

TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI  
VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG VÀ TIN HỌC



TS. BÙI XUÂN DIỆU

## Bài Giảng

---

### GIẢI TÍCH II

(lưu hành nội bộ)

CÁC ỨNG DỤNG CỦA PHÉP TÍNH VI PHÂN, TÍCH PHÂN BỘI, TÍCH PHÂN  
PHỤ THUỘC THAM SỐ, TÍCH PHÂN ĐƯỜNG, TÍCH PHÂN MẶT, LÝ THUYẾT  
TRƯỜNG

---

Tóm tắt lý thuyết, các ví dụ, bài tập và lời giải

**Hà Nội- 2018**

(bản cập nhật Ngày 9 tháng 7 năm 2018)

Tập Bài giảng vẫn đang trong quá trình hoàn thiện và có thể chứa những lỗi đánh máy, những lỗi kí hiệu và những chỗ sai chưa được kiểm tra hết. Tác giả mong nhận được sự đóng góp ý kiến để tập Bài giảng được hoàn thiện. Mọi ý kiến đóng góp xin vui lòng gửi về địa chỉ “[dieu.buixuan@hust.edu.vn](mailto:dieu.buixuan@hust.edu.vn)”

Warning: This lecture notes have not been reviewed and may contain errors or typos.  
Use at your own risk!

*Hà Nội, Ngày 9 tháng 7 năm 2018.*

---

# MỤC LỤC

---

<b>Mục lục</b>	<b>1</b>
<b>Chương 1 . Các ứng dụng của phép tính vi phân trong hình học.</b>	<b>5</b>
1    Các ứng dụng của phép tính vi phân trong hình học phẳng	5
1.1    Đường cong trong mặt phẳng $\mathbf{R}^2$ .	5
1.2    Hình bao của họ đường cong phụ thuộc một tham số	9
1.3    Bài tập	9
2    Các ứng dụng của phép tính vi phân trong hình học không gian	12
2.1    Hàm vectơ	12
2.2    Đường cong trong $\mathbf{R}^n$	13
2.3    Chuyển động của vật thể trong không gian	14
2.4    Độ dài của đường cong	16
2.5    Độ cong của đường cong	16
2.6    Đường cong trong không gian $\mathbf{R}^3$	18
2.7    Mặt cong trong không gian $\mathbf{R}^3$	19
2.8    Đường cong cho dưới dạng giao của hai mặt cong	22
2.9    Bài tập	24
<b>Chương 2 . Tích phân bội</b>	<b>27</b>
1    Tích phân kép	27
1.1    Định nghĩa	27
1.2    Tích tích phân kép trong hệ toạ độ Descartes	32
1.3    Phép đổi biến số trong tích phân kép	44
1.4    Bài tập ôn tập	56
2    Tích phân bội ba	59
2.1    Định nghĩa và tính chất	59
2.2    Tích tích phân bội ba trong hệ toạ độ Descartes	61
2.3    Đổi biến số trong tích phân bội ba	64
2.4    Bài tập ôn tập	80

3	Các ứng dụng của tích phân bội . . . . .	83
3.1	Tính diện tích hình phẳng . . . . .	83
3.2	Tính thể tích vật thể . . . . .	89
3.3	Tính diện tích mặt cong . . . . .	96
3.4	Bài tập ôn tập . . . . .	97
<b>Chương 3 . Tích phân phụ thuộc tham số. . . . .</b>		<b>99</b>
1	Tích phân xác định phụ thuộc tham số. . . . .	99
1.1	Giới thiệu . . . . .	99
1.2	Các tính chất của tích phân xác định phụ thuộc tham số. . . . .	99
1.3	Các tính chất của tích phân phụ thuộc tham số với cận biến đổi. . . . .	103
1.4	Bài tập . . . . .	104
2	Tích phân suy rộng phụ thuộc tham số. . . . .	107
2.1	Các tính chất của tích phân suy rộng phụ thuộc tham số. . . . .	107
2.2	Bài tập . . . . .	117
2.3	Một số tích phân quan trọng . . . . .	122
2.4	Bài tập ôn tập . . . . .	122
3	Tích phân Euler . . . . .	126
3.1	Hàm Gamma . . . . .	126
3.2	Hàm Beta . . . . .	127
3.3	Bài tập . . . . .	130
3.4	Đọc thêm: Tích phân Euler và Phép tính vi tích phân cấp phân số . . . . .	132
<b>Chương 4 . Tích phân đường. . . . .</b>		<b>139</b>
1	Tích phân đường loại I . . . . .	139
1.1	Định nghĩa và tính chất . . . . .	139
1.2	Các công thức tính tích phân đường loại I . . . . .	142
1.3	Tích phân đường trong không gian . . . . .	143
1.4	Bài tập . . . . .	144
1.5	Bài tập ôn tập . . . . .	146
2	Tích phân đường loại II . . . . .	148
2.1	Định nghĩa và tính chất . . . . .	148
2.2	Các công thức tính tích phân đường loại II . . . . .	150
2.3	Tích phân đường trong không gian . . . . .	150
2.4	Bài tập . . . . .	151
2.5	Công thức Green. . . . .	153
2.6	Ứng dụng của tích phân đường loại II . . . . .	159
2.7	Điều kiện để tích phân đường không phụ thuộc đường lấy tích phân. . . . .	161
2.8	Tích phân đường (trong không gian) không phụ thuộc đường đi . . . . .	163

2.9	Tích phân đường không phụ thuộc đường đi và định luật bảo toàn năng lượng	164
<b>Chương 5 . Tích phân mặt . . . . . 167</b>		
1	Tích phân mặt loại I . . . . .	167
1.1	Diện tích mặt cong . . . . .	167
1.2	Bài toán dẫn đến tích phân mặt loại I . . . . .	169
1.3	Các công thức tính tích phân mặt loại I . . . . .	170
1.4	Bài tập . . . . .	171
2	Tích phân mặt loại II . . . . .	175
2.1	Định hướng mặt cong . . . . .	175
2.2	Bài toán dẫn đến tích phân mặt loại II . . . . .	176
2.3	Các công thức tính tích phân mặt loại II . . . . .	177
2.4	Công thức Ostrogradsky . . . . .	182
2.5	Dạng véctơ của công thức Green . . . . .	185
2.6	Công thức Stokes . . . . .	186
2.7	Công thức liên hệ giữa tích phân mặt loại I và loại II . . . . .	188
<b>Chương 6 . Lý thuyết trường. . . . . 191</b>		
1	Trường vô hướng . . . . .	191
1.1	Định nghĩa . . . . .	191
1.2	Đạo hàm theo hướng . . . . .	191
1.3	Gradient . . . . .	192
1.4	Bài tập . . . . .	193
2	Trường véctơ . . . . .	195
2.1	Định nghĩa . . . . .	195
2.2	Thông lượng, trường ống . . . . .	195
2.3	Hoàn lưu, véctơ xoáy . . . . .	196
2.4	Trường thế - hàm thế vị . . . . .	197
2.5	Tích phân đường (trong không gian) không phụ thuộc đường đi . . . . .	197
2.6	Bài tập . . . . .	198



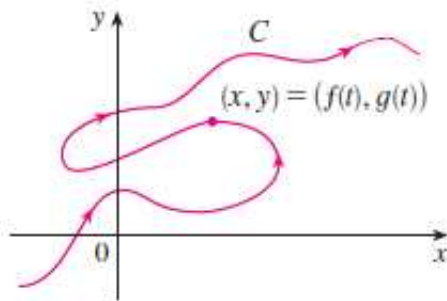
# CHƯƠNG 1

## CÁC ỨNG DỤNG CỦA PHÉP TÍNH VI PHÂN TRONG HÌNH HỌC

### §1. CÁC ỨNG DỤNG CỦA PHÉP TÍNH VI PHÂN TRONG HÌNH HỌC PHẪNG

#### 1.1 Đường cong trong mặt phẳng $\mathbb{R}^2$ .

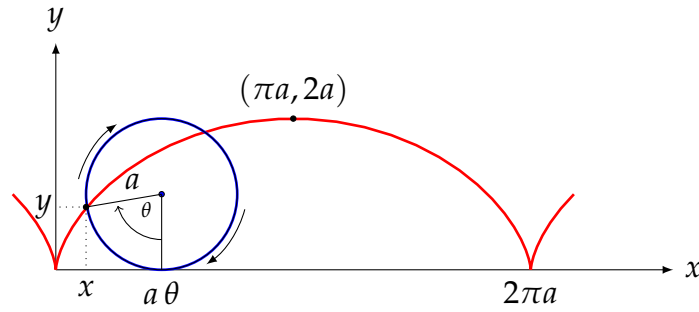
Ở chương trình học phổ thông, chúng ta đã làm quen với khái niệm đường cong cho bởi phương trình  $y = f(x)$ , chẳng hạn như đường parabol  $y = x^2$ , đường cong bậc ba  $y = x^3$ . Tuy nhiên, không phải lúc nào cũng "may mắn" biểu diễn một đường cong được dưới dạng  $y = f(x)$ , vì có thể với một giá trị  $x = x_0$ , ứng với nó có hai hoặc nhiều hơn giá trị  $y$  tương ứng. Chẳng hạn như, tưởng tượng rằng có một hạt chuyển động dọc theo đường cong  $C$  như hình vẽ dưới đây. Đường cong  $C$  này không thể biểu diễn được dưới dạng  $y = f(x)$ .



Tuy nhiên, các tọa độ  $x$  và  $y$  của hạt này là một hàm số phụ thuộc thời gian  $t$ . Chính vì

vậy sẽ là thuận lợi nếu ta biểu diễn đường cong  $C$  dưới dạng  $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$  Đây chính là phương trình đường cong cho dưới dạng tham số đã được giới thiệu ở học phần Giải tích I.

**Ví dụ 1.1 (Đường Cycloid).** Giả sử có một bánh xe hình tròn và cố định một điểm  $P$  trên bánh xe đó. Cho bánh xe đó lăn không trượt trên một đường thẳng. Quỹ tích điểm  $P$  đó được gọi là đường Cycloid. Hãy viết phương trình tham số của đường cong này.

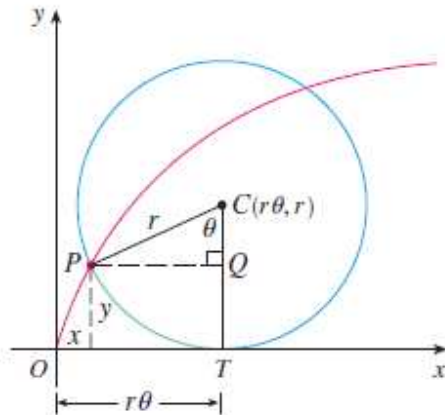


[Lời giải] Giả sử bánh xe có bán kính  $r$  và điểm xuất phát của  $P$  là gốc tọa độ, đồng thời cho bánh xe lăn không trượt trên trục  $Ox$ . Gọi  $\theta$  là góc quay của bánh xe ( $\theta = 0$  nếu  $P$  ở gốc tọa độ). Khi đó, vì bánh xe lăn không trượt, nên

$$OT = \text{độ dài cung } PT = r\theta.$$

Do đó,

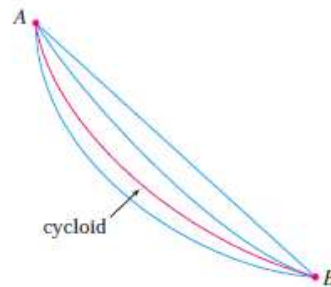
$$\begin{cases} x = |OT| - |PQ| = r\theta - r \sin \theta = r(\theta - \sin \theta) \\ y = |TC| - |QC| = r - r \cos \theta = r(1 - \cos \theta). \end{cases}$$



Một số điều thú vị về đường Cycloid.



- Một trong những người đầu tiên nghiên cứu đường cong Cycloid là Galileo. Ông đề xuất rằng các cây cầu nên được xây theo đường cong Cycloid và cũng là người đi tìm diện tích của miền nằm phía dưới một cung Cycloid.
- Đường cong Cycloid này về sau xuất hiện trong bài toán "Brachistochrone" sau. Cho hai điểm  $A$  và  $B$  sao cho điểm  $A$  cao hơn điểm  $B$ . Hãy tìm đường cong nối  $A$  với  $B$  sao cho khi ta thả một viên bi từ  $A$ , viên bi chạy theo đường cong đó (dưới tác dụng của lực hấp dẫn) từ  $A$  đến  $B$  với thời gian ngắn nhất. Nhà toán học người Thụy Sĩ, John Bernoulli đã chỉ ra rằng, trong số tất cả các đường cong nối  $A$  với  $B$  thì viên bi sẽ mất ít thời gian nhất để lăn từ  $A$  đến  $B$  nếu nó đi theo đường Cycloid.



- Nhà vật lý người Hà Lan, Huyghens, cũng đã chỉ ra rằng đường cong Cycloid là lời giải cho bài toán "Tautochrone" sau. Cho dù đặt viên bi ở đâu trên cung Cycloid ngược thì nó cũng mất một khoảng thời gian như nhau để lăn về đáy. Điều này được ứng dụng khi ông phát minh ra đồng hồ quả lắc. Ông đề xuất rằng quả lắc nên được lắc theo cung Cycloid, bởi vì khi đó con lắc sẽ mất một khoảng thời gian như nhau để hoàn thành một chu kỳ dao động, cho dù là nó lắc theo một cung dài hay là ngắn.



Mỗi đường cong trong mặt phẳng có thể được cho dưới các dạng sau:

- Dạng tham số  $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$
- Dạng hàm hiện  $y = f(x)$ .

- Dạng hàm ẩn  $f(x, y) = 0$ .

### 1. Điểm chính quy.

- Cho đường cong  $(L)$  xác định bởi phương trình  $f(x, y) = 0$ . Điểm  $M(x_0, y_0)$  được gọi là điểm chính quy của đường cong  $(L)$  nếu tồn tại các đạo hàm riêng  $f'_x(M), f'_y(M)$  không đồng thời bằng 0.

- Cho đường cong  $(L)$  xác định bởi phương trình tham số  $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ .

Điểm  $M(x(t_0), y(t_0))$  được gọi là điểm chính quy của đường cong  $(L)$  nếu tồn tại các đạo hàm  $x'(t_0), y'(t_0)$  không đồng thời bằng 0.

- Một điểm không phải là điểm chính quy được gọi là điểm kì dị.

### 2. Phương trình tiếp tuyến và pháp tuyến của đường cong.

- Chúng ta biết rằng hệ số góc  $k$  của tiếp tuyến của đường cong  $C$  tại điểm  $M$  chính là  $y'_x(M)$ . Do đó, nếu đường cong cho bởi phương trình  $f(x, y) = 0$  thì nó xác định một hàm ẩn  $y = y(x)$  và đạo hàm của nó tính theo công thức

$$k = y'_x = -\frac{f'_x}{f'_y}.$$

Vậy

- Phương trình tiếp tuyến tại  $M$  là

$$\begin{aligned} (d) : y - y_0 &= -\frac{f'_x(M)}{f'_y(M)}(x - x_0) \\ \Leftrightarrow f'_x(M) \cdot (x - x_0) + f'_y(M) \cdot (y - y_0) &= 0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

- Phương trình pháp tuyến tại  $M$  là

$$(d') : \frac{x - x_0}{f'_x(M)} = \frac{y - y_0}{f'_y(M)}.$$

**Chú ý:** Trường hợp đặc biệt, đường cong cho bởi phương trình  $y = f(x)$  thì phương trình tiếp tuyến của đường cong tại điểm  $M(x_0, y_0)$  chính quy là  $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ . Đây là công thức mà học sinh đã biết trong chương trình phổ thông.

- Nếu đường cong  $(C)$  cho bởi phương trình tham số  $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$  thì

$$k = y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Do đó,

- Phương trình tiếp tuyến tại điểm  $M(x(t_0), y(t_0))$  chính quy:

$$(d) : y - y(t_0) = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}(x - x(t_0)) \Leftrightarrow \frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)}.$$

Nói cách khác, véc tơ tiếp tuyến của đường cong  $C$  tại điểm  $M(x(t_0), y(t_0))$  là  $\vec{n} = (x'(t_0), y'(t_0))$ .

- Phương trình pháp tuyến tại  $M$ :

$$(d') : x'(t_0) \cdot (x - x(t_0)) + y'(t_0) \cdot (y - y(t_0)) = 0.$$

## 1.2 Hình bao của họ đường cong phụ thuộc một tham số

**Định nghĩa 1.1.** Cho họ đường cong  $(L)$  phụ thuộc vào một hay nhiều tham số. Nếu mỗi đường cong trong họ  $(L)$  đều tiếp xúc với đường cong  $(E)$  tại một điểm nào đó trên  $E$  và ngược lại, tại mỗi điểm thuộc  $(E)$  đều tồn tại một đường cong của họ  $(L)$  tiếp xúc với  $(E)$  tại điểm đó thì  $(E)$  được gọi là hình bao của họ đường cong  $(L)$ .

### Quy tắc tìm hình bao

**Định lý 1.1.** Cho họ đường cong  $F(x, y, c) = 0$  phụ thuộc một tham số  $c$ . Nếu họ đường cong trên không có điểm kì dị thì hình bao của nó được xác định bằng cách khử  $c$  từ hệ phương trình

$$\begin{cases} F(x, y, c) = 0 \\ F'_c(x, y, c) = 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

**Chú ý 1.1.** Nếu họ đường cong đã cho có điểm kì dị thì hệ phương trình (1.2) bao gồm hình bao  $(E)$  và quỹ tích các điểm kì dị thuộc họ các đường cong đã cho.

## 1.3 Bài tập

**Bài tập 1.1.** Viết phương trình tiếp tuyến và pháp tuyến với đường cong:

a)  $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$  tại  $(-2, 5)$ .

Lời giải.  $\begin{cases} \text{Phương trình tiếp tuyến } y = 5 \\ \text{Phương trình pháp tuyến } x = -2 \end{cases}$  ■

b)  $y = e^{1-x^2}$  tại giao điểm của đường cong với đường thẳng  $y = 1$ .

*Lời giải.* – Tại  $M_1(-1, 1)$ ,  $\begin{cases} \text{Phương trình tiếp tuyến } 2x - y + 3 = 0 \\ \text{Phương trình pháp tuyến } x + 2y - 1 = 0 \end{cases}$

– Tại  $M_2(-1, 1)$ ,  $\begin{cases} \text{Phương trình tiếp tuyến } 2x + y - 3 = 0 \\ \text{Phương trình pháp tuyến } x - 2y + 1 = 0 \end{cases}$  ■

c.  $\begin{cases} x = \frac{1+t}{t^3} \\ y = \frac{3}{2t^3} + \frac{1}{2t} \end{cases}$  tại  $A(2, 2)$ .

*Lời giải.* – Phương trình tiếp tuyến  $y = x$ .

– Phương trình pháp tuyến  $x + y - 4 = 0$ . ■

d.  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 5$  tại  $M(8, 1)$ .

*Lời giải.* – Phương trình tiếp tuyến  $x + 2y - 10 = 0$ .

– Phương trình pháp tuyến  $2x - y - 15 = 0$ . ■

**Bài tập 1.2.** Tìm hình bao của họ đường cong sau:

a.  $y = \frac{x}{c} + c^2$

b.  $cx^2 + c^2y = 1$

c.  $y = c^2(x - c)^2$

*Lời giải.* a. Đặt  $F(x, y, c) := y - \frac{x}{c} - c^2 = 0$ .

Điều kiện:  $c \neq 0$ .

Xét hệ phương trình:  $\begin{cases} F'_x(x, y, c) = 0 \\ F'_y(x, y, c) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F'_x(x, y, c) = 0 \\ 1 = 0. \end{cases}$

Hệ phương trình vô nghiệm nên họ đường cong không có điểm kì dị. Ta có

$$\begin{cases} F(x, y, c) = 0 \\ F'_c(x, y, c) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - \frac{x}{c} - c^2 = 0 \\ -2c + \frac{x}{c^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2c^3 \\ y = 3c^2 \end{cases}$$

nên  $(\frac{x}{2})^2 - (\frac{y}{3})^3 = 0$ . Do điều kiện  $c \neq 0$  nên  $x, y \neq 0$ . Vậy ta có hình bao của họ đường cong là đường  $(\frac{x}{2})^2 - (\frac{y}{3})^3 = 0$  trừ điểm  $O(0, 0)$ .

- b. Đặt  $F(x, y, c) := cx^2 + c^2y - 1 = 0$ . Nếu  $c = 0$  thì không thoả mãn phương trình đã cho nên điều kiện:  $c \neq 0$ .

Xét hệ phương trình:  $\begin{cases} F'_x(x, y, c) = 0 \\ F'_y(x, y, c) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2cx = 0 \\ c^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = c = 0$ , nhưng điểm kì dị đó không thuộc họ đường cong đã cho nên họ đường cong đã cho không có điểm kì dị. Ta có

$$\begin{cases} F(x, y, c) = 0 \\ F'_c(x, y, c) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} cx^2 + c^2y = 1 \\ x^2 + 2cx = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{c} \\ y = \frac{-1}{c^2} \end{cases}$$

Do đó  $x, y \neq 0$  và ta có hình bao của họ đường cong là đường  $y = -\frac{x^4}{4}$  trừ điểm  $O(0, 0)$ .

- c. Đặt  $F(x, y, c) := c^2(x - c)^2 - y = 0$ .

