

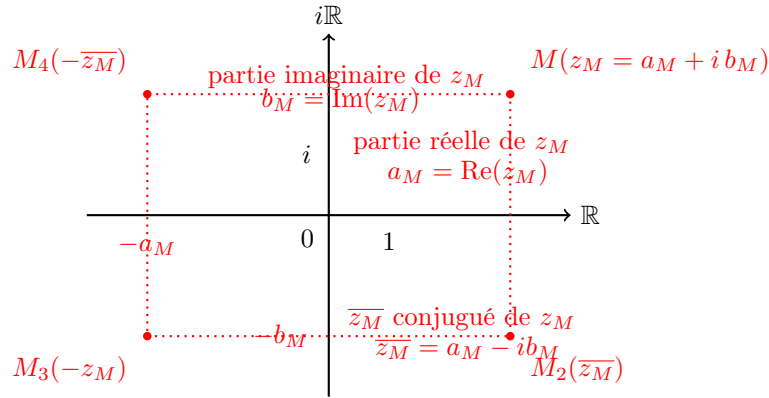
# FICHE RECAPITULATIVE NOMBRES COMPLEXES

Yuetong Fang

## L'ensemble des nombre complexe

$$\mathbb{C} = \{a + bi \text{ où } a, b \in \mathbb{R}\}.$$

On appelle affixe d'un point  $M(a,b)$  du plan euclidien le nombre complexe  $z_M = a + bi$ .



## Trois formes des nombres complexes

1. **Forme algébrique** :  $z = a + bi$ , avec  $a \in \mathbb{R}$  et  $b \in \mathbb{R}$ .
2. **Forme trigonométrique** :  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ , où  $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$  est le module et  $\theta$  est un argument de  $z$ , défini par  $\theta = \arg(z)$ . On note  $\text{Arg}(z)$  l'argument principe de  $z$ , avec  $\text{Arg}(z) \in ]-\pi, \pi]$ .
3. **Forme exponentielle** :  $z = re^{i\theta}$ , où  $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$  est le module et  $\theta$  est un argument de  $z$ .

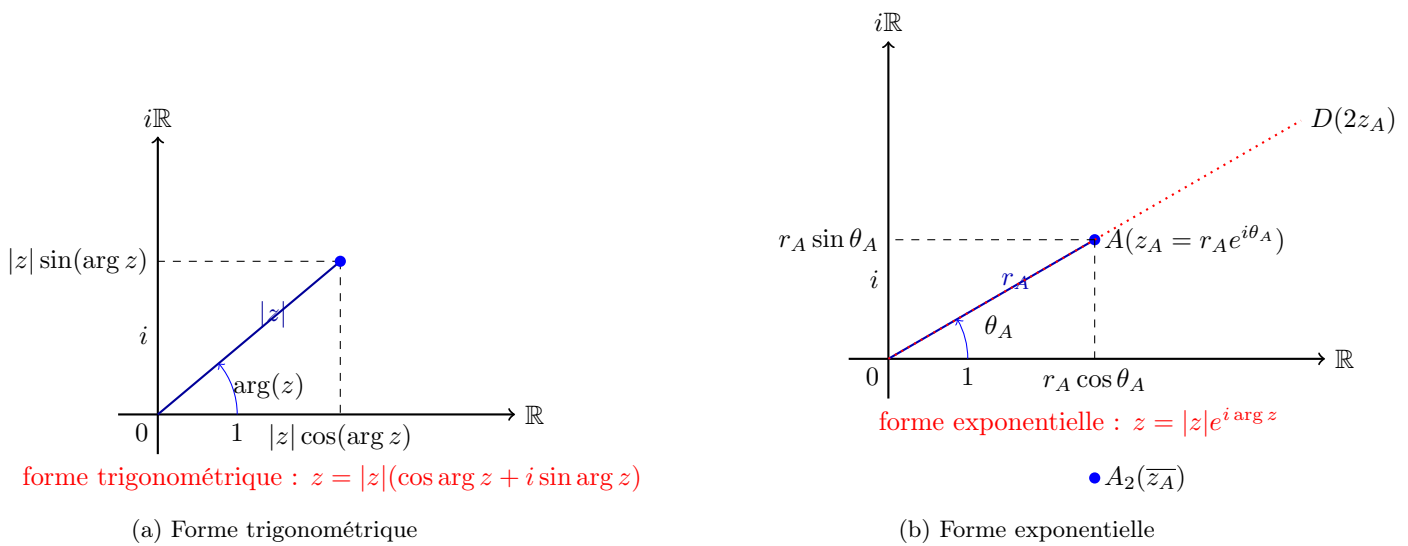


Figure 1: Représentation graphique

## Opérations sur les nombres complexes

Soient  $z = a + bi \in \mathbb{C}$  et  $z' = c + di \in \mathbb{C}$ , avec  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ .

