2019- 2020 学年 第二学期期末试卷 2020 年 05 月 31 日

学号__________ 姓名___________ 成绩__________

一、单项选择题（每小题 4 分，满分 20 分）

1、设 $X_1,\cdots,X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本, 当 $k=($ $)$ 时, $\hat{\mu}^2=\bar{X}^2+k\hat{\sigma}^2$ 是 μ^2 的无偏估计，其中 $\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$， $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 。

(A) $-\frac{1}{n-1}$ ， (B) $\frac{1}{n}$， (C) $-\frac{n-1}{n^2}$ ， (D) $-\frac{1}{n}$ 。

2、设 X_1,X_2,X_3 为总体 X 的一组样本,在下列估计量中，总体均值 μ 的最小方差无偏估计是（ ）.

(A) $\frac{2}{9}X_1+\frac{2}{3}X_2+\frac{1}{9}X_3$ (B) $\frac{1}{5}X_1+\frac{3}{10}X_2+\frac{1}{2}X_3$

(C) $\frac{1}{3}X_1+\frac{1}{3}X_2+\frac{1}{3}X_3$ (D) $\frac{1}{3}X_1+\frac{3}{4}X_2-\frac{1}{12}X_3$

3、总体 X 的数学期望 μ 的置信度为 $1-\alpha$，置信上下限分别为 $T_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，$T_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的置信区间为 $[T_1,T_2]$ 的意义是（ ）。

(A) $P\{T_1\le X\le T_2\}=1-\alpha$ (B) $P\{T_1\le\bar{X}-\mu\le T_2\}=1-\alpha$

(C) $P\{T_1\le\bar{X}-\mu\le T_2\}=\alpha$ (D) $P\{T_1\le\mu\le T_2\}=1-\alpha$

4、设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为总体 X 的一个样本, $\bar{X}$ 为样本均值, S^2 为样本方差, 则下列结论中成立的是（ ）

(A) $2X_2-X_1\sim N(\mu,\sigma^2)$ (B) $\frac{\bar{X}-\mu}{S}\sqrt{n-1}\sim t(n-1)$

(C) $\frac{n(\bar{X}-\mu)^2}{S^2}\sim F(1,n-1)$ (D) $\frac{S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$

5、在运用贝叶斯估计进行参数估计时，统计推断应该建立在（ ）的基础上。

A)先验分布 B)后验分布 C)样本 D) 先验分布和样本

二、填空题（每小题 5 分，共 25 分）

1. 设总体 $X \sim N(\mu, 3^2)$，$X_1, X_2, \cdots, X_9$ 为总体 X 的一个样本，$\overline{X}$ 为样本均值，S^2 为样本方差，则 $D(-3S^2+2)=$________.

2. 考虑三因子二水平试验，选择正交表 $L_8(2^7)$，已将 A，B 两个因子分别安排在第三列和第六列，若仅考虑因子间的两两交互作用，要避免“混杂”现象，安排因子 C 有_______种可能的表头设计方案可供选择。

$L_8(2^7)$ 交互作用表：

1	2	3	4	5	6	7
(1)	3	2	5	4	7	6
	(2)	1	6	7	4	5
		(3)	7	6	5	4
			(4)	1	2	3
				(5)	3	2
					(6)	1
						(7)

3. 在双因素考虑交互作用的方差分析中，总离差平方和 S_T 的分解式为

$$S_T = S_A + S_B + S_{A\times B} + S_e$$

其中 $S_e = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\sum_{k=1}^{r}(x_{ijk}-\overline{x}_{ij\cdot})^2$，$\overline{x}_{ij\cdot} = \frac{1}{r}\sum_{k=1}^{r}x_{ijk}$，则 S_e 的自由度是____________。

4. 设总体 X 服从 $[0, \theta]$ 上的均匀分布，则参数 θ 的矩估计是_________

5. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自正态总体 $N(0,1)$ 的简单样本，则常数 $\boldsymbol{c}=$______时统计量 $\dfrac{c\left(\sum_{i=1}^{m}X_i\right)^2}{\sum_{i=m+1}^{n}X_i^2}$ 服从 $F-$分布（$\mathbf{1 \le m < n}$）。

三、（10 分，任选一个）

1. 证明：$(t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n))^2 = F_{1-\alpha}(1,n)$

2. 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}$ 是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，令

$$\overline{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i, \qquad S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}_n)^2$$

，试证明：

$$T=\sqrt{\frac{n}{n+1}}\frac{x_{n+1}-\bar{x}_n}{S_n}\sim t(n-1)$$

四、（15 分） 设 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 是来自正态总体 $N(\mu,1)$ 的简单样本，$y_1,y_2,\cdots,y_n$ 是来自正态总体 $N(2\mu,1)$ 的简单样本，两样本独立，其中 μ 是未知参数。将两样本合并成样本容量为 $m+n$ 样本 $x_1,x_2,\cdots,x_m$，$y_1,y_2,\cdots,y_n$。（1）证明 $T_1=\frac{1}{2}(\bar{x}+\frac{\bar{y}}{2})$ 是 μ 的无偏估计；（2）求 μ 的一致最小方差无偏估计 T_2；(3) 问 T_2 是否为 μ 的有效估计？证明你的结论。

五、(10 分，任选一个)

1. 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是来自正态总体 N（μ，1）的简单样本，求检验问题 H_0：μ=0，H_1：μ=1 的水平为 α （0<α<1）的 MPT

2. 设有某种产品，其长度服从正态分布，现从该种产品中随机抽取 25 件，得样本均值 $\bar{x}=9.28$（cm），样本标准差 $s=0.36$（cm），问：这批产品的长度能否认为是 9cm?（已知 $z_{0.95}=1.645$；$z_{0.975}=1.96$；$t_{0.975}(24)=2.064$，$t_{0.975}(25)=2.060$；$t_{0.95}(24)=1.711$；$t_{0.95}(25)=1.708$）

六、(10 分) 考虑某四因子二水平试验，除考察因子 A,B,C,D 外，还需考察交互作用 $A\times B$ 及 $A\times C$。今选用表 $L_8(2^7)$，表头设计及试验数据如表所示，所考虑的指标是越大越好。试用极差分析方法指出因子的主次顺序和较优工艺条件。

列号 / 试验号	A 1	B 2	$A\times B$ 3	C 4	$A\times C$ 5	D 6	7	实验数据
1	1	1	1	1	1	1	1	350
2	1	1	1	2	2	2	2	325
3	1	2	2	1	1	2	2	425
4	1	2	2	2	2	1	1	425
5	2	1	2	1	2	1	2	200
6	2	1	2	2	1	2	1	250
7	2	2	1	1	2	2	1	275
8	2	2	1	2	1	1	2	375

七、(10 分) 随机向量(x_1, x_2, x_3, x_4)的协方差矩阵

$$\begin{pmatrix} 79.7382 & 22.3846 & 1.5266 & 0.1108 \\ 22.3846 & 13.8194 & -0.5844 & 0.0250 \\ 1.5266 & -0.5844 & 0.6434 & 0.0343 \\ 0.1108 & 0.0250 & 0.0343 & 0.2616 \end{pmatrix}$$

且其特征根为$\lambda_1 = 86.640$， $\lambda_2 = 7.094$， $\lambda_3 = 0.472$， $\lambda_4 = 0.257$ 。

（1）根据主成分85%的选取标准，应选取几个主成分？

（2）试求（1）中所选的主成分。