Xét hệ phương trình:  $\begin{cases} F'_x(x, y, c) = 0 \\ F'_y(x, y, c) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F'_x = 0 \\ -1 = 0. \end{cases}$

Hệ phương trình vô nghiệm nên họ đường cong đã cho không có điểm kì dị. Ta có

$$\begin{cases} F(x, y, c) = 0 \\ F'_c(x, y, c) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c^2(x - c)^2 - y = 0 & (1) \\ 2c(x - c) - 2c^2(x - c) = 0. & (2) \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ c = x \\ c = \frac{x}{2} \end{cases}, \text{ thế vào (1) ta được } y = 0, y = \frac{x^4}{16}.$$

Vậy hình bao của họ đường cong là  $y = 0, y = \frac{x^4}{16}$ . ■

## §2. CÁC ỨNG DỤNG CỦA PHÉP TÍNH VI PHÂN TRONG HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

### 2.1 Hàm vectơ

**Định nghĩa 1.2.** Cho  $I$  là một khoảng trong  $\mathbf{R}$ . Ánh xạ

$$\begin{aligned} I &\rightarrow \mathbf{R}^n, \\ t &\mapsto \mathbf{r}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \in \mathbf{R}^n \end{aligned}$$

được gọi là hàm vectơ của biến số  $t$  xác định trên  $\mathbf{R}$ .

Nếu  $n = 2$ , ta viết

$$\mathbf{r}(t) = x(t) \mathbf{i} + y(t) \mathbf{j}.$$

Nếu  $n = 3$ , ta viết

$$\mathbf{r}(t) = x(t) \mathbf{i} + y(t) \mathbf{j} + z(t) \mathbf{k}.$$

Đặt  $M(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ , quỹ tích  $M$  khi  $t$  biến thiên trong  $I$  được gọi là tốc độ của hàm vectơ  $\mathbf{r}(t)$ .

#### Giới hạn của hàm vectơ

Người ta nói hàm vectơ  $\mathbf{r}(t)$  có giới hạn là  $\mathbf{a}$  khi  $t \rightarrow t_0$  nếu

$$\lim_{t \rightarrow t_0} |\mathbf{r}(t) - \mathbf{a}| = 0,$$

kí hiệu  $\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{a}$ , ở đó

$$|\mathbf{r}(t) - \mathbf{a}| = \sqrt{[x_1(t) - a_1]^2 + [x_2(t) - a_2]^2 + \dots + [x_n(t) - a_n]^2}$$

được hiểu là độ dài của vectơ  $\mathbf{r}(t) - \mathbf{a}$ .

#### Tính liên tục của hàm vectơ

Hàm vectơ  $\mathbf{r}(t)$  xác định trên  $I$  được gọi là liên tục tại  $t_0 \in I$  nếu

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0).$$

(Tương đương với tính liên tục của các thành phần tương ứng  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ ).

**Đạo hàm của hàm vectơ**

Giới hạn, nếu có, của tỉ số

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t_0 + h) - \mathbf{r}(t_0)}{h}$$

được gọi là đạo hàm của hàm vectơ  $\mathbf{r}(t)$  tại  $t_0$ , kí hiệu  $\mathbf{r}'(t_0)$  hay  $\frac{d\mathbf{r}(t_0)}{dt}$ , khi đó ta nói hàm vectơ  $\mathbf{r}(t)$  khả vi tại  $t_0$ .

**Chú ý 1.2.** Nếu  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$  khả vi tại  $t_0$  thì  $\mathbf{r}(t)$  cũng khả vi tại  $t_0$  và

$$\mathbf{r}'(t_0) = (x'_1(t_0), x'_2(t_0), \dots, x'_n(t_0)).$$

**Tích phân của hàm vectơ**

Cho  $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$  liên tục trên  $[a, b]$ . Khi đó

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)dt = \left( \int_a^b x(t)dt \right) \mathbf{i} + \left( \int_a^b y(t)dt \right) \mathbf{j} + \left( \int_a^b z(t)dt \right) \mathbf{k}.$$

Nếu  $\mathbf{R}'(t) = \mathbf{r}(t)$  thì

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)dt = \mathbf{R}(t) \Big|_a^b = \mathbf{R}(b) - \mathbf{R}(a).$$

Một cách tổng quát, nếu  $\mathbf{r}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$  thì

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)dt = \left( \int_a^b x_1(t)dt, \int_a^b x_2(t)dt, \dots, \int_a^b x_n(t)dt \right).$$

**2.2 Đường cong trong  $\mathbf{R}^n$** 

**Định nghĩa 1.3.** Tập hợp tất cả các điểm  $(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \in \mathbf{R}^n$  sao cho  $t$  biến thiên trong khoảng  $I \subset \mathbf{R}$  được gọi là một đường cong cho bởi phương trình tham số.

Nói cách khác, mỗi đường cong  $C$  trong  $\mathbf{R}^n$  được cho dưới dạng hàm vectơ

$$I \rightarrow \mathbf{R}^n, \\ t \mapsto \mathbf{r}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)).$$

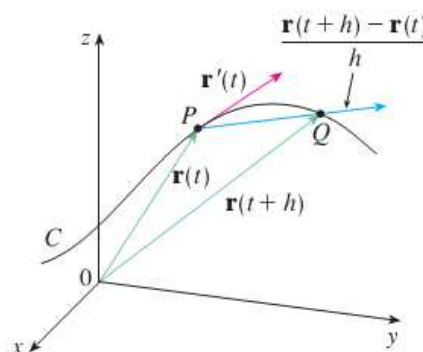
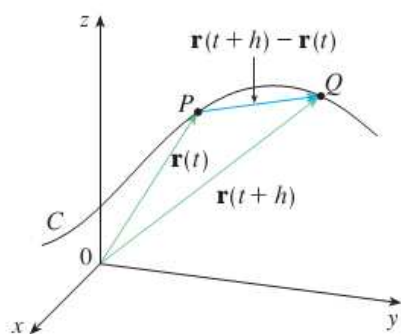
Đặc biệt,

- nếu  $n = 2$ , đường cong  $C$  cho dưới dạng hàm vectơ  $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$  hoặc dạng tham số  $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$

- nếu  $n = 3$ , đường cong  $C$  cho dưới dạng hàm véc tơ  $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$  hoặc dạng tham số 
$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{cases}$$

### Ý nghĩa hình học của đạo hàm của hàm véc tơ

Nếu hai điểm  $P, Q$  ứng với các véc tơ  $\mathbf{r}(t), \mathbf{r}(t+h)$ , thì  $\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t) = \overrightarrow{PQ}$  là một véc tơ dây cung. Do đó, nếu  $h > 0$  thì  $\frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h}$  có cùng phương cùng hướng với  $\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)$ . Khi  $h \rightarrow 0$  thì véc tơ này sẽ tiến tới một véc tơ  $\mathbf{r}'(t)$  nào đó nằm trên đường thẳng tiếp tuyến của đường cong tại điểm  $P$ .



**Định nghĩa 1.4.** Cho đường cong  $C$  cho bởi phương trình  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ . Nếu hàm véc tơ  $\mathbf{r}(t)$  khả vi thì

a) véc tơ  $\mathbf{r}'(t)$  được gọi là véc tơ tiếp tuyến của đường cong  $C$  tại điểm  $P(x(t), y(t))$ .

b) Véc tơ tiếp tuyến đơn vị là  $\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}$ .

## 2.3 Chuyển động của vật thể trong không gian

Cho một vật thể chuyển động trong không gian sao cho quỹ đạo của nó là một đường cong có phương trình cho bởi hàm véc tơ  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ . Khi đó,

$$\mathbf{v}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h} = \mathbf{r}'(t)$$

là véc tơ vận tốc (velocity) của vật thể đó. Độ lớn của véc tơ này,  $|\mathbf{r}'(t)|$  chính là vận tốc tức thời (speed) của vật thể đó tại thời điểm  $t$ , vì

$$|\mathbf{v}(t)| = |\mathbf{r}'(t)| = \frac{ds}{dt} = \text{sự thay đổi của hàm khoảng cách theo thời gian.}$$



Tương tự như trường hợp một chiều, vectơ gia tốc được định nghĩa bởi

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = \mathbf{r}''(t).$$

**Ví dụ 2.2.** Một vật thể chuyển động với vị trí và vận tốc ban đầu là  $\mathbf{r}(0) = (1, 0, 0)$  và  $\mathbf{v}(0) = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ . Vectơ gia tốc của nó là  $\mathbf{a}(t) = 4t\mathbf{i} + 6t\mathbf{j} + \mathbf{k}$ . Tìm vectơ vận tốc và vị trí của nó tại thời điểm  $t$ .

**Gợi ý:** Dùng các công thức

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{a}(u) du, \quad \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{v}(u) du.$$

Trong phần tiếp theo, chúng ta sử dụng các định luật của Newton để chứng minh Định luật về quỹ đạo chuyển động của các hành tinh.

- **Định luật II Newton**  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ ,
- **Luật vạn vật hấp dẫn**  $\mathbf{F} = -\frac{GMm}{r^3}\mathbf{r} = -\frac{GMm}{r^2}\mathbf{u}$ ,

ở đó  $\mathbf{F}$  là trường hấp dẫn trên hành tinh,  $m, M$  là khối lượng của hành tinh và mặt trời,  $G$  là hằng số hấp dẫn,  $r = |\mathbf{r}|$  và  $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$  là vectơ đơn vị của  $\mathbf{r}(t)$ .

**Định lý 1.2 (Định luật Kepler).** Các hành tinh chuyển động xung quanh mặt trời theo một quỹ đạo hình elip với mặt trời là một tiêu điểm.

Chúng ta chứng minh một ý nhỏ trong Định luật trên, đó là:

**Chứng minh quỹ đạo chuyển động của các hành tinh nằm trên một mặt phẳng.** Hai định luật của Newton dẫn đến

$$\mathbf{a} = -\frac{GM}{r^3}\mathbf{r} \Rightarrow \mathbf{a} \text{ song song với } \mathbf{r} \Rightarrow \mathbf{r} \wedge \mathbf{a} = \mathbf{0}.$$

Ta có

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \wedge \mathbf{v}) = \mathbf{r}' \wedge \mathbf{v} + \mathbf{r} \wedge \mathbf{v}' = \mathbf{v} \wedge \mathbf{v} + \mathbf{r} \wedge \mathbf{a} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Do đó,

$$\mathbf{r} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{h},$$

ở đó  $\mathbf{h}$  là một vectơ hằng số nào đó. Nghĩa là  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  vuông góc với  $\mathbf{h}$  với mọi giá trị của  $t$ . Nói cách khác, quỹ đạo chuyển động của các hành tinh nằm trên một mặt phẳng vuông góc với  $\mathbf{h}$ .

## 2.4 Độ dài của đường cong

Cho đường cong  $C$  cho bởi phương trình  $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ ,  $a \leq t \leq b$ , ở đó  $\mathbf{r}(t)$  là một hàm véc tơ khả vi trên  $[a, b]$ . Khi đó, độ dài của  $C$  được cho bởi công thức

$$l = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)| dt.$$

**Hàm độ dài** được định nghĩa như sau:

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{x'(\tau)^2 + y'(\tau)^2 + z'(\tau)^2} d\tau = \int_a^t |\mathbf{r}'(\tau)| d\tau,$$

nghĩa là độ dài của phần của đường cong  $C$  giữa  $\mathbf{r}(a)$  và  $\mathbf{r}(t)$ . Khi đó,

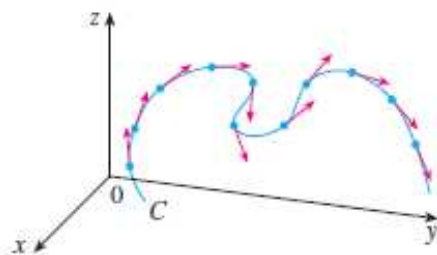
$$s'(t) = \frac{ds(t)}{dt} = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} = |\mathbf{r}'(t)|. \quad (1.3)$$

## 2.5 Độ cong của đường cong

Cho đường cong  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ . Khi đó, véc tơ tiếp tuyến đơn vị  $\mathbf{T}(t)$  được xác định bởi

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}.$$

Véc tơ này xác định hướng của đường cong như hình vẽ dưới đây.



Độ cong của đường cong tại một điểm  $P$  là một đại lượng đo "tốc độ" thay đổi hướng của đường cong tại điểm  $P$  đó. Một cách cụ thể, người ta định nghĩa độ cong của đường cong tại điểm  $P$  là "tốc độ" thay đổi của véc tơ tiếp tuyến đơn vị theo độ dài cung tại điểm  $P$  đó.

**Định nghĩa 1.5.** Độ cong của đường cong  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  là

$$C = \left| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right|,$$

ở đó  $\mathbf{T}(t)$  là véc tơ tiếp tuyến đơn vị của đường cong và  $s(t)$  là hàm độ dài.

Ta có

$$C = \left| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right| = \left| \frac{d\mathbf{T}/dt}{ds/dt} \right| = \frac{|\mathbf{T}'(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|} \quad (\text{xem (1.3)}).$$

**Định lý 1.3.** Độ cong của đường cong  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  được cho bởi công thức

$$C(t) = \frac{|\mathbf{r}'(t) \wedge \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}. \quad (1.4)$$

*Chứng minh.* Ta có  $\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} \Rightarrow \mathbf{r}'(t) = |\mathbf{r}'(t)|\mathbf{T}(t) = s'(t)\mathbf{T}(t)$ . Do đó,

$$\mathbf{r}''(t) = s''(t)\mathbf{T}(t) + s'(t)\mathbf{T}'(t).$$

Vì  $\mathbf{T}(t) \wedge \mathbf{T}(t) = 0$  nên

$$\mathbf{r}'(t) \wedge \mathbf{r}''(t) = [s'(t)\mathbf{T}(t)] \wedge [s''(t)\mathbf{T}(t) + s'(t)\mathbf{T}'(t)] = s'(t)^2[\mathbf{T}(t) \wedge \mathbf{T}'(t)]. \quad (1.5)$$

Hơn nữa,  $|\mathbf{T}(t)| = \mathbf{T}(t) \cdot \mathbf{T}(t) = 1$  nên đạo hàm 2 vế dẫn đến

$$\mathbf{T}'(t) \cdot \mathbf{T}(t) + \mathbf{T}(t) \cdot \mathbf{T}'(t) = 0 \Rightarrow \mathbf{T}'(t) \cdot \mathbf{T}(t) = 0,$$

nghĩa là  $\mathbf{T}(t) \perp \mathbf{T}'(t)$ . Thay vào (1.5) ta có

$$|\mathbf{r}'(t) \wedge \mathbf{r}''(t)| = |s'(t)|^2 |\mathbf{T}(t)| |\mathbf{T}'(t)| \sin \frac{\pi}{2} = |s'(t)|^2 |\mathbf{T}'(t)| = |\mathbf{r}'(t)|^2 |\mathbf{T}'(t)|.$$

Do đó,

$$\frac{|\mathbf{r}'(t) \wedge \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3} = \frac{|\mathbf{T}'(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|} = C(t).$$

**Độ cong của đường cong trong mặt phẳng.**

- Nếu đường cong cho bởi phương trình  $y = f(x)$  thì áp dụng công thức (1.4) với hàm véc tơ  $\mathbf{r} = (x, f(x), 0) = t\mathbf{i} + f(t)\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$  ta được:

$$C(M) = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}}$$

- Nếu đường cong cho bởi phương trình tham số  $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$  thì áp dụng công thức (1.4) với hàm véc tơ  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), 0) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$  ta được:

$$C(M) = \frac{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}$$

- Nếu đường cong cho bởi phương trình trong tọa độ cực  $r = r(\varphi)$  thì:

$$C(M) = \frac{|r^2 + 2r'^2 - rr''|}{(r^2 + r'^2)^{3/2}}$$

### Độ cong của đường cong trong không gian

Nếu đường cong cho bởi phương trình tham số  $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t) \end{cases}$  thì

$$C(t) = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}^2}}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

**Ví dụ 2.3 (Cuối kì, K62).** Tính độ cong của đường xoắn ốc cho bởi phương trình  $x = \cos t, y = \sin t, z = t$  tại điểm ứng với  $t = \frac{\pi}{2}$ .

*Lời giải.* Đặt  $r(t) = (\cos t, \sin t, t) \Rightarrow r'(t) = (-\sin t, \cos t, 1), r''(t) = (-\cos t, -\sin t, 0)$ .

Ta có

$$C = \frac{|r'(\frac{\pi}{2}) \wedge r''(\frac{\pi}{2})|}{|r'(\frac{\pi}{2})|^3} = \frac{|(-1, 0, 1) \wedge (0, -1, 0)|}{|(-1, 0, 1)|^3} = \frac{1}{2}.$$

## 2.6 Đường cong trong không gian $\mathbf{R}^3$

Mỗi đường cong trong không gian  $\mathbf{R}^3$  được định nghĩa, một cách đơn giản, là tốc độ của một hàm véc tơ

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^3, \\ \mathbf{r}(t) &= x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Đường cong  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  được gọi là trơn nếu như tồn tại  $\mathbf{r}'(t)$  liên tục và  $\mathbf{r}'(t) \neq 0$  với mọi  $t \in [a, b]$ . Một véc tơ tiếp tuyến của đường cong  $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$  là  $\mathbf{r}'(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k}$ . Do đó,

- Phương trình tiếp tuyến của  $\gamma$  tại điểm  $M(x_0, y_0, z_0)$  chính quy:

$$(d) : \frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z'(t_0)}.$$

- Phương trình pháp diện tại  $M$ :

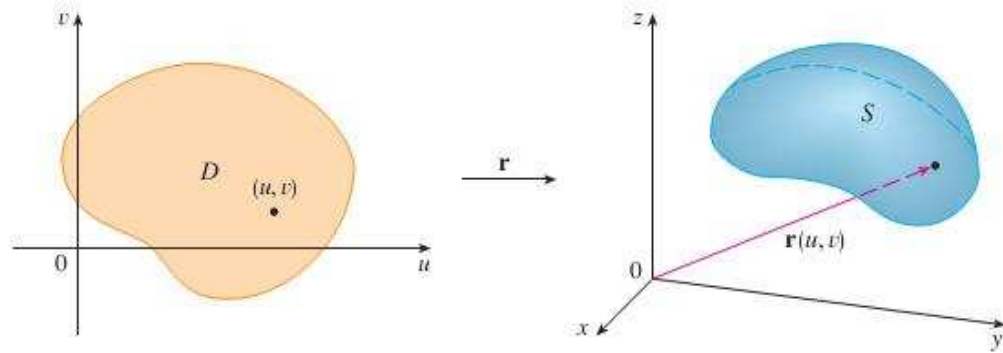
$$(P) : x'(t_0) \cdot (x - x(t_0)) + y'(t_0) \cdot (y - y(t_0)) + z'(t_0) \cdot (z - z(t_0)) = 0.$$

## 2.7 Mặt cong trong không gian $\mathbf{R}^3$

Tương tự như cách chúng ta biểu diễn đường cong trong không gian bởi một hàm véctơ một tham số  $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ , mỗi mặt cong trong không gian được biểu diễn dưới dạng

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k},$$

tức là một hàm véctơ phụ thuộc vào hai tham số  $u, v$ .



**Định nghĩa 1.6.** Tập hợp tất cả các điểm  $(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \in \mathbf{R}^3$  sao cho  $(u, v)$  biến thiên trong miền  $D \subset \mathbf{R}^2$  được gọi là một mặt cong cho bởi phương trình tham số.

**Ví dụ 2.4.** Mỗi mặt phẳng  $ax + by + cz + d = 0$  trong không gian có một tham số tự nhiên

$$\begin{cases} x = u, \\ y = v, \\ z = -\frac{d+ax+by}{c}, \end{cases} \quad D = \mathbf{R}^2.$$

**Ví dụ 2.5.** Mỗi mặt cầu  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  trong không gian đều có một tham số tự nhiên là

$$\begin{cases} x = u, \\ y = v, \\ z = \pm\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, \end{cases} \quad D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\}.$$

và một tham số trong tọa độ cầu

$$\begin{cases} x = R \sin \theta \cos \varphi, \\ y = R \sin \theta \sin \varphi, \\ z = R \cos \theta, \end{cases} \quad D = \{(\varphi, \theta) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi\}.$$

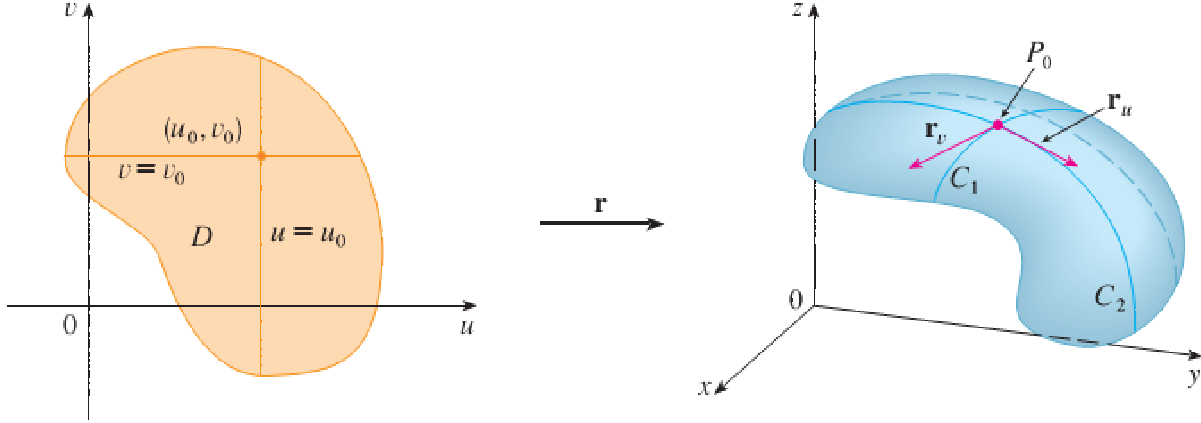
Như vậy, phương trình tham số của một mặt cong có thể không duy nhất.

