

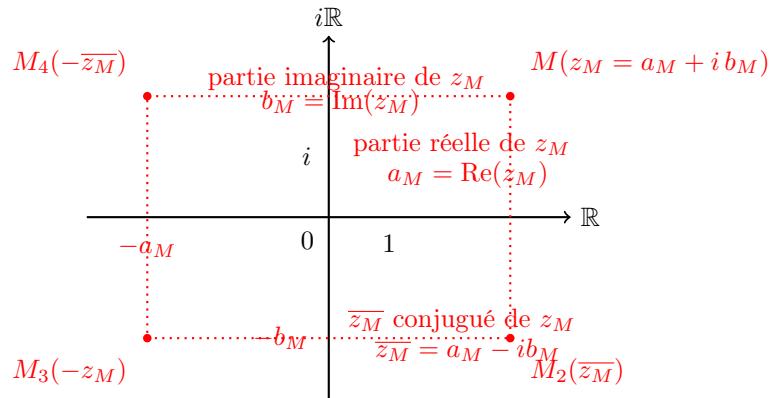
FICHE RECAPITULATIVE NOMBRES COMPLEXES

Yuetong Fang

L'ensemble des nombre complexe

$$\mathbb{C} = \{a + bi \text{ où } a, b \in \mathbb{R}\}.$$

On appelle affixe d'un point $M(a,b)$ du plan euclidien le nombre complexe $z_M = a + bi$.



Trois formes des nombres complexes

1. **Forme algébrique** : $z = a + bi$, avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.
2. **Forme trigonométrique** : $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, où $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ est le module et θ est un argument de z , défini par $\theta = \arg(z)$. On note $\text{Arg}(z)$ l'argument principe de z , avec $\text{Arg}(z) \in]-\pi, \pi]$.
3. **Forme exponentielle** : $z = re^{i\theta}$, où $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ est le module et θ est un argument de z .

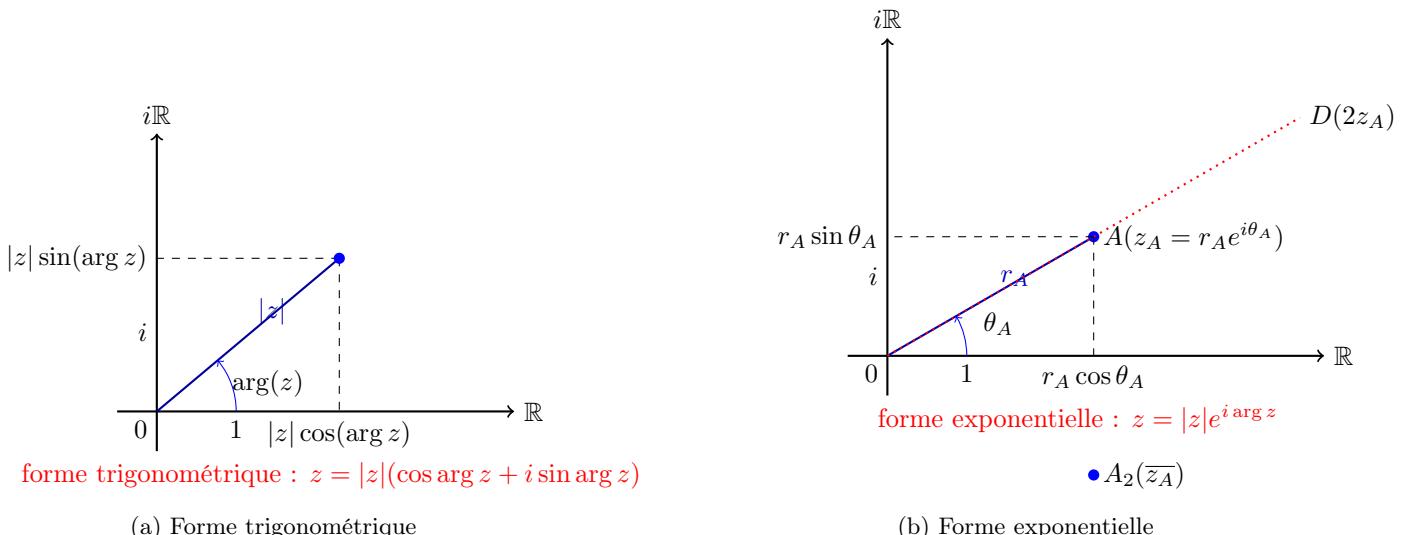


Figure 1: Représentation graphique

Opérations sur les nombres complexes

Soient $z = a + bi \in \mathbb{C}$ et $z' = c + di \in \mathbb{C}$, avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

1. **Somme** : $z + z' = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$;
2. **Produit** : $zz' = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$;
3. **Module** : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$;
4. **Conjugué** : $\bar{z} = a - bi$.

