有关辛流形的读书笔记

邵钰果 2020311340
Tsinghua University

日期：December 8, 2020

1 辛线性空间

定义 1.1. 有限维向量空间 V 中的辛形式是一个非退化的, 反对称的, 双线性形式 $\omega : V \times V \to \mathbb{R}$。非退化意味着映射 $\tilde{\omega} : V \to V^*$ 其中 $\tilde{\omega}(v)(w) = \omega(v, w)$, , 对 $v, w \in V$, 是一个线性同构。(V, ω) 被称为辛线性空间。

引理 1.1. *(Cartan)* 令 V 是一个 n 维线性空间，ω 是一个 V 上反对称双线性形式。若 $\omega \neq 0$, 则 $\tilde{\omega}$ 的的像的维数是偶数。若 $\dim \tilde{\omega}(V) = 2k$, 则存在一组 $\tilde{\omega}(V)$ 的基 $l^1, l^2, \ldots, l^{2k}$ 使得

$$\omega = \sum_{j=1}^{k} l^{2j-1} \wedge l^{2j}$$

证明. 令 $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ 是 V 的基, $\{v_1^*, v_2^*, \ldots, v_n^*\}$ 是 V^* 中对应的对偶基。若 $a_{ij} = \omega(v_i, v_j), i < j$ 则有

$$\omega = \sum_{i<j} a_{ij} v_i^* \wedge v_j^*$$

因为 $\omega \neq 0$ 于是存在 $a_{ij} \neq 0$, 交换基的顺序不妨设 $a_{12} \neq 0$，令

$$l^1 = \frac{1}{a_{12}} \tilde{\omega}(v_1) = \frac{1}{a_{12}} (a_{12} v_2^* + \sum_{j=3}^{n} \frac{1}{a_{1j}} v_j^*)$$

同理

$$l^2 = \tilde{\omega}(v_2) = -a_{12} v_1^* + \sum_{j=3}^{n} \frac{1}{a_{2j}} v_j^*$$

得到 $\{l^1, l^2, v_3^*, \ldots, v_n^*\}$ 仍然是 V^* 的基。

令 $\omega_1 = \omega - l^1 \wedge l^2$ 则,

$$\tilde{\omega}_1(v_1) = a_{12} l^1 - l^1(v_1) l^2 + l^2(v_1) l^1 = a_{12} l^1 - 0 - a_{12} l^1 = 0$$
$$\tilde{\omega}_1(v_2) l^2 - l^1(v_2) l^2 + l^2(v_2) l^1 = l^2 - l^2 + 0 = 0$$

因此 ω_1 是由 $\{v_3^*, \ldots, v_n^*\}$ 外积生成的，若 $\omega_1 = 0$ 则 $\omega = l^1 \wedge l^2$，若 $\omega_1 \neq 0$ 重复上面步骤可得。

推论. 若 ω 是一个像为 $2k$ 维的反对称双线性形, 则 k 是最大的正整数使得 $\omega \wedge \ldots \wedge \omega \neq 0$.

证明. 由于 Cartan's lemma, ω 的 $(k+1)$ 次外积等于 0 , 而 k 次外积为 $\omega \wedge \ldots \wedge \omega = k \cdot l^1 \wedge \ldots \wedge l^{2k} \neq 0$.

推论. 由 *Cartan's* 引理, 若 (V,ω) 是有限维辛线性空间, 则存在 $n\in\mathbb{N}$ 使得 $\dim V=2n$ 并且有 V^* 的基 $\{l^1,l^2,\ldots,l^{2n}\}$ 使得

$$\omega=\sum_{j=1}^{n}l^j\wedge l^{n+j}$$

定义 1.2. 若 $W\le V$, 令 $W^{\perp}=\{v\in V:\omega(w,v)=0,\forall w\in W\}$. 显然, $W^{\perp}\le V$ 且 $\tilde{\omega}\left(W^{\perp}\right)=\{a\in V^*:a|_W=0\}$, 因为 $\tilde{\omega}$ 是同构。

定义 1.3. V 的线性子空间 S 被称为:

(i) 各向同性若 $S\subseteq S^{\perp}$。

(ii) 余各向同性若 $S\supseteq S^{\perp}$。

(iii) 拉格朗日若 $S=S^{\perp}$。

(iv) 辛的若 $S\cap S^{\perp}=\{0\}$。

引理 1.2. 令 (V,ω) 是一个 $2n$ 维辛线性空间，并且 W_1,W_2,W 是 V 的子空间。则以下成立*:*

(a) $\dim W+\dim W^{\perp}=\dim V=2n$

(b) $W^{\perp\perp}=W$.

