariser $\cos^3\theta$:

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ (On l'obtient à l'aide de triangle Pascal).

$a = e^{i\theta}$, $b = e^{-i\theta}$.

Alors, $\cos^3\theta = \frac{1}{8}(e^{i\theta}+e^{-i\theta})^3 = \frac{1}{8}(e^{3i\theta} + 3\cdot e^{2i\theta}e^{-i\theta} + 3\cdot e^{i\theta}e^{-2i\theta} + e^{-3i\theta})$

$= \frac{1}{8}(e^{3i\theta} + 3e^{i\theta} + 3^{-i\theta} + e^{-3i\theta})$

$= \frac{1}{8}(2\cos(3\theta) + 3\cdot 2\cdot\cos\theta)$

$= \frac{1}{4}\cos(3\theta) + \frac{3}{4}\cos(\theta)$

Linéariser $\cos^2\theta$: $a+b = a^2 + 2ab + b^2$

$a = e^{i\theta}$, $b = e^{-i\theta}$

$$\cos^2\theta = \frac{1}{4}(e^{i\theta}+e^{-i\theta})^2 = \frac{1}{4}(e^{2i\theta} + 2e^{i\theta}e^{-i\theta} + e^{-2i\theta})$$

$$= \frac{1}{4}(2\cos(2\theta) + 2)$$

$$= \frac{1}{2}\cos(2\theta) + \frac{1}{2}$$

Donc, $\cos^3\theta - \cos^2\theta + 2 = \frac{1}{4}\cos(3\theta) + \frac{3}{4}\cos\theta - \frac{1}{2}\cos(2\theta) - \frac{3}{2}$

ii) On commence par linéariser $\sin^4(3\theta)$

$$\sin^4(3\theta) = \left(\frac{1}{2i}(e^{i3\theta} - e^{-i3\theta})\right)^4$$

$$= \frac{1}{16}(e^{i3\theta} - e^{-i3\theta})^4$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$a = e^{3i\theta}$, $b = -e^{-3i\theta}$

Alors $\sin^4(3\theta) = \frac{1}{16}((e^{3i\theta})^4 + 4\cdot(e^{3i\theta})^3\cdot(-e^{-3i\theta})$

$$+6((e^{3i\theta})^2(e^{-3i\theta})^2 + 4e^{3i\theta}\cdot(-e^{-3i\theta})^3 + (e^{-3i\theta})^4)$$

$$= \frac{1}{16}(e^{12i\theta} - 4e^{6i\theta} + 6 - 4^{-i6\theta} + e^{-12i\theta})$$

$$= \frac{1}{16}(2\cos(12\theta) \cancel{-4}\,{-8}\cos(6\theta) + 6)$$

On linéarise $\sin^3(2\theta)$:

$$\sin^3(2\theta) = \left(\frac{1}{2i}(e^{2i\theta} - e^{-2i\theta})\right)^3 = -\frac{1}{8i}(e^{2i\theta} - e^{-2i\theta})^3$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$a = e^{2i\theta}$, $b = -e^{-2i\theta}$

$$\sin^3(2\theta) = -\frac{1}{8i}(e^{6i\theta} + 3e^{4i\theta}(-e^{-2i\theta}) + 3e^{2i\theta}(-e^{-2i\theta})^2 + (-e^{-2i\theta})^3$$

$$= -\frac{1}{8i}(e^{6i\theta} - 3e^{2i\theta} + 3e^{-2i\theta} - e^{-6i\theta})$$

$$= -\frac{1}{8i}\left(2i\sin(6\theta) - 3\cdot 2i\sin(2\theta)\right)$$

$$= -\frac{1}{4}\sin(6\theta) + \frac{3}{4}\sin(2\theta)$$

Par conséquence, $\sin^4(3\theta) + \sin^3(2\theta) + 1 = \frac{1}{16}\left(2\cos(12\theta) - 8\cos(6\theta) + 6\right) - \frac{1}{4}\sin(6\theta) + \frac{3}{4}\sin(2\theta) + 1$

$$= \frac{1}{8}\cos(12\theta) - \frac{1}{2}\cos(6\theta) + \frac{11}{8} - \frac{1}{4}\sin(6\theta) + \frac{3}{4}\sin(2\theta)$$

iii) $\cos^5(2\theta) + \sin^2(\theta) - 1$

On commence par linéariser $\cos^5(2\theta)$.

