

## Feuille 2 Corrections et Remarques

### Exercice 2

$$(i) (3+2i)(z-1) = i$$

$$\Leftrightarrow 3z - 3 + 2iz - 2i = i$$

$$\Leftrightarrow (2i+3)z = 3i + 3$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{3i+3}{2i+3}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{(3i+3)(2i-3)}{(2i+3)(2i-3)} = \frac{-6-9i+6i-9}{2^2+3^2} = \frac{-3i-15}{13}$$

$$(ii). (2-i)z + 1 = (3+2i)z - i$$

$$\Leftrightarrow (2-i)z - (3+2i)z = -i - 1$$

$$\Leftrightarrow (-3i-1)z = -i - 1$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{i+1}{3i+1}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{(i+1)(3i-1)}{(3i+1)(3i-1)} = \frac{-3-i+3i-1}{3^2+1^2} = \frac{-4+2i}{10} = \frac{-2+i}{5}$$

$$(iii) (4-2i)z^2 = (1+5i)z$$

①  $z=0$  est une solution.

② si  $z \neq 0$ , alors on dévise par  $z$  de deux côtés,

$$(4-2i)z^2 = (1+5i)z$$

$$\Leftrightarrow (4-2i)z = 1+5i$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{1+5i}{4-2i}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{(1+5i)(4+2i)}{(4-2i)(4+2i)} = \frac{4+2i+20i-10}{4^2+2^2} = \frac{-6+22i}{20} = -\frac{3}{10} + \frac{11}{10}i$$

2<sup>ème</sup> solution Soit  $z = a+bi$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ .

$$\text{L'équation devient } (4-2i)(a+bi)^2 = (1+5i)(a+bi).$$

$$\Leftrightarrow (4-2i)(a+bi)(a+bi) - (1+5i)(a+bi) = 0$$

$$\Leftrightarrow ((4-2i)(a+bi) - (1+5i))(a+bi) = 0.$$

$$\textcircled{1} \quad a+bi = 0.$$

$$\textcircled{2} \quad a+bi \neq 0, \quad (4-2i)(a+bi) - 1-5i = 0$$

$$\Leftrightarrow 4a+4bi - 2ai+2b - 1-5i = 0$$

$$\Leftrightarrow (4a+2b-1) + (4b-2a-5)i = 0. \Leftrightarrow \begin{cases} 4a+2b-1=0 \\ 4b-2a-5=0 \end{cases}$$

Donc, les solutions de l'éqn sont  $z=0$  et  $z = -\frac{3}{10} + \frac{11}{10}i$ .

$$\left. \begin{array}{l} a = -\frac{3}{10} \\ b = \frac{11}{10} \end{array} \right\}$$

iv). Soit  $z = a+bi$ . Alors

$$\begin{aligned}2z + \bar{z} &= 2+3i \Leftrightarrow 2a+2bi+a-bi=2+3i \\&\Leftrightarrow 3a+b i=2+3i \\&\Leftrightarrow \begin{cases} 3a=2 \\ b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{2}{3} \\ b=3 \end{cases}\end{aligned}$$

Donc la solution est  $z = \frac{2}{3} + 3i$ .

v) Soit  $z = a+bi$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ . Alors

$$2a+2bi+2a-2bi=2+3i \\ \Leftrightarrow 4a=2+3i$$

Mais  $a \in \mathbb{R}$ . Donc l'équation n'a aucune solution.

Méthode 2 Formule:  $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z)$

$$2z + 2\bar{z} = 2+3i \Leftrightarrow 2\operatorname{Re}(z) = 2+3i$$

Puisque  $\operatorname{Re}(z) \in \mathbb{R}$ , donc l'équation n'a aucune solution.

Question de CC1  $\frac{z}{3+i+3z} = -1-i$

D'abord, l'équation n'a aucun sens si  $3+i+3z=0$ .

$$\text{Alors } 3+i+3z \neq 0 \Leftrightarrow z \neq -\frac{3+i}{3}$$

Multipié par  $3+i+3z$  de deux côtés, on obtient

$$\begin{aligned}z &= (-1-i)(3+i+3z) \\&\Leftrightarrow z = -3-i-3z-3i+1-3iz \\&\Leftrightarrow (4+3i)z = -4i-2 \\&\Leftrightarrow z = \frac{(-4i-2)}{(4+3i)} = \frac{(-4i-2)(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)} = \frac{-16i+12-8+6i}{16+9} = \frac{-10i-20}{25} = -\frac{4}{5}-\frac{2}{5}i\end{aligned}$$