### Phương trình tiếp diện của mặt cong cho bởi phương trình tham số

Bài toán: Tìm mặt phẳng tiếp diện của mặt cong  $S$  cho bởi phương trình tham số

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}$$

tại điểm  $P_0$  ứng với  $u = u_0, v = v_0$ .



[Lời giải] Nếu ta cố định  $u = u_0$  thì  $\mathbf{r}(u_0, v)$  xác định một đường cong  $C_1 \subset S$  trong không gian. Tiếp tuyến với đường cong này tại  $P_0$  có véc tơ chỉ phương là

$$\mathbf{r}_v = \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0)\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0)\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0)\mathbf{k}.$$

Tương tự như vậy, nếu ta cố định  $v = v_0$  thì  $\mathbf{r}(u, v_0)$  xác định một đường cong  $C_2 \subset S$  trong không gian. Tiếp tuyến với đường cong này tại  $P_0$  có véc tơ chỉ phương là

$$\mathbf{r}_u = \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0)\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0)\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0)\mathbf{k}.$$

Lấy tích có hướng của  $\mathbf{r}_u$  và  $\mathbf{r}_v$  ta được véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng tiếp diện của mặt cong  $S$  tại điểm  $P_0$ . Nếu tại  $P_0$ ,  $\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v \neq 0$  thì ta nói mặt cong  $S$  là trơn tại  $P_0$ .

**Chú ý 1.3.** Đường thẳng đi qua  $P_0$  và vuông góc với tiếp diện của  $S$  tại  $P_0$  được gọi là pháp tuyến của mặt  $S$  tại  $P_0$ . Nó nhận véc tơ  $\mathbf{N} = \mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v$  làm véc tơ chỉ phương.

**Ví dụ 2.6.** Viết phương trình tiếp diện của mặt cong cho bởi phương trình tham số  $x = u^2, y = v^2, z = u + 2v$  tại điểm  $(1, 1, 3)$ .

[Lời giải] Ta có

$$\mathbf{r}_u = \frac{\partial x}{\partial u}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\mathbf{k} = 2u\mathbf{i} + \mathbf{k},$$

$$\mathbf{r}_v = \frac{\partial x}{\partial v}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\mathbf{k} = 2v\mathbf{j} + 2\mathbf{k}.$$

Do đó,

$$\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2u & 0 & 1 \\ 0 & 2v & 2 \end{vmatrix} = -2v\mathbf{i} - 4u\mathbf{j} + 4uv\mathbf{k}.$$

Điểm  $(1, 1, 3)$  ứng với giá trị  $u = v = 1$  nên  $\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v = (-2, -4, 4)$ . Vậy phương trình tiếp diện là

$$-2(x-1) - 4(y-1) + 4(z-3) = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 2z + 3 = 0.$$

### Phương trình tiếp diện của mặt cong cho bởi phương trình $z = z(x, y)$

Trường hợp đặc biệt, mặt cong  $S$  cho bởi phương trình  $z = z(x, y)$  thì  $S$  có một tham số hóa tự nhiên là

$$\begin{cases} x = u, \\ y = v, \\ z = z(u, v). \end{cases}$$

Khi đó,  $\mathbf{r}_u = (1, 0, z'_u)$ ,  $\mathbf{r}_v = (0, 1, z'_v)$  và do đó, véc tơ pháp tuyến của mặt cong  $S$  tại  $P$  là

$$\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & z'_u \\ 0 & 1 & z'_v \end{vmatrix} = (-z'_u, -z'_v, 1) = (-z'_x, -z'_y, 1).$$

Do đó, phương trình tiếp diện tại  $P(x_0, y_0, z_0)$  là

$$z - z_0 = z'_x(M) \cdot (x - x_0) + z'_y(M) \cdot (y - y_0). \quad (1.6)$$

### Phương trình tiếp diện của mặt cong cho bởi phương trình $f(x, y, z) = 0$

Nếu mặt cong  $S$  xác định bởi phương trình  $f(x, y, z) = 0$  và  $M(x_0, y_0, z_0)$  là một điểm chính quy của  $S$  thì nó xác định một hàm ẩn  $z = z(x, y)$  và các đạo hàm  $z'_x, z'_y$  được tính theo công thức

$$z'_x = -\frac{f'_x}{f'_z}, \quad z'_y = -\frac{f'_y}{f'_z}.$$

Áp dụng công thức (1.6) ta được

- Phương trình tiếp diện tại  $M$

$$\begin{aligned} z - z_0 &= -\frac{f'_x(M)}{f'_z(M)}(x - x_0) - \frac{f'_y(M)}{f'_z(M)}(y - y_0) \\ &\Leftrightarrow f'_x(M) \cdot (x - x_0) + f'_y(M) \cdot (y - y_0) + f'_z(M) \cdot (z - z_0) = 0. \end{aligned}$$

- Phương trình pháp tuyến tại  $M$

$$(d) : \frac{x - x_0}{f'_x(M)} = \frac{y - y_0}{f'_y(M)} = \frac{z - z_0}{f'_z(M)}.$$

## 2.8 Đường cong cho dưới dạng giao của hai mặt cong

Cho đường cong xác định bởi giao của hai mặt cong như sau  $\begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}$ .

Đặt  $\mathbf{n}_f = (f'_x(M), f'_y(M), f'_z(M))$  là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng tiếp diện của mặt cong  $f(x, y, z) = 0$  tại  $M$ .

Đặt  $\mathbf{n}_g = (g'_x(M), g'_y(M), g'_z(M))$  là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng tiếp diện của mặt cong  $g(x, y, z) = 0$  tại  $M$ .

Khi đó  $\mathbf{n}_f \wedge \mathbf{n}_g$  là vectơ chỉ phương của tiếp tuyến của đường cong đã cho tại  $M$ . Vậy phương trình tiếp tuyến là:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{PTTQ: } \begin{cases} f'_x(M) \cdot (x - x_0) + f'_y(M) \cdot (y - y_0) + f'_z(M) \cdot (z - z_0) = 0. \\ g'_x(M) \cdot (x - x_0) + g'_y(M) \cdot (y - y_0) + g'_z(M) \cdot (z - z_0) = 0. \end{cases} \\ \text{PTCT: } \frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} f'_y(M) & f'_z(M) \\ g'_y(M) & g'_z(M) \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} f'_z(M) & f'_x(M) \\ g'_z(M) & g'_x(M) \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} f'_x(M) & f'_y(M) \\ g'_x(M) & g'_y(M) \end{vmatrix}} \end{array} \right.$$

**Bài tập 1.3.** Giả sử  $\vec{p}(t), \vec{q}(t), \vec{\alpha}(t)$  là các hàm vectơ khả vi. Chứng minh rằng:

- $\frac{d}{dt}(\vec{p}(t) + \vec{q}(t)) = \frac{d\vec{p}(t)}{dt} + \frac{d\vec{q}(t)}{dt}$
- $\frac{d}{dt}(\alpha(t) \vec{p}(t)) = \alpha(t) \frac{d\vec{p}(t)}{dt} + \alpha'(t) \vec{p}(t)$
- $\frac{d}{dt}(\vec{p}(t) \vec{q}(t)) = \vec{p}(t) \frac{d\vec{q}(t)}{dt} + \frac{d\vec{p}(t)}{dt} \vec{q}(t)$
- $\frac{d}{dt}(\vec{p}(t) \wedge \vec{q}(t)) = \vec{p}(t) \wedge \frac{d\vec{q}(t)}{dt} + \frac{d\vec{p}(t)}{dt} \wedge \vec{q}(t)$

*Lời giải.* a. Giả sử  $\vec{p}(t) = (p_1(t), p_2(t), p_3(t)), \vec{q}(t) = (q_1(t), q_2(t), q_3(t))$ , khi đó:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\vec{p}(t) + \vec{q}(t)) &= \frac{d}{dt}(p_1(t) + q_1(t), p_2(t) + q_2(t), p_3(t) + q_3(t)) \\ &= (p'_1(t) + q'_1(t), p'_2(t) + q'_2(t), p'_3(t) + q'_3(t)) \\ &= (p'_1(t), p'_2(t), p'_3(t)) + (q'_1(t), q'_2(t), q'_3(t)) \\ &= \frac{d\vec{p}(t)}{dt} + \frac{d\vec{q}(t)}{dt} \end{aligned}$$



b.

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} (\alpha(t) \vec{p}(t)) \\
&= ([\alpha(t) p_1(t)]', [\alpha(t) p_2(t)]', [\alpha(t) p_3(t)]') \\
&= (\alpha'(t) p_1(t) + \alpha(t) p_1'(t), \alpha'(t) p_2(t) + \alpha(t) p_2'(t), \alpha'(t) p_3(t) + \alpha(t) p_3'(t)) \\
&= (\alpha'(t) p_1(t), \alpha'(t) p_2(t), \alpha'(t) p_3(t)) + (\alpha(t) p_1'(t), \alpha(t) p_2'(t), \alpha(t) p_3'(t)) \\
&= \alpha(t) \frac{d\vec{p}(t)}{dt} + \alpha'(t) \vec{p}(t)
\end{aligned}$$

c. Chứng minh tương tự như câu b, sử dụng công thức đạo hàm của hàm hợp.

d.

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} (\vec{p}(t) \wedge \vec{q}(t)) \\
&= \frac{d}{dt} \left( \begin{vmatrix} p_2(t) & p_3(t) \\ q_2(t) & q_3(t) \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} p_3(t) & p_1(t) \\ q_3(t) & q_1(t) \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} p_1(t) & p_2(t) \\ q_1(t) & q_2(t) \end{vmatrix} \right) \\
&= \dots \\
&= \left( \begin{vmatrix} p_2(t) & p_3'(t) \\ q_2(t) & q_3'(t) \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} p_3(t) & p_1'(t) \\ q_3(t) & q_1'(t) \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} p_1(t) & p_2'(t) \\ q_1(t) & q_2'(t) \end{vmatrix} \right) \\
&+ \left( \begin{vmatrix} p_2'(t) & p_3(t) \\ q_2'(t) & q_3(t) \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} p_3'(t) & p_1(t) \\ q_3'(t) & q_1(t) \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} p_1'(t) & p_2(t) \\ q_1'(t) & q_2(t) \end{vmatrix} \right) \\
&= \vec{p}(t) \wedge \frac{d\vec{q}(t)}{dt} + \frac{d\vec{p}(t)}{dt} \wedge \vec{q}(t)
\end{aligned}$$

■

**Bài tập 1.4.** Viết phương trình tiếp tuyến và pháp diện của đường:

$$\text{a. } \begin{cases} x = a \sin^2 t \\ y = b \sin t \cos t \\ z = c \cos^2 t \end{cases} \text{ tại điểm ứng với } t = \frac{\pi}{4}, (a, b, c > 0).$$

$$\text{b. } \begin{cases} x = \frac{e^t \sin t}{\sqrt{2}} \\ y = 1 \\ z = \frac{e^t \cos t}{\sqrt{2}} \end{cases} \text{ tại điểm ứng với } t = 0.$$

Lời giải. a. – Phương trình tiếp tuyến:  $(d) : \frac{x - \frac{a}{2}}{a} = \frac{y - \frac{b}{2}}{0} = \frac{z - \frac{c}{2}}{-c}$ – Phương trình pháp diện:  $(P) : a(x - \frac{a}{2}) - c(z - \frac{c}{2}) = 0$ .

$$\text{b. } – \text{ Phương trình tiếp tuyến: } (d) : \frac{x}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{y-1}{0} = \frac{z - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

– Phương trình pháp diện:  $(P) : \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}(z - \frac{\sqrt{2}}{2}) = 0$ .

■

## 2.9 Bài tập

**Bài tập 1.5.** Tính độ cong của:

- a.  $y = -x^3$  tại điểm có hoành độ  $x = \frac{1}{2}$ .

*Lời giải.*

$$C(M) = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}} = \dots = \frac{192}{125}$$

- b.  $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \quad (a > 0)$  tại điểm bất kì.

*Lời giải.*

$$C(M) = \frac{\left| \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} \right|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} = \dots = \frac{1}{2a\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \cos t}}$$

- c.  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$  tại điểm bất kì ( $a > 0$ ).

*Lời giải.* Phương trình tham số:  $\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}$ , nên

$$C(M) = \frac{\left| \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} \right|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} = \dots = \frac{1}{3a |\sin t \cos t|}$$

- d.  $r = ae^{b\varphi}, (a, b > 0)$

*Lời giải.*

$$C(M) = \frac{|r^2 + 2r'^2 - rr''|}{(r^2 + r'^2)^{3/2}} = \frac{1}{ae^{b\varphi} \sqrt{1 + b^2}}$$

**Bài tập 1.6.** Viết phương trình pháp tuyến và tiếp diện của mặt cong:

- a)  $x^2 - 4y^2 + 2z^2 = 6$  tại điểm  $(2, 2, 3)$ .

b)  $z = 2x^2 + 4y^2$  tại điểm  $(2, 1, 12)$ .

c)  $z = \ln(2x + y)$  tại điểm  $(-1, 3, 0)$

*Lời giải.* a. – Phương trình pháp tuyến:  $(d) : \frac{x-2}{4} = \frac{y-2}{-16} = \frac{z-3}{12}$

– Phương trình tiếp diện:  $(P) : 4(x-2) - 16(y-2) + 12(z-3) = 0$

b. – Phương trình pháp tuyến:  $(d) : \frac{x-2}{8} = \frac{y-1}{8} = \frac{z-12}{-1}$

– Phương trình tiếp diện:  $(P) : 8(x-2) + 8(y-1) - (z-12) = 0.$

c. – Phương trình pháp tuyến:  $(d) : \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{-1}$

– Phương trình tiếp diện:  $(P) : 2(x+1) + (y-3) - z = 0.$  ■

**Bài tập 1.7.** Viết phương trình tiếp tuyến và pháp diện của đường:

a.  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ y^2 + z^2 = 25 \end{cases}$  tại điểm  $A(1, 3, 4)$

b.  $\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 + z^2 = 47 \\ x^2 + 2y^2 = z \end{cases}$  tại điểm  $B(-2, 6, 1)$

*Lời giải.* a. Ta có  $\begin{cases} f(x, y, z) := x^2 + y^2 - 10 = 0 \\ g(x, y, z) := y^2 + z^2 - 25 = 0 \end{cases}$  nên  $\begin{cases} \mathbf{n}_f = (2, 6, 0) \\ \mathbf{n}_g = (0, 6, 8) \end{cases}$ .

Do đó  $\mathbf{n}_f \wedge \mathbf{n}_g = 4(12, -4, 3)$ . Vậy:

– Phương trình tiếp tuyến  $(d) : \frac{x-1}{12} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z-4}{3}$

– Phương trình pháp diện  $(P) : 12(x-1) - 4(y-3) + 3(z-4) = 0$

b. Tương tự,  $\begin{cases} \mathbf{n}_f = (-8, 6, 12) \\ \mathbf{n}_g = (-4, 4, -1) \end{cases}$ ,  $\mathbf{n}_f \wedge \mathbf{n}_g = -2(27, 27, 4)$  nên

– Phương trình tiếp tuyến  $(d) : \frac{x+2}{27} = \frac{y-1}{27} = \frac{z-6}{4}$

– Phương trình pháp diện  $(P) : 27(x+2) + 27(y-1) + 4(z-6) = 0$  ■



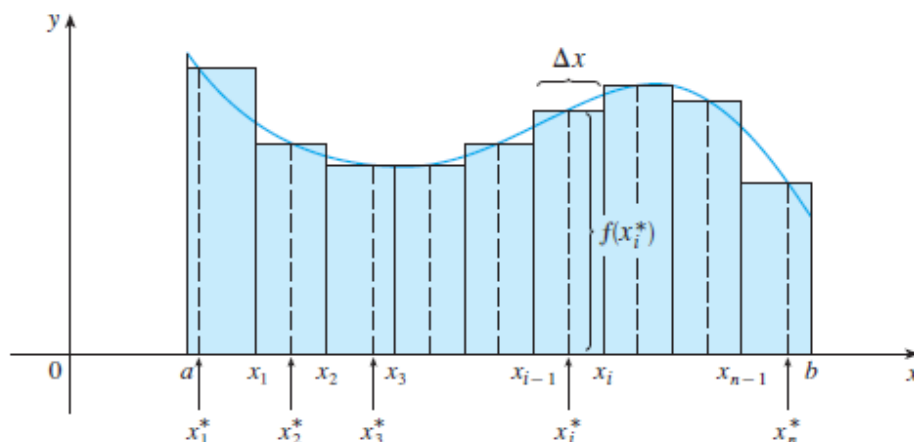
# CHƯƠNG 2

## TÍCH PHÂN BỘI

### §1. TÍCH PHÂN KÉP

#### 1.1 Định nghĩa

Diện tích và tích phân xác định



Cho  $f(x)$  là một hàm số xác định với  $a \leq x \leq b$ .

- Chia khoảng  $[a, b]$  này thành  $n$  khoảng nhỏ  $[x_{i-1}, x_i]$  với độ dài bằng nhau  $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ .
- Chọn  $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$  bất kì.

- Lập tổng Riemann

$$S(n) = \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x.$$

Tổng Riemann này chính là diện tích của các hình chữ nhật trên hình vẽ.

- Lấy giới hạn để thu được tích phân xác định từ  $a$  đến  $b$  của hàm số  $f(x)$ :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S(n),$$

(với điều kiện là giới hạn này không phụ thuộc vào cách chọn các điểm  $x_i^*$ ).

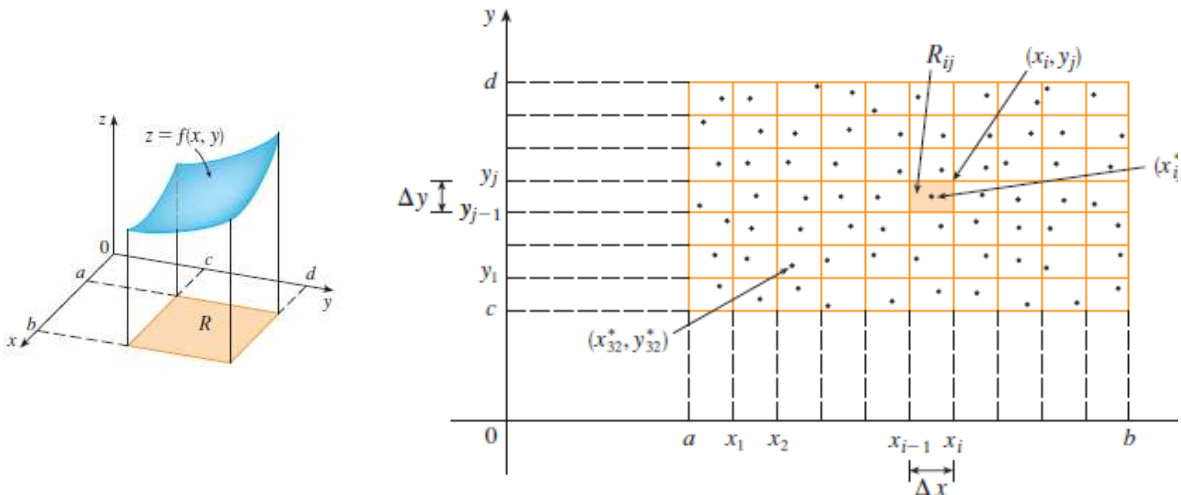
### Thể tích và tích phân bội hai trên hình chữ nhật

Một cách hoàn toàn tương tự như trên, xét hàm số  $f$  phụ thuộc vào hai biến số  $x, y$  xác định trên một hình chữ nhật đóng

$$R = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}.$$

Gọi  $S$  là miền nằm phía dưới của mặt  $z = f(x, y)$  và phía trên của hình chữ nhật  $R$ , nghĩa là

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : 0 \leq z \leq f(x, y), (x, y) \in R\}.$$



- Chia miền  $R$  thành các miền hình chữ nhật con, bằng cách chia khoảng  $[a, b]$  thành  $m$  khoảng con với độ dài bằng nhau và bằng  $\frac{b-a}{m}$ , chia khoảng  $[c, d]$  thành  $n$  khoảng

con với độ dài bằng nhau và bằng  $\frac{d-c}{n}$ . Như vậy, miền  $R$  được chia thành  $m \times n$  hình chữ nhật con

$$R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$$

mỗi hình chữ nhật con có diện tích  $\Delta S = \Delta x \Delta y$ .

