

轨型理论以及相关问题的研究

(申请清华大学理学博士学位论文)

培 养 单 位： 数学科学系

学 科： 数学

研 究 生： 阮 钰 泽

指 导 教 师： 刘 正 伟 教 授

二〇二五年二月

Orbifold theory and related topics

Dissertation submitted to

Tsinghua University

in partial fulfillment of the requirement

for the degree of

Doctor of Philosophy

in

Mathematics

by

Ruan, Yuze

Dissertation Supervisor: Professor Liu, Zhengwei

February, 2025

学位论文公开评阅人和答辩委员会名单

公开评阅人名单

孔令欣	教授	清华大学
刘公祥	教授	南京大学
吴劲松	研究员	北京雁栖湖应用数学研究院
徐峰	教授	University of California, Riverside
郑浩	教授	清华大学

答辩委员会名单

暂无

关于学位论文使用授权的说明

本人完全了解清华大学有关保留、使用学位论文的规定，即：

清华大学拥有在著作权法规定范围内学位论文的使用权，其中包括：(1) 已获学位的研究生必须按学校规定提交学位论文，学校可以采用影印、缩印或其他复制手段保存研究生上交的学位论文；(2) 为教学和科研目的，学校可以将公开的学位论文作为资料在图书馆、资料室等场所供校内师生阅读，或在校园网上供校内师生浏览部分内容；(3) 根据《中华人民共和国学位条例暂行实施办法》及上级教育主管部门具体要求，向国家图书馆报送相应的学位论文。

本人保证遵守上述规定。

作者签名： 阮毅峰

日 期： 2024.9.20

导师签名： 王 伟

日 期： 2024.9.20

摘 要

在共形场论中, 轨型 (orbifold) 构造是一个重要的构造方法, 它在通过现有例子构建新例子时起着关键作用。如果重构猜想 (reconstruction conjecture/program) 是正确的, 这些构造及其各种性质也应该适用于模张量范畴 (modular category) 的框架中。

在本文中我们将重点讨论 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 置换轨型 (permutation orbifold) 的情况, 我们精细地构建了一个 (酉) 模张量范畴 (unitary modular category) C 的 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (酉) 置换规范 (permutation gauging) 理论。特别得, 我们用 C 的模数据 (modular data) 写出了规范后理论的模数据公式, 与共形场论中置换轨型理论相吻合, 为重构猜想提供了正面的证据。此外, 作为直接结果, 我们证明了 [1] 中关于融合规则 (fusion rule) 的猜想。我们的构造清楚地表明, 被规范理论的球面 (0-亏格) 信息包含了原始理论的高亏格信息。作为应用, 我们得到了一个并非来自模群关系的模数据等式, 并证明了来自弱群论模张量范畴 (weakly group theoretical modular category) 的闭曲面对称映射类群 (symmetric mapping class group) 的表示的像是有限的。

关键词: $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 置换规范; (酉) 模张量范畴; 置换轨型; 模数据; 重构猜想

Abstract

Orbifold is an important construction in conformal field theory, serving as a key tool for generating new examples from existing ones. If the reconstruction program works, the corresponding constructions and their various properties should also apply within the framework of modular categories.

In this paper, we will focus on the case of $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ permutation orbifold. We explicitly construct a (unitary) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ permutation gauging of a (unitary) modular category \mathcal{C} . In particular, the formula for the modular data of the gauged theory is provided in terms of modular data of \mathcal{C} , which coincides with those in the setting of conformal field theory, thus providing positive evidence for the reconstruction program. Moreover as a direct consequence, a conjecture about fusion rules in [1] is proved. Our construction explicitly shows the genus-0 data of the gauged theory contains higher genus data of the original theory. As applications, we obtain an identity for the modular data that does not come from modular group relations, and we prove that representations of the symmetric mapping class group (associated to closed surfaces) coming from weakly group theoretical modular categories have finite images.

Keywords: $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ permutation gauging; (unitary) modular category; permutation orbifold; modular data; reconstruction program

目 录

摘 要.....	I
Abstract.....	II
目 录.....	III
插图和附表清单.....	V
第 1 章 引言	1
第 2 章 相关背景知识	6
2.1 模张量范畴的预备知识	6
2.1.1 可加范畴 (additive category)	6
2.1.2 阿贝尔范畴 (abelian category)	6
2.1.3 么半范畴 (monoidal category).....	7
2.1.4 融合范畴.....	8
2.1.5 辫子范畴和 (酉) 模张量范畴.....	10
2.1.6 一些常用记号.....	13
2.1.7 图形计算恒等式.....	14
2.2 关于规范过程 (gauging process) 的初步知识	15
2.3 平面代数的背景知识	20
2.3.1 平面代数基础定义.....	20
2.3.2 平面代数上的辫子结构.....	24
2.4 平面代数与张量范畴的关系	29
2.5 曲面映射类群的基本知识	31
第 3 章 阴影平面代数的提升	33
第 4 章 构型空间的图形计算	38
4.1 包含 (inclusion) 和收缩 (contraction)	41
4.2 辫子结构 (Braiding Structure)	45
第 5 章 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 置换扩张.....	54
第 6 章 一些应用	60
第 7 章 等变化理论	65
第 8 章 一些观察和问题以及未来研究方向	69
8.1 和 Reshetikhin-Turaev TQFT 的关系	69
8.2 性质 F (Property F) 猜想	73

8.3 循环群置换规范	75
8.4 量子信息	75
参考文献	77
声 明	82
指导教师评语	83
答辩委员会决议书	84

插图和附表清单

图 2.1	么半结构公理 (the monoidal structure axiom)	8
图 2.2	六边形方程	10
图 2.3	扭转图示	14
图 2.4	投影和嵌入图示	14
图 2.5	扭转性质	15
图 2.6	切割性质	15
图 2.7	把手滑动性质	16
图 2.8	一些兼容性条件	16
图 2.9	中间结合律约束 (middle associativity constraints).....	17
图 2.10	有阴影的平面缠结.....	20
图 2.11	平面 operad.....	20
图 2.12	平面代数上的复合和张量积.....	21
图 2.13	平面代数上的酉结构和内积.....	22
图 2.14	对偶投影 \bar{p}	22
图 2.15	平面代数的一组生成缠结.....	24
图 2.16	一般平面缠结 T	25
图 2.17	一般平面缠结写成生成缠结的复合.....	26
图 2.18	Reidemeister 变换	26
图 2.19	改变奇异点高度.....	26
图 2.20	杯型帽型奇异点相互抵消.....	27
图 2.21	辫子奇异点沿杯型滑动.....	27
图 2.22	改变涉及输入圆盘奇异点的高度.....	27
图 2.23	2π 旋转不变.....	27
图 2.24	弧线同痕穿过输入圆盘.....	27
图 2.25	亏格 g 的闭曲面和一些简单闭曲线.....	31
图 3.1	阴影平面代数偶部分的生成缠结	33
图 3.2	阴影平面代数偶部分生成缠结之间的关系	34
图 3.3	球面性对应的关系	34
图 3.4	辫子缠结	34
图 3.5	辫子缠结需要满足的关系	35

图 3.6	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 作用	35
图 3.7	一个无阴影缠结的赋值例子	36
图 4.1	构型空间中的向量	38
图 4.2	\mathcal{C} 中的一些操作	39
图 4.3	构型空间中的一些操作	40
图 4.4	Fourier 配对	40
图 4.5	带孔环面上的 S 矩阵	41
图 4.6	包含和收缩	41
图 4.7	辫子结构	45
图 4.8	Fourier 变换作为构型空间之间的算子	47
图 4.9	构型空间上的 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 作用	47
图 4.10	一些图形计算	48
图 4.11	一些图形计算	48
图 4.12	一些图形计算	49
图 4.13	一些图形计算	49
图 4.14	一些图形计算	50
图 4.15	内积 $\langle F(x), F(y) \rangle$ 图形表示	51
图 4.16	一些图形计算	51
图 4.17	$\langle F_+^2 x, y \rangle$ 图形表示	52
图 4.18	一些图形计算	53
图 4.19	一些图形计算	53
图 5.1	生成缠结: 包含和收缩	54
图 5.2	生成缠结: 辫子	54
图 5.3	生成元所满足的关系	55
图 5.4	生成元所满足的关系	55
图 5.5	命题 4.18 图示	59
图 6.1	当所有线段都标记为 1 (或 $\hat{1}$) 时的一些基本恒等式	61
图 6.2	简单情形的图形证明	63
图 8.1	n -线段 Jones-Wassermann 子因子平面代数 Fourier 变换	75
表 1.1	扭曲/非扭曲对应	3

第 1 章 引言

给定一个 (酉) 模张量范畴 \mathcal{C} , 我们可以问它是否能够实现为某些具有比较好性质的共形场论的表示范畴, 即所谓的重构猜想 [2]。这个问题本身非常有趣但同时也非常艰深, 一种可能的研究方法是建立并验证共形场论与模张量范畴论之间构造以及性质上的类比 [3]。

置换轨型是共形场论中一种重要的构造 [4-6]: 对于完全有理的共形网或 C_2 -余有限的顶点算子代数, 可以考虑在其 n 重张量积上, 置换作用 (置换张量因子) 得到的不动点理论。对置换轨型的具体构造, 例如 [4-9], 表明置换轨型共形场论的零亏格 (genus-0) 数据与原始共形场论的高亏格数据之间存在关系 (扭曲/非扭曲的对应), 关于这种对应的拓扑/几何解释, 见 [10-11]。此外, 置换轨型共形场论的 S -矩阵 (亏格 1 的数据) 已经被计算出来 (参见 [4-6] 中的 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 置换情形, 以及 [12-13] 中的一般循环置换情形), 该计算结果仅涉及原始共形场论的亏格 1 数据 (即 S -矩阵和 T -矩阵)。自然的, 在范畴论一侧类似的具体构造和解释变得尤为有趣。

从大框架的抽象对应上来看, 范畴论中的类比被称为置换规范 (permutation gauging) [14], 物理相关的理论和一些规范的例子, 可参见 [15-17]。一般的规范过程分为两个步骤: 给定一个模张量范畴 \mathcal{C} 和一个有限群 G 的范畴作用, 第一步是将 \mathcal{C} 扩展为一个带有 G 作用的 G -交叉辫子范畴, 第二步是应用 G 等变化 (equivariantization) 以获得一个新的模张量范畴 [18-19]。虽然等变化总是可以进行的, 但群扩展存在一些由群上同调数据 [20] 抽象刻画的障碍 (obstructions) 和选择 (choices)。特别的, 我们取 \mathcal{C} 的 n 重 Deligne 张量积 $\mathcal{C}^{\boxtimes n}$, 它仍然是一个模张量范畴, 且有一个明显的范畴作用由张量因子的置换给出, 此时相应的扩展过程和整体规范过程分别称为置换扩展 (permutation extension) 和置换规范。文献 [21] 展示了该类规范理论的抽象存在性, 但对于规范理论的详细结构以及与原来范畴的具体关系仍在很大程度上未被研究。

在这一方向上, 相关研究较少。首先在对置换扩张的精细结构的研究中, 文献 [22] 给出了辫子么半范畴 \mathcal{C} 作为 $\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{C}$ 的一系列模范畴结构, 并且当 \mathcal{C} 是模张量范畴时, 证明其模范畴结构的唯一性并对应于 $\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{C}$ 上的 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 置换。之后文献 [10] 给出了置换扩展的拓扑构造, 这些扩展一开始仅是弱刚性 (weakly rigid) 的, 作者通过对结构态射的详细推导 (例如融合规则、结合性等) 直接证明了 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 情况下的刚性。然而在置换扩展中的拓扑信息并不完全由初始范畴给出, 这使得研究最

终规范理论的详细结构十分困难，无法给出精确的与初始范畴的联系。文献 [23] 给出了计算一般 G -扩张融合规则的算法步骤，并计算了循环群置换扩张的融合规则，但未涉及对置换扩张中其他的精细结构的刻画。文献 [3] 基于重构猜想的动机，在模张量范畴层面构造了 m -区间的 Jones-Wassermann 子因子，并证明了其自对偶性。作为推论，作者构造了置换扩展中的某些子范畴。然而，由于研究目标的不同，作者并未深入探讨其中涉及辫子结构的具体细节，而辫子结构恰恰是置换规范中非常关键的部分。上述研究都专注于置换扩张，而针对置换规范理论精细结构研究更为稀少，文献 [1] 计算了当 C 为非点态 (unpointed) 时 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 规范理论的融合规则，并提出了该规则在一般情况下（即任意模张量范畴）的有效性猜想，但并未涉及对规范理论与原始理论之间的关系的研究。

在本文中，我们完全解决了 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 置换规范的情况。具体而言，我们明确计算了规范化理论的模数据（即 S -矩阵和 T -矩阵），其结果与 [6]、[4] 和 [5] 中的结果一致。并且作为直接推论，我们推导出了融合规则的公式，验证了 [1] 中的猜想公式。

更具体地，给定一个（酉）模张量范畴 C ，受 [3] 中方法的启发，我们明确构造了一个扭曲范畴 D ，它是 $C \boxtimes C$ 的一个 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 置换扩展。

定理 1.1: 我们得到了一个带有 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -交叉辫子结构的 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -分次（酉）融合范畴 D ，其中平凡分次部分与 $C \boxtimes C$ 在辫子范畴的意义下是等价的。

该范畴 D 由非平凡分次部分的对象生成，这些对象记为 \hat{V} ，其中 $V \in \text{obj}(C)$ 。融合规则如下：

- \hat{V} 在 D 中是简单对象 $\Leftrightarrow V$ 在 C 中是简单对象。
- $\hat{V}\hat{W} = \hat{W}\hat{V} = \bigoplus_{X \in \text{irr}(C)} X V \boxtimes \bar{X} W$ 。
- $\hat{V} X \boxtimes Y = X \boxtimes Y \hat{V} = \widehat{V X Y}$ 。

$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 作用 ρ 作用于对象时表现为 $\rho(\hat{V}) = \hat{V}$ 和 $\rho(X \boxtimes Y) = Y \boxtimes X$ 。

更重要的是，这一构造仅依赖于 C 的范畴数据，并且我们明确建立了 D 的零亏格 (genus-0) 数据与原理论 C 的高亏格数据（即扭曲/非扭曲的对应关系）之间的联系。该对应关系可以通过下表进行说明，其中 $\gamma = \bigoplus_{X \in \text{irr}(C)} X \boxtimes \bar{X}$ ， $Z_i \in \text{obj}(C)$ ，而 $\text{SMod}(\Sigma_g)$ 表示亏格为 g 的闭曲面的对称映射类群 (symmetric mapping class group)[24-26]。

我们的下一个主要定理描述了表1.1中 T_i 之间的关系。

初始模张量范畴 \mathcal{C}	扭曲范畴 \mathcal{D}
$Cf(n, \mathcal{Z}) := \text{Hom}_{\mathcal{C}^{\boxtimes 2}}(1, \otimes_{i=1}^n \gamma Z_{2i-2} \boxtimes Z_{2i-1})$	$\text{Hom}_{\mathcal{D}}(1, \otimes_{i=0}^{2n-1} \hat{Z}_i)$
$\text{SMod}(\Sigma_{n-1})$ 作用 T_i (定义 4.9)	辫子群 B_{2n} 作用 σ_i
Fourier 配对/变换 (图 4.4, 4.8)	$\sigma_{2n-2} \sigma_{2n-1} \cdots \sigma_1 \sigma_0$
S 矩阵, T 矩阵 (当 $n = 2, Z_i = 1$)	$\sigma_0 \sigma_1 \sigma_0, \sigma_0 = \sigma_2$
超椭圆变换 (Hyperelliptic involution) (定义 4.13)	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 作用 ρ

表 1.1 扭曲/非扭曲对应

定理 1.2: $T_k \in \text{End}(Cf(n, \mathcal{Z}))$ ($0 \leq k \leq 2n-2$) 满足以下关系

$$\begin{aligned}
 T_k T_{k+2} &= T_{k+2} T_k, \\
 T_{k+1} T_k T_{k+1} &= \eta^{(-1)^k} T_k T_{k+1} T_k, \\
 (T_{2n-2} T_{2n-1} \cdots T_1 T_0)^{2n} &= \left(\prod_{k=0}^{2n-1} \theta_{Z_k}^{\frac{1}{2}} \right) Id, \\
 (T_0 T_1 \cdots T_{2n-2} T_{2n-1} \cdots T_1 T_0)^2 &= \theta_{Z_0}^2 Id.
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

在特殊情况下, 当所有 Z_i 都为平凡对象时, 我们证明了 $\text{SMod}(\Sigma_n)$ 的表示与 Reshetikhin-Turaev 拓扑量子场论 [27] 中源自初始模张量范畴 \mathcal{C} 得到的表示等价, 见定理 8.2。此时, Fourier 变换与文献 [3]^{Sec. 2.3} 中的结果一致, 后者可以推出 2-区间 Jones-Wassermann 子因子的自对偶性。特别的, 当 $n = 2$ 时, 我们重新得到了著名的 $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ 的射影表示, 因此, 我们的结果为扭曲和非扭曲对应提供了一个解释。

由上述的对应关系, 在扭曲范畴 \mathcal{D} 的图形演算中进行简单同痕可能涉及 \mathcal{C} 中非平凡的高亏格数据, 这使我们能够推导出模张量范畴中的许多有趣, 甚至很不平凡的恒等式。特别是, 我们得到了一个非模群关系的恒等式, 见命题 6.6, 该恒等式推广了 $6j$ 符号的自对偶性 [28]。此外, 我们得到了模张量范畴 \mathcal{S} 矩阵实现 (realization) 的一个障碍 (obstruction) (事实上, 通过不断进行 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 置换规范可以得到无穷多个障碍, 见备注 6.2):

$$\text{Det}|_{\Lambda}(S^{\otimes 6}P - I^{\otimes 6}) = 0 \tag{1.2}$$

其中 P 是一个通过循环 (16)(25)(34) 置换张量因子的置换矩阵和 $\mathcal{C}^{\otimes 3} \times I^{\otimes 3}$ 的复合, 其中 C 为荷电共轭矩阵 (charge conjugation)。 $\text{Det}|_{\Lambda}$ 是矩阵在由可容许颜色 (admissible colour) 生成的子空间 Λ 上的行列式 (见定理 6.7)。我们期望通过更深入的研究扭曲范畴 \mathcal{D} 内丰富的结构, 可以推导出更多的关于模数据的恒等式, 作为模张量范畴实现的障碍条件。

接下来, 基于图1.1中 \mathcal{D} 与 \mathcal{C} 的精细关系, 我们研究了对应的等变化理论 $\mathcal{D}^{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}$, 并以 \mathcal{C} 的模数据为基础得出了规范理论的模数据:

定理 1.3: 设 S', S^{eq} 分别表示 \mathcal{C} 和规范理论 $\mathcal{D}^{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}$ 的 S (未归一化) 矩阵。我们有 S^{eq} 是对称的、酉的, 且

$$\begin{aligned}
 S_{(XY),(ZW)}^{eq} &= 2(S'_{X,Z}S'_{Y,W} + S'_{XW}S'_{YZ}) \\
 S_{(XY),(Z,\epsilon)}^{eq} &= 2S'_{X,Z}S'_{Y,Z} \\
 S_{(X,\epsilon_1),(Y,\epsilon_2)}^{eq} &= (S'_{X,Y})^2 \\
 S_{(XY),(\hat{Z},\epsilon)}^{eq} &= 0 \\
 S_{(X,\epsilon_1),(\hat{Y},\epsilon_2)}^{eq} &= \epsilon_1\delta^2 S'_{X,Y} \\
 S_{(\hat{X},\epsilon_1),(\hat{Y},\epsilon_2)}^{eq} &= \epsilon_1\epsilon_2\eta^{-1}\theta_X^{1/2}\theta_Y^{1/2}(S'T^2S')_{X,Y}
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

并且 T^{eq} 是对角矩阵

$$\begin{aligned}
 T_{(XY),(XY)}^{eq} &= \theta_X\theta_Y \\
 T_{(X,\epsilon),(X,\epsilon)}^{eq} &= \theta_X^2 \\
 T_{(\hat{X},\epsilon),(\hat{X},\epsilon)}^{eq} &= \epsilon\eta^{1/2}\theta_X^{1/2}
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

我们结果中的 S 矩阵与文献 [6]、[4] 和 [5] 中的共形场论设定下的结果一致。特别的, 我们得到了融合规则的公式, 验证了文献 [1] 中对一般模张量范畴情况的猜想公式。

最后, 作为表1.1中对应关系的另一应用, 我们证明了 $\mathbf{SMod}(\Sigma)$ 版本关于弱群论模张量范畴的性质 F 猜想 [29]:

定理 1.4: 弱群论模张量范畴对应的闭曲面对称映射类群表示具有有限像。

综上所述, 由于对抽象模范畴及模范畴函子进行精细刻画无比困难, 使得模范畴理论中对置换规范的研究更多的停留在较为抽象的性质刻画上, 相比共形场论中对置换轨型的精细研究仍有很多问题需要回答。我们的研究在这一方向上提供了新的思路和有力的工具, 并得到了一些重要的结果, 相信我们的方法可以对重构猜想的研究带来很多新的启示。

下面我们简要介绍我们的主要构造思路和其中的难点 (其中对各种平面代数的定义可参考章节 2.3), 给定一个模张量范畴 \mathcal{C} , 第一步我们先用 $\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{C}$ 的信息构造了一个带标记, 定向和特定辫子结构的阴影平面代数, 极大扩展了 [3] 中的构造方法 ([3] 中仅用到 $\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{C}$ 中特定 Frobenius 代数 $\gamma = \bigoplus_{X \in \text{Irr}(\mathcal{C})} X \boxtimes \bar{X}$ 的乘法, 余乘法, 单位和余单位结构, 以及非平凡的 Fourier 变换, 得到的是一个没有标记和定向的阴影平面代数)。因此我们第一步的主要难点在于如何定义该平面代数中带标记

生成缠结相应的赋予函数，特别的是对辫子缠结的定义需要非常精细。第二步我们显式的证明该阴影平面代数可以提升成为一个无阴影的因子（半单）平面代数，并且该平面代数具有 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 辫子结构，事实上，这一步的难点主要在如何定义带阴影平面代数上的辫子结构使得提升后的平面代数有 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 辫子，并满足所有拓扑上的同痕等价性，这涉及到很多 \mathcal{C} 中非平凡的图形计算。第三步是刻画该无阴影平面代数中的极小投影（幂等元），并证明平面代数是有限深度的，由此我们可以得到一个 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 交叉辫子融合范畴，这步的难点在于证明投影（幂等元）等价类的有限性，并得到偶部分的投影生成的范畴于 $\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{C}$ 作为辫子范畴等价。最后一步我们在带 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 辫子结构平面代数中对 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 置换规范进行计算，得到相对应的模张量范畴的模数据。

本文的结构如下：在第二节中，我们回顾了酉模张量范畴、规范过程和平面代数的初步知识。在第三节中，我们讨论了从阴影平面代数提升到无阴影平面代数的问题，并通过某些辫子结构给出了一个充分条件。在第四节中，我们定义了广义配置空间 $Cf(n, \mathcal{Z})$ 以及它们之间的若干操作，并验证了这些操作的相容性。在第五节中，我们证明了定理 1.1。在第六节中，我们给出了一些应用，特别是我们证明了定理 1.2，并推导出了模数据相关的许多恒等式，包括等式 1.2。在第七节中，我们研究了等变化理论并证明了定理 1.3。最后，在第八节中，我们证明了定理 1.4，并讨论了一些问题和未来的研究方向。

第 2 章 相关背景知识

2.1 模张量范畴的预备知识

本节将介绍酉模张量范畴 (unitary modular category) 的概念以及相应的图形计算 (graphic calculus) 方法。详细内容可参考 [30-33]。

2.1.1 可加范畴 (additive category)

定义 2.1: 可加范畴 \mathcal{C} 是一个满足下列公理的范畴:

- 每一个 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ 的集合都有一个阿贝尔群的结构, 使得态射之间的复合在该结构下是双可加的 (biadditive)。
- 存在一个 0 对象, 使得 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(0, 0) = 0$ 。
- (直和的存在性) 对任意对象 $X_1, X_2 \in \mathcal{C}$, 存在一个对象 $Y \in \mathcal{C}$ 和态射 $p_1 : X \mapsto X_1, p_2 : y \mapsto X_2, i_1 : X_1 \mapsto Y, i_2 : X_2 \mapsto Y$ 使得 $p_1 i_1 = \text{id}_{X_1}, p_2 i_2 = \text{id}_{X_2}$, 并且 $i_1 p_1 + i_2 p_2 = \text{id}_Y$ 。对象 Y 在典范同构下是唯一的, 因此记为直和 $X_1 \oplus X_2$ 。

定义 2.2: \mathbb{k} 是一个域。一个可加范畴被称为是 \mathbb{k} -线性的, 如果对任意的对象 $X, Y \in \mathcal{C}$, 态射空间 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ 都有 \mathbb{k} 上线性空间的结构, 并且态射复合是 \mathbb{k} -线性的。

2.1.2 阿贝尔范畴 (abelian category)

定义 2.3: 阿贝尔范畴是一个可加范畴 \mathcal{C} , 并且对任意的态射 $\phi : X \mapsto Y$, 存在一个序列:

$$K \xrightarrow{k} X \xrightarrow{i} I \xrightarrow{j} Y \xrightarrow{c} C \quad (2.1)$$

该序列具有以下性质:

- $ji = \phi$,
- $(K, k) = \text{Ker}(\phi), (C, c) = \text{Coker}(\phi)$,
- $(I, i) = \text{Coker}(k), (I, j) = \text{Ker}(c)$ 。

该序列被称为 ϕ 的标准分解, 对象 I 被称为 ϕ 的像, 记为 $\text{Im}(\phi)$ 。

例 2.1: 我们举一些阿贝尔范畴的例子。

- 交换群构成的范畴或者有限 (生成) 交换群构成的子范畴。
- 域 \mathbb{k} 上的线性空间 (包括无限维) 或者只包含有限维线性空间的子范畴 Vec 。

- 更一般的, 域 \mathbb{k} 上结合代数的模构成的范畴

定义 2.4: \mathcal{C} 是一个阿贝尔范畴, 态射 $f : X \mapsto Y$ 是**单射**如果 $\text{Ker}(f) = 0$ 。如果 $\text{Coker}(f) = 0$, 则称 f 是**满射**。

定义 2.5: 对象 Y 的**子对象**是一个对象 X 和一个单射 $i : X \mapsto Y$ 。 Y 的**商对象** (quotient object) 是一个对象 Z 和一个满射 $p : Y \mapsto Z$ 。 Y 的**子商对象** (subquotient object) 是一个子对象的商对象。

定义 2.6: \mathcal{C} 是阿贝尔范畴, X 是 \mathcal{C} 中的一个非零对象。 X 被称为**简单的** (simple), 如果它的子对象只有 0 和 X 。 X 被称为**半单** (semisimple) 的, 如果它是简单对象的直和。如果 \mathcal{C} 中所有的对象都是半单的, 那我们称 \mathcal{C} 是半单的。

引理 2.7: (Schur 引理) 令 X, Y 为 \mathcal{C} 中的简单对象, 那么任意非零态射 $f : X \mapsto Y$ 是一个同构。特别的, 如果 X 和 Y 并不同构, 则 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) = 0$, 并且 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$ 是一个可除代数 (division algebra)。

证明 从阿贝尔范畴及子对象的定义可直接推出。 ■

2.1.3 么半范畴 (monoidal category)

定义 2.8: 么半范畴由一个五元组刻画 $(\mathcal{C}, \otimes, \alpha, \mathbf{1}, \epsilon)$:

- \mathcal{C} 是一个范畴。
- $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ 是一个二元函子 (bifunctor)。
- $\alpha : (- \otimes -) \otimes - \xrightarrow{\sim} - \otimes (- \otimes -)$ 是一个自然同构, 满足**五边形准则** (pentagon axiom)
- $\mathbf{1} \in \mathcal{C}$ 是 \mathcal{C} 中的一个对象并满足**单位准则** (unit axiom)。
- $\epsilon : \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \xrightarrow{\sim} \mathbf{1}$ 是一个同构。
- **五边形准则** (pentagon axiom): 下面图表

$$\begin{array}{ccc}
 & ((X \otimes Y) \otimes Z) \otimes T & \\
 \alpha_{X,Y,Z} \otimes id_T \swarrow & & \searrow \alpha_{X \otimes Y, Z, T} \\
 (X \otimes (Y \otimes Z)) \otimes T & & (X \otimes Y) \otimes (Z \otimes T) \\
 \alpha_{X, Y \otimes Z, T} \downarrow & & \downarrow \alpha_{X, Y, Z \otimes T} \\
 X \otimes ((Y \otimes Z) \otimes T) & \xrightarrow{id_X \otimes \alpha_{Y, Z, T}} & X \otimes (Y \otimes (Z \otimes T))
 \end{array}$$

对所有 \mathcal{C} 中的对象 X, Y, Z, T 都交换。

- **单位准则** (unit axiom): 函子

$$L_1 : X \rightarrow \mathbf{1} \otimes X, R_1 : X \rightarrow X \otimes \mathbf{1}$$

是 \mathcal{C} 上的自同构 (autoequivalences)。

例 2.2: 我们举一些么半范畴的例子。

- 集合构成的范畴，其中张量由集合的笛卡尔积给出，单位对象由一个元素的集合给出，结构映射是显然的。
- 域 \mathbb{k} 上的线性空间构成的范畴，其中张量由线性空间的张量给出，单位对象由 \mathbb{k} 给出。
- 令 G 是一个群（可以无限），它的所有表示构成么半范畴。其中张量对应于表示的张量积，即（ V 是表示， ρ_V 表示群的作用 $G \rightarrow GL(V)$ ）：

$$\rho_{V \otimes W}(g) := \rho_V(g) \otimes \rho_W(g) \quad (2.2)$$

单位对象为平凡表示。

下面我们给出么半函子的概念和一些例子。

定义 2.9: 如果 $(C, \otimes, a, \mathbf{1}, \iota)$ 和 $(C', \otimes', a', \mathbf{1}', \iota')$ 是两个么半范畴。从 C 到 C' 的**么半函子 (monoidal functor)** 是一对两元组 (F, J) ，其中 $F : C \rightarrow C'$ 是一个函子，并且：

$$J_{X,Y} : F(X) \otimes' F(Y) \xrightarrow{\sim} F(X \otimes Y) \quad (2.3)$$

是一个自然同构，使得 $F(\mathbf{1})$ 同构于 $\mathbf{1}'$ ，并且下面图表 2.1（交换图取自 [30]）：对

$$\begin{array}{ccc} (F(X) \otimes' F(Y)) \otimes' F(Z) & \xrightarrow{a'_{F(X), F(Y), F(Z)}} & F(X) \otimes' (F(Y) \otimes' F(Z)) \\ \downarrow J_{X,Y} \otimes' \text{id}_{F(Z)} & & \downarrow \text{id}_{F(X)} \otimes' J_{Y,Z} \\ F(X \otimes Y) \otimes' F(Z) & & F(X) \otimes' F(Y \otimes Z) \\ \downarrow J_{X \otimes Y, Z} & & \downarrow J_{X, Y \otimes Z} \\ F((X \otimes Y) \otimes Z) & \xrightarrow{F(a_{X,Y,Z})} & F(X \otimes (Y \otimes Z)) \end{array}$$