$$\cos^5(2\theta) = \left(\frac{1}{2}\left(e^{i\cdot 2\theta} + e^{-i2\theta}\right)\right)^5 = \frac{1}{32}\left(e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}\right)^5$$

Binôme de Newton pour $n=5$: $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

$a = e^{2i\theta}$, $b = e^{-2i\theta}$:

$$\cos^5(2\theta) = \frac{1}{32}\left(e^{10i\theta} + 5e^{8i\theta}e^{-2i\theta} + 10e^{6i\theta}\cdot e^{-4i\theta} + 10e^{4i\theta}e^{-6i\theta} + 5e^{2i\theta}e^{-8i\theta} + e^{-10i\theta}\right)$$

$$= \frac{1}{32}\left(2\cos(10\theta) + 5\times 2\cos(6\theta) + 10\times 2\cdot\cos(2\theta)\right)$$

$$= \frac{1}{16}\cos(10\theta) + \frac{5}{16}\cos(6\theta) + \frac{5}{8}\cos(2\theta).$$

On linéariser $\sin^2(\theta)$:

$$\sin^2\theta = \left(\frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)\right)^2 = -\frac{1}{4}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)^2$$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$a = e^{i\theta}$, $b = -e^{-i\theta}$:

$$\sin^2\theta = -\frac{1}{4}\left(e^{2i\theta} + 2\cdot e^{i\theta}(-e^{-i\theta}) + (-e^{-i\theta})^2\right)$$

$$= -\frac{1}{4}\left(e^{2i\theta} - 2 + e^{-2i\theta}\right)$$

$$= -\frac{1}{4}\left(2\cos(2\theta) - 2\right)$$

Donc $\cos^5(2\theta) + \sin^2(\theta) - 1 = \frac{1}{16}\cos(10\theta) + \frac{5}{16}\cos(6\theta) + \frac{1}{8}\cos(2\theta) - \frac{1}{2}$.

iv) Par formule de duplication : $\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$

Alors, $\cos^3\theta\sin^3\theta = \left(\frac{1}{2}\sin(2\theta)\right)^3 = \frac{1}{8}\sin^3(2\theta)$

On a linéarisé $\sin^3(2\theta)$ en ii).

$\sin^3(2\theta) = -\frac{1}{4}\sin(6\theta) + \frac{3}{4}\sin(2\theta)$

Donc $\cos^3\theta\sin^3\theta = -\frac{1}{32}\sin(6\theta) + \frac{3}{32}\sin(2\theta)$.

Exercice 11 Délinéarisation : Exprimer $\cos(k\theta)$ et $\sin(k\theta)$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

1) Trouver $\cos(4\theta)$ et $\sin(4\theta)$.

Étape 1. formule de Moivre : $\cos(4\theta) + i\sin(4\theta) = (\cos\theta + i\sin\theta)^4$

Étape 2. Binôme de Newton pour $n=4$: $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

Étape 3 $a = \cos\theta$, $b = i\sin\theta$, alors

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^4 = \cos^4\theta + 4\cos^3\theta\cdot i\sin\theta + 6\cos^2\theta(i\sin\theta)^2 + 4\cos\theta(i\sin\theta)^3 + (i\sin\theta)^4$$
$$= \cos^4\theta + 4i\cos^3\theta\sin\theta - 6\cos^2\theta\sin^2\theta - 4i\cos\theta\sin^3\theta + \sin^4\theta$$
$$= \cos^4\theta - 6\cos^2\theta\sin^2\theta + \sin^4\theta + i(4\cos^3\theta\sin\theta - 4\cos\theta\sin^3\theta)$$

Donc
$$\begin{cases} \cos(4\theta) = \cos^4\theta - 6\cos^2\theta\sin^2\theta + \sin^4\theta \\ \sin(4\theta) = 4\cos^3\theta\sin\theta - 4\cos\theta\sin^3\theta \end{cases}$$

