微分方程式の数値計算

枚方ノート

2013/5/10 (Fri.) 10:32:46

拡散方程式

前進 Euler

$$u_t = \kappa u_{xx}$$

これの 前進 Euler は,

$$\begin{aligned}
\frac{u_{i,k+1} - u_{i,k}}{\mathrm{d}t} &= \kappa(u_{i+1,k} - 2u_{i,k} + u_{i-1,k})\frac{1}{\mathrm{d}x^2} \\
\iff u_{i,k+1} &= u_{i,k} + \kappa\,\mathrm{d}t\frac{1}{\mathrm{d}x^2}(u_{i+1}k - 2u_{i,k} + u_{i-1,k}).
\end{aligned}$$

これを解くことを考える.

$$u_{i,k+1} := ru_{i+1,k} + (1-2r)u_{i,k} + ru_{i-1,k}$$

where

$$r := \kappa\,\mathrm{d}t\frac{1}{\mathrm{d}x^2}$$

von Neumann の安定性解析

二次元配列 u を次のように置く.

$$\begin{aligned}
h &:= \mathrm{d}x \\
u_{j,k} &:= \alpha^k e^{i\beta jh}
\end{aligned}$$

```
% imagin number i
% これは、フーリエ展開した時の一成分である.
```

先の

$$u_{i,k+1} := ru_{i+1,k} + (1-2r)u_{i,k} + ru_{i-1,k}$$

に入れると,

$$\begin{aligned}\alpha &= re^{i\beta h} - 2r + re^{-i\beta h} \\ &= 1 - 2r\cos(\beta h)\end{aligned}$$

$|\alpha| < 1$ のとき, $u_{j,k}(k \to \infty) \to 0$(安定).

$|\alpha| > 1$ のとき, $u_{j,k}(k \to \infty)$ は収束しない (不安定).

ということは, cos が $[-1, 1]$ を取りうるとして、安定の条件は、$r \leq 1/2$ と書き改められる.

r の定義は再述すると、

$$r := \kappa \,\mathrm{d}t \frac{1}{\mathrm{d}x^2}$$

空間刻みを半分にして, 時間刻みを 1/4 にすると r は同じ. 時間刻みも空間刻みも半分だと r は二倍に増える.

後退 Euler

$$\frac{u_{i,k} - u_{i,k-1}}{\mathrm{d}t} = \kappa(u_{i+1,k} - 2u_{i,k} + u_{i-1,k})\frac{1}{\mathrm{d}x^2}$$

を解くと,

$$u_{i,k-1} = -ru_{i+1,k} + 2ru_{i,k} - ru_{i-1,k}$$

同様に,

$$u := \alpha^k e^{i\beta jh}$$

と書けば、

$$1/\alpha = -re^{i\beta h} + 2r - re^{-i\beta h}$$
$$\therefore \alpha = \frac{1}{1 + 2r(1 - \cos(\beta h))}$$

同様に, cos の取る範囲を過程すれば, α の取りうる値の範囲は\$$[1/(1+4r),\ 1]$\$となって, 常に 1 以下で安定となる (無条件安定).

移流方程式

$$u_t = -cu_x \quad (Const.c > 0)$$

中心差分

中心差分でこれを表すと,

$$\frac{u_{i,k+1} - u_{i,k}}{\mathrm{d}t} = -c(u_{i+1,k} - u_{i-1,k})\frac{2}{\mathrm{d}x}$$

やはり同様に,

$$h := \mathrm{d}x$$
$$u_{j,k} := \alpha^k e^{i\beta jh}$$

と置けば,

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 - \gamma(e^{i\beta h} - e^{-i\beta h}) \\ &= 1 - 2i\gamma\sin(\beta h), \end{aligned}$$

$$\text{where } \gamma = c\ \mathrm{d}t\frac{2}{\mathrm{d}x}.$$

複素平面上にあるんだけど，絶対値は 1 以上あるため、無条件不安定となる. すなわち, これは使い物にならない.

移流方程式というのは, x に沿って移動する何かを表してる. すなわち、点 (x, t) の u は, 点 (x_{prev}, t) の u で決まるのに、中心差分は、点 (x_{next}, t) を利用している. だからダメだったのだ.

風上差分

$$\frac{u_{i,k+1} - u_{i,k}}{\mathrm{d}t} = -c(u_{i,k} - u_{i-1,k})\frac{1}{\mathrm{d}x}$$

このとき,

$$\alpha = 1 - \gamma(1 - e^{-i\beta h})$$

CFL 条件 (Courant-Friedrichs-Lewy Condition)

流れが最も早いところでも CFL を満たすなら安定なのだ