图 2.1 么半结构公理 (the monoidal structure axiom)

任意 $X, Y, Z \in C$ 都交换。

例 2.3: 遗忘函子：从群表示范畴到线性空间范畴的函子，通过遗忘群作用的信息。容易看出，它显然满足么半函子的定义。

2.1.4 融合范畴

定义 2.10: **融合范畴** 是一个 \mathbb{k} -线性半单阿贝尔么半范畴（ \mathbb{k} 是一个代数闭域）并且有：

- **刚性 (rigidity)**: 每一个 C 中的对象都有左对偶和右对偶，即存在 evaluation 和

coevaluation 结构态射使得:

$$X \xrightarrow{coev_X \otimes id_X} (X \otimes X^*) \otimes X \xrightarrow{\alpha_{X, X^*, X}} X \otimes (X^* \otimes X) \xrightarrow{id_X \otimes ev_X} X \quad (2.4)$$

$$X^* \xrightarrow{id_{X^*} \otimes coev_X} X^* \otimes (X \otimes X^*) \xrightarrow{\alpha_{X^*, X, X^*}^{-1}} (X^* \otimes X) \otimes X^* \xrightarrow{ev_X \otimes id_{X^*}} X^* \quad (2.5)$$

都是单位态射。(这里我们省略了右对偶相关的结构态射及箭图)

- **有限性:** 1. 有限多个简单对象 (同构意义下) 2. 局部有限: 态射空间都是有限维。
- \otimes 是 \mathbb{k} -双线性的。
- 平凡对象是简单的: $End(\mathbf{1}) \cong \mathbb{k}$ 。

注释 2.1. 在融合范畴中, 左对偶和右对偶同构, 因此对任意对象 X 和它的双重对偶同构, 见 [34]^{Proposition 2.1}。为了方便起见我们将用 \bar{X} 来表示 X 的对偶。

定义 2.11: 令 \mathcal{C} 是一个融合范畴, 对任意对象 X , 和态射 $g : X \mapsto X^{**} = \bar{\bar{X}}$

- **量子迹 (Quantum Trace):** $Tr_X(g) = ev_{\bar{X}} \circ (g \otimes 1_{\bar{X}}) \circ coev_X$ 。
- **Muger 平方范数 (squared norm):** $|X|^2 := Tr_X(g) Tr_{\bar{X}}((g^{-1}))$ 以及**全局维数 (global dimension)** $\dim(\mathcal{C}) = \sum_{V \in \text{Irr}(\mathcal{C})} |V|^2$ 。
- **枢轴结构 (Pivotal structure):** 张量函子间的自然同构 $j : id \mapsto **$, 那么我们有 $|X|^2 = \dim(X) \dim(\bar{X})$
- **球面结构 (Spherical structure):** 如果 $\dim(X) = \dim(\bar{X})$

定义 2.12: 只关注融合环, 我们就可以定义对象 X 的 Frobenius- Perron 维数 $\text{FPdim}(X)$ 。考虑 X 在融合环自身上的张量作用, 该作用对应的矩阵是非负的。通过 Frobenius- Perron 定理存在非负特征根。定义 $\text{FPdim}(X)$ 为其最大非负特征根。

例 2.4: 下面我们给出一些融合范畴的例子。

- 有限维线性空间构成的范畴, 对偶结构由线性空间的对偶给出。
- 有限群的表示构成的范畴, 对偶结构由对偶表示给出, 半单性由有限群表示的半单性得到。
- G 有限群, G -分次线性空间 $\{V_g\}_{g \in G}$ 构成的范畴, 其中张量定义为下。

$$V_g \otimes W_h = (V \otimes W)_{gh} \quad (2.6)$$

对偶结构由取逆得出。更一般的可以考虑 G 上的 3 阶余圈 (3-cocycle) $\omega \in Z^3(G, \mathbb{k}^\times)$, 并用 ω 来定义结合律同构 α 。

定义 2.13: 对象 X 是**可逆的**, 如果对偶结构态射 ev_X 和 $coev_X$ 都是同构。我们称 \mathcal{C} 是**点态的 (pointed)**, 如果所有简单对象都是可逆的。

定义 2.14: C 的伴随子范畴 (adjoint subcategory) C_{ad} , 是 C 的由对象 $X \otimes \bar{X}$ 生成的融合子范畴 (对任意对象 $X \in C$)。

定义 2.15 ([35]): 融合范畴有标准的分次结构:

$$C = \bigoplus_{g \in U(C)} C_g \quad (2.7)$$

使得 $C_e = C_{ad}$ 。其中群 $U(C)$ 被称为 C 的通用分次群 (universal grading group)。

定义 2.16: C 的中心下降序列 (descending central series) 是如下一列融合子范畴:

$$\dots \subseteq C^{(n+1)} \subseteq C^{(n)} \subseteq \dots \subseteq C^{(1)} \subseteq C^{(0)} = C, \quad (2.8)$$

归纳定义为 $C^{(n+1)} = (C^{(n)})_{ad}$, $n \geq 0$ 。

定义 2.17: 融合范畴被称作幂零的 (nilpotent), 如果存在 $n \geq 0$ 使得 $C^{(n)} \cong \text{Vec}$ 。

2.1.5 辫子范畴和 (西) 模张量范畴

定义 2.18: 下面我们定义辫子结构, 并给出模张量范畴的定义:

- 辫子 (Brading): 自然同构: $c_{X,Y} : X \otimes Y \rightarrow Y \otimes X$ 满足六边形方程 (hexagon equation), 见图2.2 (图来自于 [30])。

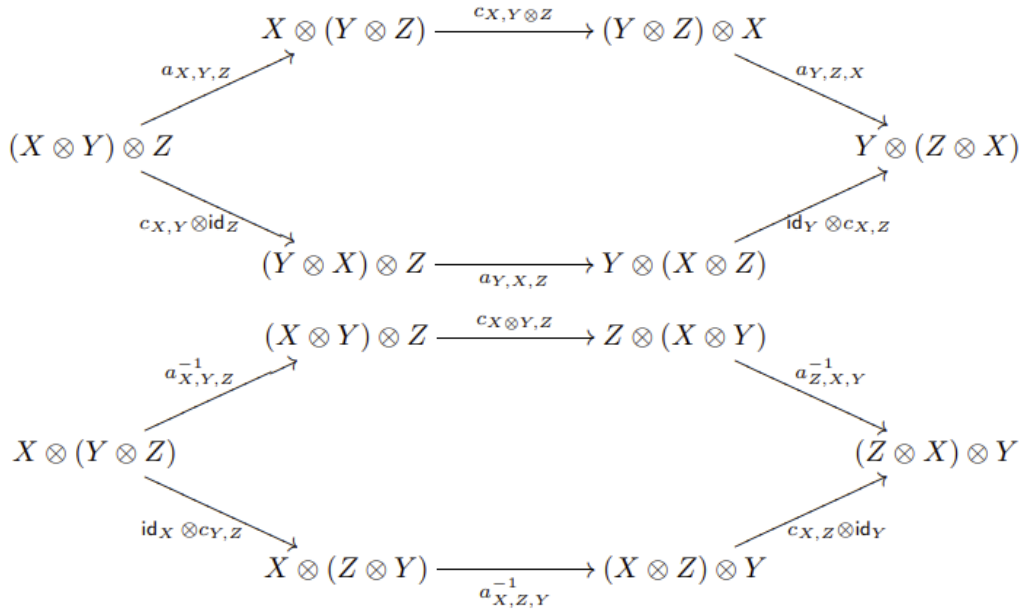


图 2.2 六边形方程

- Muger 中心 (Muger center) C' : C 的融合子范畴, 由以下对象决定: $\{X \in \text{ob}(C) \mid c_{Y,X} \circ c_{X,Y} = \text{id}_{X \otimes Y}, Y \in \text{ob}(C)\}$ 。
- C 是非退化辫子融合范畴, 如果 $\text{Irr}(C') = \{1\}$ 。

- **扭转 (twist):** $\theta \in \text{Aut}(id_C)$, 使得对任意 $X, Y \in C$ 有,

$$\theta_{X \otimes Y} = (\theta_X \otimes \theta_Y) \circ c_{Y,X} \circ c_{X,Y} \quad (2.9)$$

- **带状结构 (ribbon structure):** $\overline{(\theta_X)} = \theta_{\bar{X}}$. (球面的 \Leftrightarrow 带状的 [31]^{Section 2.2})
- C 是 **模张量范畴 (modular category)**, 如果它是非退化的带状 (球面) 辫子融合范畴。

另一种便于计算的模张量范畴定义如下:

定义 2.19: 令 C 是一个球面辫子融合范畴 (预模张量范畴), C 的 **S-matrix** 定义如下

$$S_{V,W} := \text{Tr}_{V \otimes W^*}(c_{W^*,V} \circ c_{V,W^*}), V, W \in \text{Irr}(C).$$

C 是 **模张量范畴** 如果 S 是可逆的.

注释 2.2. 这两种关于模张量范畴的定义是等价的当 $\dim(C) \neq 0$ (如果域是 \mathbb{C} , 则一直成立)。一方面如果 Muger 中心不平凡, 容易看出 S -矩阵不可逆。另一方面, 如果 Muger 中心平凡, 考虑融合环中这样的元素 (Kirby Color): $\sum_{V \in \text{Irr}(C)} \dim(V)V$ 。考虑将被它标记的圈套在简单对象上的作用, 由它的把手滑动 (handle slide, 图2.7) 性质 (可有其是张量作用下的特征向量得到), 我们可以得到它在平凡对象上的作用为 $\dim(C)\text{id}$, 而在其他简单对象上作用为 0。由此可以证明 $S^2 = \dim(C)C$, 其中 C 是荷电共轭矩阵 (charge conjugation), $C_{V,W} = \delta_{V,\bar{W}}$, 由此得证。详细证明可参考 [33]。

这里我们给出两种常见且重要模张量范畴的例子

例 2.5: 1. 点态范畴 $C(L, q)$: L 是一个有限阿贝尔群, $q : L \mapsto \mathbb{C}^\times$ 是一个非退化二次型。

- 带状结构: $\theta_\ell = q(\ell)$.
- 模张量范畴结构: $S_{a,b} = \frac{q(ab)}{q(a)q(b)}$ 非退化. 例子: $\text{Sem} = C(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, q)$ 其中 $q(\ell) = i^{\ell^2}$ for $\ell \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

例 2.6: 量子群范畴 $C(\mathfrak{g}, k)$: \mathfrak{g} 是简单李代数, k 是一个正整数对应于量子群所取的级数。下面是其一些精细的模张量范畴结构, 为了更加直观这里我们用一列具体例子来说明, 我们取 D 型李代数 $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2r)$, 级数为 $2r$, 相应的量子群范畴我们记为 C_r , 可参考 [36]:

- 内积空间里的正交基: $(\mathbb{R}^r, (\cdot | \cdot))$: $\{e_1, \dots, e_r\}$.
- 正根集合 (The set of positive roots): $\Delta_+ = \{e_j \pm e_k \mid 1 \leq j < k \leq r\}$.
- 根格 (Root lattice): \mathfrak{Q} , 余根格 (Coroot lattice): \mathfrak{Q}^\vee .
- 正根半求和 (Half sum of positive roots): $\rho = (r-1)e_1 + (r-2)e_2 \cdots + e_{r-1}$.

- 根本权重 (Fundamental weights): $\omega_j = \sum_{i=1}^j e_i, 1 \leq j \leq r-2; \omega_{r-1} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{r-1} e_i - \frac{1}{2} e_r, \omega_r = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r e_i$
- 对偶 Coxeter 数 (Dual Coxeter number): $h^\vee = 2r - 2$ 。
- 控制权重 (The set of dominant weights): Φ_+ , 权重格 (Weight lattice): \mathfrak{Q} 。
- 根本凹室 (The fundamental alcove) \mathfrak{A}_r 和 C_r 中的简单对象一一对应。

$$\mathfrak{A}_r = \{\lambda \in \Phi_+ : (\lambda|e_1 + e_2) \leq 2r\} = \text{Irr}(C_r). \quad (2.10)$$

- 量子系数 (Quantum parameter): $q = \exp\left(\frac{\pi i}{(2r+h^\vee)}\right) = \exp\left(\frac{\pi i}{4r-2}\right)$ 。
- 简单对象的扭转:

$$\theta_\lambda = q^{(\lambda| \lambda + 2\rho)}, \quad \forall \lambda \in \mathfrak{A}_r. \quad (2.11)$$

- 第一中央电荷 (First central charge):

$$\xi_1(C_r) = \exp\left(\frac{\pi i r^2}{4}\right). \quad (2.12)$$

- S -矩阵: (记 Weyl 群为 W , $\epsilon(w)$ 表示群元素 $w \in W$ 的符号, $\lambda, \mu \in \mathfrak{A}_r$)

$$S_{\lambda, \mu} = \frac{\sum_{w \in W} \epsilon(w) q^{2(\lambda + \rho|w(\mu + \rho))}}{\sum_{w \in W} \epsilon(w) q^{2(\rho|w(\rho))}} \quad (2.13)$$

定义 2.20: 我们在模张量范畴上定义酉结构:

- \dagger 结构: $\dagger : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ 是一个自反的反线性共变函子, 对对象作用恒等。
- 兼容性: $(f \circ g)^\dagger = g^\dagger \circ f^\dagger, (f \otimes g)^\dagger = f^\dagger \otimes g^\dagger, (f^\dagger)^\dagger = f, (f^*)^\dagger = (f^\dagger)^*$ 。
- 酉结构: 每个 Hom 空间都是具有 C^* 范数的希尔伯特空间, 满足 $\|f \circ g\| \leq \|f\| \|g\|, \|f \circ f^\dagger\| = \|f\|^2$
- f 被称为酉 if $f^\dagger \circ f = f \circ f^\dagger = id$, \mathcal{C} 是一个酉模张量范畴 (unitary modular category) 如果 \mathcal{C} 是一个非退化的辫子融合范畴, 且所有辫子和扭转都是酉的。

注释 2.3. 如果一个酉的辫子融合范畴 \mathcal{C} 是非退化的, 那么存在唯一的球面结构 (或带状结构) 使得 \mathcal{C} 是模张量范畴, 参考 [37]。

定义 2.21: 在给定一个模张量范畴 \mathcal{C} 的情况下, 定义一个对角矩阵 T -矩阵为 $T_{V,V} = \theta_V$ 。归一化的 S 和 T 给出了模群 $SL(2, \mathbb{Z})$ 的一个射影表示 [31]^{Section 3} 和 [33]。这一对 (S, T) 被称为 \mathcal{C} 的模数据。

已知的模张量范畴模数据满足的关系如下 [38]^{Section II}, 关于更详细的介绍和分类可参考 [38]。很多数论结果来自于文献 [34, 39-41]。

- S, T 都是对称复矩阵, 指标为 $i, j = 1, \dots, r$ 。
- T 是酉的, 对角矩阵, 且 $T_{11} = 1$ 。

- $S_{11} = 1$ 。令 $d_i = S_{1i}$ 以及 $\delta = \sqrt{\sum_{i=1}^r d_i d_{\bar{i}}}$ 。那么: (S^\dagger 是共轭转置)

$$S S^\dagger = \delta^2 \text{id}, \quad (2.14)$$

并且 $d_i \in \mathbb{R}$ 。

- S_{ij} 是域 $\mathbb{Q}_{\text{ord}(T)}^2$ 中的循环整数 (cyclotomic integer), $\frac{S_{ij}}{S_{1j}}$ 对任意 i, j 都是循环整数。并且存在一个 j 使得对任意的 i 有 $\frac{S_{ij}}{S_{1j}} \geq 1$ 。
- η 是模张量范畴的中心电荷 (central charge), C 是电荷共轭矩阵, 有:

$$\begin{aligned} S^4 &= \delta^4 \text{id} (S^2 = \delta^2 C) \\ (T^{-1} S)^3 &= \delta \eta S^2 \\ (ST)^3 &= \eta^{-1} \end{aligned} \quad (2.15)$$

- δ 是循环整数。 $\frac{\delta^5}{\text{ord}(T)}$ 是一个代数整数 (algebraic integer), 同时也是一个循环是整数。 $\frac{\delta}{d_i}$ 是循环整数。
- Verlinde 公式:

$$N_k^{ij} = \frac{1}{\delta^2} \sum_{l=1}^r \frac{S_{li} S_{lj} \overline{S_{lk}}}{d_l} \in \mathbb{N} \quad (2.16)$$

并且

$$N_1^{ij} = C_{ij} \implies N_1^{\bar{i}\bar{j}} = \delta_{i,j} \quad (2.17)$$

- 第 n 个 Frobenius-Schur 指标 (indicator), 对第 i 个简单对象有:

$$\nu_n(i) = \delta^{-2} \sum_{j,k} N_i^{jk} (d_j \theta_j^n) \overline{(d_k \theta_k^n)} \quad (2.18)$$

是循环整数, 且导数 (conductor) 整除 n 和 $\text{ord}(T)$ 。第一个 Frobenius-Schur 指标满足 $\nu_1(i) = \delta_{1,i}$, 第二个 Frobenius-Schur 指标满足 $\nu_2(i) = 0$ 如果 $i \neq \bar{i}$ 。且 $\nu_2(i) = \pm 1$, 当 $i = \bar{i}$ 。

- 扭转、融合系数和 S 矩阵元素满足平衡方程。

$$S_{ij} = \sum_k N_k^{ij} \frac{\theta_i \theta_j}{\theta_k} d_k \quad (2.19)$$

设 \mathcal{C} 是一个酉模张量范畴, 接下来我们固定一些符号并回顾在 \mathcal{C} 中常用的一些图形计算恒等式。

2.1.6 一些常用记号

- $-$: 对偶函子 (dual functor), 对偶对象 (dual object) 和函子 (dual functor) 表示为 \bar{X}, \bar{f} ,

- \dagger : 酉结构中的反线性协变自反函子,
- d_X : 对象 X 的量子维数 (quantum dimension),
- μ : C 的全局维数 (global dimension), $\mu = \dim(C) = \sum_{V \in \text{Irr}(C)} d_V^2$,
- δ : μ 的正平方根,
- Ω : Kirby 颜色/标记 (Kirby colour) $\sum_{V \in \text{Irr}(C)} d_V V$,
- θ_X^\pm : X 的扭转 (twist),
- $\theta_X^{\pm 1/2}$: 选取一组扭转系数的平方根, 使得 $\theta_V^{1/2} = \theta_{\bar{V}}^{1/2}$ 对 $V \in \text{Irr}(C)$, 并定义 $\theta_{V \oplus W}^{1/2} = \theta_V^{1/2} Id_V \oplus \theta_W^{1/2} Id_W$, 特别的, $\theta_{\bar{V}}^{1/2} = \overline{\theta_V^{1/2}}$,
- p^\pm : $p^\pm = \sum_{V \in \text{Irr}(C)} \theta_V^\pm d_V^2$, $p^+ p^- = \mu$,
- η : $\eta = \frac{p^+}{\delta}$, $\eta^{-1} = \frac{p^-}{\delta}$ 。

接下来我们介绍一些图形计算相关的符号。我们规定图形计算的方向是从上至下。

- 正 (负) 扭转分别用空心 (实心) 圆表示。对应的扭转平方根则用空心 (实心) 菱形符号表示, 便于简化, 见图2.3。

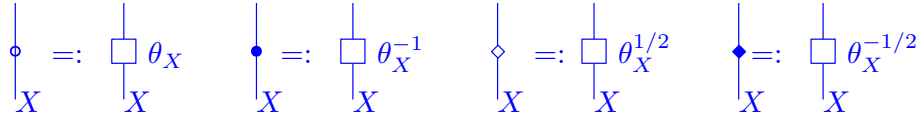


图 2.3 扭转图示

- 如果平凡对象 $1 \in X$ 并且其重数为 1, 我们使用连接到标记为 X 的线末端的空心方框, 表示从 X 投影到 1 的映射, 或从 1 嵌入到 X 的映射, 见图2.4。

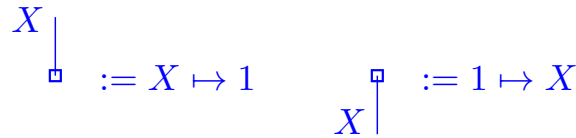


图 2.4 投影和嵌入图示

- \dagger 结构通过垂直反射给出。

2.1.7 图形计算恒等式

我们使用红色的线表示线条的染色/标记为 Ω 。

- 扭转性质 (twist property): $\theta_{X \otimes Y} = c_{Y,X} c_{X,Y} \theta_X \otimes \theta_Y$, 见图2.5。
- Ω 的切割性质 (cutting property), 见图2.6。
- Ω 的把手滑动 (handle slide) 性质, 见图2.7。

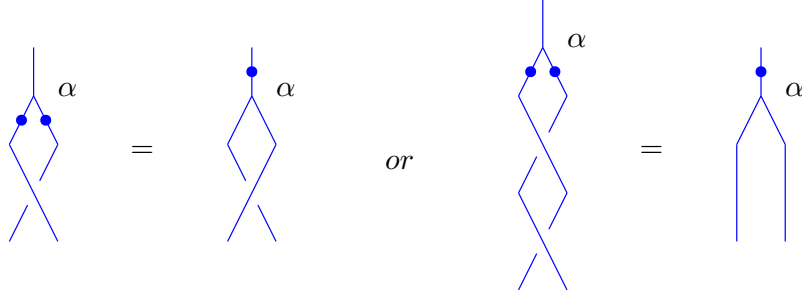


图 2.5 扭转性质

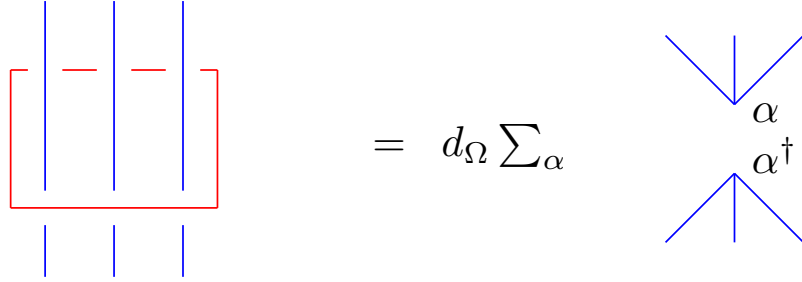


图 2.6 切割性质

2.2 关于规范过程 (gauging process) 的初步知识

有关 (酉) G -交叉辫子融合范畴 (G-crossed braided fusion category) 的更多详细信息, 可参考 [42]^{Appendix 5}, [19]^{Sec. 4} 以及 [18]。

定义 2.22: 一个 (酉) G -交叉辫子融合范畴 \mathcal{C}_G^\times 是一个具有以下结构的 (酉) 融合范畴: (见 [19]^{Def. 4.41})

- G 在 \mathcal{C}_G^\times 上的 (酉) 作用。
- 忠实的 G 分次 $\mathcal{C}_G^\times = \bigoplus_{g \in G} \mathcal{C}_g$ 。
- G -辫子: (酉) 自然同构

$$c_{X,Y} : X \otimes Y \rightarrow g(Y) \otimes X, \quad g \in G, X \in \mathcal{C}_g, Y \in \mathcal{C}_G^\times.$$

- 兼容性 (compatibility):
 1. $g(\mathcal{C}_h) = \mathcal{C}_{ghg^{-1}}, \quad \forall g, h \in G,$
 2. $g(c_{X,Y}) = c_{g(X),g(Y)}, \quad \forall g, h \in G,$
 3. $c_{X,Y}$ 对 X, Y 都具有函子性 (functorial)。
 4. 下面的箭图2.8对任意 $g, h \in G, X \in \mathcal{C}_g$ 和 $Y \in \mathcal{C}_h$ 交换。

定义 2.23: 设 \mathcal{C} 是一个融合范畴, G 是作用在 \mathcal{C} 上的有限群。对于任意 $g \in G$, 令 $\rho_g \in \underline{\text{End}}(\mathcal{C})$ 表示相应的作用, 对于任意 $g, h \in G$, 令 $\gamma_{g,h}$ 表示同构 $\rho_g \circ \rho_h \cong \rho_{gh}$ 。 \mathcal{C} 的 G -等变范畴 \mathcal{C}^G 定义为:

- **对象 (Object):** G 等变对象是 \mathcal{C} 中的对象 X , 并带有同构 $u_g : \rho_g(X) \cong X$, 使

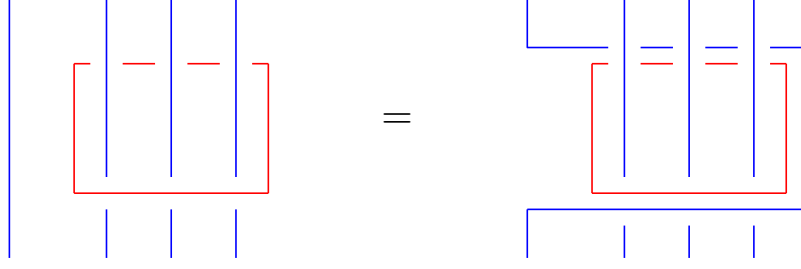


图 2.7 把手滑动性质

$$\begin{array}{ccc}
 X \otimes Y \otimes Z & \xrightarrow{c_{X,Y \otimes Z}} & g(Y \otimes Z) \otimes X \\
 c_{X,Y} \otimes \text{id}_Z \downarrow & & \downarrow \parallel \\
 g(Y) \otimes X \otimes Z & \xrightarrow{\text{id}_{g(Y)} \otimes c_{X,Z}} & g(Y) \otimes g(Z) \otimes X
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 X \otimes Y \otimes Z & \xrightarrow{c_{X \otimes Y, Z}} & gh(Z) \otimes X \otimes Y \\
 \searrow \text{id}_X \otimes c_{Y,Z} & & \nearrow c_{X, h(Z)} \otimes \text{id}_Y \\
 & X \otimes h(Z) \otimes Y &
 \end{array}$$

图 2.8 一些兼容性条件

得以下图表对所有 $g, h \in G$ 都交换：

$$\begin{array}{ccc}
 \rho_g(\rho_h(X)) & \xrightarrow{\rho_g(u_h)} & \rho_g(X) \\
 \gamma_{g,h}(X) \downarrow & & \downarrow u_g \\
 \rho_{gh}(X) & \xrightarrow{u_{gh}} & X
 \end{array}$$

- **态射 (Morphsim):** \mathcal{C} 中与 u_g 交换的态射。

我们参考了文献 [43], [44] 和 [19]^{Sec. 4} 并总结了一些关于 G -等变范畴的已知结果

- \mathcal{C}^G 是一个融合范畴。
- 如果 \mathcal{C} 是酉范畴，那么通过要求 u_g 是酉同构， \mathcal{C}^G 也是酉范畴 [18]。
- 如果 \mathcal{C} 是 G -交叉辫子融合范畴，则 \mathcal{C}^G 是一个辫子融合范畴，辫子结构 \tilde{c} 定义为下列复合映射：

$$X \otimes Y \xrightarrow{c_{X,Y}} g(Y) \otimes X \xrightarrow{u_g \otimes \text{id}_X} Y \otimes X$$

另外， \mathcal{C}_1 是模张量范畴 $\Leftrightarrow \mathcal{C}^G$ 是模张量范畴，其中 \mathcal{C}_1 是 \mathcal{C} 的平凡分次部分。

- $\dim(\mathcal{C}^G) = |G| \dim(\mathcal{C})$
- 简单对象由 $([X], \pi_X)$ 参数化，其中 $[X]$ 是 G 作用在 \mathcal{C} 简单对象上的轨道，而

π_X 是 G_X (X 的稳定子群) 的不可约射影表示。

- $\dim([X], \pi_X) = \dim(\pi_X) \dim_C(X) N_{[X]}$, 其中 $N_{[X]}$ 是轨道 $[X]$ 的大小

定义 2.24: [18] 设 \mathcal{C} 是具有全局对称性 (G, ρ) 的西模张量范畴, 规范过程由两步组成:

- **G -扩张 (G-extension):** 将 \mathcal{C} 扩张为 G -交叉辫子融合范畴 \mathcal{C}_G^\times 。
- **G -等变化:** 将 \mathcal{C}_G^\times 等变为新的西范畴 $\mathcal{C}_G^{\times, G}$ 。

注释 2.4. 第一步 G 扩张是最困难的, 有阻碍 (obstruction) 也有选择 (choices), 第二步是存在且唯一的。但如果想计算最终范畴里的精细数据, 只知道第一步的存在性是远远不够的。

下面我们简要介绍一下 [20, 45] 中对 G -扩张的抽象刻画, 顺便引进模范畴的概念。

定义 2.25: 一个在幺半范畴 \mathcal{C} 上的 **模范畴 (module category)** 是一个范畴 \mathcal{M} , 以及一个正和 (exact) 双函子 $*$: $\mathcal{C} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, 并且存在自然同构 $a_{X,Y,M} : (X \otimes Y) * M \rightarrow X * (Y * M)$ 和 $l_M : 1 * M \rightarrow M$, 对任意 $X, Y \in \mathcal{C}$ 和 $M \in \mathcal{M}$ 满足一些五边形方程相似的兼容性条件, 这里给出中间结合律约束, 图 2.9 来自于 [45]。

$$\begin{array}{ccc}
 & (X \otimes Y) * (M * Z) & \\
 a_{X,Y,M*Z} \nearrow & & \searrow a_{X \otimes Y, M, Z} \\
 X * (Y * (M * Z)) & & ((X \otimes Y) * M) * Z \\
 \downarrow 1 * a_{Y, M, Z} & & \uparrow a_{X, Y, M} * 1 \\
 X * ((Y * M) * Z) & \xrightarrow{a_{X, Y * M, Z}} & (X * (Y * M)) * Z
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 & (X * M) * (Z \otimes W) & \\
 a_{X, M, Z \otimes W} \nearrow & & \searrow a_{X * M, Z, W} \\
 X * (M * (Z \otimes W)) & & ((X * M) * Z) * W \\
 \downarrow 1 * a_{M, Z, W} & & \uparrow a_{X, M, Z} * 1 \\
 X * ((M * Z) * W) & \xrightarrow{a_{X, M * Z, W}} & (X * (M * Z)) * W
 \end{array}$$

图 2.9 中间结合律约束 (middle associativity constraints)