(c) $W_1\le W_2$ 当且仅当 $W_2^{\perp}\le W_1^{\perp}$.

(d) $W_1^{\perp}\cap W_2^{\perp}=(W_1+W_2)^{\perp}$

证明. (a) 令 $W^{\circ}=\tilde{\omega}\left(W^{\perp}\right)$. 因为 $\tilde{\omega}$ 是同构, 只需要证明 $\dim W^{\circ}=2n-k$, 其中 $k=\dim W$. 令 $\{w_1,\ldots,w_{2n}\}$ 是 V 的一组基，使得 $\{w_1,\ldots,w_k\}$ 是 W 的一组基，令 $\{w_1^*,\ldots,w_{2n}^*\}$ 是 V^* 中对应的对偶基。如果 $a\in W^o\le V^*$, 则存在 $a_1,\ldots,a_{2n}\in\mathbb{R}$ 使得

$$a=\sum_{i=1}^{2n}a_iw_i^*$$

并且

$$a_j=\sum_{i=1}^{2n}a_iw_i^*\left(w_j\right)=a\left(w_j\right)=0$$

对 $1\le j\le k$ 成立。于是

$$a=\sum_{i=k+1}^{2n}a_iw_i^*$$

因为 $\left\{w_{k+1}^*,\ldots,w_{2n}^*\right\}$ 是线性无关的集合, 也是 W° 的基，于是 $\dim W^{\circ}=2n-k$.

2 辛流形

定义 2.1. 辛流形是 (M,ω), 其中 M 是一个光滑流形，ω 是一个 M 上闭的 2-形式 (闭意味着 $d\omega=0$) 使得 (T_pM,ω_p) 是辛向量空间 $\forall p\in M$. 由之前的讨论知道存在一个正整数 n 使得 $\dim M=2n$ 并且 n 次外积 $\omega\wedge\ldots\wedge\omega$ 是一个 M 上的 $2n$-形式，于是 M 可定向并且 ω 的方向由此决定。

定义 2.2. 两个辛流形之间的光滑映射 $f:(M,\omega)\to(M',\omega')$ 满足 $f^*\omega'=\omega$ 被称为辛的映射。如果 f 还是微分同胚,则被称为辛同胚。

定义 2.3. M 的子流形 N 被称为:

(i) 各向同性若对任意 $p\in N$ 、$\dim N\leq n$。T_pN 是 T_pM 的各向同性子空间

(ii) 余各向同性若对任意的 $p\in N$ 、$\dim N\geq n$,T_pN 是 T_pM 的余各向同性线性子空间。

(iii) 拉格朗日若对任意的 $p\in N$ 、$\dim N=n$,T_pN 是 T_pM 的拉格朗日线性子空间。

(iv) 辛的若对任意 $p\in N$ 、$\dim N$ 是偶数的时候,T_pN 是 T_pM 的辛线性子空间。

例 2.1. $\mathbb{R}^{2n}$ 的标准坐标记为 $(x^1,\ldots,x^n,y^1,\ldots,y^n)$,考虑 2-形式:

$$\omega=\sum_{i=1}^{n}dx^i\wedge dy^i$$

, 则 $(\mathbb{R}^{2n},\omega)$ 是辛流形。

证明. 1、(闭) 显然 $d\omega=0$,ω 是闭的。

2、(非退化) 任取一点 p,T_pM 在坐标 $(x^1,\ldots,x^n,y^1,\ldots,y^n)$ 下对应的基记为 $(a^1,\ldots,a^n,b^1,\ldots,b^n)$,则 $(dx^1,\ldots,dx^n,dy^1,\ldots,dy^n)$ 正是其对偶基。于是有 $\omega_p(a_i,a_j)=\omega_p(b_i,b_j)=0$, $\omega_p(a_i,b_j)=-\omega_p(b_j,a_i)=\delta_{ij}$. 假设 $v=\sum A_ia_i+B_ib_i\in T_pM$ 满足 $\omega(v,w)=0,\forall w\in T_pm$。则 $0=\omega(v,b_i)=A_i$,$0=\omega(v,a_i)=-B_i$。于是得到 $v=0$