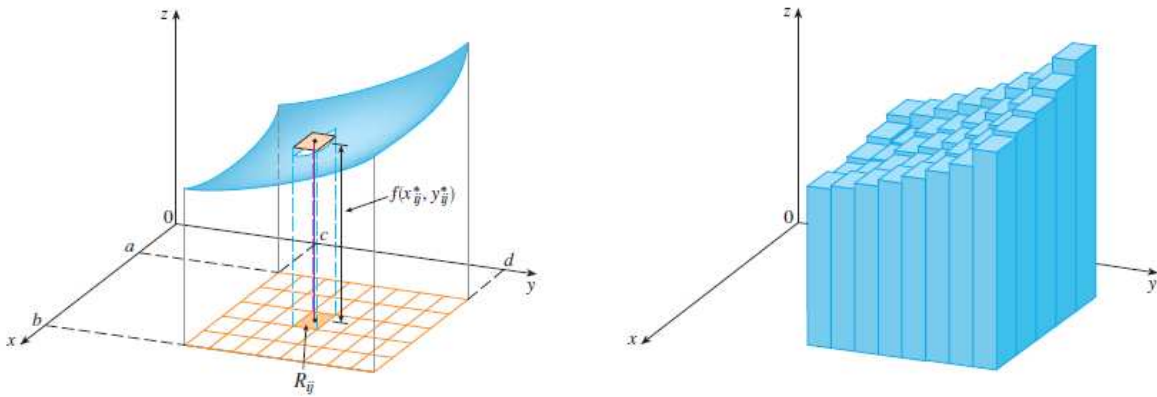
- Trên mỗi hình chữ nhật  $R_{ij}$  ta chọn một điểm  $(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$  bất kì. Khi đó thể tích của phần con của  $S$  nằm phía trên của hình chữ nhật  $R_{ij}$  có thể được xấp xỉ bằng

$$f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta S.$$

- Tiếp tục quá trình này và thu được công thức xấp xỉ thể tích của miền  $S$ :

$$V(S) \approx \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta S.$$

Để dàng nhận thấy rằng nếu ta chia miền  $R$  càng nhỏ thì công thức xấp xỉ trên càng tốt.



**Định nghĩa 2.7.** Tích phân kép (hay tích phân bội hai) của hàm số  $f(x)$  trên miền hình chữ nhật  $R$  là

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta S,$$

nếu như giới hạn này tồn tại và không phụ thuộc vào cách chọn điểm  $(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$ .

**Chú ý 2.4.** Nếu  $f(x, y) \geq 0$  thì thể tích của miền nằm phía dưới mặt cong  $z = f(x, y)$  và phía trên hình chữ nhật  $R = [a, b] \times [c, d]$  là

$$V = \iint_R f(x, y) dx dy.$$

### Tích phân lặp và Định lý Fubini

Giả sử  $f(x, y)$  là một hàm số khả tích trên  $R = [a, b] \times [c, d]$ . Xét hai tích phân lặp sau:

$$I_1 = \int_a^b \left[ \int_c^d f(x, y) dy \right] dx, \quad I_2 = \int_c^d \left[ \int_a^b f(x, y) dx \right] dy.$$

**Định lý 2.4 (Định lý Fubini).** Nếu  $f(x, y)$  là hàm số liên tục trên miền hình chữ nhật  $R = [a, b] \times [c, d]$  thì

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx.$$

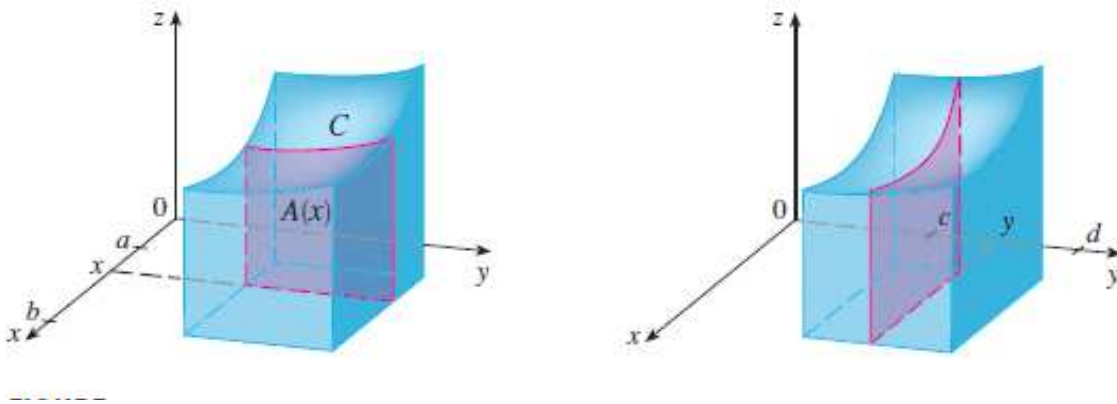
*Chứng minh.* Trong khuôn khổ của Bài giảng này, thay vì đưa ra chứng minh cho trường hợp tổng quát, chúng ta sẽ chỉ chứng minh cho trường hợp  $f(x, y) \geq 0$ . Trước hết, thể tích của miền nằm phía dưới mặt  $z = f(x, y)$  và phía trên hình chữ nhật  $R$  được tính theo công thức.

$$V = \iint_R f(x, y) dx dy.$$

Trong học phần Giải tích I, phần ứng dụng của tích phân xác định để tính thể tích, chúng ta có một công thức khác, đó là

$$V = \int_a^b A(x) dx,$$

ở đó  $A(x)$  là diện tích của thiết diện của miền  $V$  cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục  $Ox$ .



Nhìn vào hình vẽ, có thể thấy  $A(x)$  diện tích của miền là miền nằm phía dưới đường  $z = f(x, y)$ , ở đó  $x$  được cố định và  $c \leq y \leq d$ . Do đó,

$$A(x) = \int_c^d f(x, y) dy \Rightarrow \iint_R f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy.$$



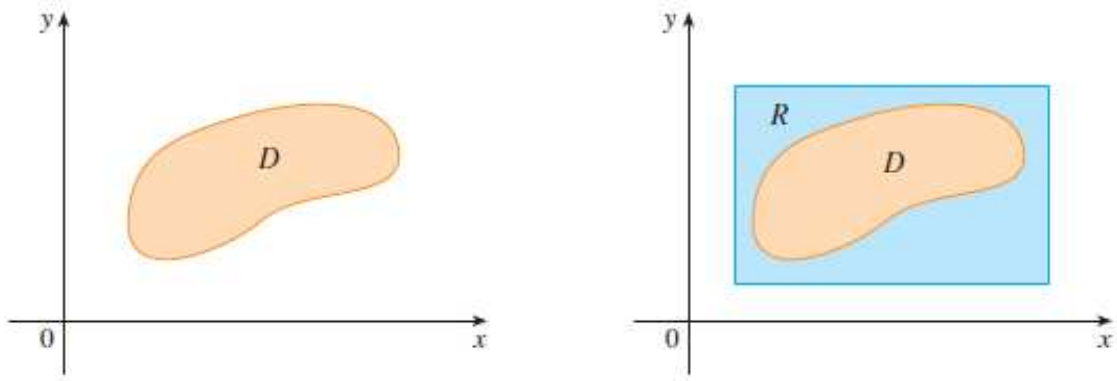
Một cách hoàn toàn tương tự,

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx.$$

### Tích phân kép trên miền bị chặn bất kì

Nếu như miền  $D$  không phải là hình chữ nhật mà chỉ là miền bị chặn bất kì thì ý tưởng rất đơn giản là chọn một hình chữ nhật  $R$  chứa  $D$  và định nghĩa hàm số  $F$  với miền xác định là  $R$  bởi

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{nếu } (x, y) \in D, \\ 0, & \text{nếu } (x, y) \notin D. \end{cases}$$



**Định nghĩa 2.8.** Tích phân kép (hay tích phân bội hai) của hàm số  $f(x, y)$  trên miền  $D$  được định nghĩa bằng

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_R F(x, y) dx dy.$$

Có một cách định nghĩa khác của tích phân kép như sau.

**Định nghĩa 2.9.** Cho hàm số  $f(x, y)$  xác định trong một miền đóng, bị chặn  $D$ . Chia miền  $D$  một cách tùy ý thành  $n$  mảnh nhỏ. Gọi các mảnh đó và diện tích của chúng là  $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$ . Trong mỗi mảnh  $\Delta S_i$  lấy một điểm tùy ý  $M(x_i, y_i)$  và thành lập tổng tích phân  $I_n = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta S_i$ . Nếu khi  $n \rightarrow \infty$  sao cho  $\max \{\Delta S_i \rightarrow 0\}$  mà  $I_n$  tiến tới một giá trị hữu hạn  $I$ , không phụ thuộc vào cách chia miền  $D$  và cách chọn điểm  $M(x_i, y_i)$  thì giới hạn ấy được gọi là tích phân kép của hàm số  $f(x, y)$  trong miền  $D$ , kí hiệu là

$$\iint_D f(x, y) dx dy.$$

Cách định nghĩa này về cơ bản ý tưởng cũng giống như định nghĩa ở trên. Tuy nhiên, việc chia miền  $D$  thành  $n$  mảnh nhỏ như vậy dẫn đến việc khó hình dung. Thay vào đó, do tích phân kép không phụ thuộc vào cách chia miền  $D$  thành các mảnh nhỏ nên ta "chủ động" chia  $D$  thành hai họ đường thẳng song song với các trục tọa độ như trong Định nghĩa 2.7.

**Chú ý 2.5.** Nếu tồn tại tích phân kép  $\iint_D f(x, y) dx dy$  thì ta nói hàm số  $f(x, y)$  khả tích trong miền  $D$ .

### Tính chất cơ bản:

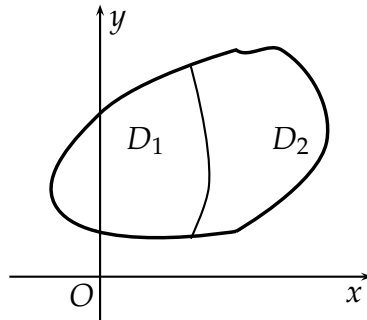
- Tính chất tuyến tính:

$$\iint_D [f(x, y) + g(x, y)] dx dy = \iint_D f(x, y) dx dy + \iint_D g(x, y) dx dy$$

$$\iint_D k f(x, y) dx dy = k \iint_D f(x, y) dx dy$$

- Tính chất cộng tính: Nếu  $D = D_1 \cup D_2$ , ở đó  $D_1$  và  $D_2$  không "chồng" lên nhau (có thể ngoại trừ phần biên) thì

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy.$$

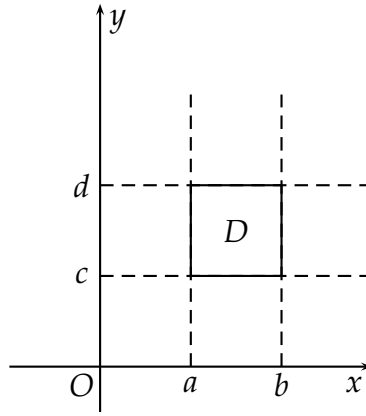


## 1.2 Tích tích phân kép trong hệ tọa độ Descartes

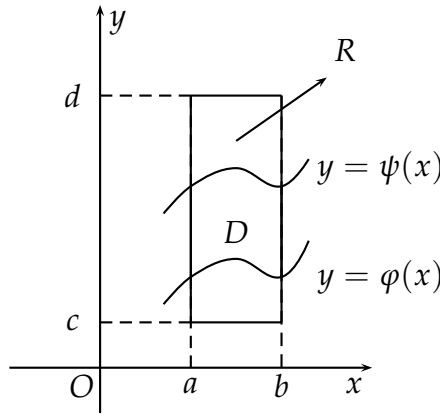
Để tính các tích phân hai lớp, ta cần phải đưa về tính các tích phân lặp.

1. Nếu  $D$  là miền hình chữ nhật ( $D$ ):  $a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$  thì ta có thể sử dụng một trong hai tích phân lặp

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx.$$



2. Nếu  $D$  là hình thang cong có cách cạnh song song với  $Oy$ ,  $(D) : a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)$  thì, một cách hết sức đơn giản, ta chọn hình chữ nhật  $R = [a, b] \times [c, d]$  như hình vẽ.



Khi đó,

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_R F(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d F(x, y) dy,$$

ở đó, nhắc lại rằng,

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{nếu } (x, y) \in D, \\ 0, & \text{nếu } (x, y) \notin D. \end{cases}$$

Ta có

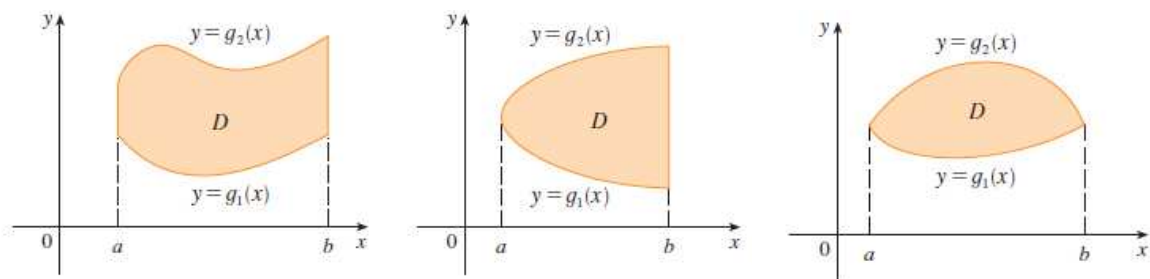
$$\int_c^d F(x, y) dy = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} F(x, y) dy = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy,$$

bởi vì với  $y > \psi(x)$  hoặc  $y < \varphi(x)$  thì  $F(x, y) = 0$ .

Do đó, tích phân kép trong trường hợp này được chuyển về tích phân lặp với thứ tự như sau:

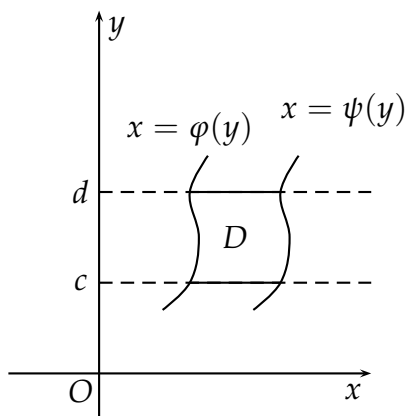
$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy.$$

Một số miền có dạng hình thang cong có cạnh đáy song song với  $Oy$  khác được thể hiện ở hình vẽ sau:



3. Một cách hoàn toàn tương tự, nếu  $D$  là hình thang cong có các cạnh song song với  $Ox$ ,  $(D) : c \leq y \leq d, \varphi(y) \leq x \leq \psi(y)$  thì tích phân kép được chuyển về tích phân lặp với thứ tự như sau:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx.$$



4. Nếu  $D$  là miền có hình dáng phức tạp, không có dạng 2,3 thì thông thường ta sẽ chia miền  $D$  thành một số hữu hạn miền có dạng 2 hoặc 3 rồi sử dụng tính chất cộng tính để đưa về việc tính toán những tích phân lặp trên miền có dạng 2, 3.

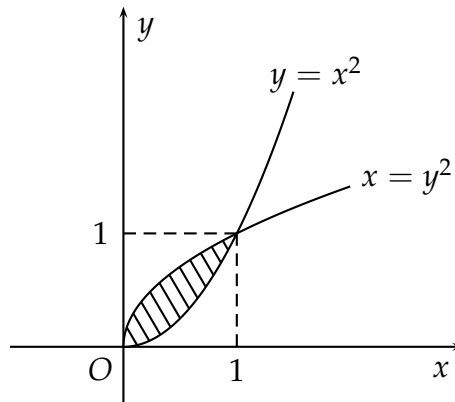
**Bài tập 2.1.** Tính các tích phân sau:

a)  $\iint_D x \sin(x+y) dx dy, D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\}.$

Lời giải.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin(x+y) dy = \dots = \frac{\pi}{2} \text{ hoặc } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dy \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin(x+y) dx = \dots = \frac{\pi}{2}$$

b)  $I = \iint_D x^2(y-x) dx dy, D$  giới hạn bởi  $y = x^2$  và  $x = y^2$ .



Hình 2.1

Lời giải.

$$I = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2 y - x^3) dy = \dots = -\frac{1}{504}.$$

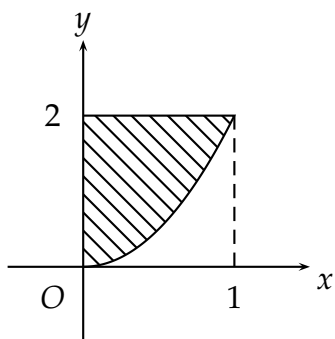
## Một số dạng bài tập cơ bản

### Dạng 1: Đổi thứ tự lấy tích phân.

Chúng ta bắt đầu bằng bài toán sau đây:

**Bài tập 2.2.** Tính  $I = \int_0^1 dx \int_{x^2}^1 e^{y^2} dy$ .

Hàm số  $f(x, y) = xe^{y^2}$  liên tục trên miền  $D$  nên chắc chắn khả tích trên  $D$ . Tuy nhiên, nếu tính tích phân trên mà làm theo thứ tự  $dy$  trước  $dx$  sau như trong đề bài thì không tính được, vì hàm số  $e^{y^2}$  không có nguyên hàm sơ cấp! Do đó, nảy sinh nhu cầu đổi thứ tự lấy tích phân.



Hình 2.2

Lời giải. Từ biểu thức tích phân suy ra biểu diễn giải tích của miền  $D$  là  $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1, \\ x^2 \leq y \leq 2. \end{cases}$

Ta vẽ miền  $D$  và biểu diễn nó lại dưới dạng  $\begin{cases} 0 \leq y \leq 1, \\ 0 \leq x \leq \sqrt{y}. \end{cases}$

Do đó,

$$I = \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} x e^{y^2} dx = \int_0^1 e^{y^2} \frac{x^2}{2} \Big|_{x=0}^{x=\sqrt{y}} dy = \frac{1}{2} \int_0^1 e^{y^2} \cdot y dy = \frac{1}{4} e^{y^2} \Big|_0^1 = \frac{1}{4} (e - 1).$$

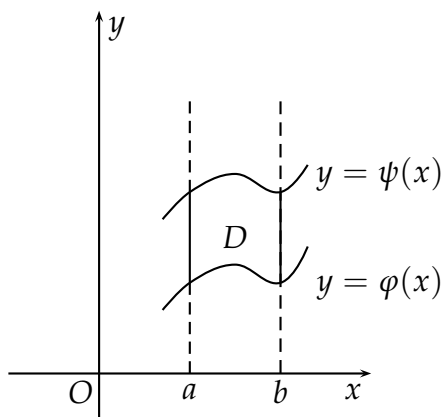
### Quy trình làm bài toán đổi thứ tự lấy tích phân

**Bài toán 1:** Đổi thứ tự lấy tích phân  $\int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy$

1. Từ biểu thức tích phân lặp, suy ra biểu diễn giải tích của miền lấy tích phân là

$$(D) : \begin{cases} a \leq x \leq b, \\ \varphi(x) \leq y \leq \psi(x). \end{cases}$$

2. Vẽ phác thảo miền  $D$ .



3. Chia  $D$  thành các hình thang cong có các cạnh song song với  $Ox$ . Tìm biểu diễn giải tích của các miền con, ví dụ  $(D_i) : \begin{cases} c_i \leq y \leq d_i, \\ \varphi_i(y) \leq x \leq \psi_i(y). \end{cases}$

Sau đó viết

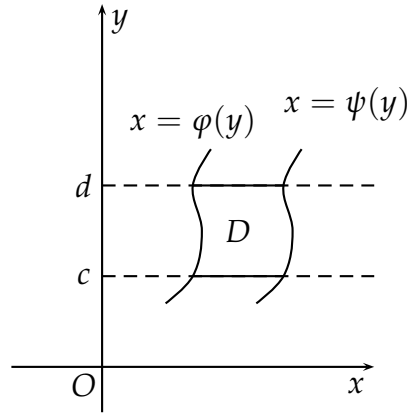
$$\int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy = \sum_i \int_{c_i}^{d_i} dy \int_{\varphi_i(y)}^{\psi_i(y)} f(x, y) dx.$$

Làm tương tự với

**Bài toán 2:** Đổi thứ tự lấy tích phân  $\int_c^d dy \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx$ .

1. Từ biểu thức tích phân lặp, suy ra biểu diễn giải tích của miền lấy tích phân là  $(D) : \begin{cases} c \leq y \leq d, \\ \varphi(y) \leq x \leq \psi(y). \end{cases}$

2. Vẽ phác thảo miền  $D$ .



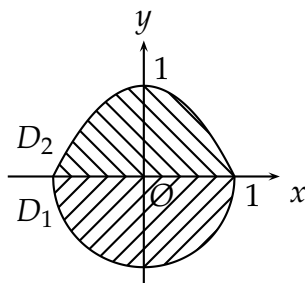
3. Chia  $D$  thành các hình thang cong có các cạnh song song với  $Oy$ . Tìm biểu diễn giải tích của các miền con, ví dụ  $(D_i) : \begin{cases} a_i \leq y \leq b_i, \\ \varphi_i(x) \leq y \leq \psi_i(x). \end{cases}$

Sau đó viết

$$\int_c^d dy \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx = \sum_i \int_{a_i}^{b_i} dx \int_{\varphi_i(x)}^{\psi_i(x)} f(x, y) dy.$$

**Bài tập 2.3.** Thay đổi thứ tự lấy tích phân của các tích phân sau:

$$\text{a) } \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x, y) dy.$$



Hình 2.3 a)

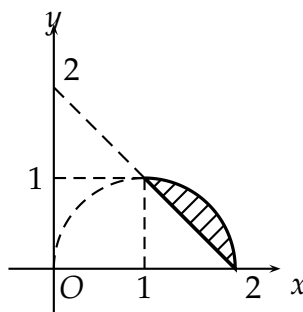
Chia miền  $D$  thành hai miền con  $D_1, D_2$  như hình vẽ, với

$$D_1 : \begin{cases} -1 \leq y \leq 0 \\ -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2} \end{cases}, D_2 : \begin{cases} 0 \leq y \leq 1 \\ -\sqrt{1-y} \leq x \leq \sqrt{1-y} \end{cases}.$$

Vậy

$$I = \int_{-1}^0 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx + \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x, y) dx.$$

$$\text{b) } \int_0^1 dy \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx.$$