我们为了方便起见, 我们在这里只考虑融合环上的半单模范畴, 如果未加说

明即为左模范畴。

定义 2.26: 令 \mathcal{M} 是右 \mathcal{C} -模范畴, \mathcal{M}^{op} 是 \mathcal{M} 的反范畴。那么 \mathcal{M}^{op} 是 \mathcal{C} 的左模范畴, 作用是:

$$X \odot M := M * \bar{X}. \quad (2.20)$$

相似的, 如果 \mathcal{N} 是左 \mathcal{C} -模范畴, 那么 \mathcal{N}^{op} 是右 \mathcal{C} -模范畴, 作用为:

$$N \odot X := \bar{X} * N \quad (2.21)$$

定义 2.27: 令 $F : \mathcal{M} \times \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{A}$ 是一个双可加函子。我们称 F 是 \mathcal{C} -平衡 (balanced), 如果存在一族自然同构:

$$b_{M,X,N} : F(M * X, N) \cong F(M, X * N), \quad (2.22)$$

$a_{X,Y,N}^{-1} \circ b_{MX,Y*N} \circ b_{M*X,Y,N} \circ a_{M,X,Y} = b_{M,X \otimes Y,N}$ 对任意 $M \in \mathcal{M}, N \in \mathcal{N}, X, Y \in \mathcal{C}$ 都交换。

下面通过通用性质 (universal property) 来定义模范畴的张量积。

定义 2.28: 右 \mathcal{C} -模范畴 \mathcal{M} 和左 \mathcal{C} -模范畴 \mathcal{N} 的张量积 $\mathcal{M} \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{N}$ 是一个阿贝尔范畴和一个 \mathcal{C} -平衡函子:

$$B_{\mathcal{M},\mathcal{N}} : \mathcal{M} \times \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M} \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{N} \quad (2.23)$$

且 $B_{\mathcal{M},\mathcal{N}}$ 对任意阿贝尔范畴 \mathcal{A} 都诱导了如下两个函子范畴的等价性:

$$\text{Fun}_{bal}(\mathcal{M} \times \mathcal{N}, \mathcal{A}) \cong \text{Fun}(\mathcal{M} \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{N}, \mathcal{A}) \quad (2.24)$$

定义 2.29: 一个 $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ 双模范畴 \mathcal{M} 被称为可逆的, 如果存在双模等价:

$$\mathcal{M}^{op} \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{M} \cong \mathcal{D}, \quad \mathcal{M} \boxtimes_{\mathcal{D}} \mathcal{M}^{op} \cong \mathcal{C}. \quad (2.25)$$

定义 2.30: 我们称融合范畴 \mathcal{C}, \mathcal{D} Morita 等价, 如果存在 \mathcal{C} -模范畴, 和张量范畴等价 $\mathcal{D}^{op} \cong \text{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M}, \mathcal{M})$ 。

注释 2.5. 可以证明可逆的 $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ -双模范畴可以看作是 \mathcal{C}, \mathcal{D} 的 Morita 等价 [20]。

定义 2.31: 辫子融合环的 Picard 群类 (groupoid) $\underline{\text{Pic}}(\mathcal{C})$ 有如下结构:

- 0-态射: 辫子融合范畴 \mathcal{C} ,
- 1-态射: 可逆 \mathcal{C} -模范畴 (因为有辫子结构只需要一侧),
- 2-态射: 模范畴等价函子 (Module equivalences),
- 3-态射: 模自然变换 (Module natural isomorphisms)。

因此一个 \mathcal{C} 的 G -扩张 $\mathcal{D} = \bigoplus_{g \in G} \mathcal{D}_g$ ($\mathcal{C} = \mathcal{D}_e$) 首先定义了一个群同态 $G \rightarrow \text{Pic}(\mathcal{C})$. [20] 给出以下定理。

定理 2.32: 扩张可由以下函子的高维数据刻画:

$$\underline{\underline{G}} \mapsto \underline{\underline{\text{Pic}(C)}} \quad (2.26)$$

证明 从群同态出发 $\rho : G \mapsto \text{Pic}(C)$

- 结合态射的存在性即良定义的融合规则取决于 $o_3(\rho) \in H^3(G, \text{Inv}(C))$,
- 一旦障碍 $o_3(\rho)$ 是平凡的, 那么可能的融合规则由 $H^2(G, \text{Inv}(C))$ 刻画。
- 结合态射结合律是否满足五边形法则给出障碍 $o_4(\rho) \in H^4(G, \mathbf{C}^\times)$,
- 一旦 $o_4(\rho)$ 平凡, 那么可能的结合态射由 $H^3(G, \mathbf{C}^\times)$ 刻画。

■

2.3 平面代数的背景知识

2.3.1 平面代数基础定义

平面代数由 Vaughan Jones 在 [46] 中引入, 作为子因子标准不变量的公理化。

定义 2.33: 一个 (有阴影) 平面缠结 ((shaded) planar tangle) 有以下结构组成 (见图 2.10)

- 有限多个输入圆盘,
- 一个输出圆盘,
- 不相交曲线,
- 每个圆盘边界上有带 \star (或 $*$) 标记的线段,
- 棋盘染色 (对有阴影的平面代数)。

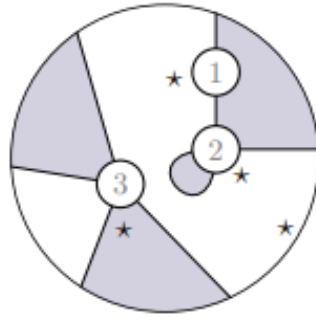


图 2.10 有阴影的平面缠结

定义 2.34: (有阴影) 的平面 operad ((shaded) planar operad) 由所有 (阴影) 平面缠结组成, 并考虑同痕意义下的同构和复合运算, 见图 2.11.

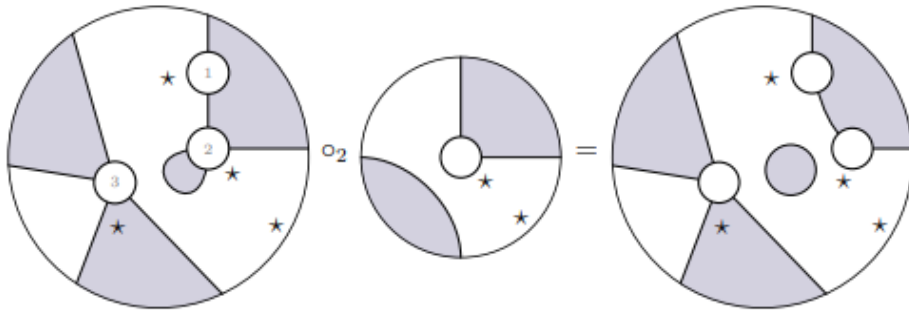


图 2.11 平面 operad

定义 2.35: 一个 (阴影) 平面代数 ((shaded) planar algebra) 有以下结构构成

- 线性空间 $(P_{n,\pm})_{n \geq 0}$, 对应于边界交点数为 $2n$ 的输入圆盘, 且标记线段在无阴影/有阴影的区域。
- 平面缠结作用 Z 由多线性映射给出
- Z 是同痕不变的, 有单位, 且自然的: $Z(T \circ S) = Z(T) \circ Z(S)$

比如, 如果我们取图2.10中的平面缠结 T , 那么 $Z(T)$ 对应多线性映射 $P_{1,+} \times P_{2,+} \times P_{2,-} \rightarrow P_{3,+}$

定义 2.36: (阴影) 平面代数被称为 (子) 因子平面代数, 如果具有

- 有限性: (可估值 (evaluable)) $\dim(P_n) < \infty$ 并且 $\dim(P_0) = 1$,
- 对合的: P_{2n} 上存在反线性对合 Θ_1 , 使得

$$\Theta_1(T)(n_1, \dots, n_k) = T(\Theta_1(n_1), \dots, \Theta_1(n_k)). \quad (2.27)$$

即与缠结的反射相容 (这里我们仍用 Θ_1 来代表缠结上的反射/反定向的作用,

- 正性: 线性空间上有自反和正定的内积,
- 球面性: 闭合图的值在球面同痕下是不变的。

注释 2.6. 为了简化平面代数的表示并进行一些技术性限制, 我们做如下约定:

- 弧线只与输入圆盘的下边界和输出圆盘的下边界相交, 并且它们与输出圆盘的边界正交穿过。
- 圆盘的边界和弧线都是光滑的。图中非光滑的角落仅为简化图形而出现。
- 我们常常省略输出圆盘。
- 若符号 “*” 或 “\$” 在平面图的左侧, 则省略不写。

一些特殊的平面缠结 (planar tangle) 给出了平面代数的重要结构, 我们在这里着重列举一些。

定义 2.37: $\{P_{2n}\}_{n \geq 0}$ 上的代数结构由下面的平面图 (图2.12) 给出 (它们是 [47] 中定义的一般分级乘积的特殊情况), 其中 $x_1 \in P_{2(n_1+n_2)}$, $x_2 \in P_{2(n_2+n_3)}$, $y \in P_{2n}$, $z \in P_{2m}$ 。特别的, 如果 $n_1 = n_2 = n_3 = n$, 左下图定义了 P_{2n} 上通常的乘法结构, 记为 $x_1 x_2$ 。如果 $n_1 = n_2$, 我们记右下图为 $y \otimes z$ 。

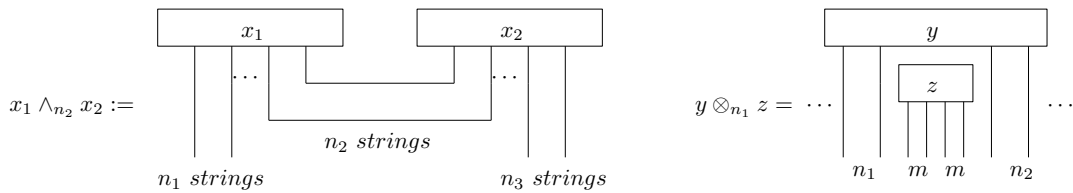


图 2.12 平面代数上的复合和张量积

定义 2.38: 一个 (阴影) 平面代数上的酉结构是 P_n 上的反线性对合 Θ_1 , 它与缠结的反射相容。并且以下配对定义了一个正定的内积, 见图2.13。

注释 2.7. 给定一个因子平面代数, 在通常乘法结构下 (定义2.37) 容易得到 P_{2n} 是 C^* -代数, 而有限维的 C^* 代数都是半单的, 即同构于多重矩阵代数。我们可以将定义2.36中的正定性去掉, 其中图2.13中的内积可被非退化的迹代替 (容易验证满足迹的条件), 并要求其在幂零元上的取值为零, 那我们仍然可以得到半单性。我

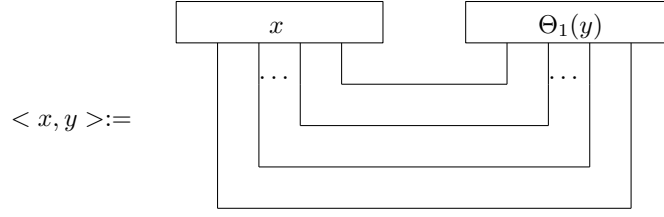


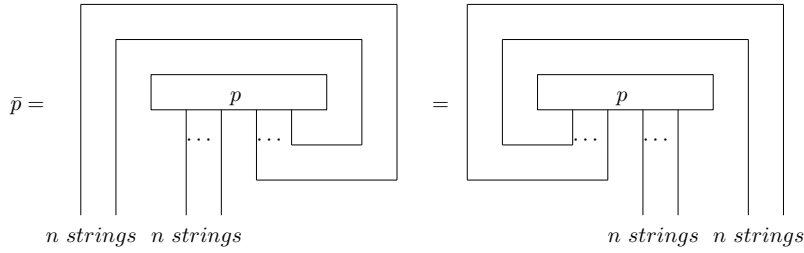
图 2.13 平面代数上的酉结构和内积

们称满足这样性质的平面代数为**半单平面代数**。

定义 2.39: 假设 \mathcal{P} 是一个因子 (半单) 平面代数 (定义 2.36), 我们称 $p \in P_{2n}$ 是一个**投影 (幂等元)**, 如果其满足:

$$p^2 = p = \Theta_1(p). \quad (2.28)$$

给定 $p \in P_{2n}$ 是一个投影 (幂等元), 那么 p 的**对偶投影 (幂等元)** $\bar{p} \in P_{2n}$ 由下图 2.14 给出 (相等由 2π 旋转同痕可得): 我们称 p 是极小的, 如果 $\dim_{\mathbb{k}}(pP_{2n}p) = 1$ 。


 图 2.14 对偶投影 \bar{p}

注释 2.8. 在半单平面代数中, 任何幂等元都可以写成极小幂等元的直和。

定义 2.40: 我们称投影 (幂等元) $p \in P_{2n}, q \in P_{2m}$ 等价或者同构, 记为 $p \cong q$, 如果存在 $u \in P_{2(n+m)}$, 满足 $u \wedge_m \Theta_1(u) = p$ 且 $\Theta_1(u) \wedge_n u = q$

定义 2.41: 我们称因子/半单平面代数 \mathcal{P} 是**有限深度**的, 如果存在正整数 $k \geq 1$, 当 $n > k$ 时, P_{2n} 中不再出现新的投影/幂等元, 即都与之前的等价。满足该性质最小的 k 称为 \mathcal{P} 的**深度**。

这里我们的所有曲线都是没有标记的, 事实上, 平面代数可以自然的推广到线上有标记有定向的情况。

定义 2.42: 我们定义一个**对合标记集合**, 即一个有限集合 $\mathcal{L} = \{Z_i\}_{1 \leq i \leq l}$, 并且存在对合 $\bar{Z}_i \in \mathcal{L}$ 。我们记 \mathcal{L} 中所有有限长度的字符 Z 组成的集合为 Λ 。

定义 2.43: 现在我们让平面代数中所有的曲线都有定向和标记, 定向反向对应标记集合的对合, 曲线的标记诱导了输入圆盘边界上交点的标记。因此每个输入圆盘的边界将有 Λ 中的元素即 \mathcal{L} 中的字符标记, 字符的顺序由 $\$/\ast$ 开始逆时针读取。我们称这样的平面代数为**带标记和定向的平面代数**

所有其他的结构都可以类似的在带标记和定向的平面代数上定义。只需要注

意以下几点:

- 我们定义 θ_1 在 Λ 上的作用:

$$\theta_1(Z_1 Z_2 \cdots Z_{2k}) = \bar{Z}_{2k} \bar{Z}_{2k-1} \cdots \bar{Z}_1 \quad (2.29)$$

于是我们需要如下兼容性满足:

$$\theta_1(T)(Z_1, \dots, Z_k) = T(\theta_1(Z_1), \dots, \theta_1(Z_k)). \quad (2.30)$$

- 代数结构及内积的定义中需要两边标记吻合 (互为对合) 值才不等于 0。

之后的讨论中除非特殊说明, 我们的平面代数都是有定向和标记的, 为简便起见, 我们仅称其为平面代数。在之后的章节我们会重点研究有阴影和无阴影之间的关系, 所以有无阴影会重点区分。

2.3.2 平面代数上的辫子结构

在 [48] 中, 作者讨论了某些平面代数上的辫子结构, 在他们的情况中, 辫子结构满足部分辫子性质 (partial braiding), 意即在输入圆盘之外的平面代数图在三维同痕 (Isotopy) 意义下等价。然而, 通过输入圆盘的同痕会引入额外的因子 [48]^{Thm. 3.2}。

这里我们定义无阴影平面代数上的广义辫子概念。

定义 2.44: 无阴影平面代数上的 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 辫子是一列辫子使得,

- 有 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 平面代数作用 ρ 在 $P_{n,Z}$ 上, 换言之, 作用尊重所有平面代数结构 (包括辫子结构)。

$$\rho(T)(Z_1, \dots, Z_k) = T(\rho(Z_1), \dots, \rho(Z_k)). \quad (2.31)$$

- 输入圆盘之外, 配分函数 Z 在带框架三维同痕 (framed three dimensional isotopy) 下不变。
- 弧线可以在输入圆盘上方进行同痕变换, 但在输入圆盘下方进行同痕变换会引入输入圆盘上的作用 ρ 。
- 当底层是酉平面代数时, 辫子也是酉的。

为了构造带有 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 辫子结构的平面代数, 只需定义某些生成缠结并验证一系列关系。可以参考 [33, 46, 49], 这里我们简要总结构造过程:

首先定义我们定义一些生成元缠结在 Z 下对应的多线性变换, 即相应的赋予映射, 下图 2.15 给出了一组生成缠结, 这里我们省略了张量积对应的缠结 (图 2.37), 它们也是生成元:

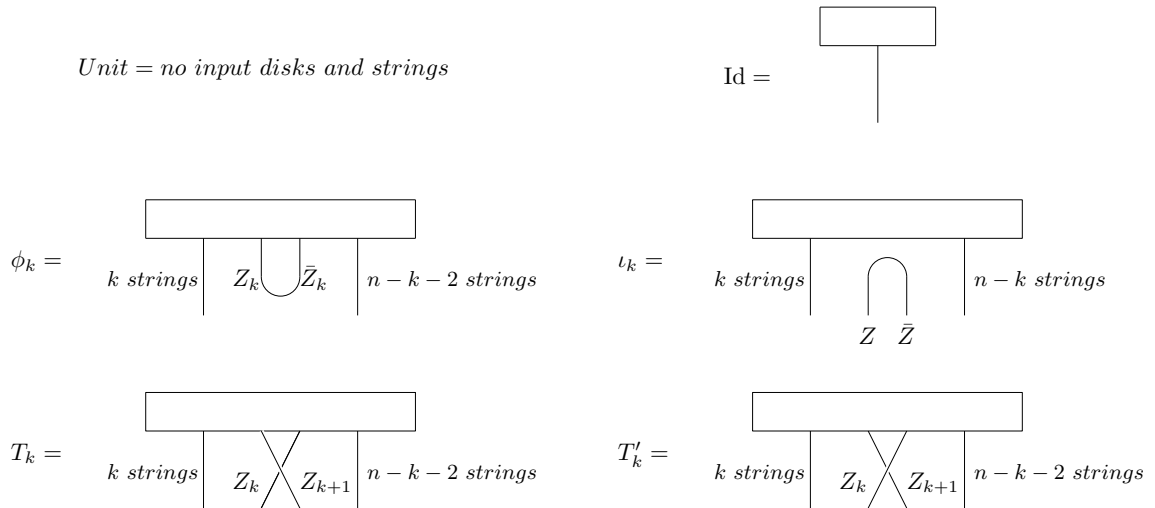


图 2.15 平面代数的一组生成缠结

很显然的, 我们定义的生成缠结依赖于 n, k 。为了简便起见在之后论文中, 我们会省略 n 的信息。

接着我们定义一般平面缠结 (generic planar tangle), 使得其中奇异点的数量 (帽形: l_k 、杯形: ϕ_k 、输入圆盘的中心、辫子交叉点: T_k) 是有限的, 并且相对于高度函数它们是不同的, 见图2.16。

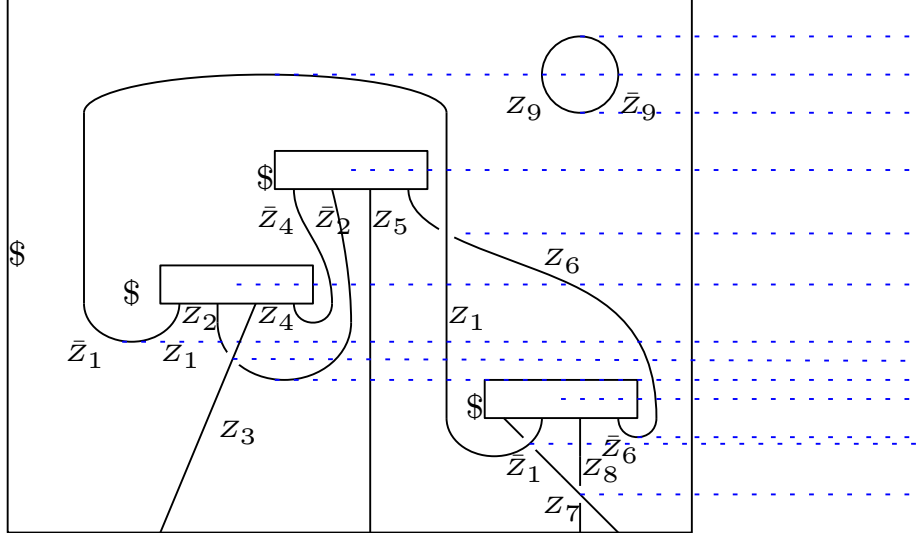


图 2.16 一般平面缠结 T

然后, 任何平面缠结都可以通过同痕变形成为一个一般缠结, 从而可以使用定义的生成元赋予映射: 考虑一系列嵌套的长方形, $R_0 \subset R_1 \subset \dots \subset R_N$ 。这列长方形满足以下性质,

- R_0 在所有奇异点的上方, R_N 是输出圆盘对应的长方形, 长方形上与曲线的交点都在下侧的边上。
- R_i 在 R_{i+1} 的内部。
- 考虑投影映射 P_y 将缠结映到相应的 y 方向上, $P_y(R_{i+1}/R_i)$ 有且仅有一个点来自平面缠结中奇异点的投影。

给予我们对一般平面代数的假设, 容易证明这样的长方形总是存在的, 可以观察到, 每个 R_i/\mathring{R}_{i-1} 都是生成缠结 ($R_{-1} = \emptyset$), 因此我们可以通过对生成缠结按顺序依次复合得到一般缠结的赋予映射。我们用图2.17来更直观的说明对一般平面缠结的赋予映射如何通过生成缠结赋予映射的复合给出: R_0 是单位 (Unit) 缠结, R_1/R_0 队对应 l_1 , R_2/R_1 对应张量积缠结, R_3/R_2 对应辫子缠结 T_2 , R_4/R_3 对应张量积缠结, R_5/R_4 和 R_6/R_5 都对应 ϕ_0 (不一样的 n)。

由于不同的一般缠结可能在同痕意义下等价, 所以为确保我们的赋予映射是良定义的, 下面我们来探讨生成缠结之间需要满足的关系。

输入圆盘之外带框架三维同痕意义下的等价一般平面代数可以通过以下变换彼此得到:

- Reidemeister 变换, 见图2.18,

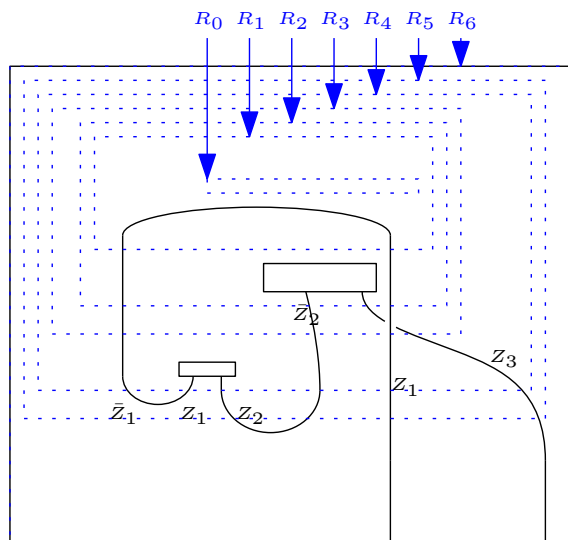


图 2.17 一般平面缠结写成生成缠结的复合

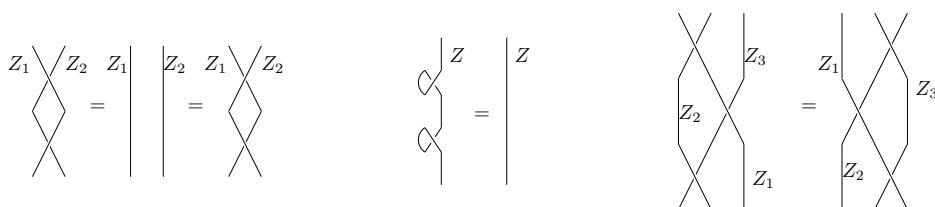


图 2.18 Reidemeister 变换

- 根据高度函数上的顺序，改变两个非输入圆盘奇异点的高低，见图2.19,

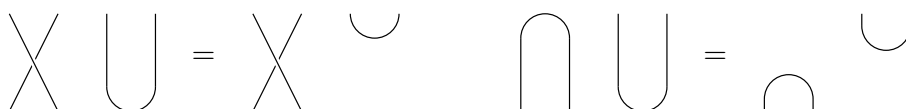


图 2.19 改变奇异点高度

- 局部极值点对的生成或湮灭，见图2.20,
- 沿着帽形和杯形移动辫子奇点，见图2.21。

以及涉及输入圆盘的等价性：

- 根据高度函数上的顺序，改变两个涉及输入圆盘的奇异点的高低，见图2.22,

- 2π 旋转不变性，见图2.23,
- 弧线可以在输入圆盘上方进行同痕变换，但在输入圆盘下方进行同痕变换会引入输入圆盘上的作用 ρ , 见图2.24。

通过这些变化我们会得到一系列生成元缠结赋予映射之间的关系，这些关系确保了赋予的映射是良定义的。

由上述定义，不难看出我们可以将 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 换成任意的有限群，并从抽象的层面上定义平面代数上的 G 辫子结构，由于一般的 G 跟本文关系不大，我们不做讨论。

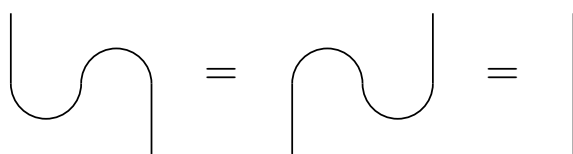


图 2.20 杯型帽型奇异点相互抵消



图 2.21 辫子奇异点沿杯型滑动

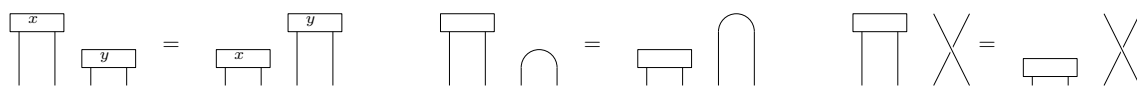


图 2.22 改变涉及输入圆盘奇异点的高度

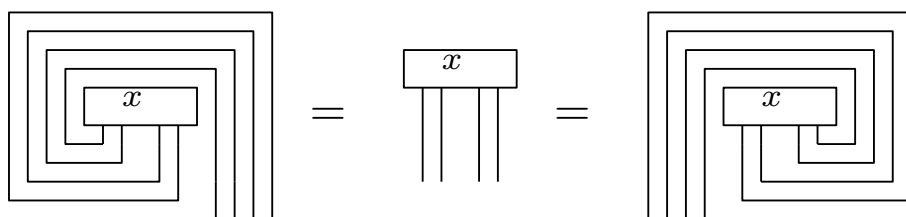


图 2.23 2π 旋转不变

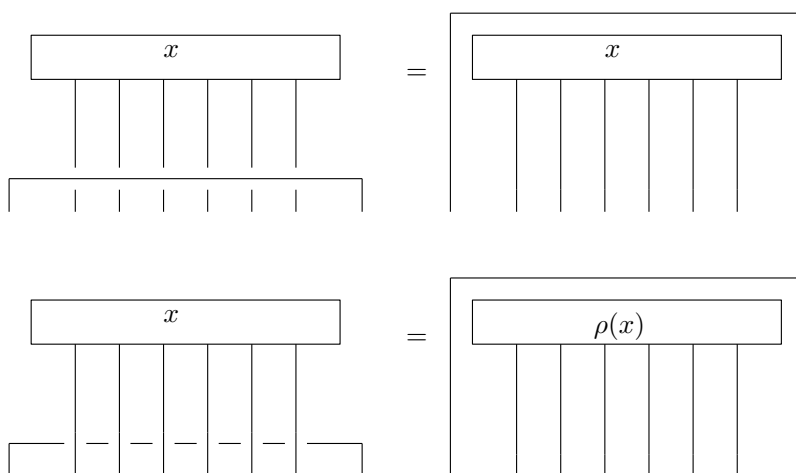


图 2.24 弧线同痕穿过输入圆盘

不过它对未来关于一般置换规范理论的研究是很必要的。

2.4 平面代数与张量范畴的关系

下面我们简要介绍平面代数与范畴论的关系，这里我们将主要讨论如何从一个（带有 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 辫子）有限深度半单平面代数得到（ $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 交叉辫子）融合范畴。感兴趣的读者可参考以下文献：

- 有限深度无阴影平面代数与融合范畴 [50]^{Sec. 2}, [48]^{Sec. 4.1},
- 阴影平面代数与 2-范畴 [51]。

定义 2.45: 给定一个有限深度因子（半单）平面代数 \mathcal{P} ，我们定义如下范畴 \mathcal{C} ：

- **对象**： \mathcal{P} 中投影（幂等元）的形式有限直和，平凡对象对应于空图。
- **态射**：如果 $p \in P_{2n}, q \in P_{2m}$ ，我们定义 p 到 q 的态射空间为，

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(p, q) := \{x \in P_{n+m} \mid x = pxq\} \quad (2.32)$$

注意这里的乘法由定义 2.37 给出，该定义同时给出了态射之间的复合。特别的，极小投影（幂等元）给出 \mathcal{C} 中的简单对象。

- **张量积**：对象和态射的张量积都由定义 2.37 给出。
- **刚性**：刚性由定义 2.39 和平面代数平面同痕不变性（局部极值点对的生成或湮灭）给出。
- **† 结构**由反线性对合 θ_1 给出，（容易验证 $\theta_1(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(p, q)) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(q, p)$ ）特别的，如果 \mathcal{P} 有正定的内积，态射空间 $\mathrm{End}(p)$ 是一个有正定迹的有限维 $*$ -代数即为有限维 C^* 代数（可以实现成为在自己身上作用的算子）。
- **$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 交叉辫子结构**：由平面代数上的 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 辫子结构给出，兼容性可由平面代数作用的兼容性和部分辫子结构的拓扑同痕等价性质得到。
- **球面性**：有平面代数上的球面性给出。

这里我们给出一些平面代数和范畴之间性质的等价性：

- $\dim(P_0) = 1$ 对应于平凡对象是简单的。
- $\dim(P_n) < \infty$ 对应于态射空间都是有限维。
- 有限深度对应于有限多个简单对象的等价类。
- 平面代数的半单性给出范畴的半单性。

综上容易证明范畴 \mathcal{C} 是一个融合范畴，如果平面代数有 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 辫子结构，那么 \mathcal{C} 是一个 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 交叉辫子融合范畴，并且生成元对象（单线对应的投影）在 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 作用下不变。

注释 2.9. 如果 \mathcal{C} 是一个融合范畴，我们借助 \mathcal{C} 的生成元和态射空间的信息，不难定义一个带标记和定向的平面代数使得通过定义 2.45 我们重新得到 \mathcal{C} 。然而对 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 交叉辫子范畴，我们选取的生成元素要满足在 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 作用下不变，特别的我们可以

取

$$\omega = \sum_{V \in \text{Irr}(\mathcal{C}_1)} \dim(V)V \quad (2.33)$$

这里 \mathcal{C}_1 指的是 \mathcal{C} 非平凡分次的部分。

2.5 曲面映射类群的基本知识

这部分主要参考了 [52-53].

