差分法による拡散方程式の解法

2013 年 7 月 21 日

拡散方程式及び初期条件

$$u_t = \kappa u_{xx}$$
$$u_0(x) = sin\pi x$$

1　前進オイラー法

$$u(x,0) = u_0(x)$$

$$r = \frac{\kappa \Delta t}{\Delta x^2}$$

$$u(x, t + \Delta t) = u(x,t) + r(u(x + \Delta x, t) - 2u(x,t) + u(x - \Delta x, t))$$

最後の式がそのまま，左辺を求めるために右辺を計算する関数を表す.

2　後退オイラー法

$$u(x,0) = u_0(x)$$

$$u(x,t) = u(x, t - \Delta t) + \frac{\kappa \Delta t}{\Delta x^2}(u(x + \Delta x, t) - 2u(x,t) + u(x - \Delta x, t))$$

ここで,

$$u^i \equiv u(x_i, t - \Delta t)$$
$$v^i \equiv u(x_i, t)$$

とすることにして, u^x が与えられた時に, v^x を求めるには次の一次方程式を解けば良い.

$$\begin{bmatrix} 2r+1 & -r & & & \\ & -r & 2r+1 & r & \\ & & -r & 2r+1 & -r \\ & & & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} v = u$$

一次方程式の解法には，先学期の連続系演習で自分が作成したものを用いた (./LU.scm, ./solve-linear-equation.scm).

3　クランク・ニコルソン法

$$r = \frac{\kappa \Delta t}{\Delta x^2}$$

$$\begin{aligned} u(x, t+\Delta t) - u(x,t) = \frac{r}{2}\Big[&u(x+\Delta x, t+\Delta t) - 2u(x, t+\Delta t) + u(x-\Delta x, t+\Delta t) \\ &+ u(x+\Delta x, t) - 2u(x,t) + u(x-\Delta x, t)\Big] \end{aligned}$$

後退オイラー法と同様の書き換えをすれば

$$\begin{bmatrix} 1+r & -\frac{r}{2} & & & \\ & -\frac{r}{2} & 1+r & -\frac{r}{2} & \\ & & -\frac{r}{2} & 1+r & -\frac{r}{2} \\ & & & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} v = \begin{bmatrix} 1-r & \frac{r}{2} & & & \\ & \frac{r}{2} & 1-r & \frac{r}{2} & \\ & & \frac{r}{2} & 1-r & \frac{r}{2} \\ & & & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} u$$

u が与えられた時，これを v について解けば良い.

4　プログラム (kaku.scm)

$$\begin{aligned} \kappa &= 2 \\ u_t &= \kappa u_{xx} \\ u(x,0) &= u_0(x) = \sin(\pi x) \\ x &\in [0,1] \\ u(0,t) &= u(1,t) = 0 \end{aligned}$$

について, 先に挙げた三通りの手法で直接法によって $u(x, 0.1)$ を求めるプログラムを kaku.scm として書いた.

厳密解は, 以下のようである.

$$u(x,t) = \sin(\pi x)\exp(-\kappa\pi^2 t)$$

5 前進オイラー法の安定の確認

前進オイラー法の安定条件は

$$r = \frac{\kappa \Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}$$

であった. Δt の値は 0.001 に固定し, Δx の値を動かして, $t = 0$ での u の値を比較した. いくつかの Δx についての結果を ./kaku-stability.txt とした. 各 (dx, r) のケースに対して，上から前進オイラー法，後退オイラー法，ニコルソン法，厳密解 での $u(0, 0.1), u(\Delta x, 0.1), u(2\Delta x, 0.1) \ldots u(1, 0.1)$ である.
例えば, $\Delta x = 0.05, r = 0.8 > \frac{1}{2}$ において $x = 0.1$ の値を見ると

$$\begin{aligned}
\text{forward Euler} &: -5.026618455013273e16 \\
\text{backward} &: 0.058 \\
\text{Nicolson} &: 0.051 \\
\text{exact} &: 0.043
\end{aligned}$$

と前進オイラー法だけ極端な値を取っている.

6 参考文献

1. http://ja.wikipedia.org/wiki/差分法