Rem Grâce à $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$, on peut encore simplifier $\cos(4\theta)$:

$$\cos(4\theta) = \cos^4\theta - 6\cos^2\theta\sin^2\theta + \sin^4\theta$$
$$= \cos^4\theta - 6\cos^2\theta(1-\cos^2\theta) + (1-\cos^2\theta)^2$$
$$= 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1$$

ii) Retrouver $\cos(3\theta)$ et $\sin(3\theta)$

$$\cos(3\theta) + i\sin(3\theta) = (\cos(\theta) + i\sin\theta)^3$$
$$= \cos^3\theta + 3\cos^2\theta\, i\sin\theta + 3\cos\theta(i\sin\theta)^2 + (i\sin\theta)^3$$
$$= \cos^3\theta + 3i\cos^2\theta\sin\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta - i\sin^3\theta$$
$$= \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta + i(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta)$$

Donc
$$\begin{cases} \cos(3\theta) = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta(1-\cos^2\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta \\ \sin(3\theta) = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta = 3(1-\sin^2\theta)\sin\theta - \sin^3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta. \end{cases}$$

Exercice 13 $\delta^2 = \Delta = 3-4i$, $\delta = \alpha+\beta i$, avec $\alpha.\beta \in \mathbb{R}$.

i) $\alpha^2+\beta^2 = |\delta|^2 = |\delta^2| = |\Delta| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$

ii) $\delta^2 = (\alpha+\beta i)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta i - \beta^2 = (\alpha^2-\beta^2)+2\alpha\beta i$.

Alors, $\begin{cases} \alpha^2-\beta^2 = 3 \\ 2\alpha\beta = -4 \end{cases}$

iii) $\alpha\beta = -2 \Rightarrow \alpha, \beta$ ont différente signes.

$\begin{cases} \alpha^2+\beta^2 = 5 \\ \alpha^2-\beta^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 = 4 \\ \beta^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = -1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} \alpha = -2 \\ \beta = 1 \end{cases}$

Exercice 14

i). $\Delta = (-1)^2 - 4\times 1 \times 1 = -3$

$\delta^2 = \Delta \Rightarrow \delta = \sqrt{3}i$

Donc $z_1 = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$, $z_2 = \frac{1-\sqrt{3}i}{2}$.

(ii) Cette équation de degré 2 a pour discriminant $i^2 - 8 = -9 = (3i)^2$ et donc pour solutions

$$z_1 = \frac{-i+3i}{4} = \frac{i}{2} \text{ et } z_2 = \frac{-i-3i}{4} = -i.$$

(iii) Cette équation de degré 2 a pour discriminant $(2+i)^2 - 4(3+i) = -9 = (3i)^2$ et donc pour solutions

$$z_1 = \frac{2+i+3i}{2} = 1+2i \text{ et } z_2 = \frac{2+i-3i}{2} = 1-i.$$

(iv) Cette équation de degré 2 a pour discriminant $4+4i = 4(1+i)$. Puisque $1+i = \sqrt{2}e^{i\pi/4} = 2^{1/2}e^{i\pi/4}$, une racine carrée du discriminant est $2^{5/4}e^{i\pi/8} = 2\sqrt[4]{2}e^{i\pi/8}$. L'équation a donc pour solutions

$$z_1 = \frac{-2+2\sqrt[4]{2}e^{i\pi/8}}{2} = -1+\sqrt[4]{2}e^{i\pi/8} \text{ et } z_2 = \frac{-2-2\sqrt[4]{2}e^{i\pi/8}}{2} = -1-\sqrt[4]{2}e^{i\pi/8}.$$

(v) Cette équation est bicarrée : en posant $Z = z^2$, on trouve l'équation $Z^2 - 10Z + 169 = 0$. Cette nouvelle équation a pour discriminant $-576 = (24i)^2$ et donc pour solutions

$$Z_1 = \frac{10+24i}{2} = 5+12i \text{ et } Z_2 = \frac{10-24i}{2} = 5-12i.$$

On recherche maintenant les solutions des deux équations $z^2 = 5+12i$ et $z^2 = 5-12i$. La deuxième équation est la conjuguée de la première, donc ses solutions sont les conjuguées des solutions de la première équation. On ne résout donc que $z^2 = 5+12i$, ce qui revient à rechercher les racines carrées de $5+12i$. Soit $z = \alpha+i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, une telle racine. L'équation $z^2 = 5+12i$ donne $\alpha^2-\beta^2 = 5$ et $\alpha\beta = 6$, puis le calcul du module de z donne $\alpha^2+\beta^2 = 13$. Par conséquent $\beta^2 = 4$, donc $\beta = 2$ ou -2, et $\alpha = 3$ ou -3. Les racines carrées de $5+12i$ sont ainsi $3+2i$ et $-3-2i$, et les racines carrées de $5-12i$ sont $3-2i$ et $-3+2i$, d'où les quatre solutions de l'équation initiale.