定义 2.46: 设 Σ 为一个可能带有穿孔和边界的曲面, $Homeo^+(\Sigma, \partial\Sigma)$ 为保持定向的同胚群, 且在边界 $\partial\Sigma$ 上限制为恒等映射. Σ 的 **映射类群 (mapping class group)**, 记作 $Mod(\Sigma)$, 定义为

$$Mod(\Sigma) = Homeo^+(\Sigma, \partial\Sigma) / isotopy .$$

定义 2.47: 固定曲面上的一个简单闭曲线 γ , 关于 γ 的 **右 (左) Dehn 扭转 (right (left) Dehn twist)**, 分别记作 T_γ (T_γ^{-1}), 是一个支持在 γ 的环形邻域 U 内的同胚的同痕类. 更准确地说, 设 $\psi : U \rightarrow \mathbb{R}/l_1\mathbb{Z} \times [0, l_2]$ 为一个保持定向的同胚, T_γ 是通过与仿射映射

$$(x, y) \mapsto (x \pm y \frac{l_1}{l_2}, y) .$$

共轭而得到的. 其中, $+$ 表示右 (或正) 扭转, $-$ 表示左 (或负) 扭转.

现在我们主要考虑没有穿孔的封闭曲面及其右 Dehn 扭转, 映射类群的表达 (presentation) 是已知的, 例如见 [54]. 下一个命题给出了 Dehn 扭转的许多有趣性质, 可以参考 [52]^{Chapter 3} 的证明.

命题 2.48: 设 γ_1, γ_2 为 Σ 中任意简单闭曲线的同痕类, 其几何交叉数为 $i(\gamma_1, \gamma_2)$. 对于 $f \in Mod(\Sigma)$, 我们有

- (a) $T_{f(\gamma_1)} = f T_{\gamma_1} f^{-1}$,
- (b) $f T_{\gamma_1}^k = T_{\gamma_1}^k f \iff f(\gamma_1) = \gamma_1$,
- (c) $i(\gamma_1, \gamma_2) = 0 \iff T_{\gamma_1} T_{\gamma_2} = T_{\gamma_2} T_{\gamma_1}$.

定理 2.49 ([52, 54]): 设 Σ_g 为没有穿孔的亏格 (genus) g 的封闭曲面, 则 $Mod(\Sigma_g)$ 由图 2.25 中所示的曲线 c_i ($0 \leq i \leq 2g$) 的 (左) Dehn 扭转生成. 生成元之间存在关系: 不相交关系 (远交换性)、辫子关系、链关系 (chain relation)、灯笼关系 (lantern relation) 和超椭圆关系 (hyperelliptic relation).

定义 2.50 ([52]): 设 ι_g 为图 1 中的超椭圆自同构, $SHomeo^+(\Sigma_g)$ 为 $Homeo^+(\Sigma_g)$

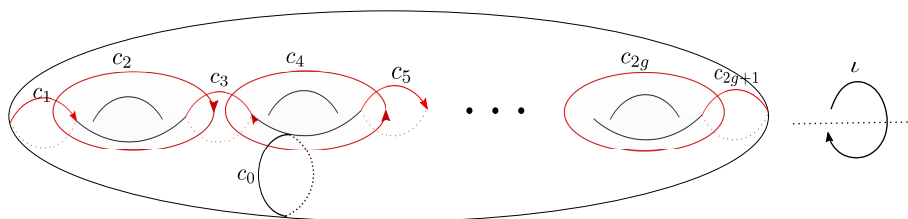


图 2.25 亏格 g 的闭曲面和一些简单闭曲线

中 ι_g 的中心化子, 即

$$SHomeo^+(\Sigma_g) = C_{SHomeo^+(\Sigma_g)}(\iota_g).$$

对称映射类群 (symmetric mapping class group), 记作 $SMod(\Sigma_g)$, 定义为群

$$SMod(\Sigma_g) = SHomeo^+(\Sigma_g)/isotopy.$$

注释 2.10. 一般来说, 超椭圆自同构是一个阶为二的映射类, 且其同调作用为 $-I$, 并且当亏格 ≥ 3 时, 它在共轭下是唯一的 [52]^{Proposition 7.15}. 这里我们选择图 2.25 中所示的特殊 ι_g , 更具体的,

$$\iota_g = T_{c_{2g+1}} \cdots T_{c_1} T_{c_1} \cdots T_{c_{2g+1}} \quad (2.34)$$

定理 2.51 (Birman-Hilden 定理 [25]): 对于任意 g , $SMod(\Sigma_g)/\langle \iota_g \rangle \cong Mod(S_{0,2g+2})$, 其中 $Mod(S_{0,2g+2})$ 是 $2g + 2$ 穿孔球的映射类群, 球形辫子群 $\pi_1 B_{0,2g+2} S^2$. 特别的, $SMod(\Sigma_g)$ 由 $T_{c_i} (1 \leq i \leq 2g + 1)$ 生成, 它们满足辫子群 B_{2g+2} 中的关系。

证明 定理主要是由如下事实得到: 分支覆盖 (branched cover) $\Sigma_g \rightarrow S_{0,2g+2}$ 是具有 **Birman-Hilden 性质** 的。即所有覆盖空间 Σ_g 中同胚映射的同痕可以做成保持纤维的 (fiber preserving)。 ■

第 3 章 阴影平面代数的提升

在这一章节中, 我们将讨论如何将阴影平面代数提升为无阴影平面代数, 目标是用某些辫子结构(在阴影平面代数的偶部分 (even part of the shaded planar algebra)) 给出提升的充分条件。

定义 3.1: [55]^{Def. 1.3} 一个阴影平面代数 $(\mathcal{P}_+, \mathcal{P}_-)$ 被称为 **自对偶**, 如果存在同构映射 $\Phi_{\pm} ((\Phi_+, \Phi_-) : (\mathcal{P}_+, \mathcal{P}_-) \rightarrow (\mathcal{P}_-, \mathcal{P}_+))$, 满足同构相对于缠结操作 (同时翻转颜色) 是自然的. 另外阴影平面代数被称为 **对称自对偶** 如果 $\Phi_{\mp} \circ \Phi_{\pm} = 1_{\mathcal{P}_{\pm}}$.

在文章 [55] 中, 如下定理被证明,

定理 3.2: [55]^{Thm. A} 给定一个对称自对偶的阴影平面代数 $(\mathcal{P}, \Phi_{\pm})$, 它可以提升为一个无阴影平面代数。

定义 3.3: 一个阴影平面代数的**偶部分**是由所有标记都在无阴影部分的缠结 T 生成的平面代数, 换言之, $Z(T)$ 是从 $\times_i \mathcal{P}_{n_i,+} \rightarrow \mathcal{P}_{m,+}$ 的多线性映射。

相应的生成元缠结 (我们考虑带标记和定向的情况) 如下图 3.1:

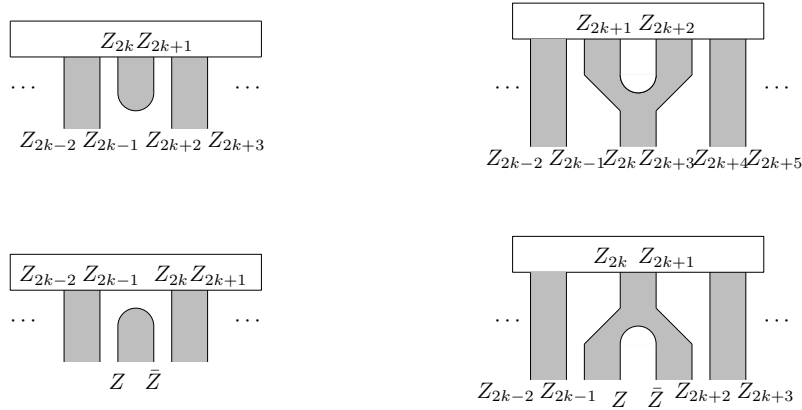


图 3.1 阴影平面代数偶部分的生成缠结

由于仅涉及平面上的同痕不变性, 不难看出对应的生成关系如下图 3.2:

特别的, 如果阴影平面代数是有球表面性的 (比如子因子平面代数见定义 2.36) 那我们有额外的如下关系 (其中 δ_Z 是依赖于标记 Z 的数, 如果考虑有正性的情况, 那么 $\delta_Z \in \mathbb{R}_+$), 见图 3.3。

下面, 我们将在阴影平面代数偶部分上定义某种 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 辫子结构

定义 3.4: $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 辫子结构由一系列缠结定义, 见图 3.4:

这些缠结满足以下关系 (包括所有可能的正负辫子和着色方式), 见图 3.5。

注释 3.1. • (C1) 表明辫子奇点和帽子或杯子的顺序互换在高度函数下的兼容性。其他类型奇点的互换在原始阴影平面代数的定义中已涵盖。

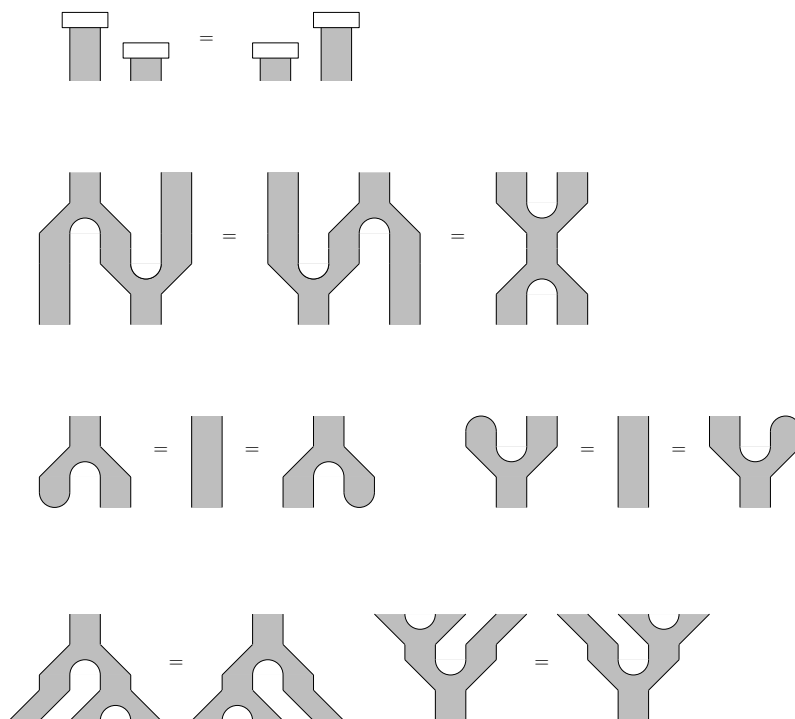


图 3.2 阴影平面代数偶部分生成缠结之间的关系



图 3.3 球面性对应的关系

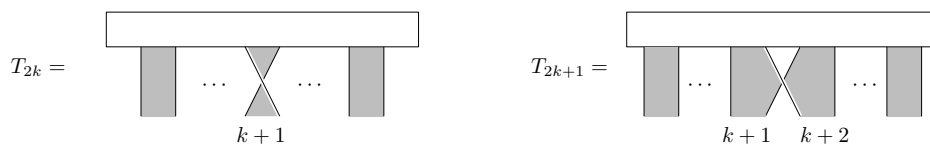


图 3.4 辫子缠结

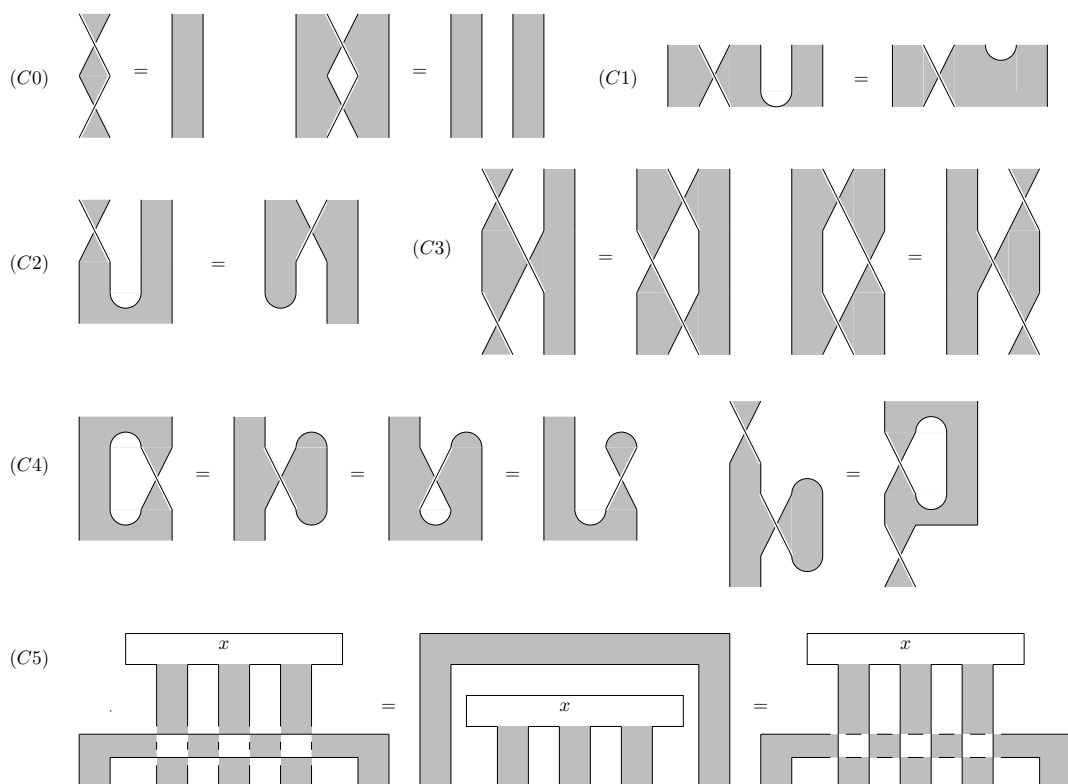


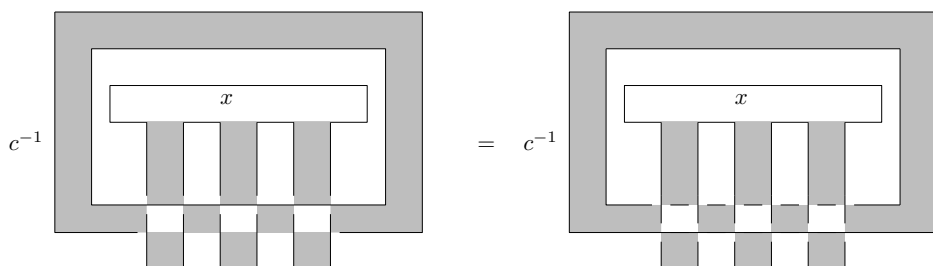
图 3.5 辫子缠结需要满足的关系

- (C4) 类似于有阴影版本中的扭转。这里为了简洁起见，省略了一些关系：类似的等式同样适用于第一条竖线中的扭转；同一条竖线中的正扭转和负扭转可以互相抵消。
- (C5) 是在 (C2) 满足的情况下良定义的关系，因为辫子奇点可以自由地沿着帽子和杯子移动。可以将 (C5) 与对称自对偶条件（定义 3.1）进行比较。
- 所有竖线都可以被标记，因此必须满足带有所有可能标签的关系。

引理 3.5: $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 辫子结构诱导了一个 $P_{n,+}$ 上的 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 作用 ρ 。特别的， $\rho(x) \otimes \rho(y) = \rho(x \otimes y)$ 且 $\rho(x)\rho(y) = \rho(xy)$ 。

证明 这个作用 ρ 由以下缠结（见图3.6）给出，等式的成立由 (C3) 得到。这里 $c > 0$

是原始有色平面代数中的环路值 (loop value), $\bigcirc = c$, 该值依赖于环路的标签。

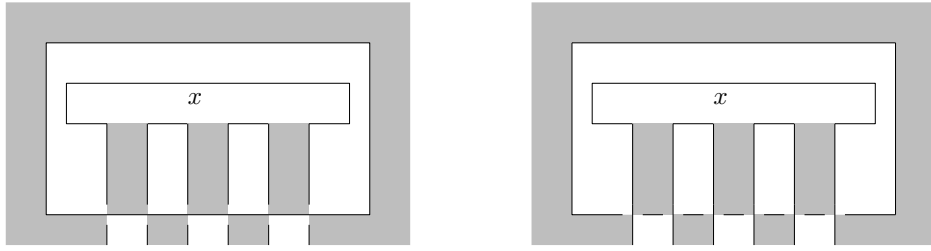

 图 3.6 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 作用

从 (C3) 可以看出, 这确实是一个平面代数作用 (与所有平面缠结作用相兼容) 并且尊重辫子结构。结合 (C5), 我们可以得出这是一个 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 作用。 ■

定理 3.6: 如果在阴影平面代数的偶部分存在 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 辫子结构, 那么它可以提升为一个无阴影平面代数, 并且带有相应的 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 辫子。

证明 现在我们定义一个无阴影平面代数 \mathcal{P}^u , 其构造思路类似于 [55]^{Def. 1.6.1.7}:

- $P_{2n}^u := P_n, P_{2n+1}^u := \emptyset$,
- 给定一个无色缠结 \mathbb{U} , 我们对其进行棋盘状着色, 使得和输出盘特定线段相接的区域为无色。如果输入盘的特定区段在有色区域中, 则我们在其上方或下方通过辫子结构附加一个圆圈, 如下图所示, 系数为 $c^{-1/2}$ 。



这里我们给出一个具体例子, 我们从一个无阴影的 Fourier 变换平面缠结出发, 先进行染色, 由于与输入圆盘特定线段相接的区域是染色的, 所以我们从上方放置一个圈。再由于 (C3), 通过同痕变换我们得到最后一个平面缠结可以用已知的生成元赋予映射, 见图 3.7。接下来, 我们证明这确实是一个带有 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 辫子的无阴影平

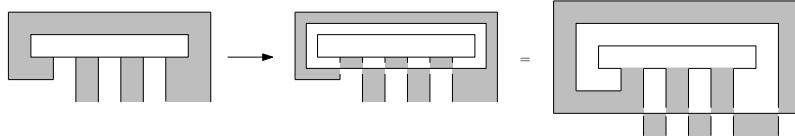


图 3.7 一个无阴影缠结的赋值例子

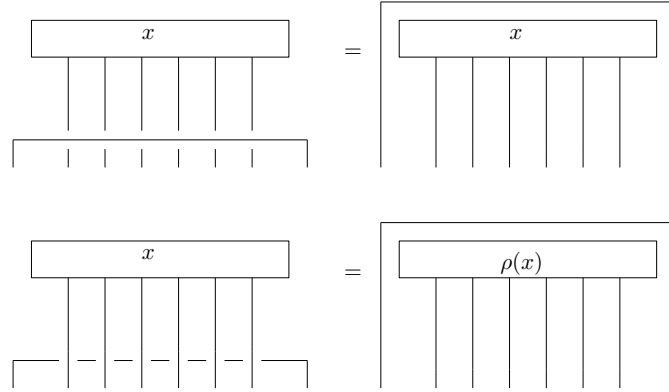
面代数。同痕不变性来自以下几点:

- 1. 阴影平面代数的平面同痕不变性,
- 2. 输入圆盘之外的包含辫子的三维同痕: (C0) – (C4),
- 3. 输入圆盘处的同痕变换: 引理 3.7。

$Z(U \circ_i V) = Z(U) \circ_i Z(V)$ 的证明类似于 [55]^{Thm A} 的证明, 只需将他们的 Φ_{\pm} 算子替换为我们的附加圆圈操作, 其中容易看出对称自对偶性可被 (C5) 替代。 ■

可以看到, 在提升的过程中有两种选择, 对应于从上下两个地方附加圆圈。从现在起我们固定一种选择, 即从上面附加圆圈。

推论 3.7: 在无阴影平面代数 \mathcal{P}^u 中, 我们有以下等式,



证明 根据左侧输入盘 x 的着色, 有两种情况。如果它是有色的, 则根据定义, 我们附加一个圆圈, 应用 (C5), 并去掉无色盘 (对于第二个等式, 需要使用引理 3.5 的图示描述)。如果它是无色的, 则右侧的输入盘是有色的, 我们再次附加一个圆圈, 应用 (C5) 和引理 3.5。 ■

第 4 章 构型空间的图形计算

在本章节中，我们将定义一些新的构型空间，大幅推广文献 [3] 中的构造，并介绍在这些空间上的若干操作。

设 \mathcal{C} 为一个酉模张量范畴, 考虑范畴 $\mathcal{C}^{\boxtimes 2}$ 和标准的 Frobenius 代数 $\gamma = \bigoplus_X X \boxtimes \bar{X}$ 。在 [3] 中，他们将空间 $\text{Hom}(1, \gamma^{\otimes n})$ 和构型空间 $\text{Conf}(\mathcal{C})_{n,2}$ 进行了等同，这个空间是一个希尔伯特空间，其标准正交基在 [3] 中给出。

现在，我们将其推广到包含形式为 $Z_{2i-2} \boxtimes Z_{2i-1}$ (非对称) 简单对象的情况。设 \mathcal{Z} 表示序列 $(Z_k)_{0 \leq k \leq 2n-1}$ ，我们定义配置空间 $Cf(n, \mathcal{Z}) := \text{Hom}_{\mathcal{C}^{\boxtimes 2}}(1, \bigotimes_{i=1}^n \gamma Z_{2i-2} \boxtimes Z_{2i-1})$ 。当所有 Z_i 均为平凡对象时，我们将相应的配置空间简记为 $Cf(n)$ 。该配置空间由如下向量张成，见图 4.1。(蓝色竖线由 \mathcal{C} 中的简单对象标记, 类似于 [3]^{Sec. 2.2})

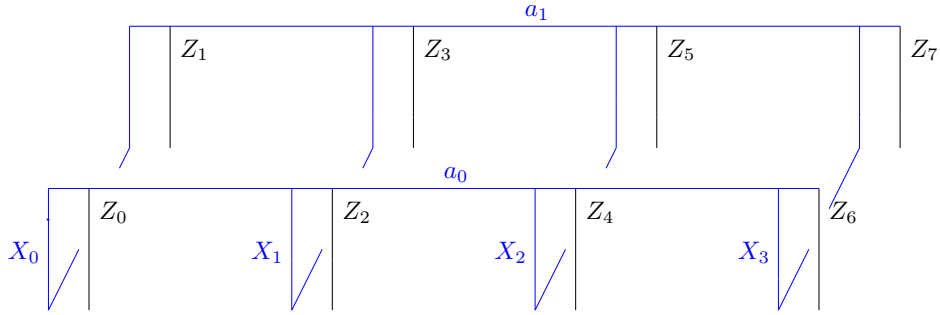
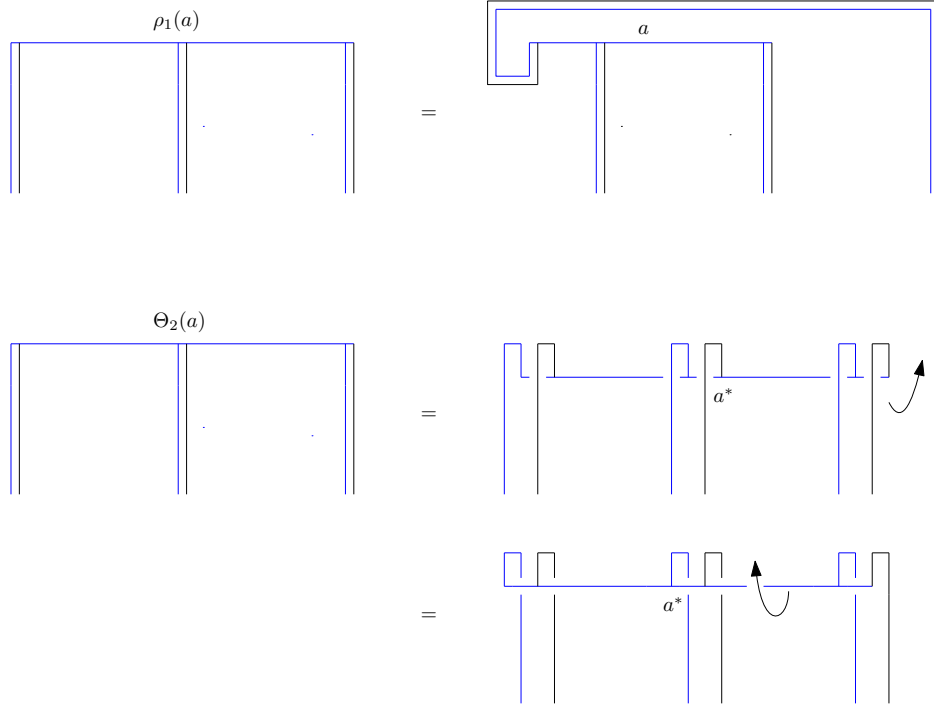


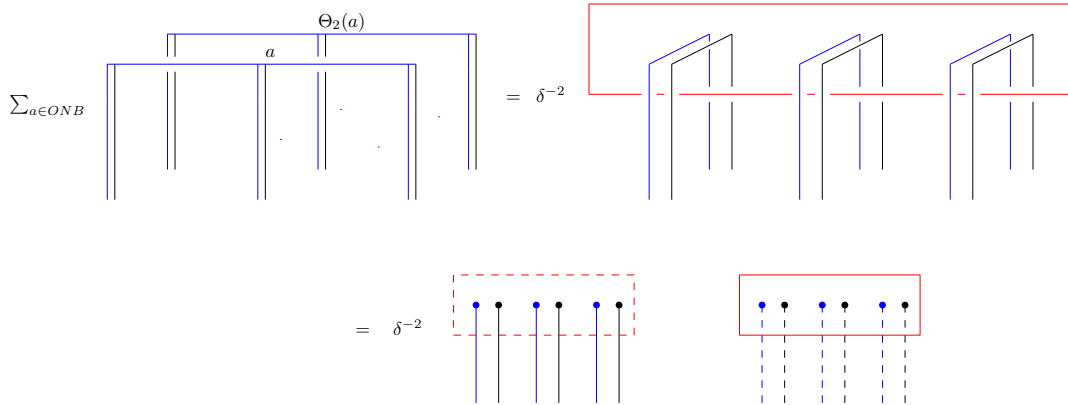
图 4.1 构型空间中的向量

由于我们仅有两层结构，我们将令 $\vec{X} := (X_k)_{0 \leq k \leq n-1}$ ，并定义 $d_{\vec{X}} = \prod_{k=0}^{n-1} d_{X_k}$ 。接下来我们将定义一些 \mathcal{C} 中于 [3] 类似的操作，见图 4.2

我们可以将 θ_2 的作用看作是沿着指定的方向对态射进行弯曲。接下来的引理将被频繁使用，并且可以直接从 θ_2 的定义和 \mathcal{C} 中的图形计算推导出来。


 图 4.2 \mathcal{C} 中的一些操作

引理 4.1: 在范畴 \mathcal{C} 中, 以下态射是相等的 (红色的线由 Ω 标记)



为了简化表达, 我们引入了新的图示符号。现在, 我们将 $3D$ 图用一对 $2D$ 图来表示, 一个代表第一层, 另一个代表第二层。边界上的小点表示该边通过 Y 方向与另一层连接, 虚线表示该线在其他线的下面。

注释 4.1. 对于配置空间中的元素 a, a' , 内积 $\langle a, a' \rangle$ 是由 \mathcal{C} 中的 a 和 a' 的垂直反射复合的值给出。该值的计算可以在 \mathcal{C} 中进行。因此, 在大多数情况下, 我们将引理 4.1 应用于构型空间中的态射进行简化计算。配置空间中的正交基将被简记为 Cf_{ONB} 。

上述定义的操作在构型空间上的作用如图 4.3 (类似于 [3] 中的定义):

我们将用 $Cf(n, \Theta_2(\mathcal{Z}))$ 和 $Cf(n, \rho_1(\mathcal{Z}))$ 来表示相应的目标空间。

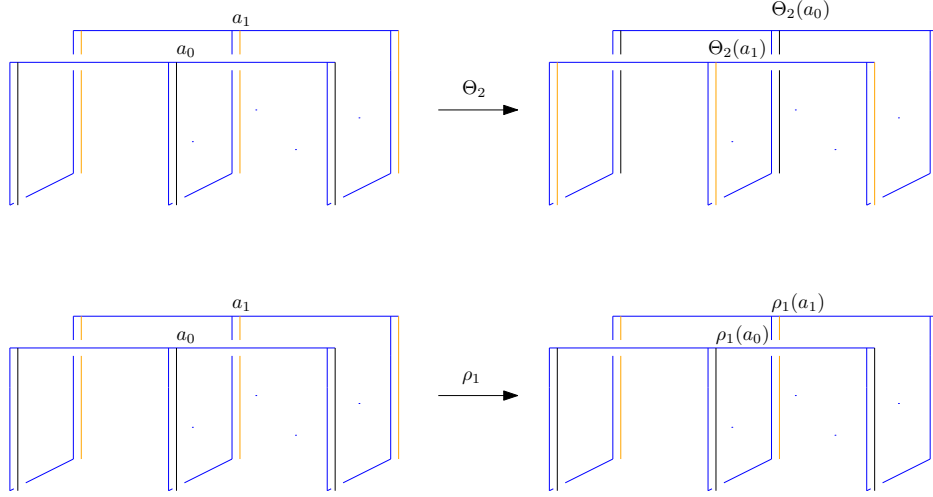


图 4.3 构型空间中的一些操作

接下来，我们定义一个双线性形式，用来推广 [3]^{Sec. 2.3} 中的定义。设 $F(\mathcal{Z}) = (Z_k)_{1 \leq k \leq 2n}$ ，其中 $Z_{2n} := Z_0$ 。

定义 4.2: 对于 $a \in Cf(n, \mathcal{Z})$ 和 $a' \in Cf(n, F(\mathcal{Z}))$ ，我们定义双线性形式的取值 $\mathcal{L}(a, \Theta_2(a'))$ 的值为图 4.4 所对应的值（其中 a 为蓝色， a' 为紫色），系数等于 $\delta^{1-n} \sqrt{d_X} \sqrt{d_Y}$ 。

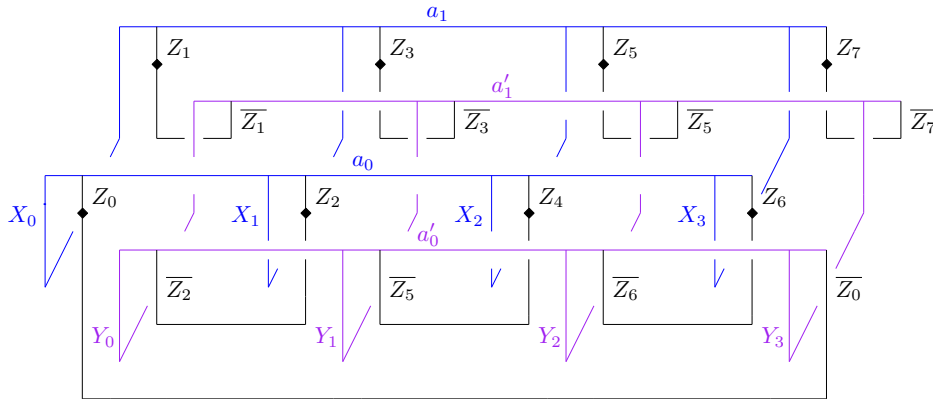


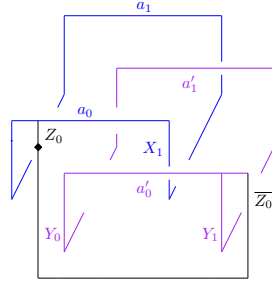
图 4.4 Fourier 配对

Fourier 变换 $F : Cf(n, \mathcal{Z}) \rightarrow Cf(n, F(\mathcal{Z}))$ 定义为

$$F(a) = \sum_{a' \in Cf_{ONB}} \mathcal{L}(a, \Theta_2(a')) a' \quad (4.1)$$

例子 4.3. 在 $Cf(2)$ 上的 Fourier 配对在标准基下于范畴 \mathcal{C} 的 S 矩阵 [3]^{Thm. 6.8} 相同。

例子 4.4. $Cf(2, \mathcal{Z})$ 和 $Cf(2, F(\mathcal{Z}))$ 之间的 Fourier 配对，其中 $\mathcal{Z} = (Z, 1, 1, 1)$ ，由下图示 4.5 给出：这个可以看作有一个边界分支的环面上的 S 矩阵。