Propriétés du conjugué

Le conjugué d'un nombre complexe $z = a + bi$ est noté $\bar{z} = a - bi$.

- $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z)$,
- $z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im}(z)$,
- $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$ (module de z au carré).

Le conjugué d'un nombre complexe $z = re^{i\theta}$ est $\bar{z} = re^{-i\theta}$.

Autres propriétés

Soient $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$, et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors,

- $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$;
- $|z|^n = |z^n|$;
- $\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg}(z_1) + \operatorname{Arg}(z_2) + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$;
- $\operatorname{Arg}(z^n) = n \operatorname{Arg}(z) + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$;
- $\operatorname{Arg}\left(\frac{1}{z}\right) = -\operatorname{Arg}(z)$ et $\operatorname{Arg}\left(\frac{z}{w}\right) = \operatorname{Arg}(z) - \operatorname{Arg}(w)$.

Formule de Moivre

La formule de Moivre est utilisée pour éléver un nombre complexe à une puissance entière :

$$((\cos \theta + i \sin \theta))^n = (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)).$$

Somme d'une série géométrique

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ et $z \neq 1$, on a

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.$$

Formule d'Euler

La formule d'Euler relie les fonctions trigonométriques à l'exponentielle complexe :

$$\sin(\theta) = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}); \cos(\theta) = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}).$$

Équation du second degré dans \mathbb{C}

L'équation du second degré $az^2 + bz + c = 0$ avec $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ admet les solutions :

$$z_1 = \frac{-b + \delta}{2a}, z_2 = \frac{-b - \delta}{2a},$$

où $\delta^2 = \Delta$, et le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

Remarque: On n'écrit pas \sqrt{i} en général. **Le calcul de δ est fait dans le TD (Exercice 13).**

Racines n -ièmes

Racines n -ièmes de l'unité

Les racines n -ièmes de l'unité sont les solutions de l'équation $z^n = 1$. Elles sont données par :

$$z_k = e^{i \frac{2k\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n - 1.$$

Ces racines sont réparties uniformément sur le cercle unité du plan complexe.

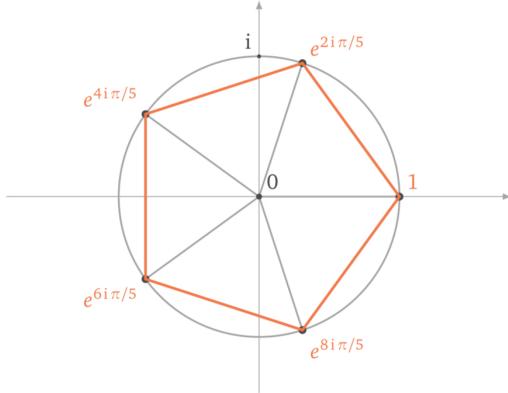


Figure 2: Exemple: les racines 5-ième de l'unité ($z = 1, n = 5$) forment un pentagone régulier.

Racines n -ièmes d'un nombre complexe

Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $b = re^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$. L'ensemble des solutions de $z^n = b$ est

$$\left\{ \sqrt[n]{r} e^{i \frac{\theta}{n} + 2i\pi \frac{k}{n}} \mid k \in \{0, \dots, n - 1\} \right\}.$$

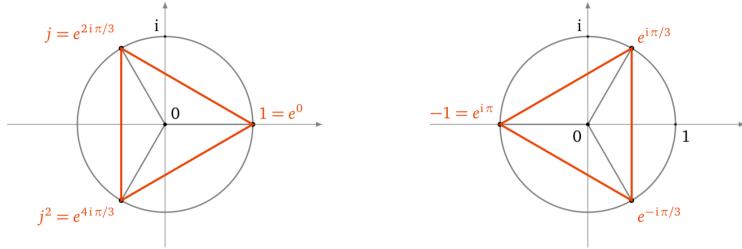


Figure 3: Exemple : À gauche, les racines 3-ièmes de l'unité ; à droite, les racines 3-ièmes de $-1 = e^{i\pi}$. Elles forment un triangle équilatéral passant par $e^{i\pi/3}$ (rotation de la figure de gauche).

$$R_1 e^{iA} = R_2 e^{iB}, R_1, R_2, A, B \in \mathbb{R} \Leftrightarrow R_1 = R_2, A = B + 2k\pi.$$

Linéarisation et délinéarisation des fonctions trigonométriques

Linéarisation

On explique $\sin^n(\theta)$ et $\cos^n(\theta)$ en fonction de $\sin(k\theta)$ et $\cos(k\theta)$ pour k allant de 0 à n .