(vi) En posant $Z = z^3$, on trouve l'équation $Z^2+Z+1 = 0$. Cette nouvelle équation a pour discriminant $-3 = (i\sqrt{3})^2$ et donc pour solutions

$$Z_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \text{ et } Z_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}.$$

On doit maintenant rechercher les racines cubiques de ces deux nombres. On a $Z_1 = e^{2i\pi/3}$ et $Z_2 = e^{-2i\pi/3} = e^{4i\pi/3}$. Les racines cubiques de Z_1 sont $e^{2i\pi/9}$, $e^{2i\pi/9}e^{2i\pi/3} = e^{8i\pi/9}$ et $e^{2i\pi/9}e^{4i\pi/3} = e^{14i\pi/9}$, et celles de Z_2 sont $e^{4i\pi/9}$, $e^{4i\pi/9}e^{2i\pi/3} = e^{10i\pi/9}$ et $e^{4i\pi/9}e^{4i\pi/3} = e^{16i\pi/9}$. Ces six nombres sont les solutions de l'équation initiale.

Exercice 15 $Re^{A} = Re^{B}$, $R,A,B \in \mathbb{R}$. $\Leftrightarrow \begin{cases} R_1 = R_2 \\ A = B + 2k\pi \end{cases}$

i) $z^2 = 1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

Soit $z = re^{i\theta}$, $r, \theta \in \mathbb{R}$. Alors $z^2 = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow r^2 e^{2i\theta} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

Alors $\begin{cases} r^2 = 2 \\ 2\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{2} \\ \theta = \frac{\pi}{6} + k\pi, \quad k = 0,1 \end{cases}$

Donc les solutions sont $z_0 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$, $z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{6}}$

On peut les écrire sous la forme algébrique : $z_0 = \frac{\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $z_1 = -\frac{\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

ii). Soit $z = re^{i\theta}$, $r, \theta \in \mathbb{R}$.

$z^3 = -1 = e^{i\pi} \Leftrightarrow r^3 e^{3i\theta} = e^{i\pi} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 1 \\ 3\theta = \pi + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 1 \\ \theta = \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}k\pi, \quad k = 0,1,2. \end{cases}$

Donc les solutions sont

$z_0 = e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $z_2 = e^{i\pi} = -1$; $z_3 = e^{5i\pi/3} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

iii) Soit $z = re^{i\theta}$, $r, \theta \in \mathbb{R}$.

$z^4 = 64i \Leftrightarrow r^4 e^{4i\theta} = 64 e^{i\pi/2} \Leftrightarrow \begin{cases} r^4 = 64 \\ 4\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 2\sqrt{2} \\ \theta = \frac{\pi}{8} + \frac{k}{2}\pi \end{cases}, k = 0,1,2,3.$

Donc les solutions sont :

$z_0 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{8}}$, $z_1 = 2\sqrt{2}e^{i5\pi/8}$, $z_2 = 2\sqrt{2}e^{i9\pi/8}$, $z_3 = 2\sqrt{2}e^{i13\pi/8}$

iv) Soit $z = Re^{iA}$, $R, A \in \mathbb{R}$.

$R^n e^{inA} = re^{i\theta} \Leftrightarrow \begin{cases} R^n = r \\ nA = \theta + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R = r^{\frac{1}{n}} \\ A = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, \cdots, n-1 \end{cases}$

Donc les solutions sont $z_k = r^{\frac{1}{n}} e^{\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}}$, $k = 0, \cdots, n-1$.

v). Soit $z = re^{i\theta}$, $r, \theta \in \mathbb{R}$.