 图 4.5 带孔环面上的 S 矩阵

4.1 包含 (inclusion) 和收缩 (contraction)

在这一小节中, 我们将继续定义构型空间上的一些操作, 并研究它们与 Fourier 变换的兼容性。

首先我们定义收缩和包含操作。

定义 4.5: 收缩和包含 $\phi_k : Cf(C)_{n,Z} \rightarrow Cf(C)_{n-1,\phi_k(Z)}$, $\iota_k : Cf(C)_{n,Z} \rightarrow Cf(C)_{n+1,\iota_k(Z)}$ ($\phi_k(Z)$ 和 $\iota_k(Z)$ 也同时被定义) 通过在底部堆叠以下图示4.6来定义。求和范围为所有 $0 \leq i \leq n-1$, $X_i, Y, Y', Z \in \text{Irr}(C)$ 以及对应态射空间中的所有标准正交基 α 。全局系数为 $\delta^{1/2}$ 对于 ϕ_{2k}, ι_{2k} , $\delta^{-1/2}$ 对于 $\phi_{2k+1}, \iota_{2k+1}$ 。

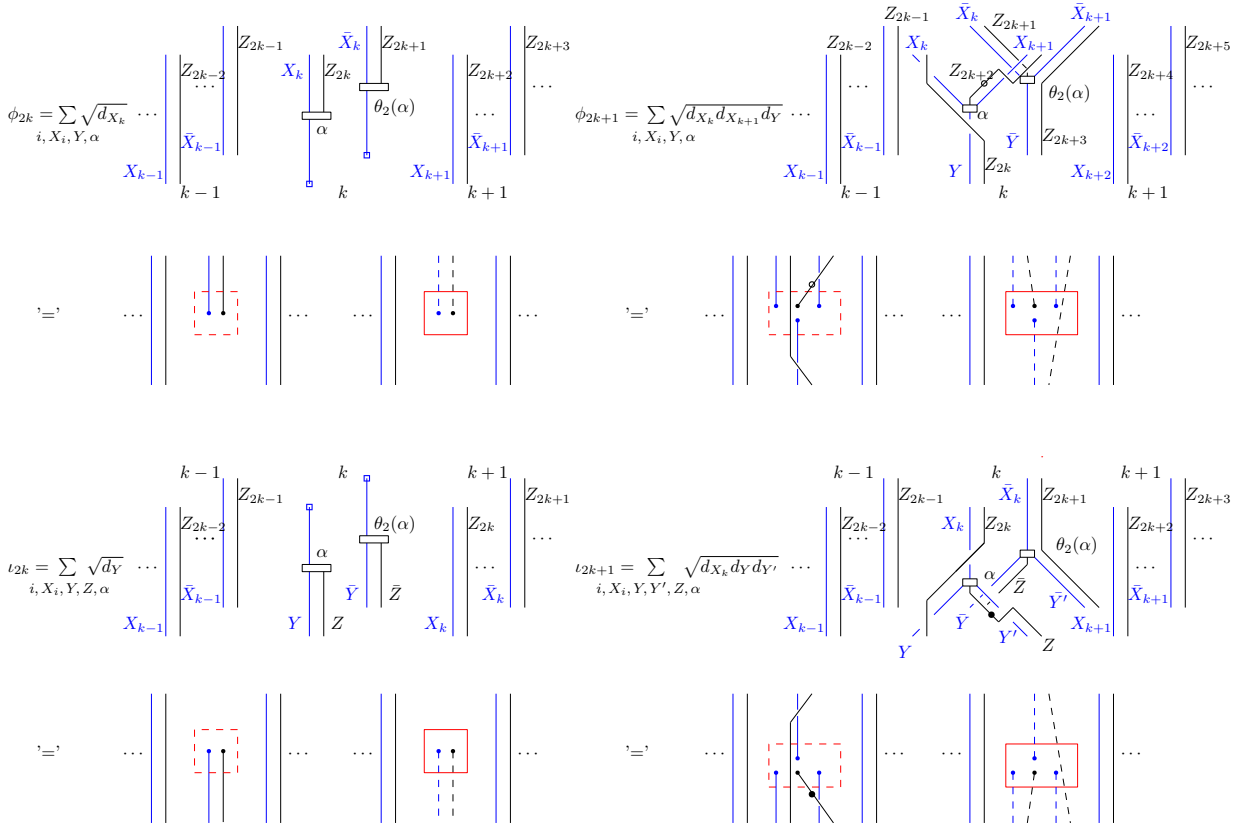


图 4.6 包含和收缩

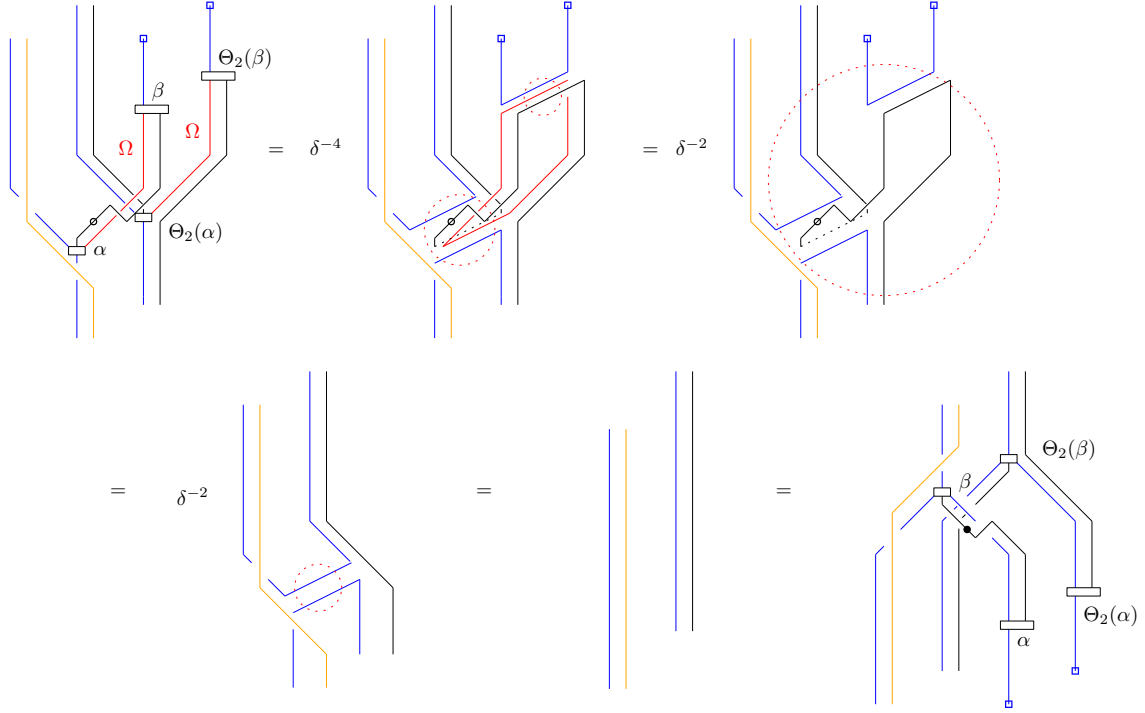
接下来我们检验 ϕ_k, ι_k 的一些性质。

首先, 可以验证 ϕ_k, ι_k 满足”锯齿形 (zig-zag)”关系:

引理 4.6: 以下等式成立

$$\begin{aligned}\phi_{2k-1} \circ (Id \otimes \iota_{2k}) &= (Id \otimes \phi_{2k}) \circ \iota_{2k-1} = Id \\ \phi_{2k-1} \circ (\iota_{2k-2} \otimes Id) &= (\phi_{2k-2} \otimes Id) \circ \iota_{2k-1} = Id\end{aligned}\quad (4.2)$$

证明 我们将证明第一个等式, 第二个等式的证明类似。证明见下图所示的图形计算, 为了简化图示, 我们省略了标签和求和部分。



ϕ_k, ι_k 中出现的量子维数平方根系数使得第一张图中的连接两个盒子的两条蓝色线变成了一个红色的圈 (Kirby 颜色)。结合引理 4.1, 第一个等式现在成立, 接下来的等式通过同痕和 Kirby 颜色的切割性质得出。 ■

注释 4.2. 正如引理4.6的证明中所示, 除了引理 4.1, 将连接两个盒子的蓝色线对 (带有适当系数) 转换为红色圈的步骤也将被频繁使用。

引理 4.7: 令 $\hat{Z} := \bigoplus_{Z \in \text{Irr}(C)} Z$, 我们有对 $x \in Cf(n, \hat{Z})$ 和 $y \in Cf(n-1, \hat{Z})$

$$\begin{aligned}\phi_k \iota_k &= \delta d_{\hat{Z}}, \\ \mathcal{L}(\phi_{2k} x, \Theta_2(y)) &= \mathcal{L}(x, \Theta_2 \iota_{2k-1}(y)), \\ \mathcal{L}(\phi_{2k+1}(x), \Theta_2(y)) &= \mathcal{L}(x, \Theta_2 \iota_{2k}(y)).\end{aligned}\quad (4.3)$$

证明 首先, 观察到 Θ_2 的作用会改变辫子的正负和连接方式。证明通过以下图示

的图形计算给出:

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{L}(\phi_{2k+1}(x), \Theta_2(y)) = \sum_{\alpha \in ONB} \text{Diagram 1} \\
 &= \sum_{\beta \in ONB} \text{Diagram 2} = \mathcal{L}(x, \Theta_2 t_{2k}(y)) \\
 & \mathcal{L}(x, \Theta_2 t_{2k-1}(y)) = \sum_{\alpha \in ONB} \text{Diagram 3} \\
 &= \sum_{\beta \in ONB} \text{Diagram 4} = \mathcal{L}(\phi_{2k}(x), \Theta_2(y))
 \end{aligned}$$

■

通过引理 4.7, 我们得出 Fourier 变换的以下兼容性。

命题 4.8: 我们有等式:

$$\mathcal{F}(\phi_{k+1}(x)) = \phi_k \mathcal{F}(x). \quad (4.4)$$

证明

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}(\phi_{k+1}(x)) &= \sum_y \mathcal{L}(\phi_{k+1}x, \Theta_2(y))y \\
 &= \sum_y \mathcal{L}(x, \Theta_2 \iota_k(y))y \\
 &= \sum_{(\delta d_{\hat{Z}})^{-1/2} d \iota_k y} \mathcal{L}(x, \Theta_2(\delta d_{\hat{Z}})^{-1/2} \iota_k(y)) \phi_k(\delta d_{\hat{Z}})^{-1/2} \iota_k y \\
 &= \phi_k \mathcal{F}(x)
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

■

注释 4.3. 构型空间之间的张量积可以通过简单地将向量并列放置来自自然定义。

4.2 辫子结构 (Braiding Structure)

在本节中, 我们将利用 \mathcal{C} 的数据定义某种辫子结构。

定义 4.9: 我们定义辫子态射如图 4.7, 其中 $T_{2k+1} = (\phi_{2k+1} \otimes Id)(Id \otimes T_{2k+2}^{-1} \otimes Id)(Id \otimes \iota_{2k+3})$ 并且 T_{2k+1} 的系数是 δ^{-1} (ϕ_{2k+1} 和 ϕ_{2k+3} 都贡献了 $\delta^{-1/2}$)。

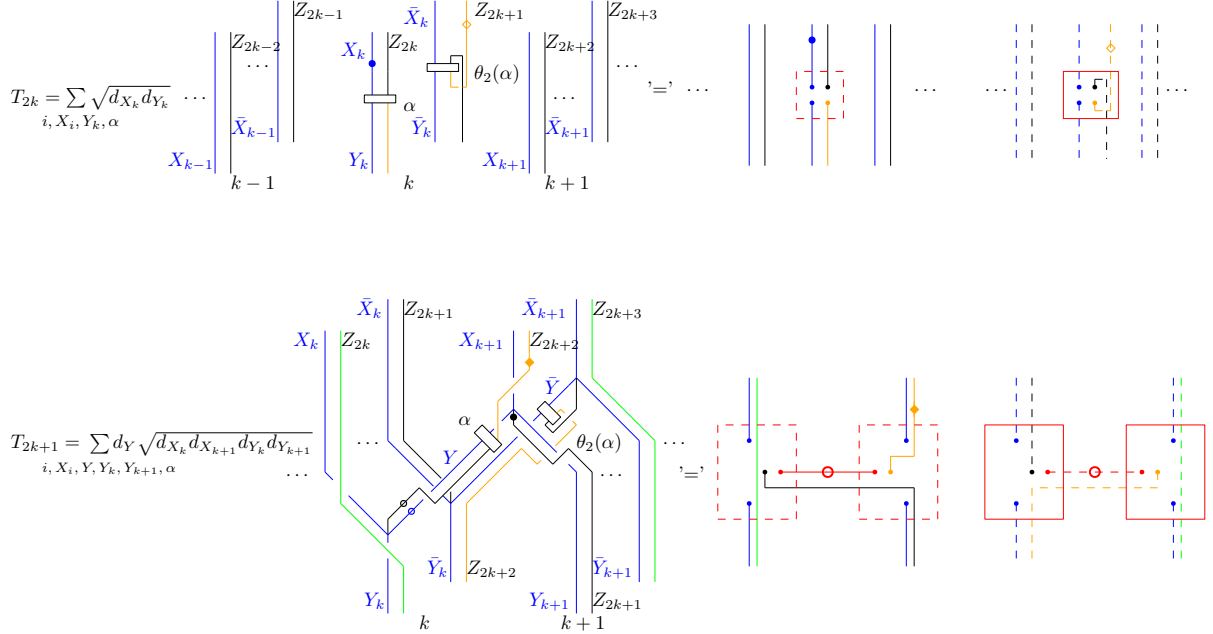


图 4.7 辫子结构

现在很容易证明算子 T_k 是酉算子, 且 $T_k^\dagger = T_k^{-1}$ 可以通过垂直反射和态射上的相应 \dagger 运算得到。

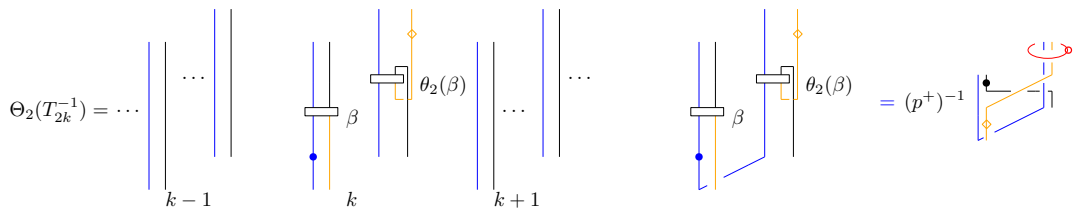
引理 4.10: 我们有以下等式:

$$F(T_{2k+1}(x)) = \eta T_{2k} F(x) \quad (4.6)$$

证明 我们首先证明:

$$\mathcal{L}(T_{2k+1}x, \Theta_2(y)) = \eta \mathcal{L}(x, \Theta_2 T_{2k}^{-1}(y)), \quad (4.7)$$

其中 $\eta = \frac{p^+}{\delta}$ 是一个全局常数。根据 Θ_2 的定义, 我们有以下等式。第二个等式源于应用引理 4.1, 注释 4.2 并使用扭转性质。



现在等式 (4.7) 通过对在两个图中进行同痕变化和扭转的抵消得出。(这里我

们只绘制了配对 \mathcal{L} 的局部图示, 因为我们在引理4.7 的证明中已经绘制了完整图示)。

$$\mathcal{L}(T_{2k+1}(x), \Theta_2(y)) = \delta^{-1} \text{ (diagram) } = \delta^{-1} \text{ (diagram) } = \eta \mathcal{L}(x, \Theta_2 T_{2k}^{-1}(y))$$

现在我们有:

$$\begin{aligned} F(T_{2k+1}(x)) &= \sum_y \mathcal{L}(T_{2k+1}x, \Theta_2(y))y \\ &= \sum \eta \mathcal{L}(x, \Theta_2 T_{2k}^{-1}(y)) T_{2k} T_{2k}^{-1}(y) \\ &= \eta T_{2k} F(x) \end{aligned} \quad (4.8)$$

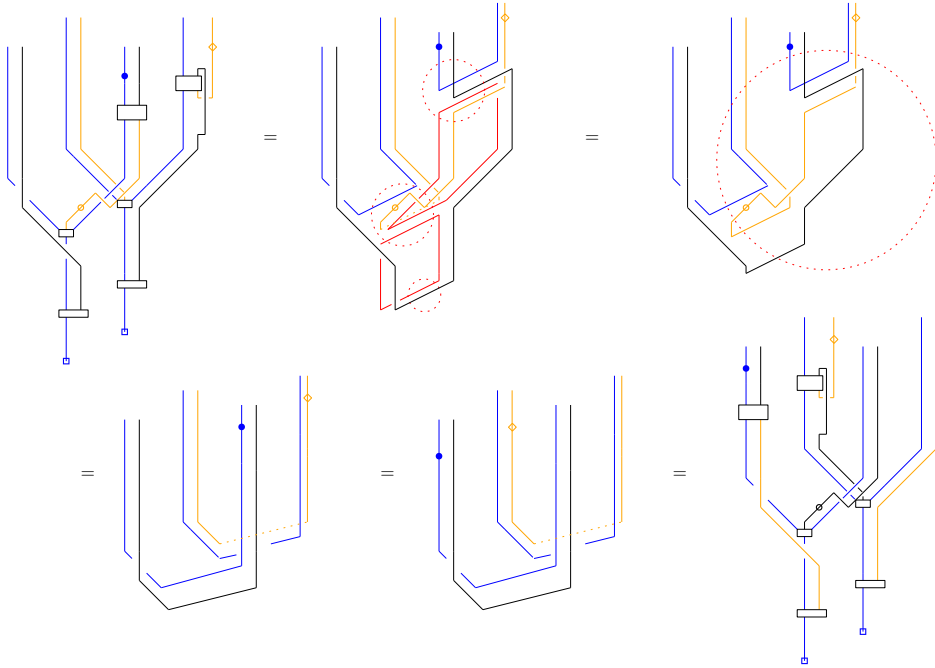
■

接下来我们证明辫子与收缩和包含操作的兼容性, 如以下引理所示。

引理 4.11: 如下等式成立:

$$\begin{aligned} \phi_{2k} \phi_{2k+1} T_{2k} \otimes Id &= \phi_{2k} \phi_{2k+1} Id \otimes T_{2k+2} \\ T_{2k} \otimes Id \phi_{2k+1} \phi_{2k} &= Id \otimes T_{2k+2} \phi_{2k} \phi_{2k+1} \end{aligned} \quad (4.9)$$

证明 我们只证明第一个等式, 第二个等式证明类似。



■

现在，我们给出 Fourier 变换 F 的另一种图示解释。

定义 4.12: 我们定义一个算子 $F_{+,Z}$ ，它在构型空间中 将 $Cf(n, Z)$ 映射到 $Cf(n, F(Z))$ ，该算子由图 4.8 给出，带有系数 δ^{-1} ，其中 $Z \in Obj(C)$ 表示黑色边上的颜色。我们将 $F_{+,1}$ 记作 F_+ ，并将用相反辫子构成的算子记作 $F_{-,Z}$ （其中 $F_- := F_{-,1}$ ）。

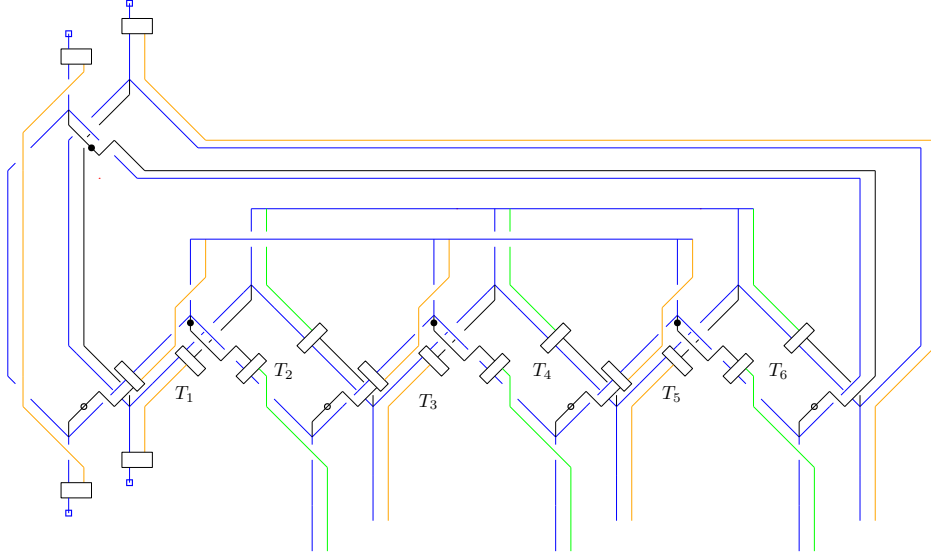


图 4.8 Fourier 变换作为构型空间之间的算子

定义 4.13: 我们定义在构型空间上的作用 ρ_2 如图 4.9。

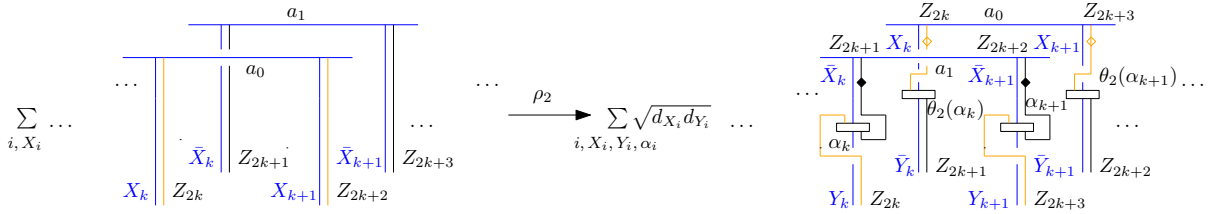


图 4.9 构型空间上的 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 作用

通过直接的图形计算，我们得到以下引理。

引理 4.14: ρ_2 是一个等距同构， $\rho_2^2 = 1$ 并且 $\rho_2(x) \otimes \rho_2(y) = \rho_2(x \otimes y)$ 。

下一个定理建立了 Fourier 变换两种不同定义之间的重要联系 (图 4.4 和图 4.8)，是本文中很重要的一个定理。

定理 4.15: 下述等式成立：

$$\begin{aligned} \langle F_{+,Z}(x), y \rangle &= d_Z \mathcal{L}(x, \theta_2(y)) \\ \langle F_{-,Z}(x), y \rangle &= d_Z \mathcal{L}(\rho_2(x), \theta_2(y)) \end{aligned} \quad (4.10)$$

证明 图示如之前所述，所有图形来自前视图：左侧的图形表示第一层，右侧的图形表示第二层。边界上的小点表示它通过 Y -方向连接到另一层，套着一个 Kirby

颜色的圈（虚线红色圆圈）。我们强调这种表示仅为简化符号； $3D$ 图形可以通过这种表示回复出来，并且代表了 \mathcal{C} 中的态射（见引理 4.1）。这里使用的图形演算全部来源于 \mathcal{C} 的图形演算。

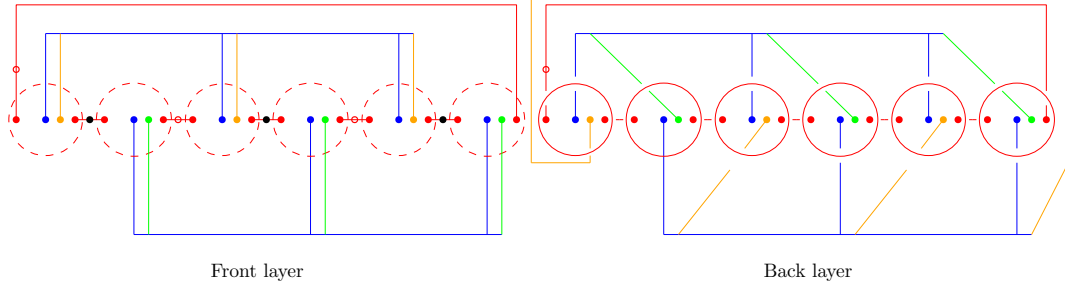


图 4.10 一些图形计算

首先,我们有图4.10,观察到有两种类型的红色圆圈:垂直的和水平的,分别出现 $2n$ 次,且所有扭转都在水平圆圈上。根据辫子的定义,我们可以拉出黑色的线,得到系数 d_Z 。根据引理 4.1 和 ϕ, ι 的定义,我们还得到一个值为 $(\delta^{3/2-2-2})^{2n} \delta^{-1} = \delta^{-5n-1}$ 的系数。

接下来,我们使用扭转性质将水平红圈（Kirby 颜色）与蓝色和橙色圆圈连接,从而消除红色圆圈上的所有扭转。然后我们使用剪切性质将垂直和水平红圈的数量减少到 n , 这引入了一个 δ^{2n} 系数。根据球面性质和构型空间的性质（两层分离）,去掉最右侧的垂直红圈并引入一个 δ^2 因子。因此,我们得到图形,见图4.11:

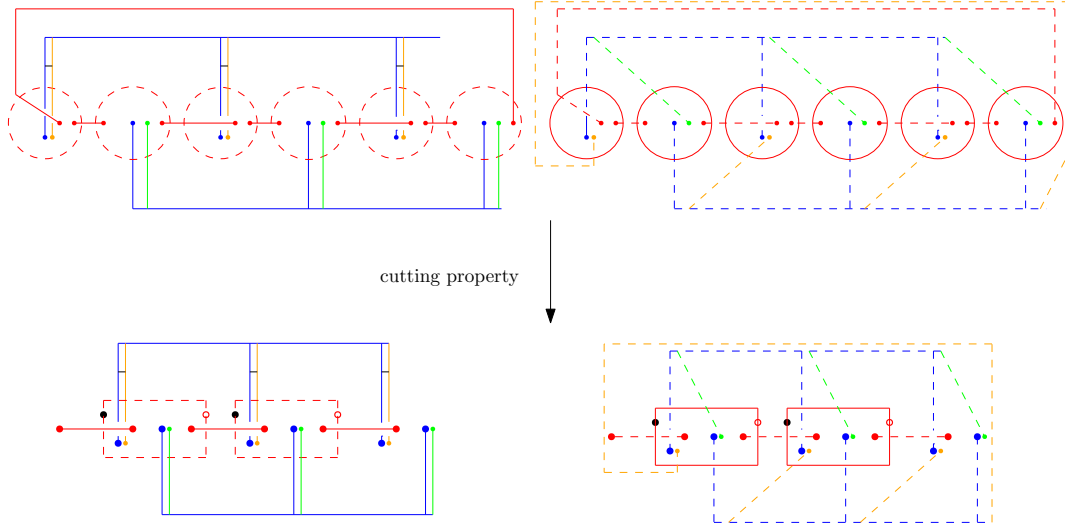


图 4.11 一些图形计算

接着考虑穿过水平红圈的线段,再次应用扭转性质。然后通过使用 Kirby 颜色的把手滑动属性,将 x 和 y 连接起来,消除所有红色圆圈,这引入了一个 δ^{2n} 因子。结果系数为 $d_Z \delta^{-5n-1+2n+2+2n} = d_Z \delta^{1-n}$, 而涉及对象量子维度平方根的项如在

收缩和包含的定义中出现（见定义 4.5），这与 \mathcal{L} 定义中的系数乘以 d_Z 一致，计算过程见图 4.12。

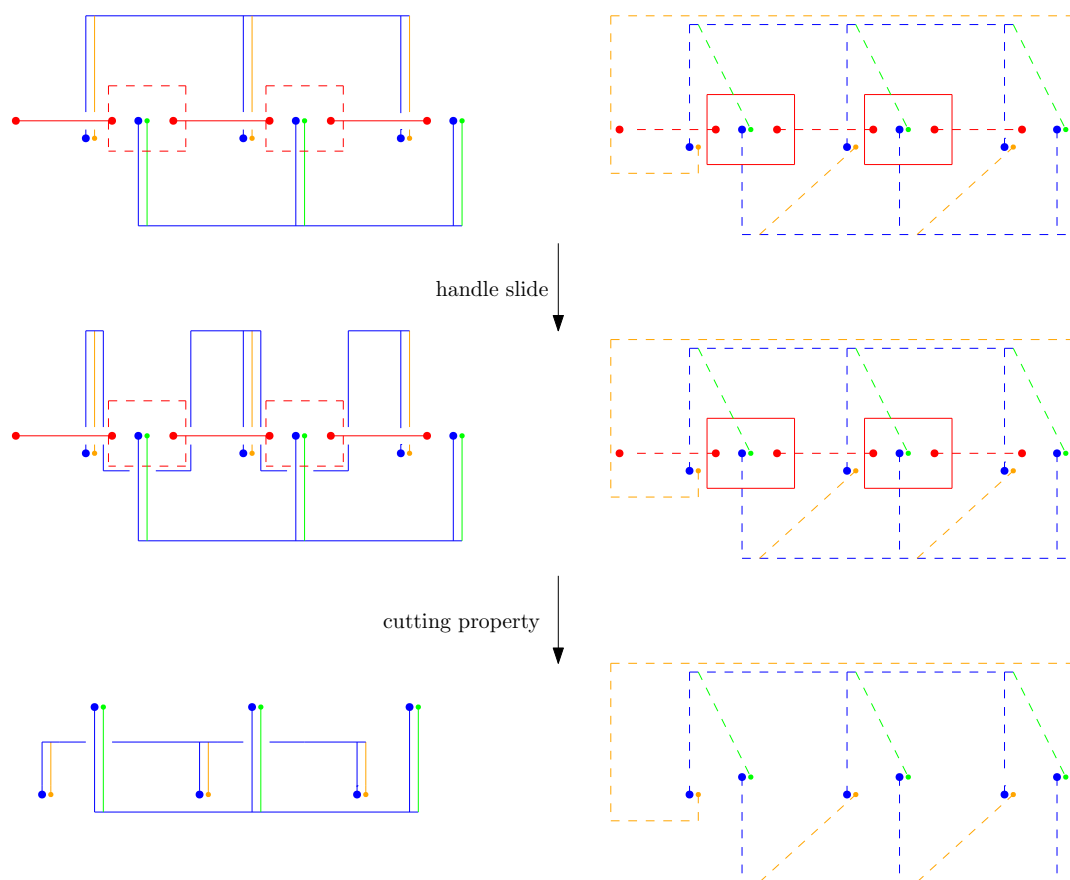


图 4.12 一些图形计算

我们得到了以下 3D 图形 4.13，接着如定义 Θ_2 中所描述那样经过弯曲变换后，等式成立。其中弯曲变换将左扭转引入绿色线，并对 y （紫色）应用 Θ_2 ：如果将定