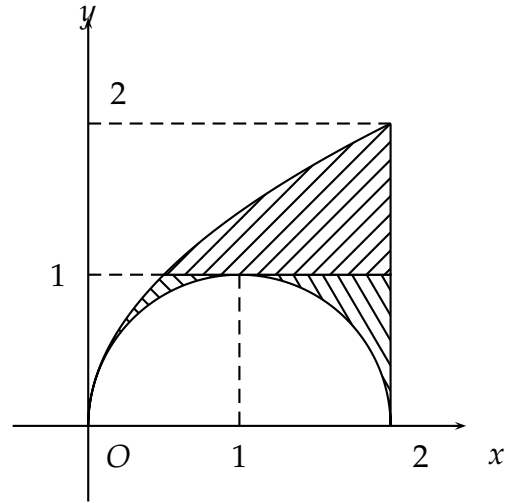
Hình 2.3 b)

Lời giải. Ta có biểu diễn giải tích của  $D$  là  $\begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ 2-x \leq y \leq \sqrt{2x-x^2} \end{cases}$  nên:

$$I = \int_1^2 dx \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy.$$



c)  $\int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x}} f(x,y) dx.$



Hình 2.3 c)

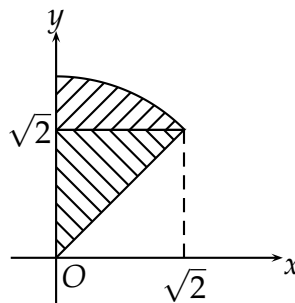
Lời giải. Chia  $D$  thành 3 miền như hình vẽ, với

$$D_1 : \begin{cases} 0 \leq y \leq 1 \\ \frac{y^2}{2} \leq x \leq 1 - \sqrt{1-y^2} \end{cases}, D_2 : \begin{cases} 0 \leq y \leq 1 \\ 1 + \sqrt{1-y^2} \leq x \leq 2 \end{cases}, D_3 : \begin{cases} 1 \leq y \leq 2 \\ \frac{y^2}{2} \leq x \leq 2 \end{cases}.$$

Vậy:

$$I = \int_0^1 dy \int_{\frac{y^2}{2}}^{1-\sqrt{1-y^2}} f(x,y) dx + \int_0^1 dy \int_{1+\sqrt{1-y^2}}^2 f(x,y) dx + \int_1^2 dy \int_{\frac{y^2}{2}}^2 f(x,y) dx.$$

d)  $\int_0^{\sqrt{2}} dy \int_0^y f(x,y) dx + \int_{\sqrt{2}}^2 dy \int_0^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y) dx.$



Hình 2.3 d)

*Lời giải.* Biểu diễn giải tích của  $D$  là  $\begin{cases} 0 \leq x \leq \sqrt{2} \\ x \leq y \leq \sqrt{4-x^2} \end{cases}$  nên:

$$I = \int_0^{\sqrt{2}} dx \int_x^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy.$$

**Bài tập 2.4.** [Cuối kì, K62] Tính các tích phân lặp

a)  $\int_0^1 dy \int_{2y}^2 e^{x^2} dx$

b)  $\int_0^1 dx \int_{2x}^2 e^{y^2} dy.$

**Bài tập 2.5.** Chứng minh rằng

$$\int_0^1 \left( \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dy \right) dx = \frac{1}{2} \neq \int_0^1 \left( \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dx \right) dy = -\frac{1}{2}.$$

Hãy giải thích tại sao không đổi thứ tự lấy tích phân được trong tích phân trên.

[Gợi ý] Hàm lấy tích phân  $f(x, y) = \frac{x-y}{(x+y)^3}$  không liên tục trên miền  $D = [0, 1] \times [0, 1]$  nên

$$\iint_{[0,1] \times [0,1]} \frac{x-y}{(x+y)^3} dx dy$$

có thể không tồn tại. Đây thực chất là một tích phân bội suy rộng.

**Dạng 2: Tính các tích phân kép có chứa dấu giá trị tuyệt đối.**

Giả sử cần tính  $\iint_D |f(x, y)| dx dy.$

Mục đích của chúng ta là phá bỏ được dấu giá trị tuyệt đối. Vì vậy ta khảo sát dấu của hàm  $f(x, y)$ . Do tính liên tục của hàm  $f(x, y)$  nên đường cong  $f(x, y) = 0$  sẽ chia miền  $D$  thành hai miền,  $D^+$  và  $D^-$ . Trên miền  $D^+$ ,  $f(x, y) \geq 0$ , và trên miền  $D^-$ ,  $f(x, y) \leq 0$ . Ta có công thức:

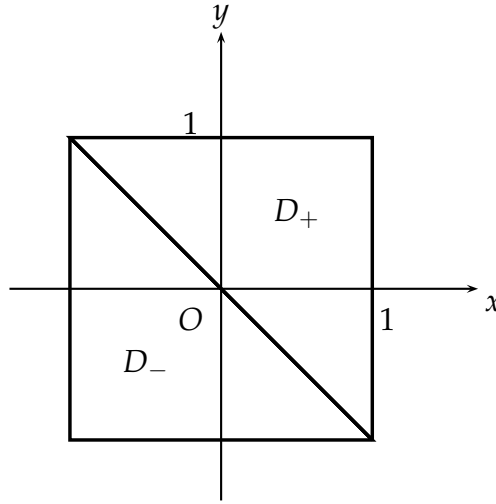
$$\boxed{\iint_D |f(x, y)| dx dy = \iint_{D^+} f(x, y) dx dy + \iint_{D^-} -f(x, y) dx dy} \quad (2.1)$$

Các bước để làm bài toán tính tích phân kép có chứa dấu giá trị tuyệt đối:

1. Vẽ đường cong  $f(x, y) = 0$  để tìm đường cong phân chia miền  $D$ .

2. Giả sử đường cong tìm được chia miền  $D$  thành hai miền. Để xác định xem miền nào là  $D^+$ , miền nào là  $D^-$ , ta xét một điểm  $(x_0, y_0)$  bất kì, sau đó tính giá trị  $f(x_0, y_0)$ . Nếu  $f(x_0, y_0) > 0$  thì miền chứa  $(x_0, y_0)$  là  $D^+$  và ngược lại.
3. Sau khi xác định được các miền  $D^+$ ,  $D^-$ , sử dụng công thức (2.1) để tính tích phân.

**Bài tập 2.6.** Tính  $\iint_D |x + y| dx dy$ ,  $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$



Hình 2.6

*Lời giải.* Ta có:

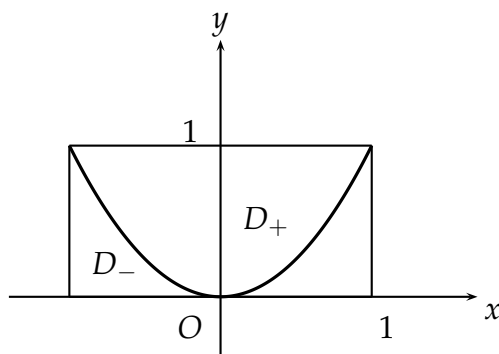
$$D^+ = D \cap \{x + y \geq 0\} = \begin{cases} -1 \leq x \leq 1, \\ -x \leq y \leq 1. \end{cases}$$

$$D^- = D \cap \{x + y \leq 0\} = \begin{cases} -1 \leq x \leq 1, \\ -1 \leq y \leq -x. \end{cases}$$

nên

$$I = \iint_{D^+} (x + y) dx dy - \iint_{D^-} (x + y) dx dy = \dots = \frac{8}{3}.$$

**Bài tập 2.7.** Tính  $\iint_D \sqrt{|y - x^2|} dx dy$ ,  $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ .



Hình 2.7

*Lời giải.* Chia miền  $D$  thành hai miền con

$$D^+ = D \cap \left\{ (x, y) \mid y - x^2 \geq 0 \right\} = \left\{ \begin{array}{l} -1 \leq x \leq 1, \\ x^2 \leq y \leq 1, \end{array} \right.$$

$$D^- = D \cap \left\{ (x, y) \mid y - x^2 \leq 0 \right\} = \left\{ \begin{array}{l} -1 \leq x \leq 1, \\ 0 \leq y \leq x^2. \end{array} \right.$$

Do đó

$$I = \iint_{D^+} \sqrt{y - x^2} dx dy + \iint_{D^-} \sqrt{x^2 - y} dx dy = I_1 + I_2,$$

trong đó

$$I_1 = \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 \sqrt{y - x^2} dy = \frac{2}{3} \int_{-1}^1 (1 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx \stackrel{x=\sin t}{=} \frac{4}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt = \dots = \frac{\pi}{4},$$

$$I_2 = \int_{-1}^1 dx \int_0^{x^2} \sqrt{x^2 - y} dy = \frac{2}{3} \int_{-1}^1 |x|^3 dx = \frac{4}{3} \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{3}.$$

Kết luận  $I = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{3}$ .

**Bài tập 2.8 (Cuối kì, K62).** Tính tích phân

a)  $\iint_D |x + y| dx dy,$

b)  $\iint_D |x - y| dx dy,$

ở đó  $D : x^2 + y^2 \leq 1$ .

**Dạng 3: Tính tích phân kép trong trường hợp miền lấy tích phân là miền đối xứng.**

**Định lý 2.5.** Nếu miền  $D$  là miền đối xứng qua trục  $Ox$  (tương ứng  $Oy$ ) và hàm là hàm lẻ đối với  $y$  (tương ứng đối với  $x$ ) thì

$$\iint_D f(x, y) dx dy = 0.$$

**Định lý 2.6.** Nếu miền  $D$  là miền đối xứng qua trục  $Ox$  (tương ứng  $Oy$ ) và hàm là hàm chẵn đối với  $y$  (tương ứng đối với  $x$ ) thì

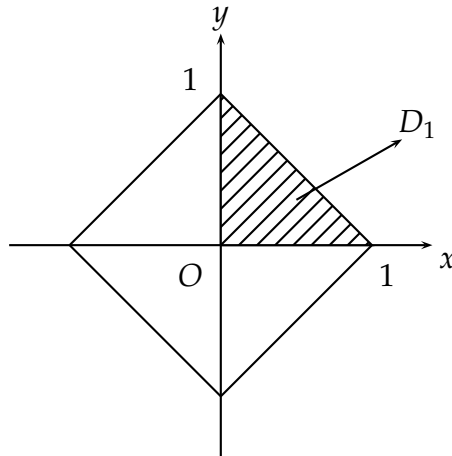
$$\iint_D f(x, y) dx dy = 2 \iint_{D^+} f(x, y) dx dy,$$

trong đó  $D^+$  là phần nằm bên trên trục  $Ox$  của  $D$  (tương ứng phía phải trục  $Oy$  của  $D$ ).

**Định lý 2.7.** Nếu miền  $D$  là miền đối xứng qua trục gốc tọa độ  $O$  và hàm  $f(x, y)$  thỏa mãn  $f(-x, -y) = -f(x, y)$  thì

$$\iint_D f(x, y) dx dy = 0.$$

**Bài tập 2.9.** Tính  $\iint_{|x|+|y|\leq 1} |x| + |y| dx dy$ .



Hình 2.9

*Lời giải.* Do  $D$  đối xứng qua cả  $Ox$  và  $Oy$ ,  $f(x, y) = |x| + |y|$  là hàm chẵn với  $x, y$  nên

$$I = 4 \iint_{D_1} f(x, y) dx dy = 4 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x + y) dy = \frac{4}{3}.$$

## 1.3 Phép đổi biến số trong tích phân kép

### Phép đổi biến số tổng quát

Phép đổi biến số tổng quát thường được sử dụng trong trường hợp miền  $D$  là giao của hai họ đường cong. Xét tích phân kép  $I = \iint_D f(x, y) dx dy$ , trong đó  $f(x, y)$  liên tục trên  $D$ .

Thực hiện phép đổi biến số

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v) \end{cases} \quad (2.2)$$

thoả mãn:

- $x = x(u, v), y = y(u, v)$  là các hàm số liên tục và có đạo hàm riêng liên tục trong miền đóng  $D_{uv}$  của mặt phẳng  $O'uv$ .
- Công thức (2.2) xác định song ánh từ  $D_{uv} \rightarrow D$ .
- Định thức Jacobi  $J = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} \neq 0 \forall (u, v) \in D_{uv}$ .

Khi đó ta có công thức đổi biến số:

$$I = \iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_{uv}} f(x(u, v), y(u, v)) |J| du dv$$

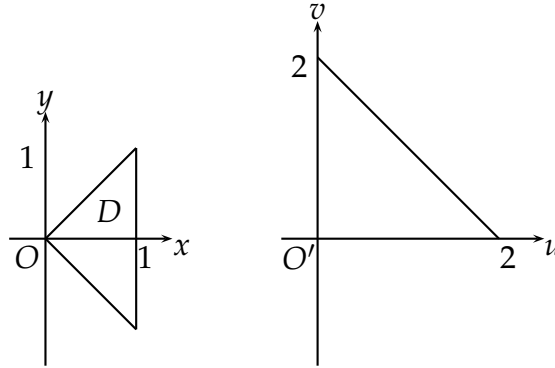
### Chú ý:

- Mục đích của phép đổi biến số là đưa việc tính tích phân từ miền  $D$  có hình dáng phức tạp về tính tích phân trên miền  $D_{uv}$  đơn giản hơn như là hình thang cong hoặc hình chữ nhật. Trong nhiều trường hợp, phép đổi biến số còn có tác dụng làm đơn giản biểu thức tính tích phân  $f(x, y)$ .
- Để xác định được miền  $D_{uv}$ , lưu ý rằng phép đổi biến số tổng quát sẽ biến biên của miền  $D$  thành biên của miền  $D_{uv}$ , biến miền  $D$  bị chặn thành miền  $D_{uv}$  bị chặn.
- Có thể tính  $J$  thông qua  $J^{-1} = \frac{D(u, v)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix}$ .

**Bài tập 2.10.** Chuyển tích phân sau sang hai biến  $u, v$ :

$$\text{a) } \int_0^1 dx \int_{-x}^x f(x, y) dx dy, \text{ nếu đặt } \begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases}$$

b) Áp dụng tính với  $f(x, y) = (2 - x - y)^2$ .



Hình 2.10

Lời giải. Ta có

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{u-v}{2} \end{cases}, J^{-1} = \frac{D(u, v)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2.$$

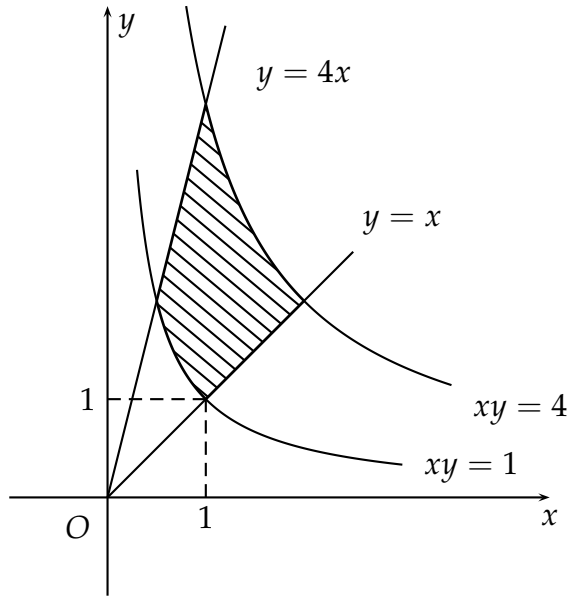
Hơn nữa

$$D \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ -x \leq y \leq x \end{cases} \leftrightarrow D_{uv} \begin{cases} 0 \leq u \leq 2 \\ 0 \leq v \leq 2 - u \end{cases}$$

nên

$$I = \frac{1}{2} \int_0^2 du \int_0^{2-u} f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) dv.$$

**Bài tập 2.11.** Tính  $I = \iint_D (4x^2 - 2y^2) dx dy$ , trong đó  $D : \begin{cases} 1 \leq xy \leq 4 \\ x \leq y \leq 4x. \end{cases}$



Hình 2.11

*Lời giải.* Thực hiện phép đổi biến

$$\begin{cases} u = xy \\ v = \frac{y}{x} \end{cases} \Rightarrow D_{uv} : \begin{cases} 1 \leq u \leq 4 \\ 1 \leq v \leq 4 \end{cases}, J^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{y}{x^2} & \frac{x}{x} \end{vmatrix} = \frac{2y}{x} = 2v.$$

Ta có

$$I = \int_1^4 du \int_1^4 \left(4\frac{u}{v} - 2uv\right) \cdot \frac{1}{2v} dv = \int_1^4 du \int_1^4 \left(\frac{2u}{v^2} - u\right) dv = \int_1^4 -\frac{3}{2}u du = -\frac{45}{4}.$$

### Dùng tích phân kép để chứng minh Công thức Euler (Giải tích III)

Chứng minh công thức Euler sau

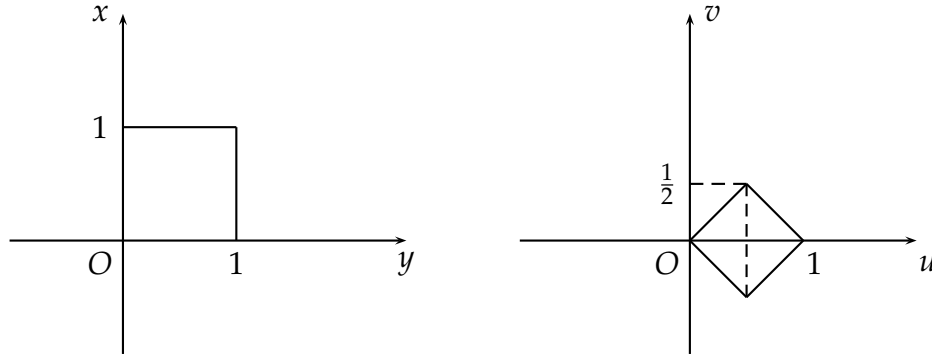
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Có nhiều cách để chứng minh công thức này, một trong những cách đó là sử dụng khai triển Fourier. Sau đây tôi xin giới thiệu một phương pháp chứng minh khác dựa vào Tích phân kép. Trước hết, vì  $\int_0^1 x^n dx = \int_0^1 y^n dy = \frac{1}{n+1}$  nên

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 x^n dx \int_0^1 y^n dy = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \int_0^1 (xy)^n dx dy = \int_0^1 \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} (xy)^n dx dy = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy} dx dy.$$



Để tính được tích phân kép này ta thực hiện phép đổi biến  $x = u - v, y = u + v$ . Khi đó  $J = 2$  và miền  $D$  sẽ biến thành miền  $D_{uv}$  như hình vẽ (Tại sao? Phải dựa vào nhận xét phép đổi biến biến biên của miền  $D$  thành biên của miền  $D_{uv}$ ).



Ta có

$$\begin{aligned} I &= \int_D \frac{1}{1-xy} dx dy = 2 \int_{D_{uv}} \frac{1}{1-u^2+v^2} du dv \\ &= 4 \int_0^{\frac{1}{2}} du \int_0^u \frac{1}{1-u^2+v^2} dv + 4 \int_{\frac{1}{2}}^1 du \int_0^{1-u} \frac{1}{1-u^2+v^2} dv. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Vì

$$\int_0^z \frac{dt}{a^2+t^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{t}{a} \Big|_0^z = \frac{1}{a} \arctan \frac{z}{a}$$

nên

$$I = 4 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \arctan \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} du + 4 \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \arctan \frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}} du = I_1 + I_2.$$

Đặt  $u = \sin \theta$  đối với tích phân  $I_1$  ta được

$$I_1 = 4 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos \theta}{\sqrt{1-\sin^2 \theta}} \arctan \frac{\sin \theta}{\sqrt{1-\sin^2 \theta}} d\theta = 4 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \arctan(\tan \theta) d\theta = 4 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \theta d\theta = \frac{\pi^2}{18}. \quad (2.4)$$

Đặt  $u = \cos 2\theta$  đối với tích phân  $I_2$  ta được

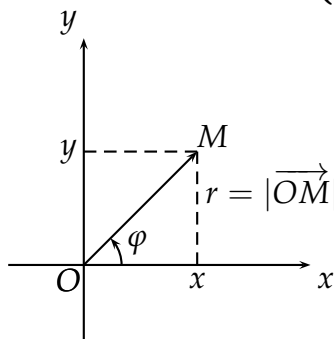
$$I_2 = 4 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin 2\theta}{\sqrt{1-\cos^2 2\theta}} \arctan \left( \frac{1-\cos 2\theta}{\sqrt{1-\cos^2 2\theta}} \right) d\theta = 8 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \arctan(\tan \theta) d\theta = \frac{\pi^2}{9}.$$

Kết luận  $I = \frac{\pi^2}{18} + \frac{\pi^2}{9} = \frac{\pi^2}{6}$ .

## Phép đổi biến số trong tọa độ cực

Trong rất nhiều trường hợp, việc tính toán tích phân kép trong tọa độ cực đơn giản hơn rất nhiều so với việc tính tích phân trong tọa độ Descartes, đặc biệt là khi miền  $D$  có dạng hình tròn, quạt tròn, cardioids, ... và hàm dưới dấu tích phân có những biểu thức

$(x^2 + y^2)$ . Tọa độ cực của điểm  $M(x, y)$  là bộ  $(r, \varphi)$ , trong đó  $\begin{cases} r = |\overrightarrow{OM}| \\ \varphi = \widehat{Ox, \overrightarrow{OM}} \end{cases}$ .