定义 2.4.

$$\omega=\sum_{i=1}^{n}dx^i\wedge dy^i$$

被称为标准辛形式

定义 2.5. tautological 1-形式:$\forall(q,\phi)\in T^*M$ 意味着 $q\in M,\phi\in T_q^*M$ 有自然投影 $\pi:T^*M\to M,\pi(q,\phi)=q$,而 π 在 q 点的拉回(pullback)是一个线性映射 $d\pi^*_{(q,\phi)}:T_q^*M\to T^*_{(p,\phi)}(T^*M)$ 于是可以定义 T^*M 上的 1-形式 τ。

$$\tau_{(q,\phi)}=d\pi^*_{(q,\phi)}\phi$$

对 $\forall v\in T_{(q,\phi)}(T^*M)$ 有,

$$\tau_{(q,\phi)}(v)=\phi(d\pi_{(q,\phi)}(v))$$

命题 2.1. *令 M 是一个光滑流形,则 tautological 1-形式 τ 光滑,并且有 $\omega=-d\tau$ 是 T^*M 上的一个辛形式。*

证明. $\forall(q,\phi)\in T^*M$ 取 M 在 q 点附近的光滑坐标 (x^i),令 (x^i,ζ_i) 是 T^*M 上对应的局部坐标,不妨设 (q,ϕ) 的局部坐标为 (x^i,ζ_i),ϕ 的局部坐标表示为 ζ_idx^i,则自然投影 π 的坐标表示为 $\pi(x,\zeta)=x$, 则有 $d\pi^*(dx^i)=dx^i$。于是 τ 的坐标表示为

$$\tau_{(x,\zeta)}=d\pi^*_{(x,\zeta)}(\zeta_idx^i)=\zeta_idx^i$$

于是 τ 光滑。

令 $\omega=-d\tau$, 由 $d\circ d=0$ 于是 $d\omega=0$,ω 是闭的。在自然坐标下 $\omega=\sum dx^i\wedge d\zeta_i$ 正好是标准辛形式，于是 ω 是辛形式。

定义 2.6. $\omega=-d\tau$ 这样定义的辛形式被称为典范辛形式。

3 辛流形的典范表示

引理 3.1. *(Moser trick)* 令 M 和 N 是光滑流形 $F: M\times\mathbb{R}\to N$ 是光滑映射。对 $\forall t\in\mathbb{R}$ 令 $X_t: M\to TN$ 是沿着 $F_t=F(.,t)$ 按如下定义的的光滑向量场：

$$X_t(p)=\left.\frac{\partial}{\partial s}\right|_{s=t}F(p,s)\in T_{F_t(p)}N$$

若 $(\omega_t)_{t\in\mathbb{R}}$ 是一族 N 上光滑 k -形式则有

$$\frac{d}{dt}\left(F_t^*\omega_t\right)=F_t^*\left(\frac{d\omega_t}{dt}+i_{X_t}d\omega_t\right)+d\left(F_t^*i_{X_t}\omega_t\right)$$

如果 F_t 对 $\forall t\in\mathbb{R}$ 还是微分同胚则有

$$\frac{d}{dt}\left(F_t^*\omega_t\right)=F_t^*\left(\frac{d\omega_t}{dt}+i_{X_t}d\omega_t+di_{X_t}\omega_t\right)$$

证明. 略去

推论. 令 X 是光滑流形 M 上的光滑向量场。若 ω 是 M 上微分形式，则有 $L_X\omega=i_Xd\omega+\mathrm{d}i_X\,\omega$。

证明. X 是 complete，并且 $(\phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ 是它的流（flow）, 对 $F_t=\phi_t$,$M=N$,$\omega_t=\omega$ 使用引理3.1则有

$$L_X\omega=\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\phi_t^*\omega=i_Xd\omega+di_X\omega$$

若 X 不 complete, 则 M 有一族开覆盖 $\mathcal{U}$ 使得对每个 $U\in\mathcal{U}$ 将存在 $\epsilon>0$ 和 X 的局部流 $\phi:(-\epsilon,\epsilon)\times U\to M$ 。在 U 上对 $F_t=\phi_t$ 使用引理3.1，在每个 $U\in\mathcal{U}$ 得到

$$L_X\omega=i_Xd\omega+di_X\omega$$

于是 M 上也成立。

定理 3.2. *(Darboux)* 令 ω_0 和 ω_1 是 $2n$ 维光滑流形 M 上的辛形式，$p\in M$ 若 $\omega_0(p)=\omega_1(p)$, 存在 p 的邻域 U 和微分同胚 $F: U\to F(U)\subset M$, 其中 $F(U)$ 是 p 的开邻域使 $F(p)=pF^*\omega_1=\omega_0$