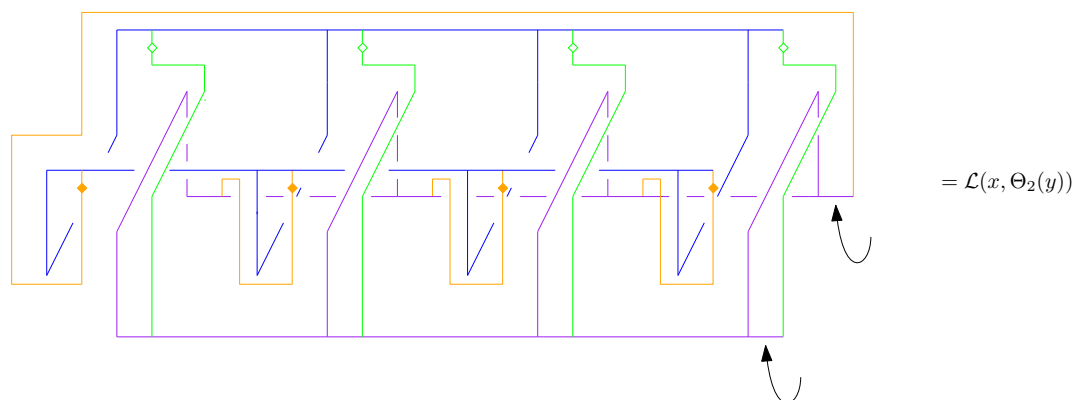


图 4.13 一些图形计算

义中的所有辫子取逆，可以想象我们从“另一边”读取图形，那么扭转会调整为之前的情况，证明类似，只是最后两个构型空间中的基的位置发生了变化。我们通过

旋转将其转换为标准位置，这里仅绘制了证明的最后步骤，见图4.14。

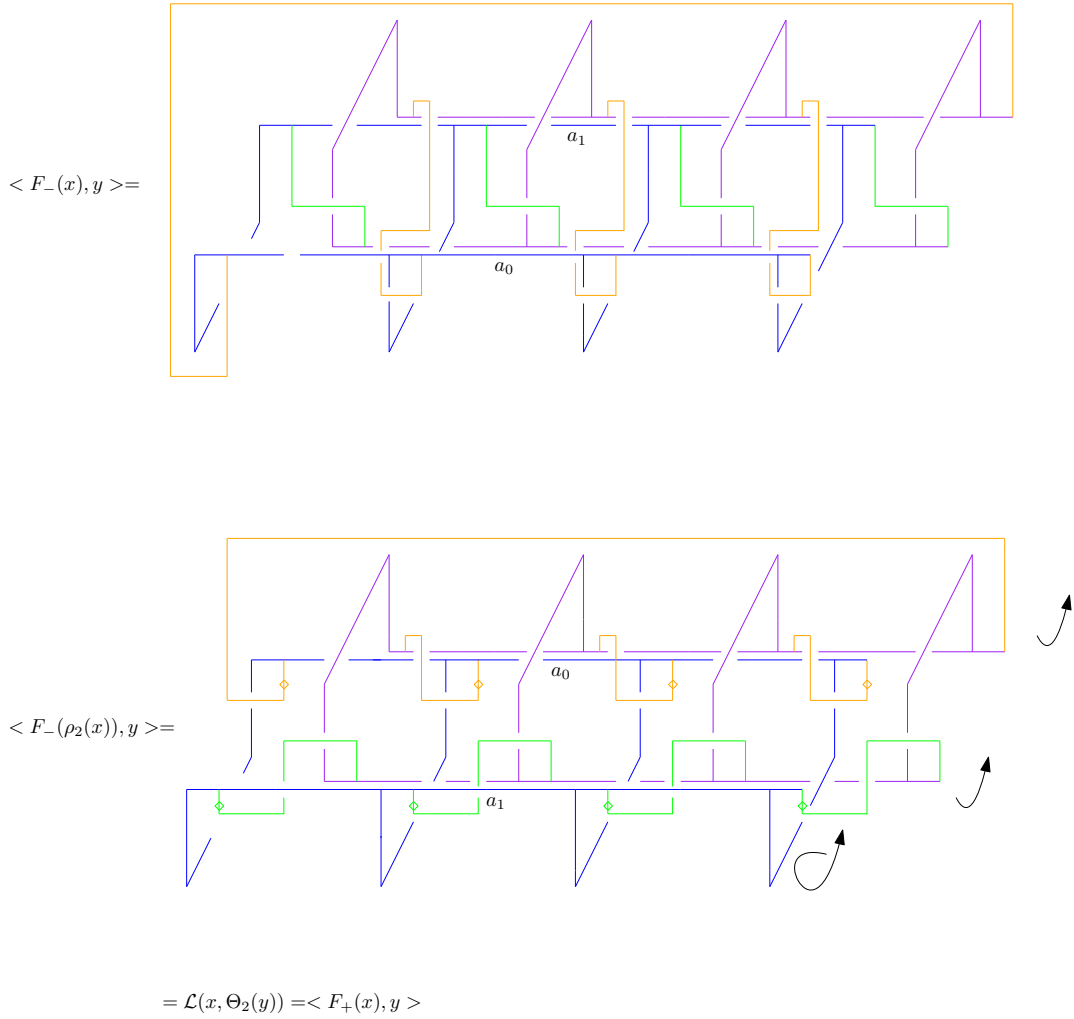


图 4.14 一些图形计算

旋转将左扭转引入绿色和橙色线，并对 y （紫色）应用 Θ_2 。

从定理 4.15 中，我们可以看到 $F_+ = \mathcal{F}$ 作为构型空间之间的算子。我们将利用这一点来证明 \mathcal{F} 是等距的

定理 4.16: Fourier 变换 \mathcal{F} 是从 $Cf(n, \mathcal{Z})$ 到 $Cf(n, \mathcal{F}(\mathcal{Z}))$ 的等距变换. 此外 $\mathcal{F}^2 = \rho_1$. 对于 F_- 也有相同的结果。

证明 内积 $\langle \mathcal{F}(x), \mathcal{F}(y) \rangle$ 可由一下图4.15表示, 系数为 $(\delta^{-1/2-2})^{4n} \delta^{-2} = \delta^{-10n-2}$ 。

然后我们执行与定理 4.15 证明中相似的操作进行图形计算化简（底部图形只是顶部图形的反射，因此所有操作相同），我们得到以下图形4.16，系数为 $\delta^{-10n-2+2n+4n+2+2n} = \delta^{-2n}$

图4.16中最后的图形表明 $\delta^{-2n} \delta^{2n} \langle x, y \rangle = \langle x, y \rangle$ 。

对于第二个陈述， $\langle F_+^2 x, y \rangle$ 可由以下图形4.17给出：

观察到通过右下角图形顺时针旋转到左下角图形的同痕，我们得到 $F_+(x)$ 和

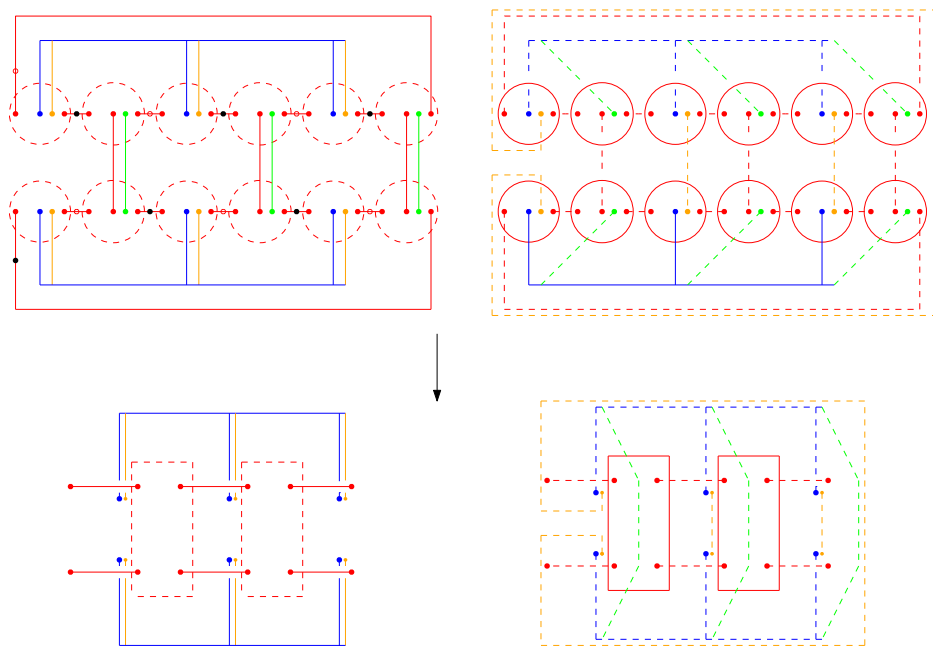


图 4.15 内积 $\langle F(x), F(y) \rangle$ 图形表示

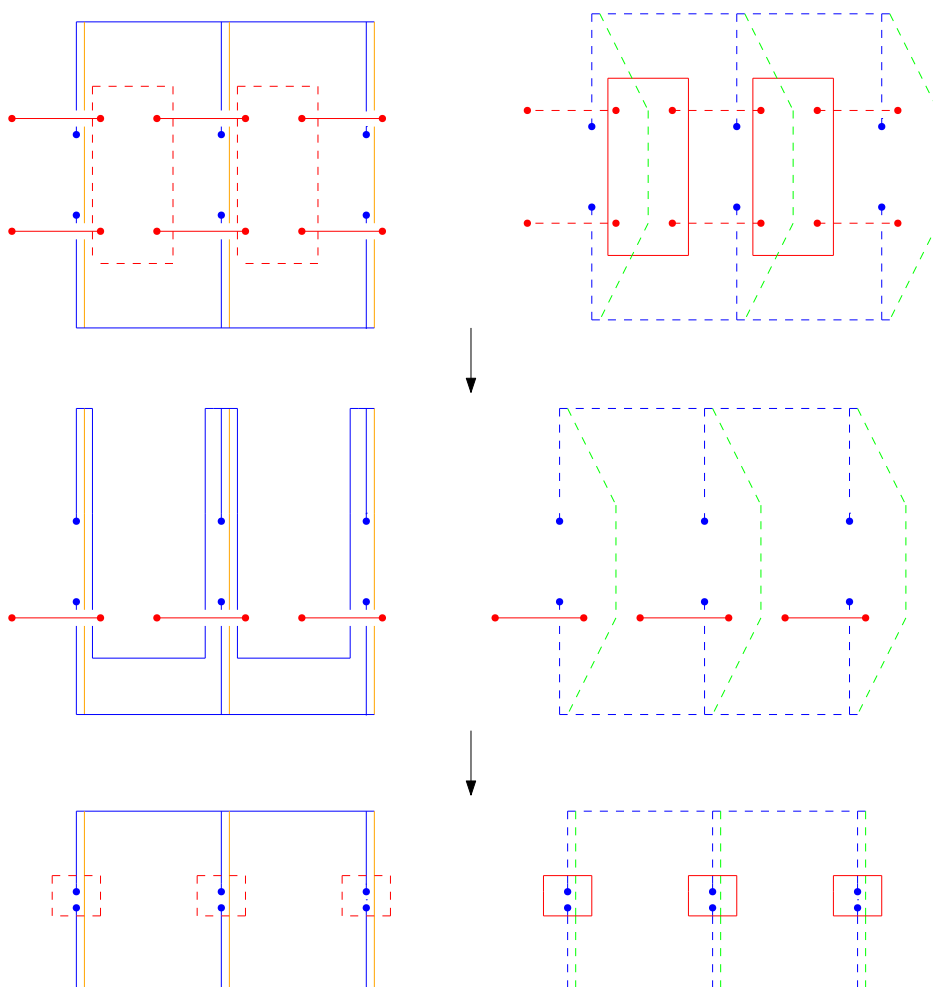
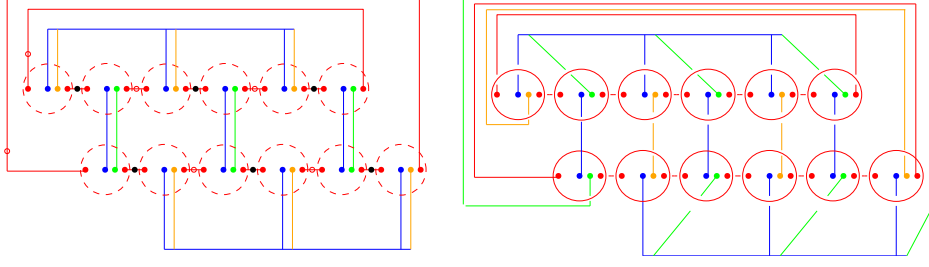


图 4.16 一些图形计算


 图 4.17 $\langle F_+^2 x, y \rangle$ 图形表示

$F_+(\rho_1^{-1}y)$ 的内积图形, 由第一条陈述的证明, 得到 $F_+^2 = \rho_1$ 。关于 F_- 的陈述现在即可直接从定理 4.15 得出。 ■

推论 4.17: 我们有以下等式:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(T_{k+1}(x)) &= \eta^{(-1)^k} T_k(\mathcal{F}(x)), \\ \mathcal{F}(\iota_{k+1}(x)) &= \iota_k \mathcal{F}(x). \end{aligned} \quad (4.11)$$

证明 根据定理 4.15, 4.16 以及引理 4.7, 4.10, 我们有,

$$\mathcal{F}T_{2k+1}\mathcal{F}^{-1} = \eta T_{2k} \implies \mathcal{F}T_{2k+2}\mathcal{F}^{-1} = \eta^{-1}\rho_1 T_{2k+3}\rho_1^{-1} = \eta^{-1}T_{2k+1}.$$

对于第一个等式, 我们有:

$$\mathcal{F}\phi_{k+1}\mathcal{F}^{-1} = \phi_k \implies \mathcal{F}\phi_{k+1}\mathcal{F}^{-1}\iota_k = \phi_k\iota_k = 1 \implies \iota_k = \mathcal{F}\iota_{k+1}\mathcal{F}^{-1}. \quad \blacksquare$$

下面我们验证我们定义的辫子结构事实上可以看作是 $C \boxtimes C$ 上标准辫子 $(c_{x,y} \boxtimes c_{\bar{x},\bar{y}})$ 的“平方根”。

命题 4.18: 我们有一下等式:

$$T_{2k+1} \circ T_{2k} \otimes T_{2k+2} \circ T_{2k+1} = \bigoplus_{X,Y \in \text{Irr}(C)} c_{XZ_{2k}, YZ_{2k+2}} \boxtimes c_{\bar{X}Z_{2k+1}, \bar{Y}Z_{2k+3}} \quad (4.12)$$

证明 我们仍然使用引理 4.1 (事实上, 跟之前很多证明类似, 这里我们是通过在 C 中计算等式左右两边与基向量的内积来对比他们是否在构型空间中一样, 因此我们可以应用该引理), 我们绘制出简化的图如下。现在我们首先在右上角和左下角的垂直红色圆圈内应用扭转性质, 然后在上下水平的红色圆圈内再次应用扭转性质, 并应用切割性质。我们得到以下图形计算过程, 见图4.18

现在我们利用构型空间两层分离的性质, 再应用切割性质, 因此我们得到如下演算, 见图4.19。 ■

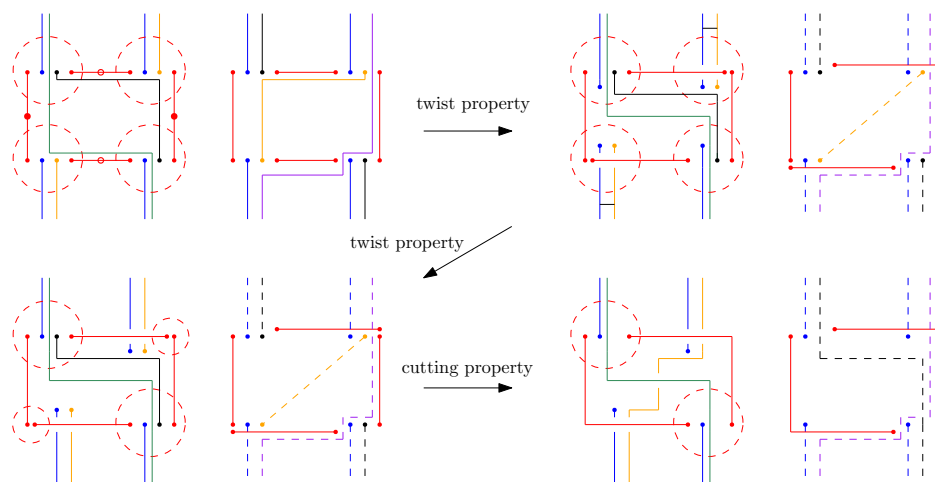


图 4.18 一些图形计算

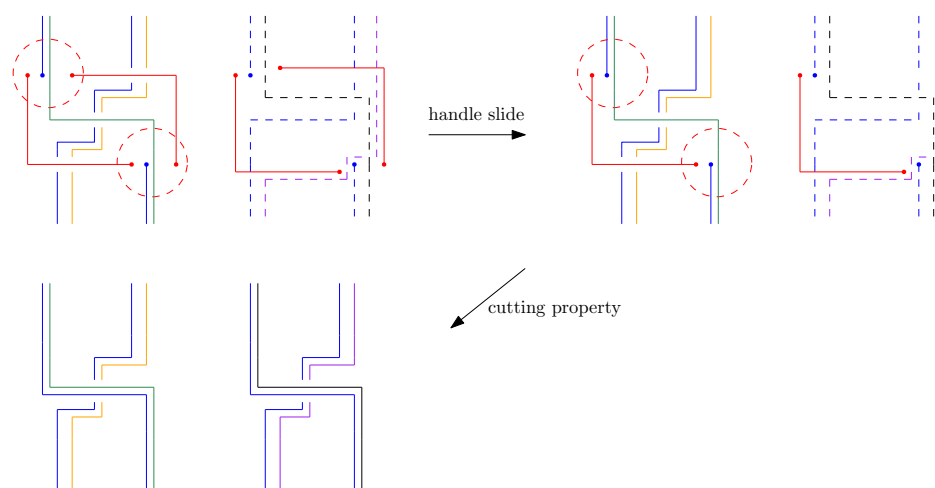


图 4.19 一些图形计算

第 5 章 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 置换扩张

这一章节中我们将用范畴 \mathcal{C} 中所包含的信息定义一个具有 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 辫结构的阴影平面代数结构的偶部分, 由此我们可以将其提升为一个具有 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 辫子的无阴影平面代数, 最后通过对其中极小投影的分析, 我们得到扭曲范畴 \mathcal{D} , 证明定理 1.1。

定义 5.1: 我们定义一个阴影平面代数 \mathcal{P}^C 的偶部分, 使得 $P_{n,+,\mathcal{Z}} = Cf(n, \mathcal{Z})$ 。其中生成缠结定义如图 5.1, 5.2。

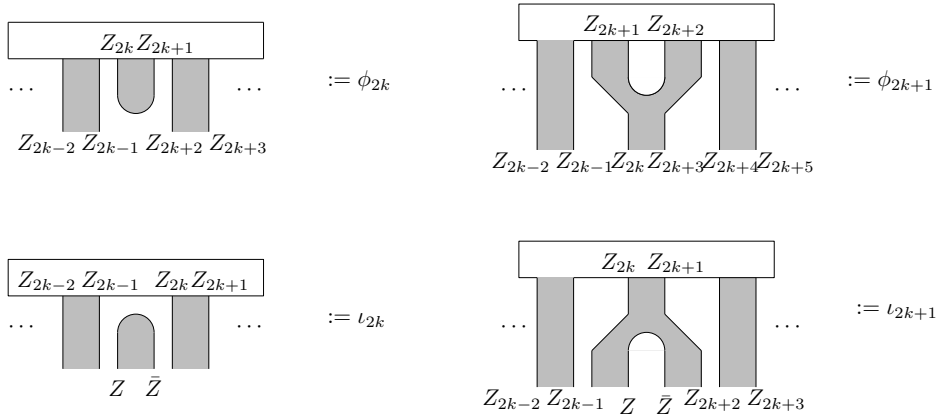


图 5.1 生成缠结: 包含和收缩

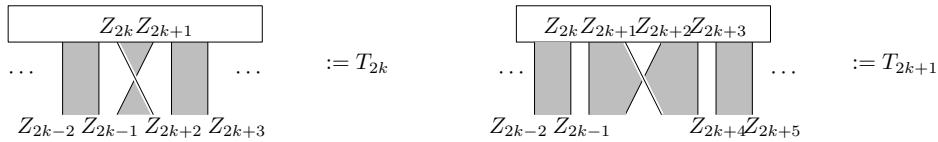


图 5.2 生成缠结: 辫子

定理 5.2: 这些生成元素定义了一个具有 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 辫结构的阴影平面代数的偶部分 (定义 3.4)。

证明 以下关系成立, 见图 5.3 和 5.4。通过与 F_+ 共轭, 反向阴影的 (R2) – (R6) 也满足 (关系对任意标记都成立, 因此为了简化视图, 我们省略标记)。

这里 (R5) 和 (R6) 中的辫子可以是正向或负向。(R0) 显然成立, (R1) 是引理 4.7 中的第一个等式, (R2), (R4), (R7) 来自直接的图形计算, 需要使用引理 4.1 和备注 4.2, (R3) 来自引理 4.6 证明的“锯齿”关系。

(R5) 的第一个等式是定义 4.9, 第二个等式来自直接的图形计算。(R6) 将在引理 4.11 中证明。

现在 (R0) – (R4) (也包括反向阴影) 给出了偶部分平面代数的结构。(C0) 可以轻松验证 (定义 4.9), (C1) 来自 (R5) 和 (R4)。(C2) 可以通过在右侧使用 (R5) 并应用 (R2), (R3), (R6) 验证。(C3) 将在之后证明 (引理 5.4)。(C4) 来自 (R7), 其他等

式是应用 (R5) 和 (C3) 的直接结果。(C5) 来自命题 4.18。

注释 5.1. 我们将用在线上的菱形符号表示 (R7) 中相应线上的卷曲或扭曲平方根。

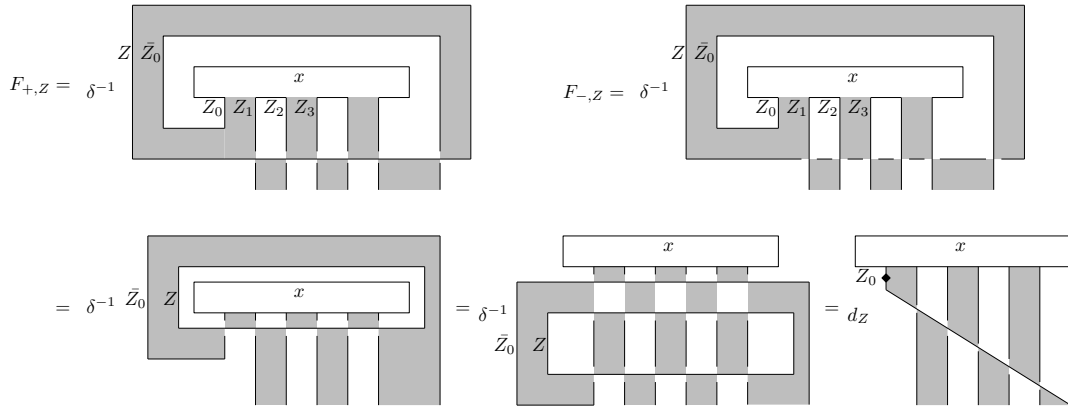
$$\begin{array}{c} \bullet \\ | \\ Z_0 Z_1 \end{array} := \begin{array}{c} \square \\ | \\ Z_0 Z_1 \end{array} \theta_{Z_1}^{-1/2}$$

(C5) 的直接推论如下：

推论 5.3: 对任意 $x \in P_{n,Z}$, 我们有

$$F_{\pm,Z}(x) = d_Z \theta_{Z_0}^{\mp 1/2} \prod_{k=0}^{2n-2} T_{2n-2-k}^{\pm 1} \quad (5.1)$$

证明 通过比较各种定义, 算子 $F_{\pm,Z}$ 由以下缠结给出。最终结论可由 (C5) (命题 4.18) 和 (R7) 得到。



现在 (C3) (见下一个引理) 可从推论 5.3, 引理 4.10 和推论 4.17 推出。

引理 5.4: 我们定义的辫子满足以下条件：

$$T_{k+1} T_k T_{k+1} = \eta^{(-1)^k} T_k T_{k+1} T_k. \quad (5.2)$$

证明 通过 $F_{+,Z}$ 的共轭作用, 该等式等价于 $T_1 T_0 T_1 = \eta T_0 T_1 T_0$ 。

现在从推论 5.3 和 4.17, 我们有 $\prod_{m=0}^{2n-2} T_{2n-2-m} T_1 = \eta T_0 \prod_{m=0}^{2n-2} T_{2n-2-m}$ 。由于 $T_m T_{m+2} = T_{m+2} T_m$, 化简后我们得到 $T_1 T_0 T_1 = \eta T_0 T_1 T_0$ 。

现在为了消去全局常数 η , 容易看出, 只需令 $\tilde{T}_k = \eta^{\frac{(-1)^k}{2}} T_k$ 即可。根据定理 3.6, 我们获得一个具有 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 辫子的无阴影平面代数 (现在辫结构来自 \tilde{T}_k)。相应的 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 作用是通过上下两个标记为平凡对象的圆圈之间插入输入盘给出, 见引

理3.5。下一个引理表明此作用与 ρ_2 (定义4.13) 相同。

引理 5.5: 此平面代数上 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 作用由 ρ_2 给出。

证明 据定理 4.15, 我们有 $F^{-1}F+ = \rho_2$, 可以很容易看出左侧的相应缠结与所需形式同痕 (见推论 5.3 的证明)。 ■

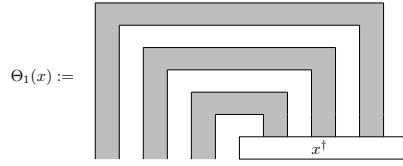
接下来我们通过对无阴影平面代数中的最小投影和 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 作用的详细分析, 得到以下结论。

定理 5.6: 我们得到一个具有 (酉) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -交叉辫子结构的 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -分次酉融合范畴 $\mathcal{D} := (C \boxtimes C)_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}^{\times}$ 。此外, 非平凡分次部分的投影由一个标记为 V 的单个帽子给出, $V \in \text{obj}(C)$, 我们将它们表示为 \hat{V} , $V \in \text{obj}(C)$, 并且有

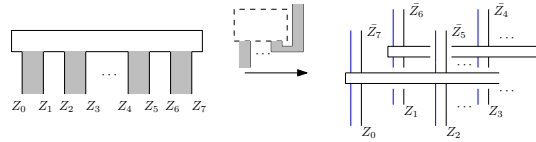
- \hat{V} 是极小投影 $\Leftrightarrow V$ 是简单对象。
- $\hat{V} X \boxtimes Y = X \boxtimes Y \hat{V} = \widehat{V X Y}$
- $\hat{V} \hat{W} = \hat{W} \hat{V} = \bigoplus_{X \in \text{Irr}(C)} X V \boxtimes X W$.