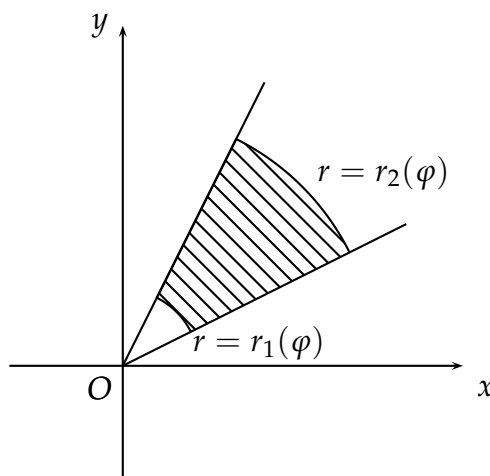


Công thức đổi biến:  $\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$  trong đó miền biến thiên của  $r, \varphi$  phụ thuộc vào hình dạng của miền  $D$ . Khi đó

$$J = \frac{D(x, y)}{D(r, \varphi)} = r \text{ và } I = \iint_{D_{r\varphi}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi.$$

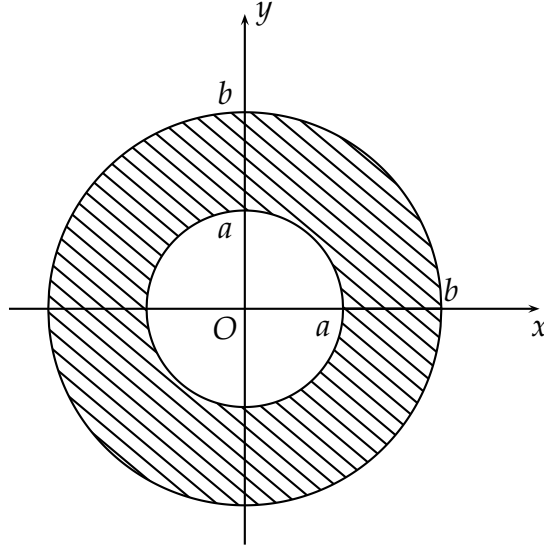
Đặc biệt, nếu miền lấy tích phân có dạng hình quạt  $\begin{cases} \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2 \\ r_1(\varphi) \leq r \leq r_2(\varphi) \end{cases}$  (xem hình vẽ) thì

$$I = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr.$$



**Bài tập 2.12.** Tìm cận lấy tích phân trong toạ độ cực  $I = \iint_D f(x, y) dx dy$ , trong đó  $D$  là miền xác định như sau:

a)  $a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2$

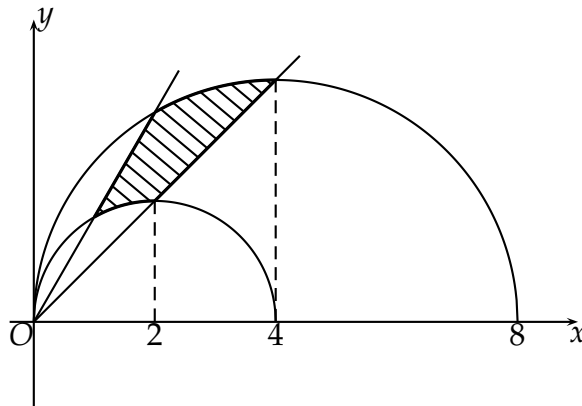


Hình 2.12a

Lời giải.

$$D : \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ a \leq r \leq b \end{cases} \Rightarrow I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_a^b f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr$$

b)  $x^2 + y^2 \geq 4x, x^2 + y^2 \leq 8x, y \geq x, y \leq 2x$



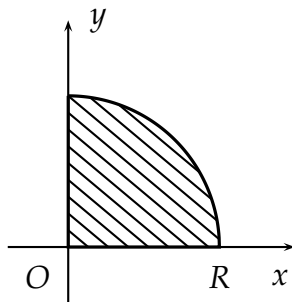
Hình 2.12b

Lời giải. Ta có:

$$D : \begin{cases} \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3} \\ 4 \cos \varphi \leq r \leq 8 \cos \varphi \end{cases} \Rightarrow I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_{4 \cos \varphi}^{8 \cos \varphi} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr.$$

**Bài tập 2.13.** Dùng phép đổi biến số trong toạ độ cực, hãy tính các tích phân sau:

a)  $\int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \ln(1+x^2+y^2) dy \quad (R > 0).$



Hình 2.13 a

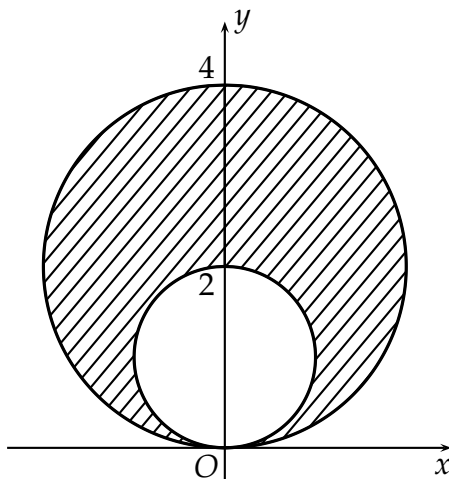
Từ biểu thức tính tích phân ta suy ra biểu thức giải tích của miền  $D$  là:

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq R \\ 0 \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2}. \end{cases}$$

Chuyển sang toạ độ cực, đặt  $\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$  thì  $\begin{cases} 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq r \leq R. \end{cases}$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R \ln(1+r^2) r dr = \frac{\pi}{4} \int_0^R \ln(1+r^2) d(1+r^2) \\ &= \frac{\pi}{4} \left[ (R^2+1) \ln(R^2+1) - R^2 \right]. \end{aligned}$$

b) Tính  $\iint_D xy^2 dx dy$ ,  $D$  giới hạn bởi  $\begin{cases} x^2 + (y-1)^2 = 1 \\ x^2 + y^2 - 4y = 0. \end{cases}$



Hình 2.13 b

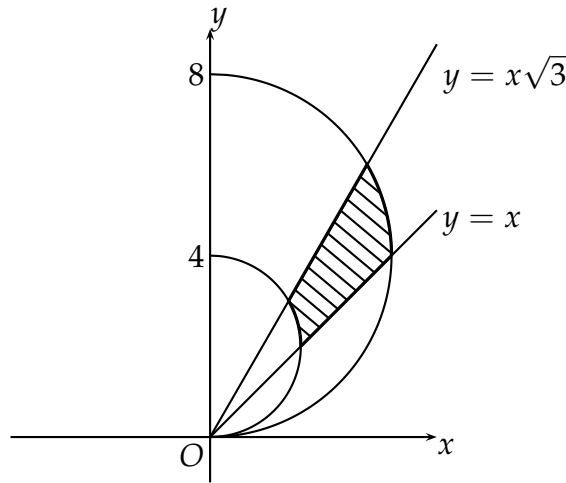
$$\text{Đặt } \begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq \pi \\ 2 \sin \varphi \leq r \leq 4 \sin \varphi. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi} d\varphi \int_{2 \sin \varphi}^{4 \sin \varphi} r \cos \varphi \cdot (r \sin \varphi)^2 r dr \\ &= 0. \end{aligned}$$

**Cách 2:** Vì  $D$  đối xứng qua  $Oy$  và  $f(x, y) = xy^2$  là hàm số lẻ đối với  $x$  nên  $I = 0$ .

**Bài tập 2.14.** Tính các tích phân sau:

a)  $\iint_D \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^2}$ , trong đó  $D : \begin{cases} 4y \leq x^2 + y^2 \leq 8y, \\ x \leq y \leq x\sqrt{3}. \end{cases}$



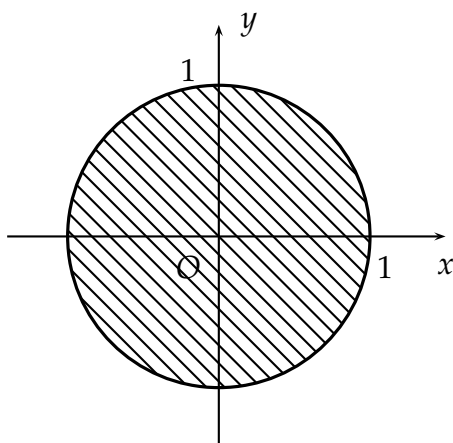
Hình 2.14a

*Lời giải.* Đặt  $\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3} \\ 4 \sin \varphi \leq r \leq 8 \sin \varphi. \end{cases}$

Do đó

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_{4 \sin \varphi}^{8 \sin \varphi} \frac{1}{r^4} r dr = -\frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left( \frac{1}{64 \sin^2 \varphi} - \frac{1}{16 \sin^2 \varphi} \right) d\varphi = \frac{3}{128} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right).$$

b)  $\iint_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}} dx dy$  trong đó  $D : x^2 + y^2 \leq 1$ .



Hình 2.14b

$$\text{Đặt } \begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq 1. \end{cases}$$

Ta có:

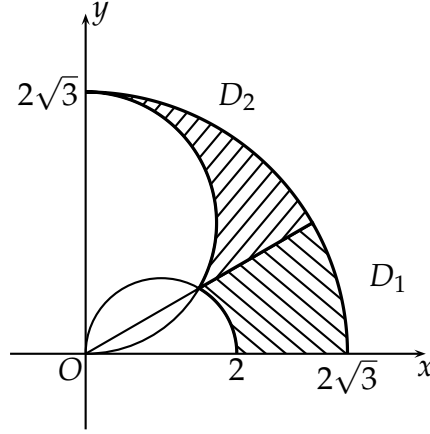
$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}} r dr \stackrel{u=r^2}{=} 2\pi \int_0^1 \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1-u}{1+u}} du.$$

Đặt

$$t = \sqrt{\frac{1-u}{1+u}} \Rightarrow \begin{cases} du = -\frac{4t}{(1+t^2)^2} dt \\ 0 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I &= \pi \int_0^1 t \left( -\frac{4t}{(1+t^2)^2} \right) dt = -\pi \int_0^1 \frac{4t}{1+t^2} + 4\pi \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^2} \\ &= -4\pi \arctan t \Big|_0^1 + 4\pi \left[ \frac{1}{2} \frac{t}{t^2+1} + \frac{1}{2} \arctan t \right] \Big|_0^1 \\ &= \frac{\pi^2}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{c) } \iint_D \frac{xy}{x^2+y^2} dx dy \text{ trong đó } D : \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 12 \\ x^2 + y^2 \geq 2x \\ x^2 + y^2 \geq 2\sqrt{3}y \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$



Hình 2.14c

*Lời giải.* Chia miền  $D$  thành hai miền  $D = D_1 \cup D_2$  như hình vẽ,

$$D_1 = \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6} \\ 2 \cos \varphi \leq r \leq 2\sqrt{3} \end{cases}, D_2 = \begin{cases} \frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \\ 2\sqrt{3} \sin \varphi \leq r \leq 2\sqrt{3} \end{cases}.$$

Vậy  $I = I_1 + I_2$ , trong đó

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} d\varphi \int_{2 \cos \varphi}^{2\sqrt{3}} \frac{r^2 \cos \varphi \sin \varphi}{r^2} r dr = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos \varphi \sin \varphi (12 - 4 \cos^2 \varphi) d\varphi = \dots = \frac{17}{32},$$

$$I_2 = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{2\sqrt{3} \sin \varphi}^{2\sqrt{3}} \frac{r^2 \cos \varphi \sin \varphi}{r^2} r dr = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \sin \varphi (12 - 12 \sin^2 \varphi) d\varphi = \dots = \frac{27}{32}.$$

Kết luận  $I = \frac{11}{8}$ . ■

### Phép đổi biến số trong tọa độ cực suy rộng.

Phép đổi biến trong tọa độ cực suy rộng được sử dụng khi miền  $D$  có hình dạng ellipse hoặc hình tròn có tâm không nằm trên các trục tọa độ. Khi sử dụng phép biến đổi này, bắt buộc phải tính lại các Jacobian của phép biến đổi.

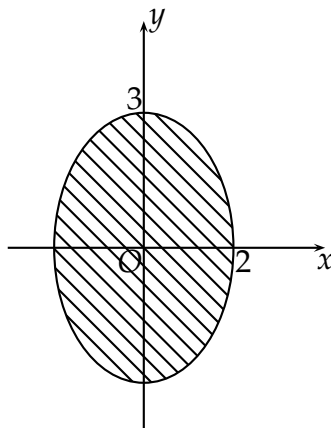
$$1. \text{ Nếu } D : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ thực hiện phép đổi biến } \begin{cases} x = ar \cos \varphi \\ y = br \sin \varphi \end{cases}, J = abr.$$

$$2. \text{ Nếu } D : (x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2, \text{ thực hiện phép đổi biến } \begin{cases} x = a + r \cos \varphi \\ y = b + r \sin \varphi \end{cases}, J = r.$$

3. Xác định miền biên thiên của  $r, \varphi$  trong phép đổi biến trong hệ tọa độ cực suy rộng.

4. Thay vào công thức đổi biến tổng quát và hoàn tất quá trình đổi biến.

**Bài tập 2.15.** Tính  $\iint_D |9x^2 - 4y^2| dx dy$ , trong đó  $D : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1$ .



Hình 2.15

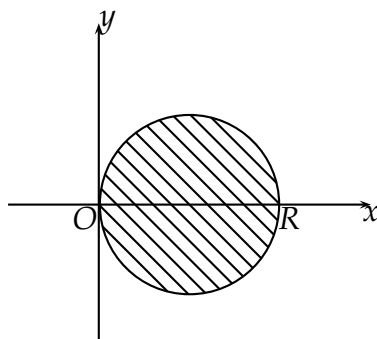
*Lời giải.*

$$\text{Đặt } \begin{cases} x = 2r \cos \varphi \\ y = 3r \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow J = 6r, \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq 1. \end{cases}$$

Ta có:

$$I = 6 \iint_{D_{r\varphi}} |36r^2 \cos^2 \varphi - 36r^2 \sin^2 \varphi| r dr d\varphi = 6.36 \int_0^{2\pi} |\cos 2\varphi| d\varphi \int_0^1 r^3 dr = \dots = 216$$

**Bài tập 2.16.** Tính  $\int_0^R dx \int_{-\sqrt{Rx-x^2}}^{\sqrt{Rx-x^2}} \sqrt{Rx - x^2 - y^2} dy, (R > 0)$ .



Hình 2.16

*Lời giải.* Từ biểu thức tính tích phân suy ra biểu thức giải tích của  $D$  là:

$$D : \begin{cases} 0 \leq x \leq R \\ -\sqrt{Rx - x^2} \leq y \leq \sqrt{Rx - x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 \leq \frac{R^2}{4}.$$



$$\text{Đặt } \begin{cases} x = \frac{R}{2} + r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow |J| = r, \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq \frac{R}{2} \end{cases}$$

Vậy

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{R}{2}} r \sqrt{\frac{R^2}{4} - r^2} dr = 2\pi \cdot \frac{-1}{2} \int_0^{\frac{R}{2}} \sqrt{\frac{R^2}{4} - r^2} d\left(\frac{R^2}{4} - r^2\right) = \frac{\pi R^3}{12}.$$

**Chú ý 2.6.** Đối với Bài tập 2.16, nếu chỉ đổi biến số trong tọa độ cực thông thường

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \text{ thì } \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0 \leq r \leq R \cos \varphi. \end{cases}$$

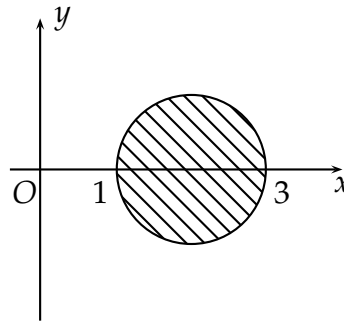
Tích phân đã cho trở thành

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{R \cos \varphi} \left( \sqrt{Rr \cos \varphi - r^2} \right) r dr.$$

Tích phân này không dễ tính vì nó chứa biểu thức vô tỉ  $\sqrt{Rr \cos \varphi - r^2}$ . Đây là một ví dụ điển hình về việc phép đổi biến số trong tọa độ cực suy rộng không những biến miền lấy tích phân về miền đơn giản, mà còn có tác dụng làm đơn giản biểu thức tính tích phân.

**Bài tập 2.17.** Tính  $\iint_D xy dx dy$ , với

a)  $D$  là hình tròn  $(x-2)^2 + y^2 \leq 1$ .



Hình 2.17a

Lời giải.

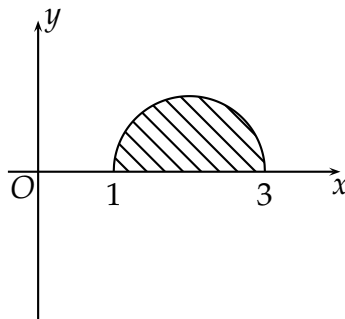
$$\text{Đặt } \begin{cases} x = 2 + r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{cases}$$

Ta có

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (2 + r \cos \varphi) r \sin \varphi \cdot r dr = 0.$$

**Cách 2.** Nhận xét  $D$  là miền đối xứng qua  $Ox$  và  $f(x, y) = xy$  là hàm lẻ đối với  $y$  nên  $I = 0$ . ■

b)  $D$  là nửa hình tròn  $(x - 2)^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0$ .



Hình 2.17b

Lời giải.

$$\text{Đặt } \begin{cases} x = 2 + r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \varphi \leq \pi. \end{cases}$$

Ta có

$$I = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 (2 + r \cos \varphi) r \sin \varphi \cdot r dr = \frac{4}{3}.$$

## 1.4 Bài tập ôn tập

**Bài tập 2.18.** Tính

$$\iint_{[0,1] \times [0,1]} \frac{y dx dy}{(1 + x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

[Gợi ý] Nên tính tích phân này theo thứ tự  $dy$  trước,  $dx$  sau.

$$I = \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{y dy}{(1 + x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

**Bài tập 2.19.** Tính

a)  $I_1 = \iint_D \frac{x^2}{y^2} dx dy$ , trong đó  $D$  là miền giới hạn bởi các đường thẳng  $x = 2, y = x$  và hyperbol  $xy = 1$ .

b)  $I_2 = \iint_C (x^2 + y) dx dy$ , trong đó  $C$  là miền giới hạn bởi các parabol  $y = x^2$  và  $x = y^2$ .

[Đáp số]

a)  $I_1 = \frac{9}{4}$

b)  $I_2 = \frac{33}{140}$

**Bài tập 2.20.** Tính tích phân

$$I = \iint_D \frac{x^2 \sin xy}{y} dx dy,$$

trong đó  $D$  là miền giới hạn bởi bốn parabol

$$x^2 = ay, x^2 = by, y^2 = px, y^2 = qx, (0 < a < b, 0 < p < q).$$

[Gợi ý] Thực hiện phép đổi biến số  $u = \frac{x^2}{y}, v = \frac{y^2}{x}$ .

**Bài tập 2.21.** Tính tích phân  $I = \iint_D xy dx dy$  trong đó  $D$  là miền giới hạn bởi các đường cong

$$y = ax^3, y = bx^3, y^2 = px, y^2 = qx, (0 < b < a, 0 < p < q).$$

[Gợi ý] Thực hiện phép đổi biến số  $u = \frac{x^3}{y}, v = \frac{y^2}{x}$ .

**Bài tập 2.22.** Chứng minh rằng

$$\int_0^1 dx \int_0^{1-x} e^{\frac{y}{x+y}} dy = \frac{e-1}{2}.$$

[Gợi ý] Thực hiện phép đổi biến  $u = x + y, v = y$ .

**Bài tập 2.23.** Tính diện tích của miền giới hạn bởi các đường  $xy = 4, xy = 8, xy^3 = 5, xy^3 = 15$ .

[Gợi ý] Đặt  $u = xy, v = xy^3$ . Đáp số  $S = 2 \ln 3$ .

**Bài tập 2.24.** Tính diện tích của miền giới hạn bởi bốn parabol  $y^2 = x, y^2 = 8x, x^2 = y, x^2 = 8y$ .

[Gợi ý] Đặt  $u = \frac{y^2}{x}, v = \frac{x^2}{y}$ . Đáp số  $S = \frac{279\pi}{2}$ .

**Bài tập 2.25.** Tính diện tích của miền giới hạn bởi các đường  $y = x^3, y = 4x^3, x = y^3, x = 4y^3$ .

[Đáp số]  $S = \frac{1}{8}$ .

**Bài tập 2.26.** Chứng minh rằng

$$\iint_{x+y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0} \cos \left( \frac{x-y}{x+y} \right) dx dy = \frac{\sin 1}{2}.$$

[Gợi ý] Đặt  $u = x - y, v = x + y$ .

**Bài tập 2.27.** Tính tích phân

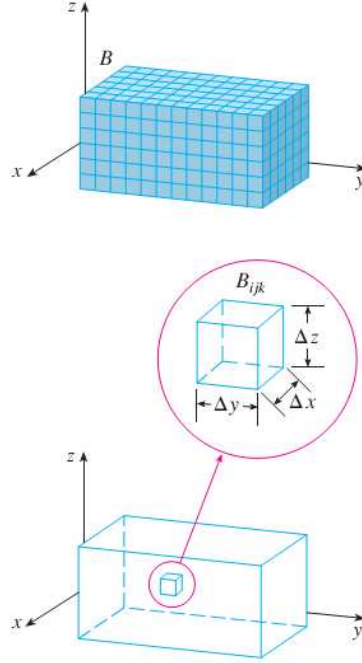
$$I = \iint_D \left( \sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} \right) dx dy,$$

trong đó  $D$  là miền giới hạn bởi các trục tọa độ và parabol  $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1$ .

