

### Test final en Python

#### Exercice 1 : Interpolation et dichotomie

Deux joueurs jouent à deviner la valeur de la donnée manquante dans la suite suivante :

$$(-2; -4), (?; 0), (-1; 0.25), (0; 1), (1; 2), (2; 3.1)$$

Le joueur A procède comme suite :

- il calcule le polynôme interpolateur de Lagrange passant par les couples de points connus
- afin de calculer le zéro de ce polynôme.

Nous allons suivre ici sa méthode.

1. (En Python) Afficher les couples de points connus sur une fenêtre graphique en les indiquant par un marqueur  $\star$  rouge et en bloquant la fenêtre à  $[x_{\min}, x_{\max}] = [-2.5, 2.5]$  et  $[y_{\min}, y_{\max}] = [-8.5, 4]$ .
2. (En Python) Tracer le polynôme interpolateur de Lagrange (P.I.L dans la suite) sur la figure. Le graphe de ce polynôme passe-t-il par les couples de points connus ?
3. (Sur feuille) Rappeler l'expression théorique d'un polynôme élémentaire de Lagrange.
4. (Sur feuille) Calculer les deux premiers polynômes interpolateurs élémentaires de Lagrange  $L_1$  et  $L_2$ .

Nous donnons les autres polynômes interpolateurs élémentaires :

$$L_3(X) = \frac{(X+2)(X+1)(X-1)(X-2)}{4}, \quad L_4(X) = -\frac{(X+2)(X+1)X(X-2)}{6},$$

et

$$L_5(X) = \frac{(X+2)(X+1)X(X-1)}{24}.$$

5. (Sur feuille) Grâce à ces différents  $L_i$ , donner le polynôme interpolateur de Lagrange (P.I.L) sous forme factorisée.
6. (En Python) Coder dans une fonction  $P(X)$  l'expression du P.I.L trouvée à la question précédente. À l'aide de la fonction

```
import sympy
sympy.var('z')
print(sympy.expand(P(z)))
```

développer le polynôme.

7. (En Python) Retrouver numériquement les coefficients du polynôme trouvés question 6 en résolvant le système de Vandermonde suivant

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^4 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_5 & x_5^2 & \dots & x_5^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_5 \end{pmatrix}$$

8. (En Python) Trouver deux points  $a$  et  $b$  tels que  $P(a) < 0$  et  $P(b) > 0$  où  $P$  est toujours le P.I.L précédemment calculé.
9. (En Python) Déterminer par la méthode de dichotomie le zéro de  $P$  à  $10^{-10}$  près, en initialisant la méthode avec les valeurs de  $a$  et  $b$  trouvées question 8.
10. (En Python) Représenter sur la figure avec un marqueur '+' vert le zéro de  $P$  et vérifier qu'il s'agit bien d'un zéro de  $P$  en affichant en noir l'axe des abscisses.
11. Le joueur B affirme que la valeur manquante dans la suite est  $-1.14$  tandis que le joueur A affirme qu'il s'agit de  $-1.94$ . Selon vous, quel joueur a gagné la partie ?