$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 作用 ρ (由 ρ_2 给出) 在对象上的作用为 $\rho(\hat{V}) = \hat{V}$ 和 $\rho(X \boxtimes Y) = Y \boxtimes X$

证明 回忆一下, P_n 的代数结构是在定义2.37中给出的。 θ_1 由以下缠结给出,



其酉性由平面同痕及 C 的酉性保证。我们首先描述来自偶部分的范畴. 当 n 是偶数时, 容易证明以下两个 Hom 空间作为 C^* 代数是同构的:



因此, 当 n 是偶数时, P_n 中的极小投影等价于 P_2 中的, 这些投影可以通过 $C \boxtimes C$ 中的简单对象来描述, 我们将它们记为 $p_{X \boxtimes Y}$, $X, Y \in \text{Irr}(C)$ 。我们将用以下的代表元来进行后续的计算。

$$\begin{array}{c} \boxed{p_{X \boxtimes Y}} \\ \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \\ X \quad Y \quad \bar{Y} \quad \bar{X} \end{array} \cong \begin{array}{c} \boxed{\tilde{p}_{X \boxtimes Y}} \\ \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \\ X \quad Y \quad \bar{Y} \quad \bar{X} \end{array} \quad \text{where} \quad \tilde{p}_{X \boxtimes Y} = \begin{array}{c} \downarrow \downarrow \\ \downarrow \downarrow \\ \downarrow \downarrow \\ \downarrow \downarrow \\ X \end{array} \begin{array}{c} \downarrow \downarrow \\ \downarrow \downarrow \\ \downarrow \downarrow \\ \downarrow \downarrow \\ Y \end{array}$$

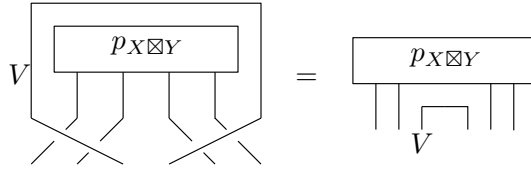
相应的融合环是同构的。注意, 相应的 evaluation 和 coevaluation 映射与引理 4.11 中的映射类似, 但没有扭转 (只有帽子或杯子不是范畴中的态射)。刚性 (rigidity) 由关系 (R6) 和平面同痕给出。此外, 根据命题 4.18, 辫子结构是一致的。因此, 来自偶部分的投影范畴作为一个酉辫子融合范畴等价于 $C \boxtimes C$ 。

当 $n = 1$ 时, 设 $\mathcal{Z} = \{V, W\}$, 通过计算构型空间的维度, 我们有 $\dim(P_{1, \mathcal{Z}}) =$

$\dim(\text{Hom}_C(V, W^*))$). 因此, 1-框空间中的投影由标记为 V, \bar{V} 的单一帽子给出, 并且当 V 是简单对象时, 该投影是极小的。对偶投影由标记为 \bar{V}, V 的帽子给出 (刚性由单线的平面同痕性保证), 我们将它们分别记作 $\hat{V}, \hat{\bar{V}}$ 。使用之前对偶部分的刻画, $\hat{V}\hat{W}$ 的融合规则是显然的。 $(\hat{V}\hat{W} = \hat{W}\hat{V})$ 可以通过直接论证 $\bigoplus_{X \in \text{Irr}(C)} XV \boxtimes XW = \bigoplus_{X \in \text{Irr}(C)} XW \boxtimes XV$ 或是通过辫子结构来建立投影等价性)

现在, 对于 n 为奇数的 P_n 中的任意投影 Q , 选取任意 $V \in \text{Irr}(C)$, 我们有 $Q \otimes \hat{V} \in P_{n+1}$, 因此它可以写成 $C \boxtimes C$ 中投影的求和。通过利用刚性和 $\hat{V} \otimes \hat{V}$ 的融合规则, 我们得出 n 为奇数时, P_n 中的投影等价于形如 $(X \boxtimes Y)\hat{V}$ 的投影的和。接下来我们证明它们等价于 P_1 中投影。

$(X \boxtimes Y)\hat{V} = \hat{V}(X \boxtimes Y)$ 通过由辫子给出的两个投影的等价性可以得到:

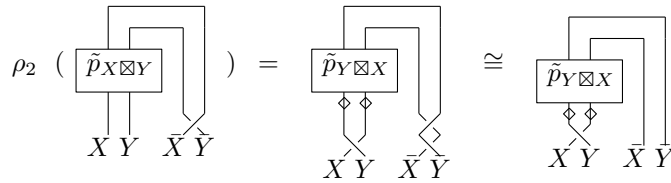


接下来, 通过直接计算 $\bigoplus_{Z \in \text{Irr}(C)} XZV \boxtimes Y\bar{Z}W = \bigoplus_{Z \in \text{Irr}(C)} XYV\bar{W}Z \boxtimes \bar{Z}$, 我们用刚性和融合规则得到以下等式:

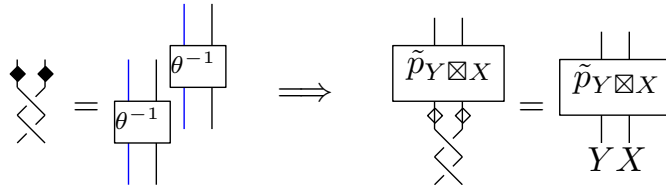
$$\text{Hom}_D((X \boxtimes Y)\hat{V}, \hat{W}) \cong \text{Hom}_{C \boxtimes C}(X \boxtimes Y\hat{V}\hat{W}, 1 \otimes 1) \cong \text{Hom}_C(XYV, W) \quad (5.3)$$

再通过对量子维数相等, 我们有 $(X \boxtimes Y)\hat{V} = \widehat{VXY}$ 。

接下来, 我们检查 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 在对象上的作用, $\rho_2(\hat{V}) = (\hat{V})$ 直接来自平面代数里对作用 (引理 3.5) 以及奇部分的对象的描述。对偶部分的作用需要一些计算。通过观察 ρ_2 (参照定义 4.13) 和辫子在 $\tilde{p}_{X \boxtimes Y}$ 上的作用的相似性, 得到以下恒等式 (我们还使用了引理 4.11 的证明, 使得 ρ_2 中涉及的翻转作用显而易见)。



现在 $\rho_2(X \boxtimes Y) = Y \boxtimes X$ 通过以下恒等式得到



其中, 第一个恒等式可以通过先将等式左边同痕为双线上的整体扭转, 然后使用命题 4.18 来证明 (可参见注释 5.3)。

最后, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -交叉辫子的兼容一致性通过推论 3.7 和 (C3) 容易得出. ■

注释 5.2. 球面性也可以简单地通过辫子的性质推导出来, 因为线可以在所有事物上面进行同痕。

注释 5.3. 命题 4.18 有如下图示表示, 见图 5.5。

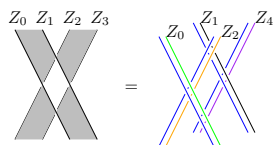


图 5.5 命题 4.18 图示

注释 5.4. 虽然酉性对于重构猜想至关重要, 但在我们的构造中并非必要, 整个证明非常类似。在这种情况下, 我们可以用非退化双线性形式替代内积, 基和对偶基来替代标准正交基。我们另一个使用酉性的地方是当我们取量子维数平方根时, 这些平方根出现在许多运算的系数中 (例如 ϕ_k, ι_k, T_k) 这些可以通过重新定义垂直复合, 添加一个额外的 $\frac{1}{d_-}$ 因子来调整, 这样系数就只涉及量子维数的乘积了。

第 6 章 一些应用

在这一章节中我们会给出扭曲范畴 $\mathcal{D} := (C \boxtimes C)_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}^{\times}$ 中辫子所满足的关系, 证明定理 1.2, 并诠释扭曲/非扭曲对应关系 (见表 1.1), 最后通过 \mathcal{D} 中的简单图形计算给出 C 中模数据非平凡的恒等式。

首先我们证明定义 4.9 中辫子结构 T_i 满足的关系。

定理 6.1: 辫子结构 T_k ($0 \leq k \leq 2n-2$) 满足以下关系

$$\begin{aligned} T_k T_{k+2} &= T_{k+2} T_k, \\ T_{k+1} T_k T_{k+1} &= \eta^{(-1)^k} T_k T_{k+1} T_k, \\ (T_{2n-2} T_{2n-1} \cdots T_1 T_0)^{2n} &= \left(\prod_{k=0}^{2n-1} \theta_{Z_k}^{\frac{1}{2}} \right) Id, \\ (T_0 T_1 \cdots T_{2n-2} T_{2n-1} \cdots T_1 T_0)^2 &= \theta_{Z_0}^2 Id. \end{aligned} \tag{6.1}$$

$T_0 T_1 \cdots T_{2n-2} T_{2n-1} \cdots T_1 T_0$ 和 T_k ($0 \leq k \leq 2n-2$) 交换

证明 第一个是显然的, 第二个来自引理 5.4. 第三个和第四个则是通过使用推论 5.3 和 $\rho_2^2 = Id$ 重写 $(F_+)^{2n} = Id$ 和 $F_+ = F_- \rho_2$, $\rho_2^2 = Id$. 最后一个则来自引理 5.5 以及平面代数作用 ρ 尊重辫子结构 (引理 3.5) ■

现在考虑这样的构型空间, 其中我们将所有黑色线都标记为相同的简单对象 V , 我们将其记为 $Cf^V(n)$. 参考文献 [24]^{Thm. 8} 关于对称映射类群 $SMod(\Sigma_{n-1})$ 的表述, 因此我们有以下推论:

推论 6.2: $Cf^V(n)$ 给出了 $SMod(\Sigma_{n-1})$ 的一个 (酉) 射影表示。

现在我们考虑 V 是平凡对象 1 的情形, 此时空间 $Cf^1(n)$ 与文献 [3] 中 $m=2$ 时的构型空间相同。我们在此构造的平面代数对应的是 2-区间 Jones-Wassermann 子因子 (2-interval Jones-Wassermann subfactor)。因此根据定理 4.16 我们对以下定理提供了一个不同的证明。

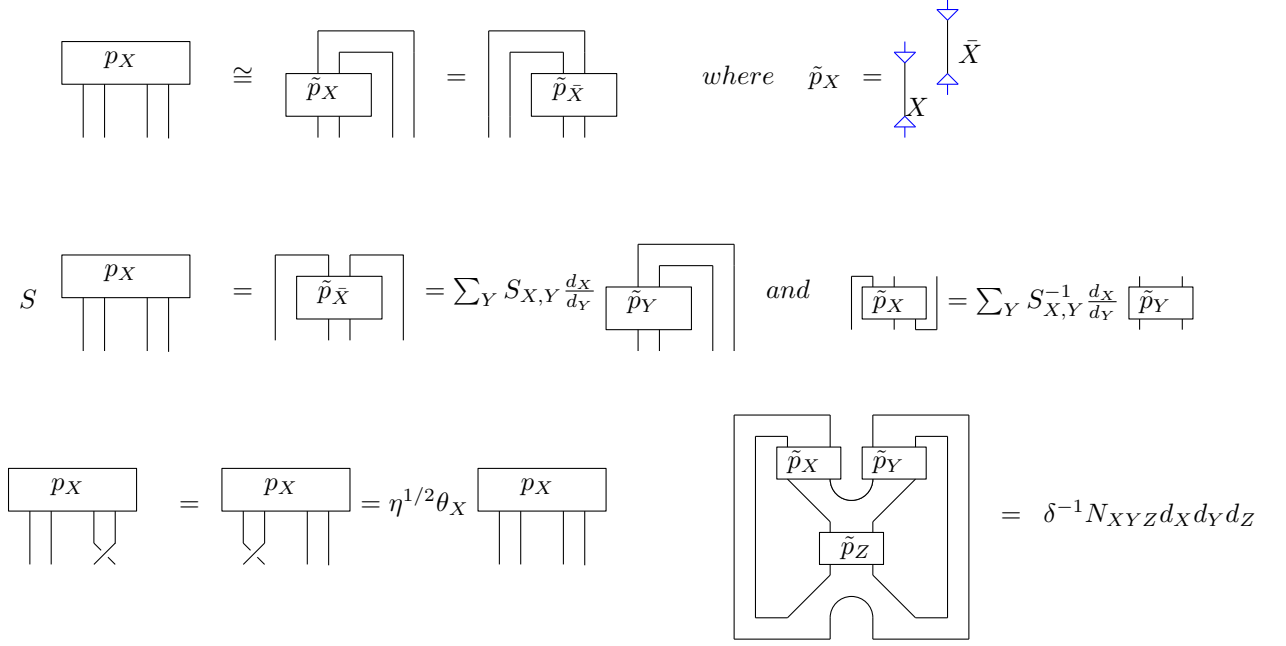
定理 6.3: ([3]) 2-区间 Jones-Wassermann 子因子是自对偶的。

在这种情况下, 辫子结构的描述要简单得多, 例如:

$$T_{2k} = \cdots Id \otimes \left(\bigoplus_{V \in \text{Irr}(C)} \theta_V^{-1} Id_V \boxtimes Id_{\bar{V}} \right) \otimes Id \cdots$$

考虑在 2-框空间上的辫子, 我们有 $T_0 = T_2$ 对应于 C 中的 T 矩阵, Fourier 变换 F_+ 对应 S -矩阵 ([3]), 而电荷共轭矩阵 C 由 Z_2 作用 ρ_2 给出。更多详细信息见图 6.1。

下面的推论可由定理 6.1 和引理 5.3 推出, 这个推论给出了著名的 $SL_2(\mathbb{Z})$ 射影


 图 6.1 当所有线段都标记为 1 (或 $\hat{1}$) 时的一些基本恒等式

表示。

推论 6.4: 下面的等式成立

$$\begin{aligned} S^4 &= Id (S^2 = C) \\ (T^{-1}S)^3 &= \eta C \\ (ST)^3 &= \eta^{-1} \end{aligned} \quad (6.2)$$

注释 6.1. 我们将在第 8 节中证明以下事实: 一般来说, 由 $Cf^1(n)$ 给出的 $SMod(\Sigma_{n-1})$ 表示等价于由 Reshetikhin-Turaev 拓扑量子场论 (TQFT) $n-1$ 的闭曲面的状态空间得到的表示, 见定理 8.2。这表明扩展理论的亏格-0 的信息 (比如说辫子结构) 包含了原理论的高亏格的信息。这给出了扭曲/非扭曲对应关系的解释。

之前的恒等式仅源自线之间的同痕变化。我们可以预期还会有更多恒等式源自整个平面代数的同痕。事实上, 我们得到了许多有趣的恒等式。在接下来的命题中, 我们仅列出三个恒等式, 它们仅涉及在标记为平凡对象的 2-框空间 ($(Cf(2, Z))$ 且所有 Z'_i 均为平凡对象)) 中通过输入圆盘的同痕。

命题 6.5: 我们有以下等式:

$$\begin{aligned} \sum_{V \in \text{Irr}(C)} \frac{\theta_V}{\theta_X} S_{YV} N_{VX}^Z &= \sum_{V \in \text{Irr}(C)} \frac{\theta_V}{\theta_W} S_{XV} N_{VY}^Z, \\ \sum_{V, W \in \text{Irr}(C)} \delta_{Y, Z} \frac{\theta_V}{\theta_W} S_{XV} N_{VW}^Z d_X d_W &= \sum_{V, W \in \text{Irr}(C)} \delta_{X, Z} \frac{\theta_V}{\theta_W} S_{YV} N_{VW}^Z d_Y d_W, \quad (6.3) \\ \sum_{V \in \text{Irr}(C)} \delta_{Y, Z} \frac{\theta_V}{\theta_X} N_{VX}^Z d_V &= \sum_{V, W \in \text{Irr}(C)} \frac{\theta_V}{\theta_W} S_{XZ} S_{YW} N_{WV}^Z d_V. \end{aligned}$$

证明 这里我们列出了我们得当命题中等式所使用的三个同痕恒等式，并给出了第一个恒等式的证明，其他的可以通过类似方法进行推导。

$$\begin{aligned}
 \text{RHS} &= \sum_{V,W} \frac{\theta_V}{\theta_W} \\
 &= \sum_V \frac{\theta_V}{\theta_X} S_{YV}^{-1} \frac{d_Y}{d_V} \\
 &= \delta^{-1} \sum_V \frac{\theta_V}{\theta_X} S_{YV} N_{VX}^Z d_Y d_X d_Z \\
 \\
 \text{LHS} &= \sum_{V,W} \frac{\theta_V}{\theta_W} \\
 &= \sum_V \frac{\theta_V}{\theta_Y} S_{XV}^{-1} \frac{d_X}{d_V} \\
 &= \delta^{-1} \sum_V \frac{\theta_V}{\theta_W} S_{XV} N_{VY}^Z d_X d_Y d_Z
 \end{aligned}$$

我们尚不清楚我们推导出的所有恒等式是否可以通过 Verlinde 公式、平衡方程 (balancing equation) 或 $SL_2(\mathbb{Z})$ 关系来生成。如果不能，那么将会有新的模数据范畴化的阻碍 (obstruction)。我们猜测，可以通过仅涉及平凡标记的 2-框的同胚来推导出一些不来源于已知关系的恒等式。

下一个恒等式来自于仅考虑非平凡标记的 2-框空间之间的平面同胚，该等式不能通过已知的恒等式生成。

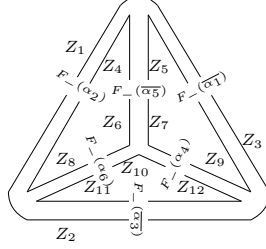
命题 6.6： 我们有以下等式，

$$= \sum_{\vec{\beta} \in Cf_{2,ONB}^{\otimes 6}} \prod_{i=1}^6 F_{-, \alpha_i \beta_i}$$

在这里，我们没有使线段呈锯齿形，而是通过简单地旋转框（可以将所有操作还原为标准形式）替代，其中 β_i 和 α_i 是对应配置空间中的标准正交基。我们记 $\bar{\alpha} := \rho_1(\alpha)$ 。

$F_{-, \alpha_i \beta_i} := \langle F_-(\alpha), (\beta) \rangle$.

证明 右侧是通过每个 2-框应用 (逆) Fourier 变换 F_- (逆时针旋转 $\frac{\pi}{2}$) 得到的, 见下图。



直接的同痕变换会得到左侧。这里我们给出简单情形的细节证明, 见图6.2, 可以看出证明同样适用于一般情形:

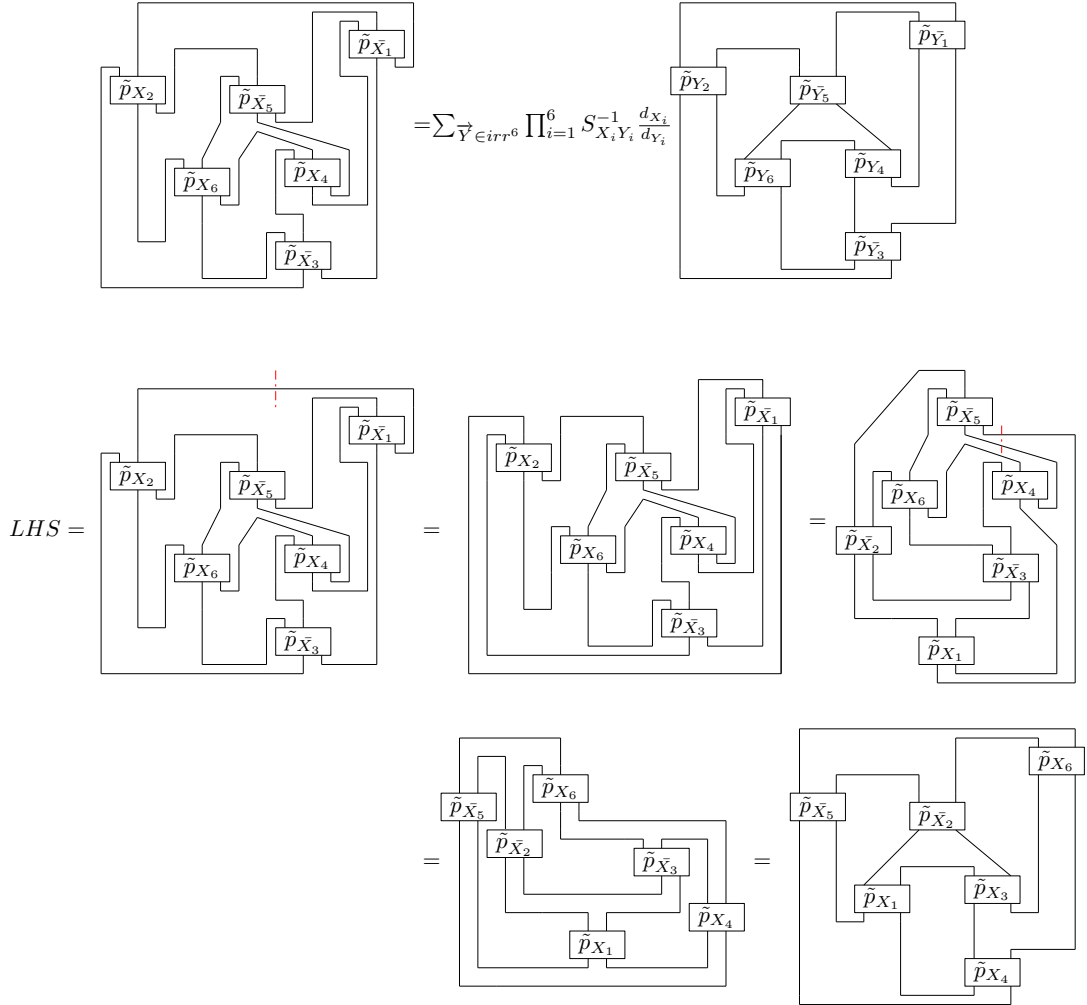


图 6.2 简单情形的图形证明

当所有 Z_i 都是平凡时, 我们将 α_i 和 β_i 分别替换为 \tilde{p}_{X_i} 和 \tilde{p}_{Y_i} , 并且 $F_{-, \alpha_i \beta_i} =$

$S_{X_i Y_i}^{-1}$ 。之前的命题简化为一个已知的恒等式，即 $6j$ -符号的自对偶性 [28]。现在我们用 Λ 表示由容许颜色 (admissible colour) $\{X_1 \otimes X_2 \otimes X_3 \otimes X_4 \otimes X_5 \otimes X_6\}_{\bar{X}}$ 所张成的子空间，其中 $N_{\bar{X}_1 \bar{X}_5 X_2} N_{\bar{X}_1 X_4 X_3} N_{X_2 X_6 \bar{X}_3} N_{X_4 X_5 X_6} \neq 0$ 。现在我们得到以下非模群关系的恒等式。

定理 6.7: 以下等式成立：

$$\text{Det}|_{\Lambda}(S^{\otimes 6}P - I^{\otimes 6}) = 0. \quad (6.4)$$

其中 P 是两个矩阵的复合：由一个表示循环 (16)(25)(34) 对应张量置换的置换矩阵和 $C^{\otimes 3} \times I^{\otimes 3}$ (C 是电荷共轭 (charge conjugation) 矩阵)。 $\text{Det}|_{\Lambda}$ 是在 Λ 上限制的矩阵的行列式。

证明 我们用 $\left| \begin{Bmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ X_4 & X_5 & X_6 \end{Bmatrix} \right|^2$ 来表示基无关 (basis-free) $6j$ -符号 (F -符号) 见 [28]

中的描述，并且记 $\left\{ \left| \begin{Bmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ X_4 & X_5 & X_6 \end{Bmatrix} \right|^2 \right\}_{\bar{X}}$ 为 v 。现在 $\left| \begin{Bmatrix} Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ Y_4 & Y_5 & Y_6 \end{Bmatrix} \right|^2$ 可以由上一

个命题右边的图的值给出而左边的值为 $\left| \begin{Bmatrix} \bar{X}_6 & \bar{X}_5 & \bar{X}_4 \\ X_3 & X_2 & X_1 \end{Bmatrix} \right|^2$ 。通过观察 v 是 $S^{\otimes 6}P$ 特

征值为 1 的一个特征向量并且 $v|_{\Lambda^c} = 0$ 。 ■

注释 6.2. 等式 6.4 给出模数据中 S 范畴化的阻碍。特别的，我们对下一章节讨论的规范后的理论仍可以继续相同操作，于是我们可以得到新的模数据中 S 范畴化的阻碍，以此类推，我们可以得到无穷多个阻碍！

第 7 章 等变化理论

这一章节我们将研究之前定理 5.6 得到的 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -交叉辫子融合范畴 \mathcal{D} 的 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 等变化理论, 我们将最终的范畴记为 $\mathcal{D}^{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}$.

在我们的情况下, 作用 ρ 是显式的, 且严格满足 $\rho^2 = Id$, 由此我们得到 $\mathcal{D}^{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}$ 中的简单对象形式为 $(XY) := X \boxtimes Y \oplus Y \boxtimes X$, (X, \pm) and (\hat{X}, \pm) ($X, Y \in \text{Irr}(C)$, $1_{\mathcal{D}^{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}} := (1, +)$). 此外, 得益于辫子结构的性质以及作用的拓扑描述, 很容易看出结构态射 (求值映射, 余求值映射, 辫子) 与该作用是可交换的, 因此在 $\mathcal{D}^{\mathbb{Z}_2}$ 中对应了相应的结构态射。由此, 我们的平面代数也适用于 $\mathcal{D}^{\mathbb{Z}_2}$ 的计算。

现在令 $S', T, N, S^{eq}, T^{eq}, \mathcal{N}$ 分别表示 C 和 $\mathcal{D}^{\mathbb{Z}_2}$ 的未归一化的 S -矩阵、 T -矩阵以及融合系数。

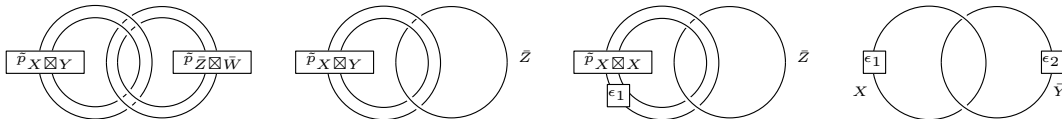
定理 7.1: 我们有 S^{eq} 是对称的并且

$$\begin{aligned} S_{(XY), (ZW)}^{eq} &= 2(S'_{X,Z} S'_{Y,W} + S'_{XW} S'_{YZ}) \\ S_{(XY), (Z, \epsilon)}^{eq} &= 2S'_{X,Z} S'_{Y,Z} \\ S_{(X, \epsilon_1), (Y, \epsilon_2)}^{eq} &= (S'_{X,Y})^2 \\ S_{(XY), (\hat{Z}, \epsilon)}^{eq} &= 0 \\ S_{(X, \epsilon_1), (\hat{Y}, \epsilon_2)}^{eq} &= \epsilon_1 \delta S'_{X,Y} \\ S_{(\hat{X}, \epsilon_1), (\hat{Y}, \epsilon_2)}^{eq} &= \epsilon_1 \epsilon_2 \eta^{-1} \theta_X^{1/2} \theta_Y^{1/2} (S' T^2 S')_{X,Y} \end{aligned} \quad (7.1)$$

并且 T^{eq} 是如下对角矩阵:

$$\begin{aligned} T_{(XY), (XY)}^{eq} &= \theta_X \theta_Y \\ T_{(X, \epsilon), (X, \epsilon)}^{eq} &= \theta_X^2 \\ T_{(\hat{X}, \epsilon), (\hat{X}, \epsilon)}^{eq} &= \epsilon \eta^{1/2} \theta_X^{1/2} \end{aligned} \quad (7.2)$$

证明 正如我们在预备部分所描述的一样, 我们只需在平面代数中评估以下四个图。这里 $\epsilon_i = \pm 1$ 表示我们为 u_g 选择的态射。



前面三个恒等式是通过使用命题 4.18 对第一个图进行求值得到的。第四个和第五

个恒等式来自对第二个和第三个图的求值，详细的计算如下：

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{c} \text{Diagram 1: Two circles with labels } \bar{p}_{X \boxtimes Y} \text{ and } \bar{z} \end{array} = \begin{array}{c} \text{Diagram 2: A complex diagram with labels } \bar{p}_{X \boxtimes Y}, z, \bar{z} \end{array} = \delta^{-1} \sum_{\alpha, \beta \in ONB} \begin{array}{c} \text{Diagram 3: A diagram with labels } \theta^{-1}, \theta, \alpha, \beta, \theta_2(\alpha), \theta_2(\beta) \end{array} \\
 & = \delta^{-5} \begin{array}{c} \text{Diagram 4: A diagram with labels } \theta^{-1}, \theta, x, y \end{array} = \delta^{-3} \begin{array}{c} \text{Diagram 5: A diagram with labels } x, y \end{array} \\
 & = \delta^{-3} \begin{array}{c} \text{Diagram 6: A diagram with labels } x, y, z \end{array} = \delta^{-1} \begin{array}{c} \text{Diagram 7: A diagram with labels } x, y, z \end{array} = \delta_{X,Y} \delta \begin{array}{c} \text{Diagram 8: A diagram with labels } y, z \end{array} \\
 & = \delta \delta_{X,Y} S'_{Z,Y}
 \end{aligned}$$

最后一个恒等式来自对最后一个图的求值，如下：

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{c} \text{Diagram 9: Two circles with labels } \epsilon_1, \epsilon_2, x, y \end{array} = \epsilon_1 \epsilon_2 \eta^{-1} \begin{array}{c} \text{Diagram 10: A diagram with labels } x, y \end{array} = \epsilon_1 \epsilon_2 \eta^{-1} \begin{array}{c} \text{Diagram 11: A diagram with labels } \theta, x, y \end{array} \\
 & = \epsilon_1 \epsilon_2 \eta^{-1} \sum_{Z \in \text{irr}(\mathcal{C})} \begin{array}{c} \text{Diagram 12: A diagram with labels } \theta, x, y, z \end{array} = \epsilon_1 \epsilon_2 \eta^{-1} \theta_X^{1/2} \theta_Y^{1/2} \sum_{Z \in \text{irr}(\mathcal{C})} \theta_Z^2 S'_{X,Z} S'_{Z,Y}
 \end{aligned}$$

■

现在我们将 \mathcal{C} 中归一化后得到的 S -矩阵简记为 S ，并定义矩阵 $P := \eta^{-1} T^{1/2} S T^2 S T^{1/2}$ （这与 [6], [4], [5] 中定义的 P 相同，因为他们的 T 矩阵是通过

$\eta^{-1/3}$ 归一化的)。通过直接计算得到以下推论。

推论 7.2: $\mathcal{D}^{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}$ 是模张量范畴并且其融合规则如下:

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_{(X_1 Y_1), (X_2 Y_2), (X_3 Y_3)} &= N_{X_1 X_2 X_3} N_{Y_1 Y_2 Y_3} + N_{X_1 X_2 Y_3} N_{Y_1 Y_2 X_3} + N_{X_1 Y_2 X_3} N_{Y_1 X_2 Y_3} + N_{Y_1 X_2 X_3} N_{X_1 Y_2 Y_3}, \\ \mathcal{N}_{(X_1 Y_1), (X_2 Y_2), (Z, \epsilon)} &= N_{X_1 X_2 Z} N_{Y_1 Y_2 Z} + N_{X_1 Y_2 Z} N_{Y_1 X_2 Z}, \\ \mathcal{N}_{(XY), (Z_1, \epsilon_1), (Z_2, \epsilon_2)} &= N_{X Z_1 Z_2} N_{Y Z_1 Z_2}, \\ \mathcal{N}_{(Z_1, \epsilon_1), (Z_2, \epsilon_2), (Z_3, \epsilon_3)} &= \frac{1}{2} N_{Z_1 Z_2 Z_3} (N_{Z_1 Z_2 Z_3} + \epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3), \\ \mathcal{N}_{(XY), (\hat{Z}_1, \epsilon_1), (\hat{Z}_2, \epsilon_2)} &= \sum_{W \in \text{Irr}(C)} \frac{S_{XW} S_{YW} S_{Z_1 W} S_{Z_2 W}}{S_{1W}^2}, \\ \mathcal{N}_{(X, \epsilon), (\hat{Z}_1, \epsilon_1), (\hat{Z}_2, \epsilon_2)} &= \frac{1}{2} \sum_{W \in \text{Irr}(C)} \frac{S_{XW}^2 S_{Z_1 W} S_{Z_2 W}}{S_{1W}^2} + \frac{1}{2} \epsilon \epsilon_1 \epsilon_2 \sum_{W \in \text{Irr}(C)} \frac{S_{XW} P_{Z_1 W} P_{Z_2 W}}{S_{1W}}.\end{aligned}$$

证明 通过使用定理 7.1 和 S 的酉性, 可以证明归一化后的 S^{eq} 是酉的。融合规则则由 Verlinde 公式得出。 ■

注释 7.1. 上述结论与在共形场论设定下 [6], [5]^{Sec. 9.3} 和 [4]^{Sec. 4.4} 得出的结论相同。

例子 7.3. 亚辛 (Metaplectic) 范畴 $SO(N)_2$ ($N = 2r + 1$) 是酉模张量范畴, 具有与 2 级 (level 2) B 型量子群范畴相同的融合规则, 参见 [56-58] 对其中不等价理论的刻画。它们有如下结构和融合规则: 两个量子维数为 \sqrt{N} 的简单对象 X_1, X_2 , 两个量子维数为 1 的简单对象 $1, Z$, 以及 $\frac{N-1}{2}$ 个量子维数为 2 的简单对象 $Y_i, 1 \leq i \leq \frac{N-1}{2}$ 。

1. $Z \otimes Y_i \cong Y_i, Z \otimes X_i \cong X_{i+1} \pmod{2}, Z^{\otimes 2} \cong 1,$
2. $X_i^{\otimes 2} \cong 1 \oplus \bigoplus_i Y_i,$
3. $X_1 \otimes X_2 \cong Z \oplus \bigoplus_i Y_i,$
4. $Y_i \otimes Y_j \cong Y_{\min\{i+j, N-i-j\}} \oplus Y_{|i-j|},$ 对 $i \neq j$ and $Y_i^{\otimes 2} = 1 \oplus Z \oplus Y_{\min\{2i, N-2i\}}.$

结合推论 7.2, 我们有:

推论 7.4: $SO(N)_2$ 等价于通过对 $C(\mathbb{Z}_N, q)$ 通过 \mathbb{Z}_2 置换规范得到的子范畴, 该子范畴由 $(\hat{1}, \pm)$ 生成。