$z^n = z \Leftrightarrow r^n e^{in\theta} = re^{i\theta}$

① cas 1. $r = 0$, $z = 0$ est une solution.

② cas 2 $r \neq 0$, L'éqn $\Leftrightarrow r^{n-1} e^{i(n-1)\theta} = 1 = e^{i \cdot 0} \Leftrightarrow \begin{cases} r^{n-1} = 1 \\ (n-1)\theta = 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 1 \\ \theta = \frac{2k\pi}{n-1}, \quad k = 0, \cdots, n-2. \end{cases}$

Donc les solutions sont $z = 0$ et $z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n-1}}$, $k = 0, \cdots, n-2$.

vi) Soit $z = re^{i\theta}$, $i, \theta \in \mathbb{R}$.

Alors $z^n = \bar{z} \Leftrightarrow r^n e^{i\theta n} = r \cdot e^{-i\theta} \overset{\text{si } r \neq 0}{\Leftrightarrow} r^{n-1} e^{i\theta(n+1)} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} r^{n-1} = 1 \\ \theta(n+1) = 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 1 \\ \theta = \frac{2k\pi}{n+1}, \quad k = 0, \cdots, n \end{cases}$

Si $r = 0$, alors $z = 0$ est une solution.

Donc les solutions sont $z = 0$ et $z_k = e^{\frac{2k\pi}{n+1}}$, $k = 0, \cdots, n$.

Exercice 16

$\omega = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{2i\pi/3}$, c'est la deuxième racine-troisième de l'unité.

$\bar{\omega} = \omega^2$, $\omega^3 = 1$

$z = (a + b\omega + c\omega^2)(a + b\omega^2 + c\omega)$

$\bar{z} = (a + b\bar{\omega} + c\bar{\omega}^2)(a + b\bar{\omega}^2 + c\bar{\omega})$

$= (a + b\omega^2 + c\omega^4)(a + b\omega^4 + c\omega^2)$

$= (a + b\omega^2 + c\omega)(a + b\omega + c\omega^2)$

$= \bar{z} \quad \Leftrightarrow \quad z$ est un nombre réel.

Rem exo 16

i). Les racines n-ièmes de l'unité forment un "n-gone" passant par $z=1$ sur la graphe, donc symétrique par rapport à l'axe des abscisses. Il y a donc de nombreuses relations de conjugaison.

ii) pour montrer $z \in \mathbb{C}$ est réel :

1). mq $\mathrm{Im}(z)=0$.

2). mq $\mathrm{Arg}(z) = k\pi$

3). mq $\bar{z} = z$.

Exercice 17

En appliquant la formule du binôme de Newton,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} w^k = (1+w)^n - 1$$

En utilisant Exercice 7, $1+w = 1+e^{2i\pi/n} = 2\cos(\frac{\pi}{n})e^{\frac{i\pi}{n}}$.

On obtient $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} w^k = -2(\cos(\frac{\pi}{n}))^n - 1$.

Exercice 18

Les racines n-ièmes sont $w_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, $k=0,\cdots,n-1$

$$\prod_{k=0}^{n-1} w_k = \prod_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2k\pi}{n}} = e^{i\frac{2\pi}{n}\cdot\sum_{k=0}^{n-1} k} = e^{i\frac{2\pi}{n}\cdot\frac{n(n-1)}{2}} = e^{i\pi\cdot(n-1)} = (-1)^{n-1}.$$

Exercice 19

$\left|\frac{z}{1-z}\right| < 1 \Leftrightarrow |z| < |1-z|$

Sur l'affixe de z, les points satisfaisant $|z| = |1-z|$ forment la médiatrice de 0 et 1, explicitement c'est $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}$.

Alors $|z|<|1-z|$ est la région $\mathrm{Re}(z) < \frac{1}{2}$.

Exercice 20

$z_A = 2$, $z_B = 4-4i$, $z_C = 4+i$

On calcul $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{2-4i}{2+i} = -2i$.

$\mathrm{Arg}\widehat{BAC} = -\frac{\pi}{2}$, donc $AB \perp AC$.

Méthode 2 $\vec{OA} = (2,0)$ $\vec{OB} = (4,-4)$ $\vec{OC} = (4,1)$

$(\vec{AB}, \vec{AC}) = ((2,-4),(2,1)) = 2\times2 - 4\times1 = 0$

Alors $\vec{AB} \perp \vec{AC}$.