Méthode 2 Soit  $z = a+bi$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ . Alors

$$\begin{aligned}\frac{(a+bi)}{3+i+3a+3bi} &= -1-i \Leftrightarrow a+bi=(-1-i)(3+i+3a+3bi) \\&\Leftrightarrow a+bi=-3-i-3a-3bi-3i+1-3ai+3b \\&\Leftrightarrow a+bi=-2-3a+3b+(-3b-3a-4)i \\&\Leftrightarrow \begin{cases} a=-2-3a+3b \\ b=-3b-3a-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\frac{4}{5} \\ b=-\frac{2}{5} \end{cases}\end{aligned}$$

Donc la solution est  $z = -\frac{4}{5} - \frac{2}{5}i$ .

$$\text{Exercice 3} \quad z + i\bar{z} = a+bi + i(a-bi) = a+bi+ai+b = (a+b)+(a+b)i$$

$$\frac{\bar{z}}{z} = \frac{a-bi}{a+bi} = \frac{(a-bi)(a+bi)}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a^2 - 2abi - b^2}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} - \frac{2ab}{a^2 + b^2}i$$

$$\frac{iz}{\bar{z}} = \frac{i(a+bi)}{a-bi} = \frac{i(a+bi)(a+bi)}{(a-bi)(a+bi)} = \frac{i(a^2 + 2abi - b^2)}{a^2 + b^2} = \frac{-2ab}{a^2 + b^2} + \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}i$$

$$\text{Exercice 4} \quad \text{Imaginaire pur} \Leftrightarrow \operatorname{Re} z = 0.$$

$$\frac{1+z}{1-z} \text{ est imaginaire pur} \Leftrightarrow \operatorname{Re} \left( \frac{1+z}{1-z} \right) = 0$$

$$\text{Soit } z = a+bi, \quad a, b \in \mathbb{R}. \quad \text{Alors} \quad \frac{1+z}{1-z} = \frac{1+a+bi}{1-a-bi} = \frac{(1+a+bi)(1-a-bi)}{(1-a-bi)(1-a-bi)} = \frac{(1+a)(1-a) + (1+a)bi + (1-a)bi - b^2}{(1-a)^2 + b^2} = \frac{(1-a)^2 + (1-a)bi - bi(1-a) + b^2}{(1-a)^2 + b^2} = \frac{1-a^2-b^2+2bi}{(1-a)^2+b^2}$$

$$\text{Alors la partie réelle de } \frac{1+z}{1-z} = \frac{1-a^2-b^2}{(1-a)^2+b^2}.$$

$$\operatorname{Re} \left( \frac{1+z}{1-z} \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{1-a^2-b^2}{(1-a)^2+b^2} = 0 \Leftrightarrow a^2+b^2 = 1.$$

$$|z|^2 = a^2 + b^2 \text{ alors } |z| = 1.$$

### Exercice 5

La forme trigonométrique :  $z = |z|(\cos(\operatorname{Arg}(z)) + i \sin(\operatorname{Arg}(z)))$

La forme exponentielle :  $z = |z| e^{i \operatorname{Arg}(z)}$ .

i). On note  $\operatorname{Arg}(z) = \theta$ .

$$z = -1, \text{ alors } |z| = 1, \quad z = 1 \cdot (\cos \theta + i \sin \theta).$$

Alors  $\cos \theta = -1, \sin \theta = 0$ . On en déduire que  $\theta = \pi$ .

$$\text{Donc } z = -1 = 1 \cdot (\cos \pi + i \sin \pi) = 1 \cdot e^{i\pi}.$$

ii).  $|z| = \sqrt{(-2)^2} = 2$

$$z = 2(\cos \theta + i \sin \theta) = 0-2i, \text{ alors } \cos \theta = 0, \sin \theta = -1.$$

$$\text{Alors } \theta = -\frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Donc } z = -2i = 2 \cdot \left( \cos \left( -\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left( -\frac{\pi}{2} \right) \right) = 2 \cdot e^{i \cdot \left( -\frac{\pi}{2} \right)}.$$

iii)  $|z| = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$

$$z = 3\sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = 3\sqrt{2}(\cos \theta + i \sin \theta).$$