证明 可以直接通过推论 7.2 计算融合规则, 其中 $(1, \pm)$ 对应简单对象 $1, Z$, $(\hat{1}, \pm)$ 对应简单对象 X_1, X_2 。因此我们只需证明可以得到全部的 2^{s+1} 个不等价的范畴 [58], 其中 s 是 N 的不同的素因子的个数。非退化二次型 q 的选择给出了 2^s 个不等价的理论 [58], 最后的两个选择来自于选择全局维数的不同平方根 (作为单线圈的值), 特别的, 将 η 变为 $-\eta$, 于是很容易通过 T 矩阵 $T_{(\hat{1}, \pm), (\hat{1}, \pm)}$ 的值进行区分。(也可以与 [59]^{Section 5} 中的计算相对比)。 ■

注释 7.2. 在我们构造扭曲范畴 \mathcal{D} 的过程中, 我们做了两个选择。第一个涉及提升

阴影平面代数，如定理3.6 后所讨论。第二个是选择 C 的全局维数 μ 的平方根 δ 。我们预计这些选择将涵盖所有不等价的 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 置换扩展。

第 8 章 一些观察和问题以及未来研究方向

在这一章节中，我们给出 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 置换规范更多的应用和问题及展望。我们将先证明扭曲范畴 \mathcal{D} 中 0-亏格信息（即构型空间 $Cf^1(n)$ 和辫子群作用）与 \mathcal{C} 对应的 Reshetikhin-Turaev 拓扑量子场论关联的 $(n-1)$ -亏格曲面态空间和上面的对称映射群作用的同构等价性，因此 \mathcal{D} 中辫子群表示像的有限性等价于 \mathcal{C} 对应的高亏格 $\text{SMod}(\Sigma)$ 表示像的有限性。由此我们对 Naidu 和 Rowell 11 年的猜想进行讨论，提出了一些问题并证明定理 1.4。最后我们提出一些未来的研究方向，其中包括对更一般的循环置换轨型精细结构的研究和量子信息中 Quon 语言扩展方向的探讨。

8.1 和 Reshetikhin-Turaev TQFT 的关系

我们参考 [27] 和 [33] 中 Reshetikhin-Turaev 拓扑量子场论 (TQFT) 的基本定义及相应的映射类群作用。

与亏格为 g 的闭曲面 Σ_g 关联的态空间为（这里我们沿用 [33] 中的记号， I 是指标集合， $\{V_i\}_{i \in I}$ 是所有简单对象的集合。）

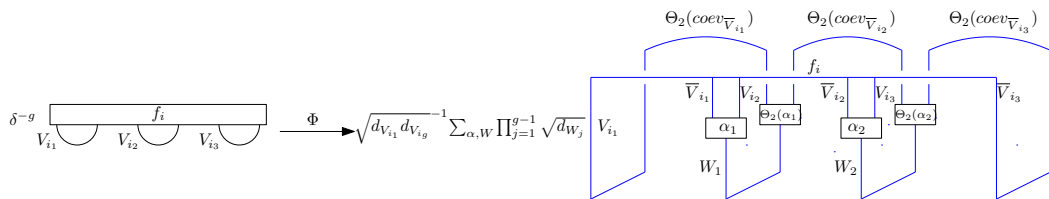
$$\Psi_g = \bigoplus_{i \in I^g} \Psi_g^i = \bigoplus_{i \in I^g} \text{Hom}(1, \bigotimes_{r=1}^g (V_{i_r} \otimes \bar{V}_{i_r})). \quad (8.1)$$

这里我们把向量空间 $\text{Hom}(1, \bigotimes_{r=1}^g (V_{i_r} \otimes \bar{V}_{i_r}))$ 记为 Ψ_g^i ,

我们定义映射 $\Phi_g : \Psi_g \rightarrow Cf^1(g+1)$:

$$\begin{aligned} \Phi_g(\bigoplus_{i \in I^g} f_i) &= \sum_{i \in I^g, \alpha, W_r \in \text{Irr}(\mathcal{C})} (Id_{V_{i_1}} \otimes \bigotimes_{r=1}^{g-1} \alpha_{\bar{V}_{i_r}, V_{i_{r+1}}}^{W_r} \otimes Id_{\bar{V}_{i_g}}) \circ f_i \\ &\quad \boxtimes \Theta_2((Id_{V_{i_1}^*} \otimes \bigotimes_{r=1}^{g-1} \alpha_{\bar{V}_{i_r}, V_{i_{r+1}}}^{W_r} \otimes Id_{V_{i_g}}) \circ \bigotimes_{r=1}^g (coev_{\bar{V}_{i_r}})) \end{aligned} \quad (8.2)$$

见以下图示：



引理 8.1：两个线性空间的维数相同：

$$\dim(\Psi_g) = \dim(Cf^1(g+1)). \quad (8.3)$$

证明 $\dim(\Psi_g) = \sum_{i \in I_g} \dim(\Psi_g^i)$, 并且我们有

$$\begin{aligned}
 \dim(\Psi_g^i) &= \dim(\text{Hom}(1, \bigotimes_{r=1}^g (V_{i_r} \otimes \bar{V}_{i_r}))) \\
 &= \dim(\text{Hom}(\bigotimes_{r=1}^g V_{i_r}, \bigotimes_{r=1}^g V_{i_r})) \\
 &= \sum_{W \in \text{Irr}(C)} \dim(\text{Hom}(\bigotimes_{r=1}^g V_{i_r}, W)) \dim(\text{Hom}(W, \bigotimes_{r=1}^g V_{i_r})) \\
 &= \sum_{W \in \text{Irr}(C)} \dim(\text{Hom}(1, W \otimes \bigotimes_{r=1}^g \bar{V}_{i_r})) \dim(\text{Hom}(1, \bar{W} \otimes \bigotimes_{r=1}^g V_{i_r}))
 \end{aligned}$$

■

定理 8.2: Φ_g 是 $\text{SMod}(\Sigma_g)$ 表示的一个 (等距) 同构。在这里, 我们也为了简便将 $\text{SMod}(\Sigma_g)$ 对 Ψ_g 的作用记作 $T_j (0 \leq j \leq 2g+1)$ 。

证明 我们首先利用这两个空间的非退化双线性形式 (或在酉情况下的内积) 证明 Φ_g 是一个 (等距) 同构。

$$\begin{aligned}
 < \Phi(f_i), \Phi(f_i) > = \delta^{-4(g-1)} \\
 &= \prod_{j=1}^g d_{V_{i_j}}^{-1} \\
 &= \delta^{-2g} < f_i, f_i >_{RT}
 \end{aligned}$$

结论可以从引理 8.1 推出。接下来，我们证明它们是 $\text{SMod}(\Sigma_g)$ -等变的。

$$\begin{aligned}
 \langle T_{2k+1}(\Phi_g(f_i)), a \rangle &= d_{V_{i_1}}^{-1} d_{V_{i_g}}^{-1} \sum_W \sqrt{d_{W_1} d_{W_2}} \delta^{-8-1} \\
 &= d_{V_{i_1}}^{-1} d_{V_{i_g}}^{-1} \sum_W \sqrt{d_{W_1} d_{W_2}} \delta^{-4-1} \\
 &= d_{V_{i_1}}^{-1} d_{V_{i_g}}^{-1} \sum_W \sqrt{d_{W_1} d_{W_2}} \delta^{-3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \langle \Phi_g(T_{2k+1}(f_i)), a \rangle &= d_{V_{i_1}}^{-1} d_{V_{i_g}}^{-1} \sum_W \sqrt{d_{W_1} d_{W_2}} \delta^{-4-3} \\
 &= d_{V_{i_1}}^{-1} d_{V_{i_g}}^{-1} \sum_W \sqrt{d_{W_1} d_{W_2}} \delta^{-5} \\
 &= d_{V_{i_1}}^{-1} d_{V_{i_g}}^{-1} \sum_W \sqrt{d_{W_1} d_{W_2}} \delta^{-3}
 \end{aligned}$$

$T_{2k}(0 \leq k \leq g)$ 作用的等价性是直接的, 因此定理得证。 ▀

注释 8.1. 当使用 Temperley-Lieb-Jones 模张量范畴时, 等价性更容易看出, 更多的计算和类似的 Fourier 配对公式可以参考 [60]。

8.2 性质 F (Property F) 猜想

定义 8.3: 一个融合范畴被称为是**整 (integral)** 的, 如果其简单对象的 Frobenius-Perron 维数 $\text{FPdim}(X)$ 是整数。如果对任何简单对象 X , $\text{FPdim}(X)^2 \in \mathbb{Z}$, 则称之为**弱整数 (weakly integral)** 融合范畴。

定义 8.4: 如果一个融合范畴与一个幂零融合范畴是 Morita 等价的, 则称其为**弱群理论的 (weakly group theoretical)**。

注释 8.2. 每个弱群理论的融合范畴都是弱整的, 但并不知道是否所有弱整的融合范畴都是弱群理论的 [61]。

Naidu 和 Rowell 的一个猜想 (称为性质 F 猜想) 如下

猜想 8.5: ([29]) 从弱整数辫子融合范畴中任何对象得到的辫子群表示的像都是有限的。(辫子群像的有限性称为**性质 F**)

这一猜想已经在亚辛范畴 [62-63] 和一般弱群理论范畴 [64] 中得到了验证。由于规范过程保持整性, 我们提出以下相关问题:

问题 8.6. $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 置换规范过程否保持性质 F ?

我们的详细构造有以下结果: 与对象 $\hat{1}$ 相关的辫子群表示与原始范畴的对称映射类群表示 (推论 6.2 和定理 8.2) 是相同的。特别的, 空间 $\text{Hom}_{\mathcal{D}_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}}((1, +) \oplus (1, -), (\hat{1}, +)^{\otimes 2n})$ 自然同构于 $Cf^1(n)$. 辫子群的表示是等价的 (因为我们在相同的平面代数中进行计算). 现在问题 8.6 可以进一步演化为:

问题 8.7. 给定一个模张量范畴 \mathcal{C} , 如果 \mathcal{C} 具有属性 F , 那么于 \mathcal{C} 关联的对称映射类群表示是否具有有限像?

由于弱群理论属性在规范变换下是不变的 [61], 结合 [64] 的结果, 我们可以得到以下结论:

推论 8.8: 弱群理论范畴的对称映射类群表示具有有限像。

证明 假设模张量范畴 \mathcal{C} 是弱群理论的, 那么其 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 置换规范的范畴 $\mathcal{D} = (\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{C})_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}^{\times, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}$ 也是弱群理论的 [61], 因此根据 [64] 具有属性 F 。因此, 通过之前的论证和定理 8.2, 我们得到从 $\text{Hom}_{\mathcal{D}}((1, +) \oplus (1, -), (\hat{1}, +)^{\otimes 2n})$ 获得的辫子群表示的像是有限的, 这与 $\text{SMod}(\Sigma_{n-1})$ 表示像的有限性等价。■

此外, 根据定理 8.2, 我们这里于 $\mathcal{C}(\mathbb{Z}/(2r+1)\mathbb{Z}, q)$ 关联的对称映射类群表示与 [64] 和 [65] 中计算的表示是等价的 (再次通过定理 8.2), 因此像是有限的, 作为直接结果, 我们有:

推论 8.9: [63] 当 $N = 2r + 1$, $SO(N)_2$ 有性质 F .

证明 容易根据融合规则得到 $SO(N)_2$ 是由对象 $(\hat{1}, +)$ 生成的, 因此只需考虑辫子群在 $\text{Hom}_{SO(N)_2}((1, +), (\hat{1}, +)^{\otimes 2n})$ 上的作用, 该空间是 $\text{Hom}_{SO(N)_2}((1, +) \oplus$

$(1, -), (\hat{1}, +)^{\otimes 2n})$ 的一个不变子空间. 而后者自然同构于空间 $Cf^1(n)$. ■

注释 8.3. 这里如果规范理论有性质 F , 那我们得到的信息应该是更多的, 上述结论我们仅仅用了辫子群在特殊态射空间上的作用像的有限性, 即仅考虑了 $(\hat{1}, \pm)$ 这样的对象, 事实上, 我们期望可以通过所有态射空间上辫群作用的像有限性得到原始理论所有带孔曲面的某种映射类子群表示像的有限性。

8.3 循环群置换规范

在 [12] 和 [13] 中, 作者给出了在顶点算子代数框架下 $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ 置换轨型的 S -矩阵公式。自然可以提出以下问题:

问题 8.10. 我们的技术是否可以推广到 $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ 置换规范的情况?

我们认为一般思路是相同的, 文章 [3] 给出了一般的 n -线段的 Jones-Wassermann 子因子平面代数的构造。并定义了如下 Fourier 变换/配对 (图 8.1 来自于 [3]):

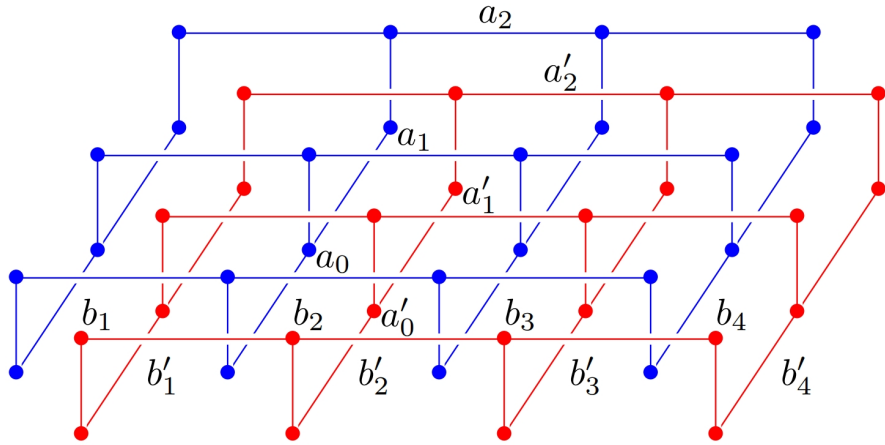


图 8.1 n -线段 Jones-Wassermann 子因子平面代数 Fourier 变换

因此我们首先要考虑的是如何将其拓展到 n 层的广义构型空间 (即会有额外的线段连接蓝色和红色的图形)。之后的主要困难即在定义所有这些精细的结构, 特别是辫子结构, 这涉及到对平面代数上 $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ 辫子结构的刻画。我们未来将重点研究这一问题。

8.4 量子信息

如果我们取模张量范畴 $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, q)$, 则 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 置换扩展 \mathcal{D} 的简单对象形式为 (j_1, j_2) 和 \hat{j} , 其中 $0 \leq j, j_1, j_2 \leq d-1$, 见定理 5.6。设 $q(j) = e^{\frac{2\pi i j^2}{d}}$ 。由对象 $\tau = \hat{1}$ 生成的平面子代数及其辫子结构, 被称为的超费米平面超代数 (parafermion planar para algebras), 在 [66] 中引入。[66] 中的电荷 (charge) 在我们的例子中表示为 $(j, \bar{j} = d - j)$ 。

例如, 在 [66]^{Proposition 2.15} 中的相位平方根在我们的情况下由归一化因子 $\eta^{\frac{1}{2}}$ 给出, 相关的辫子结构和 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 作用见 [66]^{Section 8}。此外, 编子群表示的像群在 [66]^{Proposition 9.1} 中计算出, 我们也可由此推出亚辛范畴的性质 F 。

这种超费米平面超代数已被用于构建 Quon 语言以研究量子信息 [67]。将 Quon

语言扩展到使用完整的 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 扭曲范畴 \mathcal{D} 作为在曲面上的弦网 (string-net), 并结合最近的 $2+1$ 交替流形 (alterfold) 理论 [68-69], 将会是非常有趣的。

参考文献

- [1] Edie-Michell C, Jones C, Plavnik J Y. Fusion rules for $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ permutation gauging[J/OL]. J. Math. Phys., 2019, 60(10): 102302, 15. <https://doi.org/10.1063/1.5117843>.
- [2] Jones V. Some unitary representations of Thompson's groups F and T [J/OL]. J. Comb. Algebra, 2017, 1(1): 1-44. <https://doi.org/10.4171/JCA/1-1-1>.
- [3] Liu Z, Xu F. Jones-Wassermann subfactors for modular tensor categories[J/OL]. Adv. Math., 2019, 355: 106775, 40. <https://doi.org/10.1016/j.aim.2019.106775>.
- [4] Borisov L, Halpern M B, Schweigert C. Systematic approach to cyclic orbifolds[J/OL]. Internat. J. Modern Phys. A, 1998, 13(1): 125-168. <https://doi.org/10.1142/S0217751X98000044>.
- [5] Kac V G, Longo R, Xu F. Solitons in affine and permutation orbifolds[J/OL]. Comm. Math. Phys., 2005, 253(3): 723-764. <https://doi.org/10.1007/s00220-004-1160-1>.
- [6] Bantay P. Characters and modular properties of permutation orbifolds[J/OL]. Phys. Lett. B, 1998, 419(1-4): 175-178. [https://doi.org/10.1016/S0370-2693\(97\)01464-0](https://doi.org/10.1016/S0370-2693(97)01464-0).
- [7] Bantay P. Permutation orbifolds[J/OL]. Nuclear Phys. B, 2002, 633(3): 365-378. [https://doi.org/10.1016/S0550-3213\(02\)00198-0](https://doi.org/10.1016/S0550-3213(02)00198-0).
- [8] Kawahigashi Y, Longo R, Müger M. Multi-interval subfactors and modularity of representations in conformal field theory[J/OL]. Comm. Math. Phys., 2001, 219(3): 631-669. <https://doi.org/10.1007/PL00005565>.
- [9] Longo R, Xu F. Topological sectors and a dichotomy in conformal field theory[J/OL]. Comm. Math. Phys., 2004, 251(2): 321-364. <https://doi.org/10.1007/s00220-004-1063-1>.
- [10] Barmerier T, Schweigert C. A geometric construction for permutation equivariant categories from modular functors[J/OL]. Transform. Groups, 2011, 16(2): 287-337. <https://doi.org/10.1007/s00031-011-9132-y>.
- [11] Gui b. Genus-zero permutation-twisted conformal blocks for tensor product vertex operator algebras: The tensor-factorizable case[A/OL]. 2021. arXiv:2111.04662.
- [12] Dong C, Ren L, Xu F. S -matrix in orbifold theory[J/OL]. J. Algebra, 2021, 568: 139-159. <https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2020.10.006>.
- [13] Dong C, Xu F, Yu N. S -matrix in permutation orbifolds[J/OL]. J. Algebra, 2022, 606: 851-876. <https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2022.05.025>.
- [14] Müger M. Conformal orbifold theories and braided crossed G -categories[J/OL]. Comm. Math. Phys., 2005, 260(3): 727-762. <https://doi.org/10.1007/s00220-005-1291-z>.
- [15] Barkeshli M, Wen X G. $u(1) \times u(1) \rtimes \mathbb{Z}_2$ chern-simons theory and \mathbb{Z}_4 parafermion fractional quantum hall states[J/OL]. Phys. Rev. B, 2010, 81: 045323. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.81.045323>.
- [16] Barkeshli M, Bonderson P, Cheng M, et al. Symmetry fractionalization, defects, and gauging of topological phases[J/OL]. Phys. Rev. B, 2019, 100: 115147. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.100.115147>.

-
- [17] Bulmash D, Barkeshli M. Gauging fractons: Immobile non-abelian quasiparticles, fractals, and position-dependent degeneracies[J/OL]. *Phys. Rev. B*, 2019, 100: 155146. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.100.155146>.
- [18] Cui S X, Galindo C, Plavnik J Y, et al. On gauging symmetry of modular categories[J/OL]. *Comm. Math. Phys.*, 2016, 348(3): 1043-1064. <https://doi.org/10.1007/s00220-016-2633-8>.
- [19] Drinfeld V, Gelaki S, Nikshych D, et al. On braided fusion categories. I[J/OL]. *Selecta Math. (N.S.)*, 2010, 16(1): 1-119. <https://doi-org.srv-proxy1.library.tamu.edu/10.1007/s00029-010-0017-z>.
- [20] Etingof P, Nikshych D, Ostrik V. Fusion categories and homotopy theory[J/OL]. *Quantum Topol.*, 2010, 1(3): 209-273. <https://doi.org/10.4171/QT/6>.
- [21] Gannon T, Jones C. Vanishing of categorical obstructions for permutation orbifolds[J/OL]. *Comm. Math. Phys.*, 2019, 369(1): 245-259. <https://doi.org/10.1007/s00220-019-03288-9>.
- [22] Barmeier T, Fuchs J, Runkel I, et al. Module categories for permutation modular invariants[J/OL]. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, 2010(16): 3067-3100. <https://doi.org/10.1093/imrn/rnp235>.
- [23] Bischoff M, Jones C. Computing fusion rules for spherical G -extensions of fusion categories[J/OL]. *Selecta Math. (N.S.)*, 2022, 28(2): Paper No. 26, 39. <https://doi.org/10.1007/s00029-021-00725-3>.
- [24] Birman J S, Hilden H M. *Ann. of math. stud.*, no. 66: On the mapping class groups of closed surfaces as covering spaces[M]. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1971: 81-115.
- [25] Birman J S, Hilden H M. On isotopies of homeomorphisms of Riemann surfaces[J/OL]. *Ann. of Math. (2)*, 1973, 97: 424-439. <https://doi.org/10.2307/1970830>.
- [26] Margalit D, Winarski R R. Braids groups and mapping class groups: the Birman-Hilden theory[J/OL]. *Bull. Lond. Math. Soc.*, 2021, 53(3): 643-659. <https://doi.org/10.1112/blms.12456>.
- [27] Reshetikhin N, Turaev V G. Invariants of 3-manifolds via link polynomials and quantum groups[J/OL]. *Invent. Math.*, 1991, 103(3): 547-597. <http://dx.doi.org/10.1007/BF01239527>.
- [28] Liu Z. Quon language: surface algebras and Fourier duality[J/OL]. *Comm. Math. Phys.*, 2019, 366(3): 865-894. <https://doi.org/10.1007/s00220-019-03361-3>.
- [29] Naidu D, Rowell E C. A finiteness property for braided fusion categories[J/OL]. *Algebr. Represent. Theory*, 2011, 14(5): 837-855. <http://dx.doi.org.proxy.lib.ohio-state.edu/10.1007/s10468-010-9219-5>.
- [30] Etingof P, Gelaki S, Nikshych D, et al. Mathematical surveys and monographs: volume 205 tensor categories[M/OL]. American Mathematical Society, Providence, RI, 2015: xvi+343. <http://dx.doi.org/10.1090/surv/205>.
- [31] Bakalov B, Kirillov A, Jr. University lecture series: volume 21 lectures on tensor categories and modular functors[M]. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001: x+221.
- [32] Rowell E C. From quantum groups to unitary modular tensor categories[M/OL]//*Contemp. Math.*: volume 413 Representations of algebraic groups, quantum groups, and Lie algebras. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006: 215-230. <http://dx.doi.org/10.1090/conm/413/07848>.

-
- [33] Turaev V G. De Gruyter studies in mathematics: volume 18 quantum invariants of knots and 3-manifolds[M/OL]. revised ed. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2010: xii+592. <https://doi-org.proxy.lib.ohio-state.edu/10.1515/9783110221848>.
 - [34] Etingof P, Nikshych D, Ostrik V. On fusion categories[J/OL]. Ann. of Math. (2), 2005, 162(2): 581-642. <http://dx.doi.org/10.4007/annals.2005.162.581>.
 - [35] Gelaki S, Nikshych D. Nilpotent fusion categories[J/OL]. Adv. Math., 2008, 217(3): 1053-1071. <https://doi-org.libezp.lib.lsu.edu/10.1016/j.aim.2007.08.001>.
 - [36] Rowell E C, Ruan Y, Wang Y. The Witt classes of $\mathfrak{so}(2r)_{2r}$ [J/OL]. Comm. Algebra, 2022, 50(12): 5246-5265. <https://doi.org/10.1080/00927872.2022.2083630>.
 - [37] Galindo C. On braided and ribbon unitary fusion categories[J/OL]. Canad. Math. Bull., 2014, 57(3): 506-510. <https://doi.org/10.4153/CMB-2013-017-5>.
 - [38] Ng S H, Rowell E C, Wen X G. Classification of modular data up to rank 11[A]. 2023.
 - [39] Ng S H, Schauenburg P. Congruence subgroups and generalized Frobenius-Schur indicators [J/OL]. Comm. Math. Phys., 2010, 300(1): 1-46. <http://dx.doi.org/10.1007/s00220-010-1096-6>.
 - [40] Ng S H, Schauenburg P. Frobenius-Schur indicators and exponents of spherical categories [J/OL]. Adv. Math., 2007, 211(1): 34-71. <https://doi-org.proxy.lib.ohio-state.edu/10.1016/j.aim.2006.07.017>.
 - [41] Bruillard P, Ng S H, Rowell E C, et al. Rank-finiteness for modular categories[J/OL]. J. Amer. Math. Soc., 2016, 29(3): 857-881. <https://doi.org/10.1090/jams/842>.
 - [42] Turaev V. Ems tracts in mathematics: volume 10 homotopy quantum field theory[M/OL]. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2010: xiv+276. <https://doi.org/10.4171/086>.
 - [43] Kirillov A, Jr. On G -equivariant modular categories[A]. 2004. math/0401119.
 - [44] Burciu S, Natale S. Fusion rules of equivariantizations of fusion categories[J/OL]. J. Math. Phys., 2013, 54(1): 013511, 21. <https://doi.org/10.1063/1.4774293>.
 - [45] Davydov A, Nikshych D. The Picard crossed module of a braided tensor category[J/OL]. Algebra Number Theory, 2013, 7(6): 1365-1403. <https://doi.org/10.2140/ant.2013.7.1365>.
 - [46] Jones V F R. Planar algebras, I[J/OL]. New Zealand J. Math., 2021 [2021–2022], 52: 1-107. <https://doi.org/10.53733/172>.
 - [47] Guionnet A, Jones V F R, Shlyakhtenko D. Clay math. proc.: volume 11 random matrices, free probability, planar algebras and subfactors[M]. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010: 201-239.
 - [48] Morrison S, Peters E, Snyder N. Skein theory for the D_{2n} planar algebras[J/OL]. J. Pure Appl. Algebra, 2010, 214(2): 117-139. <https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2009.04.010>.
 - [49] Henriques A G, Penneys D, Tener J. Planar algebras in braided tensor categories[J/OL]. Mem. Amer. Math. Soc., 2023, 282(1392): vi+106. <https://doi.org/10.1090/memo/1392>.
 - [50] Brothier A, Hartglass M, Penneys D. Rigid C^* -tensor categories of bimodules over interpolated free group factors[J/OL]. J. Math. Phys., 2012, 53(12): 123525, 43. <https://doi.org/10.1063/1.4769178>.

-
- [51] Ghosh S K. Planar algebras: a category theoretic point of view[J/OL]. *J. Algebra*, 2011, 339: 27-54. <https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2011.04.017>.
 - [52] Farb B, Margalit D. Princeton mathematical series: volume 49 a primer on mapping class groups[M]. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2012: xiv+472.
 - [53] Birman J S. Annals of mathematics studies, no. 82: Braids, links, and mapping class groups[M]. Princeton University Press, Princeton, N.J.; University of Tokyo Press, Tokyo, 1974: ix+228.
 - [54] Wajnryb B. A simple presentation for the mapping class group of an orientable surface[J/OL]. *Israel J. Math.*, 1983, 45(2-3): 157-174. <https://doi.org/10.1007/BF02774014>.
 - [55] Liu Z, Morrison S, Penneys D. Lifting shadings on symmetrically self-dual subfactor planar algebras[M/OL]//Contemp. Math.: volume 747 Topological phases of matter and quantum computation. Amer. Math. Soc., [Providence], RI, [2020] ©2020: 51-61. <https://doi.org/10.1090/conm/747/15038>.
 - [56] Hastings M B, Nayak C, Wang Z. Metaplectic Anyons, Majorana Zero Modes, and their Computational Power[J/OL]. *Phys. Rev.*, 2013, B87(16): 165421. DOI: 10.1103/PhysRevB.87.165421.
 - [57] Hastings M B, Nayak C, Wang Z. On metaplectic modular categories and their applications [J/OL]. *Comm. Math. Phys.*, 2014, 330(1): 45-68. <http://dx.doi.org.proxy.lib.ohio-state.edu/10.1007/s00220-014-2044-7>.
 - [58] Ardonne E, Cheng M, Rowell E C, et al. Classification of metaplectic modular categories[J/OL]. *J. Algebra*, 2016, 466: 141-146. <https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2016.08.001>.
 - [59] Gelaki S, Naidu D, Nikshych D. Centers of graded fusion categories[J/OL]. *Algebra Number Theory*, 2009, 3(8): 959-990. <https://doi.org/10.2140/ant.2009.3.959>.
 - [60] Ruan Y. Projective representations of hecke groups from topological quantum field theory [A/OL]. 2022. arXiv:2203.10745.
 - [61] Etingof P, Nikshych D, Ostrik V. Weakly group-theoretical and solvable fusion categories [J/OL]. *Adv. Math.*, 2011, 226(1): 176-205. <https://doi.org/10.1016/j.aim.2010.06.009>.
 - [62] Rowell E C, Wenzl H. $SO(N)_2$ braid group representations are Gaussian[J/OL]. *Quantum Topol.*, 2017, 8(1): 1-33. <https://doi.org/10.4171/QT/85>.
 - [63] Gustafson P, Rowell E C, Ruan Y. Metaplectic categories, gauging and property F [J/OL]. *Tohoku Math. J. (2)*, 2020, 72(3): 411-424. <https://doi.org/10.2748/tmj/1601085623>.
 - [64] Green J, Nikshych D. On the braid group representations coming from weakly group-theoretical fusion categories[J/OL]. *J. Algebra Appl.*, 2021, 20(1): Paper No. 2150210, 20. <https://doi.org/10.1142/S0219498821502108>.
 - [65] Bloomquist W, Wang Z. On topological quantum computing with mapping class group representations[J/OL]. *J. Phys. A*, 2019, 52(1): 015301, 23. <https://doi.org/10.1088/1751-8121/aaeeal>.
 - [66] Jaffe A, Liu Z. Planar para algebras, reflection positivity[J/OL]. *Comm. Math. Phys.*, 2017, 352(1): 95-133. <https://doi.org/10.1007/s00220-016-2779-4>.
 - [67] Liu Z, Wozniakowski A, Jaffe A M. Quon 3D language for quantum information[J/OL]. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 2017, 114(10): 2497-2502. <https://doi.org/10.1073/pnas.1621345114>.

- [68] Liu Z, Ming S, Wang Y, et al. 3-Altterfolds and Quantum Invariants[A]. 2023.
- [69] Liu Z, Ming S, Wang Y, et al. Alterfold Topological Quantum Field Theory[A]. 2023. arXiv: 2312.06477.

声 明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师指导下，独立进行研究工作所取得的成果。尽我所知，除文中已经注明引用的内容外，本学位论文的研究成果不包含任何他人享有著作权的内容。对本论文所涉及的研究工作做出贡献的其他个人和集体，均已在文中以明确方式标明。

签 名： 陈元 日 期： 2009.21

指导教师评语

暂无

答辩委员会决议书

暂无