Exercice 21

i). $\left|\frac{z-2}{z-i}\right| = 1 \Leftrightarrow |z-2| = |z-i|$.

la médiatrice de 2 et i.

ii). Soit $z = a+bi$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Alors $Z = \frac{a+bi-2}{a+bi-i} = \frac{((a-2)+bi)(a-(b-1)i)}{(a+(b-1)i)(a-(b-1)i)} = \frac{a(a-2)+b(b-1)+i(ab-(a-2)(b-1))}{a^2+(b-1)^2}$

Z est réel $\Leftrightarrow ab-(a-2)(b-1) = 0 \Leftrightarrow 2b+a-2 = 0$

iii) $\mathrm{Re}(z) = 0 \Leftrightarrow a(a-2)+b(b-1) = 0 \Leftrightarrow a^2-2a+b^2-b = 0$

Exercice 23

i). $|u+v|^2 = (u+v)(\bar{u}+\bar{v}) = u\bar{u} + v\bar{u} + u\bar{v} + v\bar{v} = |u|^2 + 2\mathrm{Re}(u\bar{v}) + |v|^2$

On peut aussi écrire $u = a+bi$, $v = c+di$, $\cdots$.

ii) $\mathrm{Re}(u\bar{v}) = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$.

<u>Exercice 24</u> Regardez les corrections.

<u>Exercice 12</u>

$\cos x + i\sin x = e^{ix}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

On calcul $\cos\theta + \cos(2\theta) + \cdots + \cos(n\theta) + i(\sin(\theta) + \sin 2\theta + \cdots + \sin(n\theta))$

$= \cos\theta + i\sin\theta + \cos(2\theta) + i\sin(2\theta) + \cdots + \cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$

$= e^{i\theta} + e^{2i\theta} + \cdots + e^{ni\theta}$. (*)

En utilisant la formule de suite géométrique (*) $= e^{i\theta} + \cdots + e^{ni\theta} = \dfrac{1-e^{ni\theta}}{1-e^{i\theta}} \cdot e^{i\theta}$

En utilisant l'exercice 7 : $1 - e^{ni\theta} = 2i\sin(\frac{n\theta}{2}) \cdot e^{i\frac{\theta n}{2}}$ $\quad 1 - e^{i\theta} = 2i\sin(\frac{\theta}{2}) \cdot e^{i\frac{\theta}{2}}$

Donc $(*) = e^{i\theta} \cdot \dfrac{e^{\frac{in\theta}{2}}}{e^{i\frac{\theta}{2}}} \cdot \dfrac{\sin(\frac{n\theta}{2})}{\sin(\frac{\theta}{2})} = \underbrace{e^{i\frac{(n+1)\theta}{2}}}_{= \cos\frac{(n+1)\theta}{2} + i\sin\frac{(n+1)\theta}{2}} \underbrace{\dfrac{\sin(\frac{n\theta}{2})}{\sin(\frac{\theta}{2})}}_{\text{Réel.}}$

On conclure par identifier la partie réele et la partie imaginaire.

<u>Exercice 25</u>

i). $w_k = e^{\frac{2ik\pi}{5}}$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

$w_0 + w_1 + w_2 + w_3 + w_4$
$= 1 + w_1 + w_1^2 + w_1^3 + w_1^4$
$= \dfrac{1-w_1^5}{1-w_1} = 0$.

ii). $w_1^4 = \overline{w_1}$, $w_1^3 = \overline{w_1^2}$

$1 + 2\mathrm{Re}(w_1) + 2\mathrm{Re}(w_1^2) = 1 + w_1 + w_1^2 + \cdots + w_1^4 = 0$

$2\mathrm{Re}(w_1) = 2\cos(\frac{2\pi}{5})$, $\quad 2\mathrm{Re}(w_1^2) = 2\cos(\frac{4\pi}{5}) = 4\cos^2(\frac{2\pi}{5}) - 2$.

Donc $4\cos^2(\frac{2\pi}{5}) + 2\cos(\frac{2\pi}{5}) - 1 = 0$.

iii) iv) v) Regardez les corrections ou la vidéo.