計測制御演習課題 1

BQ18026，関宇

Oct.6，2020

1　物体の表面温度を $\theta(t)$，雰囲気温度を $\theta_{ex}(t)$ とするとき，θ の時間変化率は両者の温度差に比例することが知られている（Newton の冷却則）．この比例定数を k とする．このとき

（1）表面温度 (t) についての微分方程式を求めよ.

$$\dot{\theta(t)} = k(\theta_{ex} - \theta(t)) \tag{1}$$

(2) $\theta_{ex}(t)$ から $\theta(t)$ に至る伝達関数を求めよ.

まず，両辺をラプラス変換を取る

$$s\Theta(s) - \theta(0) = k\theta_{ex} - k\Theta(s) \tag{2}$$

$$(s+k)\Theta(s) = \Theta_{ex} + \theta(0) \tag{3}$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k}{k+s} \tag{4}$$

（3）状態空間表現を求めよ.

$x_1(t) = \theta(t), x_2(t) = \dot{\theta}(t)$ とする.

$$\begin{cases} \dot{x_1}(t) = k\theta_{ex} - kx_1(t), \\ \dot{x_2}(t) = -kx_2(t), \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1}(t) \\ \dot{x_2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k & 0 \\ 0 & -k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k \\ 0 \end{bmatrix} \theta_{ex} \tag{6}$$

よって、状態空間表現は

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \tag{7}$$

特に、

$$A=\left[\begin{array}{cc}-k & 0\\ 0 & -k\end{array}\right], B=\left[\begin{array}{c}k\\ 0\end{array}\right], c=[1,0] \tag{8}$$

(4). $\kappa=2\times10^{-3}$, 初期条件を $\theta(0)=300K$ として，雰囲気温度が「300+ 各自の学生番号の下 2 桁」K のときの 5 分後における物体の表面温度を求めよ.

雰囲気温度が 326K, 時定数ｔ =500 ｓ、Simulink でシミュレーションした結果より、

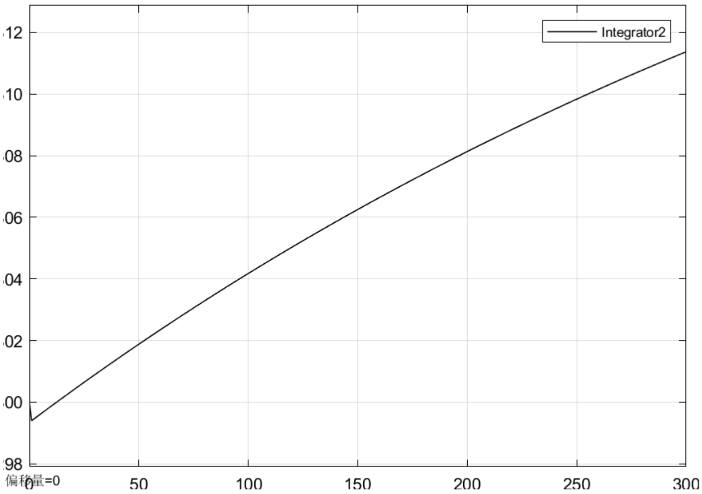

図1　物体の表面温度変化

5 分後における物体の表面温度は約 311K である.

2　あるメーカの人工心臓の駆動入力電圧 v(t) と血液圧送量 q(t) の動特性は，以下の微分方程式で与えられている.

$$\ddot{q}(t)+2\dot{q}(t)+2q(t)=v(t) \tag{9}$$

（1）血液圧送量と入力電圧についての伝達関数を求めよ.

まず，両辺をラプラス変換を取る

$$s^2Q(s)+2sQ(s)+2Q(s)=V(s) \tag{10}$$

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{1}{s^2+2s+2} \tag{11}$$

（2）この人工心臓は，ステップ入力に関してどのような挙動を示すかを言葉で述べよ．それは上記の動特性のどこから読み取れるか．

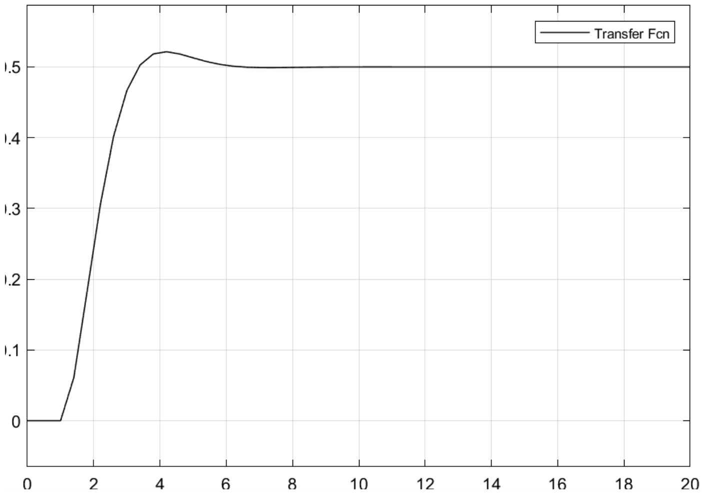

図2　動特性

MATLAB でシミュレーションした結果、ステップで入力したら短時間内に 0.5 に達し、ほぼ振動していない．決定されているのは減衰係数である．伝達関数の係数から読み取れる．

（3）状態変数表現を求めよ．

$x_1(t) = q(t), x_2(t) = \dot{q}(t)$ とする．

$$\begin{cases} \dot{x_1}(t) = x_2(t), \\ \dot{x_2}(t) = v(t) - 2x_2(t) - 2x_1(t), \end{cases} \tag{12}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1}(t) \\ \dot{x_2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v(t) \tag{13}$$

よって、状態空間表現は

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \tag{14}$$

特に、

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, c = [1, 0] \tag{15}$$

（4）上記（3）から求められた伝達関数と上記（1）の結果が一致することを確認せよ．

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 2} = C(sI - A)^{-1}B \tag{16}$$

$$G(s) = (1,0)\begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{17}$$

$$= (1,0)\frac{1}{s(s+2)+2}\begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{18}$$

$$= [\frac{s+2}{s^2+2s+2}, \frac{1}{s^2+2s+2}]\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{19}$$

$$= \frac{1}{s^2+2s+2} \tag{20}$$