1. **Somme** :  $z + z' = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$ ;
2. **Produit** :  $zz' = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$ ;
3. **Module** :  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ ;
4. **Conjugué** :  $\bar{z} = a - bi$ .

## Propriétés du conjugué

Le conjugué d'un nombre complexe  $z = a + bi$  est noté  $\bar{z} = a - bi$ .

- $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z)$  ,
- $z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im}(z)$  ,
- $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$  (module de  $z$  au carré).

Le conjugué d'un nombre complexe  $z = re^{i\theta}$  est  $\bar{z} = re^{-i\theta}$ .

## Autres propriétés

Soient  $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$ , et  $n \in \mathbb{N}^*$ . Alors,

- $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$  ;
- $|z|^n = |z^n|$  ;
- $\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg}(z_1) + \operatorname{Arg}(z_2) + 2k\pi$ , avec  $k \in \mathbb{Z}$ ;
- $\operatorname{Arg}(z^n) = n \operatorname{Arg}(z) + 2k\pi$ , avec  $k \in \mathbb{Z}$ ;
- $\operatorname{Arg}\left(\frac{1}{z}\right) = -\operatorname{Arg}(z)$  et  $\operatorname{Arg}\left(\frac{z}{w}\right) = \operatorname{Arg}(z) - \operatorname{Arg}(w)$  .

## Formule de Moivre

La formule de Moivre est utilisée pour élever un nombre complexe à une puissance entière :

$$((\cos \theta + i \sin \theta))^n = (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)) .$$

## Somme d'une série géométrique

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Pour tout  $z \in \mathbb{C}$  et  $z \neq 1$ , on a

$$1 + z + z^2 + \dots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} .$$

## Formule d'Euler

La formule d'Euler relie les fonctions trigonométriques à l'exponentielle complexe :

$$\sin(\theta) = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}); \quad \cos(\theta) = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}).$$

## Équation du second degré dans $\mathbb{C}$

L'équation du second degré  $az^2 + bz + c = 0$  avec  $a, b, c \in \mathbb{C}$ ,  $a \neq 0$  admet les solutions :

$$z_1 = \frac{-b + \delta}{2a}, z_2 = \frac{-b - \delta}{2a},$$

où  $\delta^2 = \Delta$ , et le discriminant  $\Delta = b^2 - 4ac$ .

**Remarque:** On n'écrit pas  $\sqrt{i}$  en général. Le calcul de  $\delta$  est fait dans le TD (Exercice 13).

# Racines $n$ -ièmes

## Racines $n$ -ièmes de l'unité

Les racines  $n$ -ièmes de l'unité sont les solutions de l'équation  $z^n = 1$ . Elles sont données par :

$$z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Ces racines sont réparties uniformément sur le cercle unité du plan complexe.

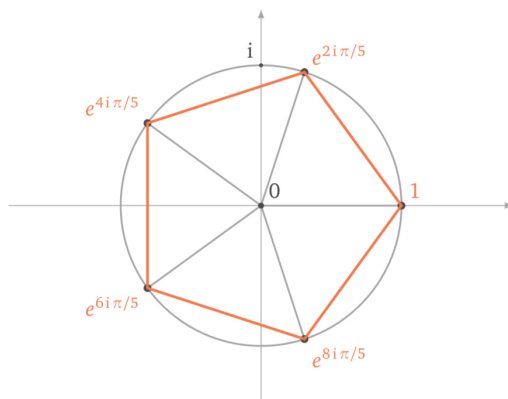


Figure 2: Exemple: les racines 5-ièmes de l'unité ( $z = 1, n = 5$ ) forment un pentagone régulier.

## Racines $n$ -ièmes d'un nombre complexe

Soient  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  et  $b = re^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$ . L'ensemble des solutions de  $z^n = b$  est

$$\left\{ \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\theta}{n} + 2i\pi\frac{k}{n}} \mid k \in \{0, \dots, n-1\} \right\}.$$

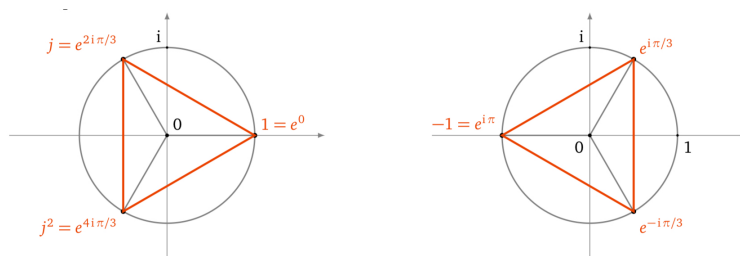


Figure 3: Exemple : À gauche, les racines 3-ièmes de l'unité ; à droite, les racines 3-ièmes de  $-1 = e^{i\pi}$ . Elles forment un triangle équilatéral passant par  $e^{i\pi/3}$  (rotation de la figure de gauche).

$$R_1 e^{iA} = R_2 e^{iB}, R_1, R_2, A, B \in \mathbb{R} \Leftrightarrow R_1 = R_2, A = B + 2k\pi.$$

## Linéarisation et délinéarisation des fonctions trigonométriques

### Linéarisation

On explique  $\sin^n(\theta)$  et  $\cos^n(\theta)$  en fonction de  $\sin(k\theta)$  et  $\cos(k\theta)$  pour  $k$  allant de 0 à  $n$ .