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta = -\frac{\pi}{4}. \quad \text{Donc } z = 3-3i = 3\sqrt{2} \left( \cos \left( -\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left( -\frac{\pi}{4} \right) \right) = 3\sqrt{2} e^{-\frac{\pi}{4}i}.$$

### Exercice 6

Soit  $r = |z|$ ,  $\theta = \text{Arg}(z)$ . Alors  $z = r e^{i\theta}$ .

$$W_1 = z^2 = (r e^{i\theta})^2 = r^2 e^{2i\theta} \quad , \quad |W_1| = r^2, \quad \text{Arg}(W_1) = 2\theta + 2k\pi$$

$$W_2 = \bar{z} = r e^{-i\theta} \quad , \quad |W_2| = r, \quad \text{Arg}(W_2) = -\theta$$

$$W_3 = \frac{1}{z} = \frac{1}{r e^{i\theta}} = \frac{1}{r} \cdot e^{-i\theta} \quad , \quad |W_3| = \frac{1}{r}, \quad \text{Arg}(W_3) = -\theta$$

$$W_4 = -z = -r e^{i\theta} = r e^{i\pi - i\theta} \quad , \quad |W_4| = r, \quad \text{Arg}(W_4) = \pi - \theta + 2k\pi$$

$$W_5 = z^n = (r e^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta} \quad , \quad |W_5| = r^n, \quad \text{Arg}(W_5) = n\theta + 2k\pi.$$

Rem Il est aussi possible de trouver les réponses à l'aide de l'affixe de  $z$ . (par dessin).

### Exercice 7

Formule d'Euler:  $\cos \alpha = \frac{1}{2}(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})$ ,  $\sin \alpha = \frac{1}{2i}(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha})$

On prend  $\alpha = \frac{\theta-\phi}{2}$ , alors  $\cos(\frac{\theta-\phi}{2}) = \frac{1}{2}(e^{i\frac{\theta-\phi}{2}} + e^{-i\frac{\theta-\phi}{2}})$  ①

$$\sin(\frac{\theta-\phi}{2}) = \frac{1}{2i}(e^{i\frac{\theta-\phi}{2}} - e^{-i\frac{\theta-\phi}{2}}) \quad ②$$

$$\begin{aligned} ① \Rightarrow 2\cos(\frac{\theta-\phi}{2})e^{i\frac{\theta+\phi}{2}} &= 2 \cdot \frac{1}{2}(e^{i\frac{\theta-\phi}{2}} + e^{-i\frac{\theta-\phi}{2}}) e^{i\frac{\theta+\phi}{2}} \\ &= e^{i\frac{\theta-\phi}{2}} \cdot e^{i\frac{\theta+\phi}{2}} + e^{-i\frac{\theta-\phi}{2}} \cdot e^{i\frac{\theta+\phi}{2}} \\ &= e^{i\theta} + e^{i\phi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ② \Rightarrow 2i\sin(\frac{\theta-\phi}{2})e^{i\frac{\theta+\phi}{2}} &= 2i \cdot \frac{1}{2i}(e^{i\frac{\theta-\phi}{2}} - e^{-i\frac{\theta-\phi}{2}}) e^{i\frac{\theta+\phi}{2}} \\ &= e^{i\theta} - e^{i\phi} \end{aligned}$$

□

On prend  $\phi = 0$ , alors  $e^{i\theta} + 1 = 2\cos(\frac{\theta}{2}) \cdot e^{i\frac{\theta}{2}}$  (i)  
et  $e^{i\theta} - 1 = 2i\sin(\frac{\theta}{2})e^{i\frac{\theta}{2}}$  (ii)

$$\frac{(i)}{(ii)} \Rightarrow \frac{e^{i\theta} + 1}{e^{i\theta} - 1} = \frac{2\cos(\frac{\theta}{2})e^{i\frac{\theta}{2}}}{2i\sin(\frac{\theta}{2})e^{i\frac{\theta}{2}}} = \frac{1}{i} \cdot \frac{1}{\tan(\frac{\theta}{2})}$$

Alors,  $\frac{e^{i\theta} + 1}{1 - e^{i\theta}} = i \cdot \frac{1}{\tan(\frac{\theta}{2})}$

$$\left[ \frac{\sin(\frac{\theta}{2})}{\cos(\frac{\theta}{2})} = \tan(\frac{\theta}{2}) \right].$$