Par exemple, pour linéariser $\sin^5(x)$, on utilise les identités :

$$\sin^5(x) = \left(\frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix}) \right)^5;$$

On développe le binôme de Newton :

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5;$$

On prend $a = e^{ix}$ et $b = -e^{-ix}$:

$$\begin{aligned}\sin^5(x) &= \frac{1}{32i}(e^{i5x} + 5e^{4ix}(-e^{-ix}) + 10e^{3ix}(e^{-2ix}) + 10e^{2ix}(-e^{-3ix}) + 5e^{ix}e^{-4ix} - e^{-5ix}) \\ &= \frac{1}{32i}(e^{i5x} - 5e^{3ix} + 10e^{ix} - 10e^{-ix} + 5e^{-3ix} - e^{-5ix});\end{aligned}$$

On utilise les identités:

$$2i \sin(\theta) = e^{i\theta} - e^{-i\theta};$$

On conclut $\sin^5(x) = \frac{1}{32i}(2i \sin(5x) - 10i \sin(3x)) + 20i \sin(x)$.

Délinéarisation

On exprime $\sin(n\theta)$ et $\cos(n\theta)$ en fonction des puissances de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$. Méthode : on utilise la formule de Moivre pour écrire $\cos(n\theta) + i \sin(n\theta) = (\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n$ que l'on développe avec la formule du binôme de Newton.

Par exemple: (**Regarder Exercice 10 et 11**)

$$\begin{aligned}\cos(3\theta) + i \sin(3\theta) &= (\cos \theta + i \sin \theta)^3 \\ &= \cos^3(\theta) + 3i \cos(2\theta) \sin \theta - 3 \cos \theta \sin(2\theta) - i \sin(3\theta) \\ &= \cos^3(\theta) - 3 \cos \theta \sin^2(\theta) + i(3 \cos^2(\theta) \sin(\theta) - \sin^3(\theta))\end{aligned}$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires, on déduit que

$$\cos(3\theta) = \cos^3(\theta) - 3 \cos(\theta) \sin^2(\theta) \text{ et } \sin(3\theta) = 3 \cos^2(\theta) \sin(\theta) - \sin^3(\theta).$$

Geometrie et nombre complexe

Transformations affines de \mathbb{C}

Une **similitude** de \mathbb{C} est une fonction $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ de la forme $f : z \mapsto az + b$ avec $a \neq 0$.

Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ une similitude. C'est

- une **homothétie** de rapport a et de centre ω si $a \in \mathbb{R}^*$ et $\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = a(z - \omega) + \omega$;
- une **translation** de vecteur de translation b si $\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = z + b$;
- une **rotation** de centre ω et d'angle θ si $\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = e^{i\theta}(z - \omega) + \omega$.

Interprétation géométrique des nombres complexes (Lieux de points)

Soient A et B deux points du plan, d'affixe respective z_A et z_B . Alors

- L'ensemble $\{M \in \mathbb{R}^2 \text{ d'affixe } z \text{ tel que } |z - z_A| = |z - z_B|\}$ est la médiatrice de [AB];
- Si $r > 0$ alors l'ensemble $\{M \in \mathbb{R}^2 \text{ d'affixe } z \text{ t.q. } |z - z_A| = r\}$ est le cercle de centre A et de rayon r .

Nombres complexes et vecteurs

Soient A, B et C trois points deux à deux distincts d'affixe z_A, z_B et z_C . Alors

- $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \widehat{\overrightarrow{AB}} \right) \equiv \operatorname{Arg}(z_B - z_A) [2\pi]$;
- $\left(\widehat{\overrightarrow{AC}}, \widehat{\overrightarrow{AB}} \right) \equiv \operatorname{Arg} \left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right) [2\pi]$;

Soient A, B et C trois points deux à deux distincts d'affixe z_A, z_B et z_C . Alors

- $(AB) // (AC) \Leftrightarrow \operatorname{Arg} \left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right) = 0$;
- $(AB) \perp (AC) \Leftrightarrow \operatorname{Arg} \left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right) = \frac{\pi}{2}$;

Soient A, B deux points distincts d'affixe $z_A, z_B \neq 0$. Alors

- $(OA) // (OB) \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z_A \bar{z}_B) = 0$;
- $(OA) \perp (OB) \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z_A \bar{z}_B) = 0$.