Par exemple, pour linéariser  $\sin^5(x)$ , on utilise les identités :

$$\sin^5(x) = \left( \frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix}) \right)^5;$$

On développe la binôme de Newton:

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5;$$

On prend  $a = e^{ix}$  et  $b = -e^{-ix}$ :

$$\begin{aligned}\sin^5(x) &= \frac{1}{32i}(e^{i5x} + 5e^{4ix}(-e^{-ix}) + 10e^{3ix}(e^{-2ix}) + 10e^{2ix}(-e^{-3ix}) + 5e^{ix}e^{-4ix} - e^{-5ix}) \\ &= \frac{1}{32i}(e^{i5x} - 5e^{3ix} + 10e^{ix} - 10e^{-ix} + 5e^{-3ix} - e^{-5ix});\end{aligned}$$

On utilise les identités:

$$2i \sin(\theta) = e^{i\theta} - e^{-i\theta};$$

On conclure  $\sin^5(x) = \frac{1}{32i}(2i \sin(5x) - 10i \sin(3x) + 20i \sin(x))$ .

## Délinéarisation

On exprime  $\sin(n\theta)$  et  $\cos(n\theta)$  en fonction des puissances de  $\cos(\theta)$  et  $\sin(\theta)$ . Méthode : on utilise la formule de Moivre pour écrire  $\cos(n\theta) + i \sin(n\theta) = (\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n$  que l'on développe avec la formule du binôme de Newton.

Par exemple: (**Regarder Exercice 10 et 11**)

$$\begin{aligned}\cos(3\theta) + i \sin(3\theta) &= (\cos \theta + i \sin \theta)^3 \\ &= \cos^3(\theta) + 3i \cos(2\theta) \sin \theta - 3 \cos \theta \sin^2(2\theta) - i \sin^3(3\theta) \\ &= \cos^3(\theta) - 3 \cos \theta \sin^2(\theta) + i(3 \cos^2(\theta) \sin(\theta) - \sin^3(\theta))\end{aligned}$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires, on déduit que

$$\cos(3\theta) = \cos^3(\theta) - 3 \cos(\theta) \sin^2(\theta) \text{ et } \sin(3\theta) = 3 \cos^2(\theta) \sin(\theta) - \sin^3(\theta).$$

## Geometrie et nombre complexe

### Transformations affines de $\mathbb{C}$

Une **similitude** de  $\mathbb{C}$  est une fonction  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  de la forme  $f : z \mapsto az + b$  avec  $a \neq 0$ .

Soit  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  une similitude. C'est

- une **homothétie** de rapport  $a$  et de centre  $\omega$  si  $a \in \mathbb{R}^*$  et  $\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = a(z - \omega) + \omega$ ;
- une **translation** de vecteur de translation  $b$  si  $\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = z + b$ ;
- une **rotation** de centre  $\omega$  et d'angle  $\theta$  si  $\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = e^{i\theta}(z - \omega) + \omega$ .

### Interprétation géométrique des nombres complexes (Lieux de points)

Soient A et B deux points du plan, d'affixe respective  $z_A$  et  $z_B$ . Alors

- L'ensemble  $\{M \in \mathbb{R}^2 \text{ d'affixe } z \text{ tel que } |z - z_A| = |z - z_B|\}$  est la médiatrice de  $[AB]$ ;
- Si  $r > 0$  alors l'ensemble  $\{M \in \mathbb{R}^2 \text{ d'affixe } z \text{ t.q. } |z - z_A| = r\}$  est le cercle de centre A et de rayon r .

### Nombres complexes et vecteurs

Soient A, B et C trois points deux à deux distincts d'affixe  $z_A, z_B$  et  $z_C$ . Alors

- $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AB}\right) \equiv \text{Arg}(z_B - z_A) [2\pi];$
- $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right) \equiv \text{Arg}\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) [2\pi];$

Soient A, B et C trois points deux à deux distincts d'affixe  $z_A, z_B$  et  $z_C$ . Alors

- $(AB) // (AC) \Leftrightarrow \text{Arg}\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = 0;$
- $(AB) \perp (AC) \Leftrightarrow \text{Arg}\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{2};$

Soient A, B deux points disticts d'affixe  $z_A, z_B \neq 0$ . Alors

- $(OA) // (OB) \Leftrightarrow \text{Im}(z_A \bar{z}_B) = 0;$
- $(OA) \perp (OB) \Leftrightarrow \text{Re}(z_A \bar{z}_B) = 0.$