Rem Pour démontrer les deux égalités, il est naturel de commencer par la côté droite, mais le but de cet exercice est

d'introduire la technique de l'argument moitié. C'est à dire

que l'on peut écrire

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta = \frac{\theta + \phi}{2} + \frac{\theta - \phi}{2} \\ \phi = \frac{\theta + \phi}{2} - \frac{\theta - \phi}{2} \end{array} \right.$$

### Exercice 8

On calcule  $(\sqrt{3}-i)(1+i)$ :

$$(\sqrt{3}-i)(1+i) = \sqrt{3} + \sqrt{3}i - i - i^2 = \sqrt{3} + \sqrt{3}i - i + 1 = \underline{\sqrt{3} + 1 + (\sqrt{3}-1)i}$$

D'autre part, On écrit  $\sqrt{3}-i$  et  $1+i$  sous la forme exponentielle:

$$z_1 = \sqrt{3}-i = 2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) \Rightarrow \text{Arg}(z_1) = -\frac{\pi}{6}, \quad z_1 = 2 e^{i(-\frac{\pi}{6})}$$

$$z_2 = 1+i = \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) \Rightarrow \text{Arg } z_2 = \frac{\pi}{4}, \quad z_2 = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$\text{Puisque } (\sqrt{3}-i)(1+i) = z_1 z_2 = 2 e^{i(-\frac{\pi}{6})} \cdot \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{2} e^{i(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6})} = 2\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{12}}$$

$$= 2\sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$$

$$\text{Alors } \left\{ \begin{array}{l} 2\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{12} = \sqrt{3} + 1 \\ 2\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{12} = \sqrt{3} - 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \\ \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{array} \right.$$

### Exercice 10 ( Linéarisation )

$$1). \cos^3(\theta) - \cos^2(\theta) + 2.$$

$$\cos \theta = \frac{1}{2} (e^{i\theta} + e^{-i\theta}).$$

Linéariser  $\cos^3 \theta$ :

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \quad (\text{On l'obtient à l'aide de triangle Pascal}).$$

$$a = e^{i\theta}, \quad b = e^{-i\theta}.$$

$$\begin{aligned} \text{Alors, } \cos^3 \theta &= \frac{1}{8} (e^{i\theta} + e^{-i\theta})^3 = \frac{1}{8} (e^{3i\theta} + 3 \cdot e^{2i\theta} e^{-i\theta} + \\ &\quad 3 \cdot e^{i\theta} e^{-2i\theta} + e^{-3i\theta}) \\ &= \frac{1}{8} (e^{3i\theta} + 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} + e^{-3i\theta}) \\ &= \frac{1}{8} (2\cos(3\theta) + 3 \cdot 2 \cdot \cos \theta) \\ &= \frac{1}{4} \cos(3\theta) + \frac{3}{4} \cos \theta \end{aligned}$$

$$\text{Linéariser } \cos^2 \theta : \quad a+b = a^2 + 2ab + b^2$$

$$a = e^{i\theta}, b = e^{-i\theta}$$

$$\begin{aligned}\cos^3 \theta &= \frac{1}{4} (e^{i\theta} + e^{-i\theta})^2 = \frac{1}{4} (e^{2i\theta} + 2e^{i\theta}e^{-i\theta} + e^{-2i\theta}) \\&= \frac{1}{4} (\underline{2\cos(2\theta)} + \underline{2}) \\&= \frac{1}{2} \cos(2\theta) + \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\text{Donc, } \cos^3 \theta - \cos^2 \theta + 2 = \frac{1}{4} \cos(3\theta) + \frac{3}{4} \cos \theta - \frac{1}{2} \cos(2\theta) - \frac{3}{2}$$

ii) On commence par linéariser  $\sin^4(3\theta)$ .