证明. 令 $\eta=\omega_1-\omega_0$, 由 ω_1,ω_0 是闭的于是 η 是闭的。由 $PoincareLemma$(这里没有看懂 mark), 存在 U 上光滑 1-形式使得 $d\alpha=-\eta$, 不妨设 $\alpha(p_0)=0$ 否则用 $\alpha'=\alpha-\alpha(p_0)$ 代替。

对 $\forall t\in[0,1]$，定义 U 上闭的 2-形式 ω_t

$$\omega_t=\omega_0+t\eta=(1-t)\omega_0+t\omega_1$$

因为 $\omega_t(p_0)=\omega_0(p_0)$ 是非退化的，于是存在 p_0 的邻域 $U_1\subset U$ 使得 ω_t 在 U_1 上非退化。

对任意 $0\le t\le 1$ 存在 U_1 上光滑向量场 Y_t，使得 $i_{Y_t}\omega_t=\alpha$。于是对所有的 $-\epsilon<t<1+\epsilon,\epsilon>0$ 有 $Y_t(p)=0$ 成立。令 $\bar{Y}=\left(\frac{\partial}{\partial s},Y_s(p)\right)$ 是 $(-\epsilon,1+\epsilon)\times U_1$ 上光滑向量场。若 ϕ_t 是 $\bar{Y}$ 的流（flow），则 $\phi_t(s,x)=(s+t,f_t(s,x))$, 其中 $f_t: U_1\to M$ 是光滑的映射。因此, $\phi_t(0,x)=(t,F_t(x))$, 其中 $F_t: U_1\to F_t(U_1)$ 是微分同胚。因为 $\phi_t(0,p)=(0,p)$, 于是 $F_t(p)=p$,

存在一个 p 的开集 U 使得 F_t 定义在 U 上且 $F_t(U) \subset U_1$ 对 $0 \leq t \leq 1$ 成立。由 $Y_t = \frac{\partial F_t}{\partial t}$ 使用引理3.1有：

$$\frac{d}{dt}\left(F_t^*\omega_t\right) = F_t^*\left(\frac{d\omega_t}{dt} + i_{Y_t}d\omega_t + di_{Y_t}\omega_t\right) = F_t^*\left(\omega_1 - \omega_0 + 0 + da\right) = 0$$

因此 $F_t^*\omega_t = F_0^*\omega_0 = \omega_0$ 对 $0 \leq t \leq 1$ 成立，因此 $F_0 = id$

定理 3.3. *(Darboux) 令 (M, ω) 是一个 2n 维辛流形。对 $\forall p \in M$。有以 p 为 0 点的光滑局部坐标 $(x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n)$, 在这组坐标下 ω 有坐标表示*

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dx^i \wedge dy^i$$

证明. 令 $\omega_0 = w$ 是给定的 M 上辛形式，任意给一点 $p_0 \in M$。只需证明可以找到局部坐标架 (U_0, ϕ) 以 P_0 为 0 点，且 $\phi^*\omega_1 = \omega_0$, 其中 $\omega_1 = \sum dx^i \wedge dy^i$ 是 $\mathbb{R}^{2n}$ 上的标准辛形式。

由命题2.1的证明，在 p_0 点处 ω_0 一定可以表示为标准辛形式，于是经历线性变化可使 $\omega_0(p_0) = \omega_1(p_0)$。

由上一 DarbouX’s thm 存在 0 点的开邻域 $V \subset R^n$ 和微分同胚 $\psi : V \to \psi(V)$ 满足 $\psi(0) = 0, \psi^*\omega_1 = \omega_2$。令 $\rho = (\phi^{-1} \circ \psi)^{-1}$，则 ω 在局部坐标 ρ 下，为对应的标准辛形式。

参考文献

ATHANASSOPOULOS K, (accessed December 5, 2020). Notes on symplectic geometry[J/OL]. http://users.math.uoc.gr/~athanako/symplectic.pdf.

LEE J, 2010. Introduction to topological manifolds: volume 202[M]. [S.l.]: Springer Science & Business Media.