## §2. TÍCH PHÂN BỘI BA

### 2.1 Định nghĩa và tính chất

Tích phân bội ba trên miền hình hộp



Giống như tích phân xác định của hàm số một biến số  $f(x)$  hay tích phân kép của hàm số hai biến số  $f(x, y)$ , tích phân bội ba của hàm số ba biến số  $f(x, y, z)$  được định nghĩa một cách hoàn toàn tương tự. Trước hết, ta xét trường hợp đơn giản nhất, ở đó hàm số  $f(x, y, z)$  được định nghĩa trên một hình hộp chữ nhật

$$B = [a, b] \times [c, d] \times [r, s] = \{(x, y, z) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, r \leq z \leq s\}.$$

- Chia  $B$  thành các hình hộp nhỏ bằng cách chia  $[a, b]$  thành  $l$  khoảng con với độ dài bằng nhau  $\Delta x$ , chia  $[c, d]$  thành  $m$  khoảng con với độ dài bằng nhau  $\Delta y$ , chia  $[r, s]$  thành  $n$  khoảng con với độ dài bằng nhau  $\Delta z$ . Khi đó,  $B$  được chia thành  $l \times m \times n$  hình hộp nhỏ

$$B_{ijk} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k],$$

mỗi hình hộp con với thể tích  $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ .

- Chọn mỗi điểm  $(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*) \in B_{ijk}$  và lập tổng tích phân

$$\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*) \Delta x \Delta y \Delta z.$$

**Định nghĩa 2.10.** Tích phân bội ba của hàm số  $f(x, y, z)$  trên hình hộp  $B$  là

$$\iiint_B f(x, y, z) dx dy dz = \lim_{l, m, n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*) \Delta x \Delta y \Delta z, \quad (2.5)$$

nếu giới hạn này tồn tại và không phụ thuộc vào cách chọn các điểm  $(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)$ . Khi đó ta nói rằng hàm số  $f(x, y, z)$  khả tích trên  $B$ .

**Chú ý 2.7.** Nếu chọn  $(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*) = (x_i, y_j, z_k)$  thì công thức (2.5) trở thành

$$\iiint_B f(x, y, z) dx dy dz = \lim_{l, m, n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n f(x_i, y_j, z_k) \Delta x \Delta y \Delta z,$$

**Định lý 2.8 (Định lý Fubini).** Nếu hàm số  $f(x, y, z)$  liên tục trên hình hộp  $B = [a, b] \times [c, d] \times [r, s]$  thì nó khả tích trên đó, và

$$\iiint_B f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_r^s f(x, y, z) dz.$$

### Tích phân bội ba trên miền bị chặn bất kì

Giống như cách định nghĩa tích phân kép, tích phân bội ba trên miền bị chặn  $V$  bất kì được định nghĩa như sau:

- Chọn hình hộp chữ nhật  $B$  chứa  $V$  và định nghĩa hàm số mới

$$g(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z) & \text{nếu } (x, y, z) \in V, \\ 0 & \text{nếu } (x, y, z) \notin V. \end{cases}$$

- Định nghĩa

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_B f(x, y, z) dx dy dz.$$

### Các tính chất cơ bản

- Tính chất tuyến tính

$$\iiint_V [f(x, y, z) + g(x, y, z)] dx dy dz = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz + \iiint_V g(x, y, z) dx dy dz$$

$$\iiint_V k f(x, y, z) dx dy dz = k \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$$

- Tính chất cộng tính: Nếu  $V = V_1 \cup V_2$ , ở đó  $V_1$  và  $V_2$  không "chồng" lên nhau (có thể ngoại trừ phần biên) thì:

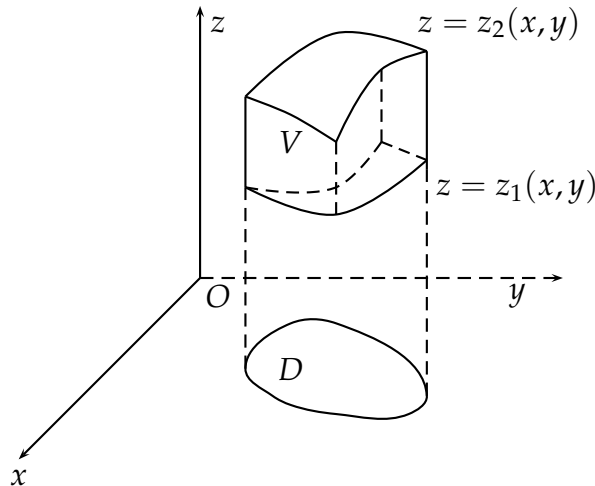
$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V_1} f(x, y, z) dx dy dz + \iiint_{V_2} f(x, y, z) dx dy dz$$

## 2.2 Tích tích phân bội ba trong hệ tọa độ Descartes

Cũng giống như việc tính toán tích phân kép, ta cần phải đưa tích phân ba lớp về tích phân lặp. Việc chuyển đổi này sẽ được thực hiện qua trung gian là tích phân kép.

Tích phân ba lớp  $\Rightarrow$  Tích phân hai lớp  $\Rightarrow$  Tích phân lặp

Sơ đồ trên cho thấy việc tính tích phân ba lớp được chuyển về tính tích phân kép (việc tính tích phân kép đã được nghiên cứu ở bài trước). Đương nhiên việc chuyển đổi này phụ thuộc chặt chẽ vào hình dáng của miền  $V$ . Một lần nữa, kĩ năng vẽ hình là rất quan trọng.



Nếu miền  $V$  được giới hạn bởi các mặt  $z = z_1(x, y)$ ,  $z = z_2(x, y)$ , trong đó  $z_1(x, y)$ ,  $z_2(x, y)$  là các hàm số liên tục trên miền  $D$ ,  $D$  là hình chiếu của miền  $V$  lên mặt phẳng  $Oxy$  thì ta có:

$$I = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \quad (2.6)$$

### Thuật toán chuyển tích phân ba lớp về tích phân hai lớp

1. Xác định hình chiếu của miền  $V$  lên mặt phẳng  $Oxy$ .
2. Xác định biên dưới  $z = z_1(x, y)$  và biên trên  $z = z_2(x, y)$  của  $V$ .

3. Sử dụng công thức 2.6 để hoàn tất việc chuyển đổi.

Đến đây mọi việc chỉ mới xong một nửa, vấn đề còn lại bây giờ là:

Xác định  $D$  và các biên  $z = z_1(x, y), z = z_2(x, y)$  như thế nào?

Có hai cách để xác định: Dùng hình học hoặc là dựa vào biểu thức giải tích của miền  $V$ . Mỗi cách đều có những ưu và nhược điểm riêng. Cách dùng hình học có ưu điểm là rất trực quan, dễ hiểu. Cách dùng biểu thức giải tích của  $V$  tuy có thể áp dụng cho nhiều bài nhưng thường khó hiểu và phức tạp. Vì thế, chúng ta cố gắng thử cách vẽ hình trước. Muốn làm được điều này, đòi hỏi bạn đọc phải có kỹ năng vẽ các mặt cong cơ bản trong không gian như mặt phẳng, mặt trụ, mặt nón, mặt cầu, ellipsoit, parabolit, hyperbolit 1 tầng, hyperbolit 2 tầng, hơn nữa cần có trí tưởng tượng tốt để hình dung ra sự giao cắt của các mặt.

**Chú ý:** Cũng giống như khi tính tích phân kép, việc nhận xét được tính đối xứng của miền  $V$  và tính chẵn lẻ của hàm lấy tích phân  $f(x, y, z)$  đôi khi giúp giảm được khối lượng tính toán đáng kể.

**Định lý 2.9.** Nếu  $V$  là miền đối xứng qua mặt phẳng  $z = 0$  ( $Oxy$ ) và  $f(x, y, z)$  là hàm số lẻ đối với  $z$  thì  $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = 0$ .

**Định lý 2.10.** Nếu  $V$  là miền đối xứng qua mặt phẳng  $z = 0$  ( $Oxy$ ) và  $f(x, y, z)$  là hàm số chẵn đối với  $z$  thì  $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = 2 \iiint_{V^+} f(x, y, z) dx dy dz$ , trong đó  $V^+$  là phần phía trên mặt phẳng  $z = 0$  của  $V$ .

**Chú ý 2.8.** Vai trò của  $z$  trong hai định lý trên có thể được thay đổi bằng  $x$  hoặc  $y$ . Hai định lý này có thể được chứng minh dễ dàng bằng phương pháp đổi biến số.

**Bài tập 2.28.** Tính  $\iiint_V z dx dy dz$  trong đó miền  $V$  được xác định bởi:

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq \frac{1}{4} \\ x \leq y \leq 2x \\ 0 \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2}. \end{cases}$$

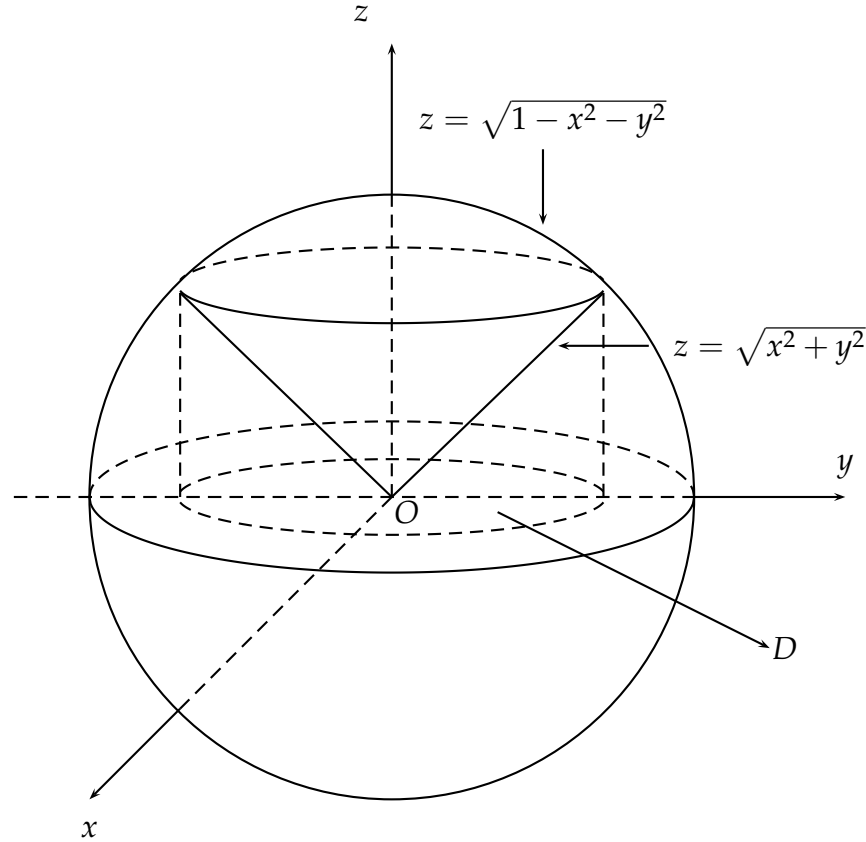
Lời giải.

$$I = \int_0^{\frac{1}{4}} dx \int_x^{2x} dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z dz = \int_0^{\frac{1}{4}} dx \int_x^{2x} \frac{1}{2} (1 - x^2 - y^2) dy = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{4}} \left( x - \frac{10}{3} x^3 \right) dx = \frac{43}{3072}. \quad \blacksquare$$



**Bài tập 2.29.** Tính  $\iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz$  trong đó  $V$  là miền giới hạn bởi các mặt

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x^2 + y^2 - z^2 = 0. \end{cases}$$



Hình 2.29

*Lời giải.* Do tính chất đối xứng,  $\iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz = 2 \iiint_{V_1} (x^2 + y^2) dx dy dz = 2I_1$ , trong

đó  $V_1$  là nửa phía trên mặt phẳng  $Oxy$  của  $V$ . Ta có 
$$\begin{cases} V_1 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2} \\ D : x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

với  $D$  là hình chiếu của  $V_1$  lên  $Oxy$ . Ta có

$$I_1 = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy \int_{\sqrt{x^2 + y^2}}^{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} dz = \iint_D (x^2 + y^2) \left( \sqrt{1 - x^2 - y^2} - \sqrt{x^2 + y^2} \right) dx dy.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow J = r, \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \text{ nên}$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} r^3 (\sqrt{1-r^2} - r) dr \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} r^3 (\sqrt{1-r^2} - r) dr \stackrel{(r=\cos \alpha)}{=} \frac{2\pi}{5} \cdot \frac{8-5\sqrt{2}}{12}.$$

Vậy

$$I = \frac{4\pi}{5} \cdot \frac{8-5\sqrt{2}}{12}. \quad \blacksquare$$

## 2.3 Đổi biến số trong tích phân bội ba

### Phép đổi biến số tổng quát

Phép đổi biến số tổng quát thường được sử dụng trong trường hợp miền  $V$  là giao của ba họ mặt cong. Giả sử cần tính  $I = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$  trong đó  $f(x, y, z)$  liên tục trên  $V$ .

Thực hiện phép đổi biến số

$$\begin{cases} x = x(u, v, w) \\ y = y(u, v, w) \\ z = z(u, v, w) \end{cases} \quad (2.7)$$

thoả mãn

- $x, y, z$  cùng với các đạo hàm riêng của nó là các hàm số liên tục trên miền đóng  $V_{uvw}$  của mặt phẳng  $O'uvw$ .
- Công thức 2.7 xác định song ánh  $V_{uvw} \rightarrow V$ .
- $J = \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} \neq 0$  trong  $V_{uvw}$ . Khi đó

$$I = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V_{uvw}} f[x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)] |J| du dv dw$$

**Chú ý 2.9.** 1. Cũng giống như phép đổi biến trong tích phân kép, phép đổi biến trong tích phân bội ba cũng biến biên của miền  $V$  thành biên của miền  $V_{uvw}$ , biến miền  $V$  bị chặn thành miền  $V_{uvw}$  bị chặn.

2. Có thể tính  $J$  thông qua  $J^{-1} = \frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)}$ .

**Bài tập 2.30.** Tính thể tích miền  $V$  giới hạn bởi  $\begin{cases} x + y + z = \pm 3 \\ x + 2y - z = \pm 1 \\ x + 4y + z = \pm 2 \end{cases}$  biết  $V = \iiint_V dx dy dz$ .

*Lời giải.* Thực hiện phép đổi biến  $\begin{cases} u = x + y + z \\ v = x + 2y - z \\ w = x + 4y + z. \end{cases}$

Vì phép đổi biến biến biên của  $V$  thành biên của  $V_{uvw}$  nên  $V_{uvw}$  giới hạn bởi:  $\begin{cases} u = \pm 3 \\ v = \pm 1 \\ w = \pm 2. \end{cases}$

Ta có

$$J^{-1} = \frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)} = \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{array} \right| = 6 \Rightarrow J = \frac{1}{6} \Rightarrow V = \frac{1}{6} \iiint_{V_{uvw}} du dv dw = \frac{1}{6} \cdot 6 \cdot 2 \cdot 4 = 8. \quad \blacksquare$$

**Bài tập 2.31.** Tính

a)  $\iiint_V (3x^2 + 2y + z) dx dy dz$ , trong đó  $V : |x - y| \leq 1, |y - z| \leq 1, |z + x| \leq 1$ .

b)  $\iiint_V dx dy dz$ , trong đó  $V : |x - y| + |x + 3y| + |x + y + z| \leq 1$ .

[Gợi ý]

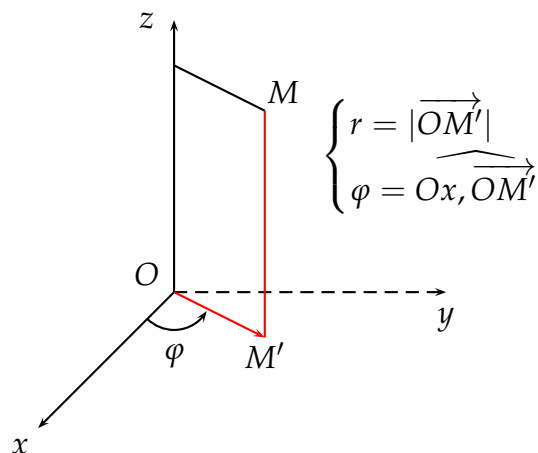
a) Đặt  $\begin{cases} u = x - y, \\ v = y - z, \\ w = z + x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 \leq u \leq 1, \\ -1 \leq v \leq 1, \\ -1 \leq w \leq 1. \end{cases}$

b) Đặt  $\begin{cases} u = x - y, \\ v = x + 3y, \\ w = x + y + z \end{cases} \Rightarrow |u| + |v| + |w| \leq 1.$

### Phép đổi biến số trong tọa độ trụ

Khi miền  $V$  có biên là các mặt như mặt paraboloid, mặt nón, mặt trụ, và có hình chiếu  $D$  lên  $Oxy$  là hình tròn, hoặc hàm lầy tích phân  $f(x, y, z)$  có chứa biểu thức  $(x^2 + y^2)$  thì ta hay sử dụng công thức đổi biến trong hệ tọa độ trụ.

Tọa độ trụ của điểm  $M(x, y, z)$  là bộ ba  $(r, \varphi, z)$ , trong đó  $(r, \varphi)$  chính là tọa độ cực của điểm  $M'$  là hình chiếu của điểm  $M$  lên  $Oxy$ .



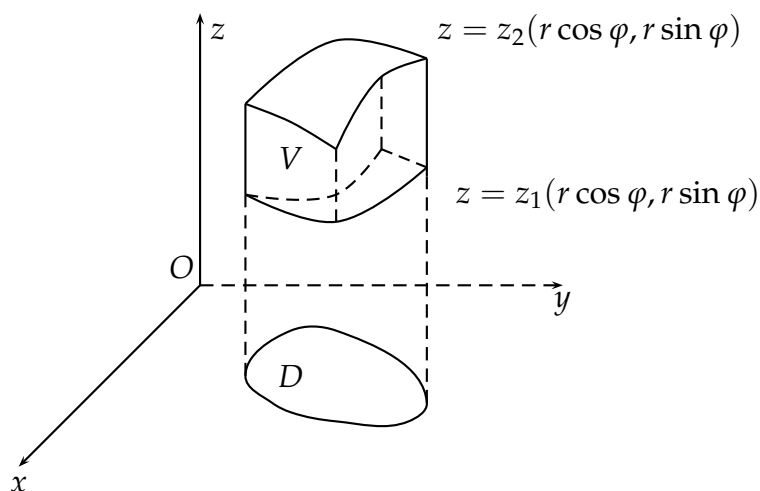
Công thức đổi biến 
$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ z = z. \end{cases}$$

Định thức Jacobian của phép biến đổi là  $J = \frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,z)} = r$ , ta có:

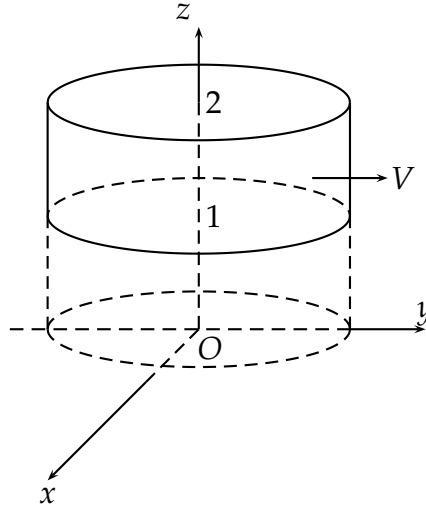
$$I = \iiint_V f(x,y,z) dx dy dz = \iiint_{V_{r\varphi z}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) r dr d\varphi dz.$$

Nếu miền  $V : \begin{cases} (x,y) \in D \\ z_1(x,y) \leq z \leq z_2(x,y) \end{cases}$ , trong đó  $D : \begin{cases} \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2 \\ r_1(\varphi) \leq r \leq r_2(\varphi) \end{cases}$  thì:

$$I = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} r dr \int_{z_1(r \cos \varphi, r \sin \varphi)}^{z_2(r \cos \varphi, r \sin \varphi)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) dz.$$



**Bài tập 2.32.** Tính  $\iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz$ , trong đó  $V : \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ 1 \leq z \leq 2. \end{cases}$



Hình 2.32

*Lời giải.* Đặt  $\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ z = z \end{cases}$  thì  $\begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq 1 \\ 1 \leq z \leq 2. \end{cases}$

Ta có

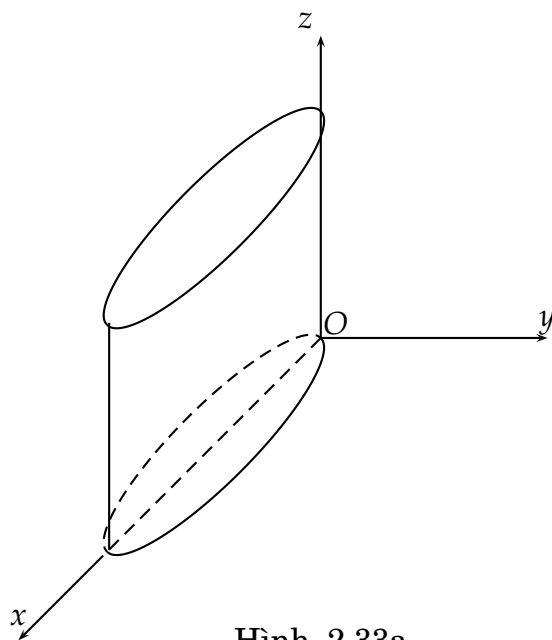
$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^2 dr \int_1^2 z dz = \dots = \frac{3\pi}{4}.$$