$$\begin{aligned}\sin^4(3\theta) &= \left(\frac{1}{2i}(e^{i3\theta} - e^{-i3\theta})\right)^4 \\&= \frac{1}{16}(e^{i3\theta} - e^{-i3\theta})^4\end{aligned}$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$a = e^{3i\theta}, b = -e^{-3i\theta}$$

$$\begin{aligned}\text{Alors } \sin^4(3\theta) &= \frac{1}{16} ((e^{3i\theta})^4 + 4 \cdot (e^{3i\theta})^3 \cdot (-e^{-3i\theta}) \\&\quad + 6 \cdot (e^{3i\theta})^2 \cdot (e^{-3i\theta})^2 + 4 \cdot e^{3i\theta} \cdot (-e^{-3i\theta})^3 + (-e^{-3i\theta})^4) \\&= \frac{1}{16} (e^{12i\theta} - \underline{4e^{6i\theta}} + \underline{6} - \underline{4e^{-12i\theta}} + e^{-12i\theta}) \\&= \frac{1}{16} (\underline{2\cos(12\theta)} - \underline{4\cos(6\theta)} + \underline{6})\end{aligned}$$

On linéarise  $\sin^3(2\theta)$ :

$$\sin^3(2\theta) = \left(\frac{1}{2i}(e^{2i\theta} - e^{-2i\theta})\right)^3 = -\frac{1}{8i}(e^{2i\theta} - e^{-2i\theta})^3$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$a = e^{2i\theta}, b = -e^{-2i\theta}$$

$$\begin{aligned}\sin^3(2\theta) &= -\frac{1}{8i}(e^{6i\theta} + 3e^{4i\theta}(-e^{-2i\theta}) + 3e^{2i\theta}(-e^{-2i\theta})^2 + (-e^{-2i\theta})^3) \\&= -\frac{1}{8i}(e^{6i\theta} - \underline{3e^{2i\theta}} + \underline{3e^{-2i\theta}} - e^{-6i\theta})\end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{8i} (2i \sin(6\theta) - 3 \cdot \frac{3}{4} \sin(2\theta))$$

$$= -\frac{1}{4} \sin(6\theta) + \frac{3}{4} \sin(2\theta).$$

$$\begin{aligned} \text{Par conséquent, } \sin^4(3\theta) + \sin^3(2\theta) + 1 &= \frac{1}{16} (2\cos(12\theta) - 8\cos(6\theta) + 6) \\ &\quad - \frac{1}{4} \sin(6\theta) + \frac{3}{4} \sin(2\theta) + 1 \\ &= \frac{1}{8} \cos(12\theta) - \frac{1}{2} \cos(6\theta) + \frac{11}{8} \\ &\quad - \frac{1}{4} \sin(6\theta) + \frac{3}{4} \sin(2\theta) \end{aligned}$$

$$\text{iii) } \cos^5(2\theta) + \sin^2(\theta) - 1$$

On commence par linéariser  $\cos^5(2\theta)$ .

$$\cos^5(2\theta) = \left(\frac{1}{2}(e^{i2\theta} + e^{-i2\theta})\right)^5 = \frac{1}{32} (e^{2i\theta} + e^{-2i\theta})^5$$

Binôme de Newton pour  $n=5$  :  $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

$$a = e^{2i\theta}, \quad b = e^{-2i\theta} :$$

$$\begin{aligned} \cos^5(2\theta) &= \frac{1}{32} (\underbrace{e^{10i\theta}}_{+} + \underbrace{5e^{8i\theta}e^{-2i\theta}}_{+} + \underbrace{10e^{6i\theta}e^{-4i\theta}}_{+} + \underbrace{10e^{4i\theta}e^{-6i\theta}}_{+} + \underbrace{5e^{2i\theta}e^{-8i\theta}}_{+} + \underbrace{e^{-10i\theta}}_{+}) \\ &= \frac{1}{32} (\underbrace{2\cos(10\theta)}_{+} + \underbrace{5 \times 2 \cos(6\theta)}_{+} + \underbrace{10 \times 2 \cos(2\theta)}_{+}) \\ &= \frac{1}{16} \cos(10\theta) + \frac{5}{16} \cos(6\theta) + \frac{5}{8} \cos(2\theta). \end{aligned}$$

On linéariser  $\sin^2(\theta)$ :

$$\sin^2\theta = \left(\frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})\right)^2 = -\frac{1}{4}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})^2$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$a = e^{i\theta}, \quad b = -e^{-i\theta} :$$

$$\begin{aligned} \sin^2\theta &= -\frac{1}{4}(e^{2i\theta} + 2 \cdot e^{i\theta}(-e^{-i\theta}) + (-e^{-i\theta})^2) \\ &= -\frac{1}{4}(e^{2i\theta} - 2 + e^{-2i\theta}) \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{4}(2\cos(2\theta) - 2)$$

$$\text{Donc } \cos^5(2\theta) + \sin^2(\theta) - 1 = \frac{1}{16} \cos(10\theta) + \frac{5}{16} \cos(6\theta) + \frac{1}{8} \cos(2\theta) - \frac{1}{2}.$$

iv) Par formule de duplication :  $\sin(2\theta) = 2 \sin \theta \cos \theta$

$$\text{Alors, } \cos^3 \theta \sin^3 \theta = \left(\frac{1}{2} \sin(2\theta)\right)^3 = \frac{1}{8} \sin^3(2\theta)$$

On a linéarisé  $\sin^3(2\theta)$  en ii).

$$\sin^3(2\theta) = -\frac{1}{4} \sin(6\theta) + \frac{3}{4} \sin(2\theta)$$

$$\text{Donc } \cos^3 \theta \sin^3 \theta = -\frac{1}{32} \sin(6\theta) + \frac{3}{32} \sin(2\theta).$$

**Exercice 11** Délinéarisation : Exprimer  $\cos(k\theta)$  et  $\sin(k\theta)$  en fonction de  $\cos \theta$  et  $\sin \theta$ .

1) Trouver  $\cos(4\theta)$  et  $\sin(4\theta)$ .

$$\text{Étape 1. formule de Moivre: } \cos(4\theta) + i \sin(4\theta) = (\cos \theta + i \sin \theta)^4$$

$$\text{Étape 2. Binôme de Newton pour } n=4: (a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$\text{Étape 3 } a = \cos \theta, b = i \sin \theta, \text{ alors}$$

$$\begin{aligned} (\cos \theta + i \sin \theta)^4 &= \cos^4 \theta + 4 \cos^3 \theta \cdot i \sin \theta + 6 \cos^2 \theta \cdot (i \sin \theta)^2 + 4 \cos \theta \cdot (i \sin \theta)^3 + (i \sin \theta)^4 \\ &= \cos^4 \theta + 4i \cos^3 \theta \sin \theta - 6 \cos^2 \theta \sin^2 \theta - 4i \cos \theta \sin^3 \theta + \sin^4 \theta \\ &= \cos^4 \theta - 6 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + \sin^4 \theta + i(4 \cos^3 \theta \sin \theta - 4 \cos \theta \sin^3 \theta) \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \cos(4\theta) = \cos^4 \theta - 6 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + \sin^4 \theta$$

$$\quad | \quad \sin(4\theta) = 4 \cos^3 \theta \sin \theta - 4 \cos \theta \sin^3 \theta$$

**Rem** Grâce à  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ , on peut encore simplifier  $\cos(4\theta)$ :

$$\begin{aligned} \cos(4\theta) &= \cos^4 \theta - 6 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + \sin^4 \theta \\ &= \cos^4 \theta - 6 \cos^2 \theta (1 - \cos^2 \theta) + (1 - \cos^2 \theta)^2 \\ &= 8 \cos^4 \theta - 8 \cos^2 \theta + 1 \end{aligned}$$

ii) Retrouver  $\cos(3\theta)$  et  $\sin(3\theta)$

$$\begin{aligned} \cos(3\theta) + i \sin(3\theta) &= (\cos \theta + i \sin \theta)^3 \\ &= \cos^3 \theta + 3 \cos^2 \theta i \sin \theta + 3 \cos \theta (i \sin \theta)^2 + (i \sin \theta)^3 \\ &= \cos^3 \theta + 3i \cos^2 \theta \sin \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta - i \sin^3 \theta \\ &= \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta + i(3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta) \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \cos(3\theta) = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta (1 - \cos^2 \theta) = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$$

$$\quad | \quad \sin(3\theta) = 3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta = 3(1 - \sin^2 \theta) \sin \theta - \sin^3 \theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta.$$

**Exercice 13**  $\delta^2 = \Delta = 3 - 4i$ ,  $\delta = \alpha + \beta i$ , avec  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

i)  $\alpha^2 + \beta^2 = |\delta^2| = |\Delta| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

ii)  $\delta^2 = (\alpha + \beta i)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta i - \beta^2 = (\alpha^2 - \beta^2) + 2\alpha\beta i$ .

Alors,  $\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = 3 \\ 2\alpha\beta = -4 \end{cases}$

iii)  $\alpha\beta = -2 \Rightarrow \alpha, \beta$  ont différentes signes.

$$\begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 = 5 \\ \alpha^2 - \beta^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 = 4 \\ \beta^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \alpha = -2 \\ \beta = 1 \end{cases}$$

**Exercice 14**

i).  $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3$

$\delta^2 = \Delta \Rightarrow \delta = \sqrt{-3}i$

Donc  $z_1 = \frac{1+\sqrt{-3}i}{2}$ ,  $z_2 = \frac{1-\sqrt{-3}i}{2}$ .

(ii) Cette équation de degré 2 a pour discriminant  $i^2 - 8 = -9 = (3i)^2$  et donc pour solutions

$$z_1 = \frac{-i + 3i}{4} = \frac{i}{2} \text{ et } z_2 = \frac{-i - 3i}{4} = -i.$$

(iii) Cette équation de degré 2 a pour discriminant  $(2+i)^2 - 4(3+i) = -9 = (3i)^2$  et donc pour solutions

$$z_1 = \frac{2+i+3i}{2} = 1+2i \text{ et } z_2 = \frac{2+i-3i}{2} = 1-i.$$

(iv) Cette équation de degré 2 a pour discriminant  $4+4i = 4(1+i)$ . Puisque  $1+i = \sqrt{2}e^{i\pi/4} = 2^{1/2}e^{i\pi/4}$ , une racine carrée du discriminant est  $2^{5/4}e^{i\pi/8} = 2\sqrt[4]{2}e^{i\pi/8}$ . L'équation a donc pour solutions

$$z_1 = \frac{-2 + 2\sqrt[4]{2}e^{i\pi/8}}{2} = -1 + \sqrt[4]{2}e^{i\pi/8} \text{ et } z_2 = \frac{-2 - 2\sqrt[4]{2}e^{i\pi/8}}{2} = -1 - \sqrt[4]{2}e^{i\pi/8}.$$

(v) Cette équation est bicarrée : en posant  $Z = z^2$ , on trouve l'équation  $Z^2 - 10Z + 169 = 0$ . Cette nouvelle équation a pour discriminant  $-576 = (24i)^2$  et donc pour solutions

$$Z_1 = \frac{10+24i}{2} = 5+12i \text{ et } Z_2 = \frac{10-24i}{2} = 5-12i.$$

On recherche maintenant les solutions des deux équations  $z^2 = 5+12i$  et  $z^2 = 5-12i$ . La deuxième équation est la conjuguée de la première, donc ses solutions sont les conjuguées des solutions de la première équation. On ne résout donc que  $z^2 = 5+12i$ , ce qui revient à rechercher les racines carrées de  $5+12i$ . Soit  $z = \alpha + i\beta$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , une telle racine. L'équation  $z^2 = 5+12i$  donne  $\alpha^2 - \beta^2 = 5$  et  $\alpha\beta = 6$ , puis le calcul du module de  $z$  donne  $\alpha^2 + \beta^2 = 13$ . Par conséquent  $\beta^2 = 4$ , donc  $\beta = 2$  ou  $-2$ , et  $\alpha = 3$  ou  $-3$ . Les racines carrées de  $5+12i$  sont ainsi  $3+2i$  et  $-3-2i$ , et les racines carrées de  $5-12i$  sont  $3-2i$  et  $-3+2i$ , d'où les quatre solutions de l'équation initiale.

(vi) En posant  $Z = z^3$ , on trouve l'équation  $Z^2 + Z + 1 = 0$ . Cette nouvelle équation a pour discriminant  $-3 = (i\sqrt{3})^2$  et donc pour solutions

$$Z_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \text{ et } Z_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}.$$

On doit maintenant rechercher les racines cubiques de ces deux nombres. On a  $Z_1 = e^{2i\pi/3}$  et  $Z_2 = e^{-2i\pi/3} = e^{4i\pi/3}$ . Les racines cubiques de  $Z_1$  sont  $e^{2i\pi/9}, e^{2i\pi/9}e^{2i\pi/3} = e^{8i\pi/9}$  et  $e^{2i\pi/9}e^{4i\pi/3} = e^{14i\pi/9}$ , et celles de  $Z_2$  sont  $e^{4i\pi/9}, e^{4i\pi/9}e^{2i\pi/3} = e^{10i\pi/9}$  et  $e^{4i\pi/9}e^{4i\pi/3} = e^{16i\pi/9}$ . Ces six nombres sont les solutions de l'équation initiale.