■

**Bài tập 2.33.** Tính  $\iiint_V z \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$ , trong đó:

a)  $V$  là miền giới hạn bởi mặt trụ:  $x^2 + y^2 = 2x$  và các mặt phẳng  $z = 0, z = a$  ( $a > 0$ ).

b)  $V$  là nửa của hình cầu  $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, z \geq 0$  ( $a > 0$ )



Hình 2.33a

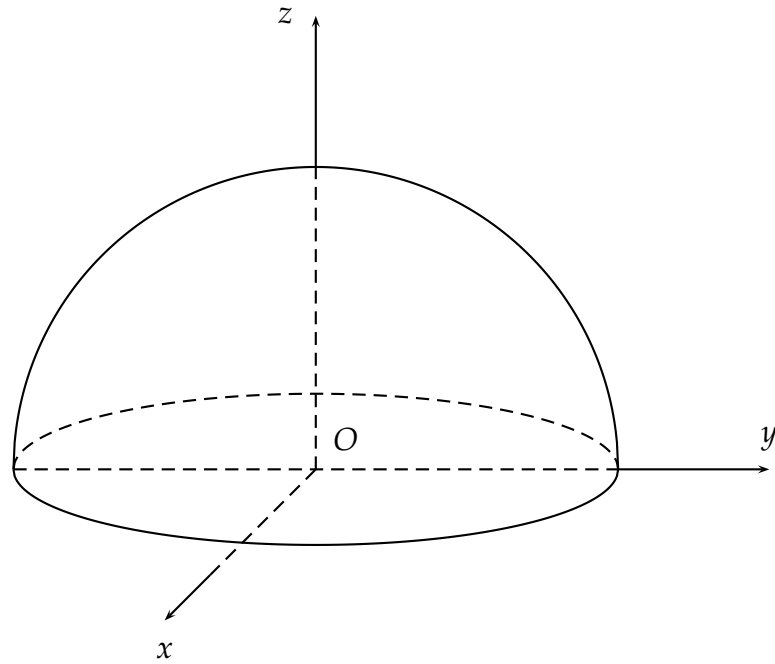
Lời giải. a) Đặt 
$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ z = z. \end{cases}$$

Từ  $x^2 + y^2 = 2x$  suy ra  $r = 2 \cos \varphi$ . Do đó: 
$$\begin{cases} -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq r \leq 2 \cos \varphi \\ 0 \leq z \leq a. \end{cases}$$

Vậy

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2 \cos \varphi} r^2 dr \int_0^a z dz = \dots = \frac{16a^2}{9}.$$

■



Hình 2.33b

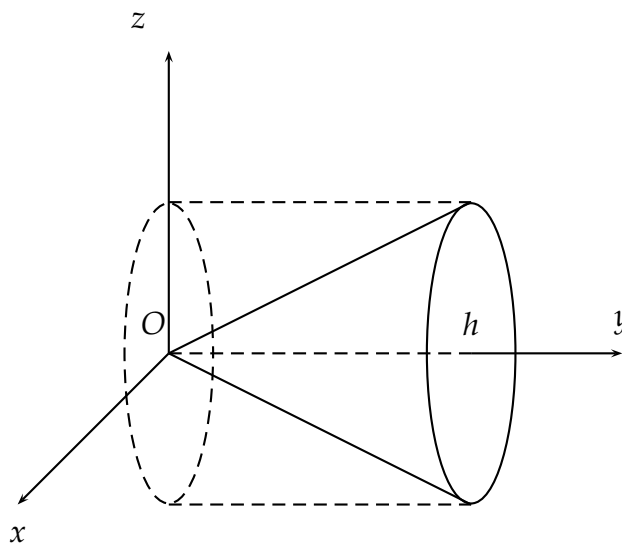
Lời giải. b) Đặt 
$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ z = z \end{cases}, \text{ ta có } \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq a \\ 0 \leq z \leq \sqrt{a^2 - r^2}. \end{cases}$$

Ta có

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^2 dr \int_0^{\sqrt{a^2 - r^2}} z dz = 2\pi \int_0^a r^2 \cdot \frac{a^2 - r^2}{2} dr = \frac{2\pi a^5}{15}.$$

■

**Bài tập 2.34.** Tính  $I = \iiint_V y dx dy dz$ , trong đó  $V$  giới hạn bởi:  $\begin{cases} y = \sqrt{z^2 + x^2} \\ y = h. \end{cases}$



Hình 2.34

Lời giải. Đặt  $\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ z = r \sin \varphi \\ y = y \end{cases}$ , ta có  $\begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq h \\ r \leq y \leq h. \end{cases}$

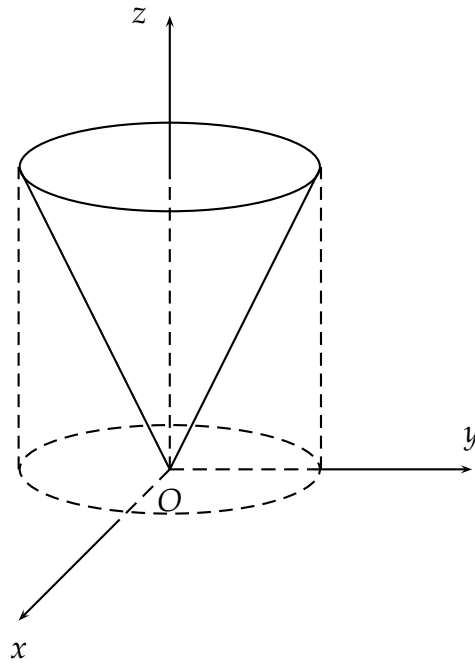
Do đó

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h r dr \int_r^h y dy = 2\pi \int_0^h r \cdot \frac{h^2 - r^2}{2} dr = \frac{\pi h^4}{4}.$$

■

**Bài tập 2.35.** Tính  $I = \iiint_V \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$  trong đó  $V$  giới hạn bởi:  $\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ z = 1. \end{cases}$





Hình 2.35

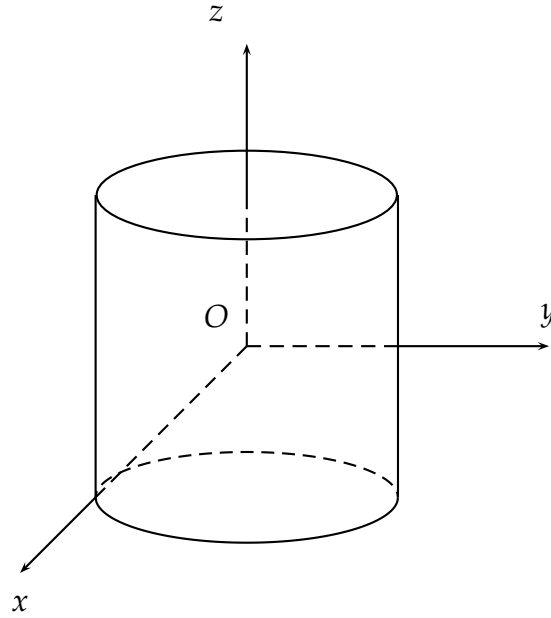
Lời giải. Đặt  $\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ z = z \end{cases}$ , ta có  $\begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq 1 \\ r \leq z \leq 1. \end{cases}$

Do đó

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^2 dr \int_r^1 dz = 2\pi \int_0^1 r^2 (1-r) dr = \frac{\pi}{6}.$$

■

**Bài tập 2.36.** Tính  $\iiint_V \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-2)^2}}$ , trong đó  $V : \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ |z| \leq 1. \end{cases}$



Hình 2.36

Lời giải. Đặt 
$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ z' = z - 2 \end{cases} \Rightarrow |J| = r, V_{r\varphi z} : \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq 1 \\ -3 \leq z' \leq -1. \end{cases}$$

Ta có

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r dr \int_{-3}^{-1} \frac{dz'}{\sqrt{r^2 + z'^2}} \\ &= \pi \int_0^1 r \cdot \ln \left( z' + \sqrt{r^2 + z'^2} \right) \Big|_{z'=-3}^{z'=-1} dr \\ &= 2\pi \left[ \int_0^1 r \ln \left( \sqrt{r^2 + 1} - 1 \right) dr - \int_0^1 r \ln \left( \sqrt{r^2 + 9} - 3 \right) dr \right] \\ &= 2\pi (I_1 - I_2). \end{aligned}$$

Vì  $\lim_{r \rightarrow 0} r \ln \left( \sqrt{r^2 + 1} - 1 \right) = \lim_{r \rightarrow 0} r \ln \left( \sqrt{r^2 + 9} - 3 \right) = 0$  nên thực chất  $I_1, I_2$  là các tích phân xác định.

Đặt  $\sqrt{r^2 + 1} = t \Rightarrow r dr = t dt$ , ta có

$$\begin{aligned} &\int r \ln \left( \sqrt{r^2 + 1} - 1 \right) dr \\ &= \int t \ln (t - 1) dt \\ &= \frac{t^2}{2} \ln (t - 1) - \frac{1}{2} \int \frac{t^2}{t - 1} dt \\ &= \frac{t^2 - 1}{2} \ln (t - 1) - \frac{t^2}{4} - \frac{t}{2} + C. \end{aligned}$$

Do đó

$$I_1 = \left[ \frac{t^2 - 1}{2} \ln(t - 1) - \frac{t^2}{4} - \frac{t}{2} \right] \Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \ln(\sqrt{2} - 1) - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1).$$

Tương tự,  $I_2 = \frac{t^2 - 9}{2} \ln(t - 3) - \frac{t^2}{4} - \frac{3t}{2} + C$  nên

$$I_2 = \left[ \frac{t^2 - 9}{2} \ln(t - 3) - \frac{t^2}{4} - \frac{3t}{2} \right] \Big|_3^{\sqrt{10}} = \frac{1}{2} \ln(\sqrt{10} - 3) - \frac{1}{4} - \frac{3}{2}(\sqrt{10} - 3).$$

Kết luận

$$I = 2\pi(I_1 - I_2) = \pi \left( \ln \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{10} - 3} + 3\sqrt{10} - 8 - \sqrt{2} \right).$$

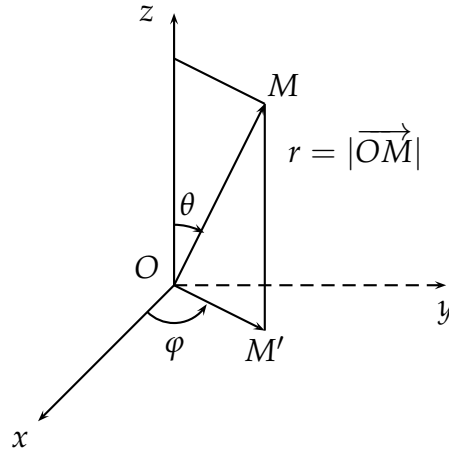
■

### Phép đổi biến số trong tọa độ cầu

Trong trường hợp miền  $V$  có dạng hình cầu, chòm cầu, múi cầu, ... và khi hàm lấy tích phân  $f(x, y, z)$  có chứa biểu thức  $(x^2 + y^2 + z^2)$  thì ta hay sử dụng phép đổi biến trong tọa độ cầu.

Tọa độ cầu của điểm  $M(x, y, z)$  trong không gian là bộ ba  $(r, \theta, \varphi)$ , trong đó:

$$\begin{cases} r = |\overrightarrow{OM}| \\ \theta = (\widehat{Oz, \overrightarrow{OM}}) \\ \varphi = (\widehat{Ox, \overrightarrow{OM'}}). \end{cases}$$



Công thức của phép đổi biến là: 
$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta. \end{cases}$$

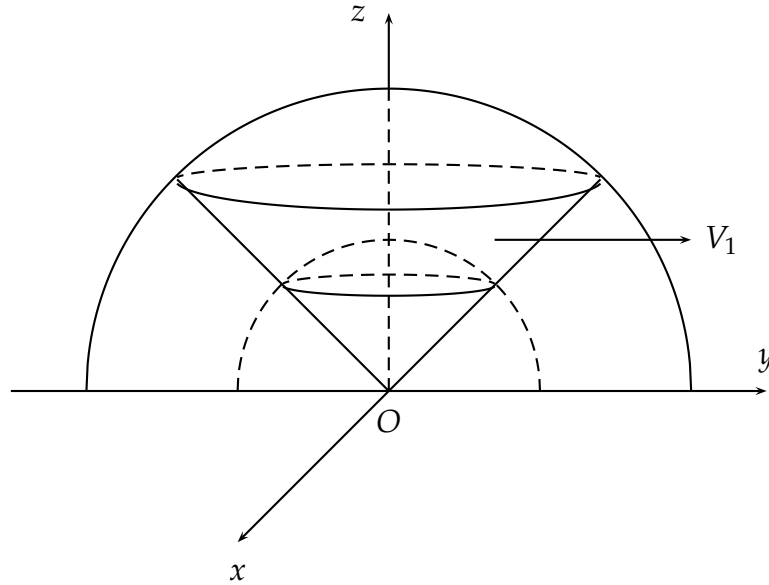
Định thức Jacobian  $J = \frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\varphi)} = -r^2 \sin \theta$ . Ta có công thức đổi biến

$$\iiint_V f(x,y,z) dx dy dz = \iiint_{V_{r\theta\varphi}} f(r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta) r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi.$$

Đặc biệt, nếu miền  $V_{r\theta\varphi} : \begin{cases} \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2, & (\varphi_2 - \varphi_1 \leq 2\pi) \\ \theta_1(\varphi) \leq \theta \leq \theta_2(\varphi) \\ r_1(\theta, \varphi) \leq r \leq r_2(\theta, \varphi) \end{cases}$  thì

$$I = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\theta_1(\varphi)}^{\theta_2(\varphi)} \sin \theta d\theta \int_{r_1(\theta, \varphi)}^{r_2(\theta, \varphi)} f(r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta) r^2 dr.$$

**Bài tập 2.37.** Tính  $\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$ , trong đó  $V : \begin{cases} 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \\ x^2 + y^2 \leq z^2 \end{cases}$ .



Hình 2.37

Lời giải. Đặt  $\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta. \end{cases}$

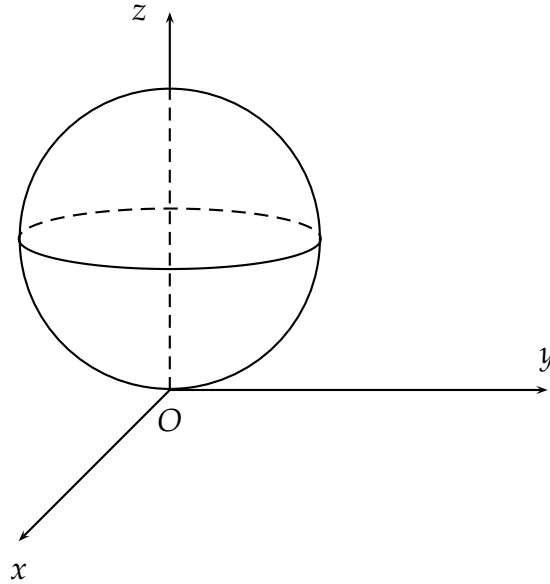
Do  $1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$  nên  $1 \leq r \leq 2$ . Trên mặt nón có phương trình  $x^2 + y^2 = z^2$  nên

$\theta = \frac{\pi}{4}$ . Vậy cận lấy tích phân là  $\begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \\ 1 \leq r \leq 2. \end{cases}$

Ta có

$$I = 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \theta d\theta \int_1^2 r^2 \cdot r^2 dr = 2 \cdot 2\pi \cdot (-\cos \theta) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{r^5}{5} \Big|_1^2 = \frac{4.31\pi}{5} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right). \quad \blacksquare$$

**Bài tập 2.38.** Tính  $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$  trong đó  $V : x^2 + y^2 + z^2 \leq z$ .



Hình 2.38

Lời giải. Đặt 
$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta. \end{cases}$$

Nhìn hình vẽ ta thấy  $0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ .

Do  $x^2 + y^2 + z^2 \leq z$  nên  $0 \leq r \leq \cos \theta$ . Vậy

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta \int_0^{\cos \theta} r \cdot r^2 dr = 2\pi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cdot \frac{1}{4} \cos^4 \theta d\theta = \frac{\pi}{10}. \quad \blacksquare$$

### Phép đổi biến số trong toạ độ cầu suy rộng.

1. Tương tự như khi tính tích phân kép, nếu miền  $V$  có dạng hình *ellipsoid* hoặc hình cầu có tâm không nằm trên các trục toạ độ thì ta có thể nghĩ tới phép đổi biến số trong toạ độ cầu suy rộng. Khi đó ta phải tính lại Jacobian của phép biến đổi.

2. - Nếu  $V : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$  thì thực hiện phép đổi biến

$$\begin{cases} x = ar \sin \theta \cos \varphi \\ y = br \sin \theta \sin \varphi, J = -abcr^2 \sin \theta \\ z = cr \cos \theta \end{cases}$$

- Nếu  $V : (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 \leq R^2$  thì thực hiện phép đổi biến

$$\begin{cases} x = a + r \sin \theta \cos \varphi \\ y = b + r \sin \theta \sin \varphi, J = -r^2 \sin \theta \\ z = c + r \cos \theta \end{cases}$$

3. Xác định miền biến thiên của  $\varphi, \theta, r$ .

4. Dùng công thức đổi biến tổng quát để hoàn tất việc đổi biến.

**Bài tập 2.39.** Tính  $\iiint_V z \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$ , trong đó  $V$  là nửa của khối ellipsoit  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1, z \geq 0, (a, b > 0)$ .

*Lời giải.* 1. **Toạ độ trụ suy rộng.**

$$\text{Đặt } \begin{cases} z = bz' \\ x = ar \cos \varphi \\ y = ar \sin \theta. \end{cases}$$

Ta có

$$\begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\ 0 \leq r \leq 1, \\ 0 \leq z' \leq \sqrt{1 - r^2}. \end{cases}, J = a^2 br$$

Vậy

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr \int_0^{\sqrt{1-r^2}} bz' \cdot ar \cdot a^2 br dz' \\ &= 2a^3 b^2 \pi \int_0^1 r^2 \cdot \frac{1-r^2}{2} dr \\ &= \frac{2\pi a^3 b^2}{15}. \end{aligned}$$

2. **Toạ độ cầu suy rộng.**

$$\text{Đặt } \begin{cases} x = ar \sin \theta \cos \varphi \\ y = ar \sin \theta \sin \varphi \\ z = br \cos \theta \end{cases}$$

Ta có

$$\begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0 \leq r \leq 1. \end{cases}, J = a^2 br^2 \sin \theta.$$

Vậy

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 br \cos \theta \cdot ar \sin \theta \cdot a^2 b \sin \theta dr \\ &= 2a^3 b^2 \pi \int_0^{2\pi} \cos \theta \sin^2 \theta d\theta \int_0^1 r^4 dr \\ &= \frac{2\pi a^3 b^2}{15}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Bài tập 2.40.** Tính  $\iiint_V \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) dx dy dz$ , ở đó  $V : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1, (a, b, c > 0)$ .

*Lời giải.* Đặt  $\begin{cases} x = ar \sin \theta \cos \varphi \\ y = br \sin \theta \sin \varphi \\ z = cr \cos \theta \end{cases}$ , ta có

$$J = \frac{D(x, y, z)}{D(r, \theta, \varphi)} = abcr^2 \sin \theta, V_{r\varphi\theta} = \{0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq r \leq 1\}.$$

Vậy

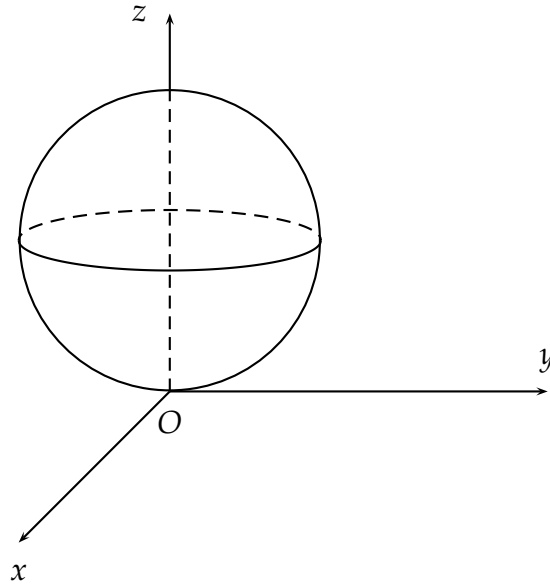
$$I = abc \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \int_0^1 r^2 \cdot r^2 \sin \theta = \frac{4\pi}{5} abc.$$

■

### Tọa độ cầu vs Tọa độ cầu suy rộng

Phép đổi biến số không những có tác dụng làm đơn giản miền lấy tích phân, mà trong nhiều tình huống nó còn có tác dụng làm đơn giản hóa biểu thức tính tích phân. Trong bài tập sau đây, phép đổi biến số trong tọa độ cầu suy rộng sẽ làm cho biểu thức tính tích phân đơn giản hơn rất nhiều so với phép đổi biến trong tọa độ cầu thông thường.

**Bài tập 2.41.** Tính  $\iiint_V \sqrt{z - x^2 - y^2 - z^2} dx dy dz$  trong đó  $V : x^2 + y^2 + z^2 \leq z$ .



Hình 2.41

*Lời giải.*

**1. Tọa độ cầu thông thường**

$$\text{Đặt } \begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta. \end{cases}$$

Ta có

$$\begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq r \leq \cos \theta. \end{cases}$$

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\cos \theta} \sqrt{r \cos \theta - r^2} \cdot r^2 \sin \theta dr$$

tích phân này không dễ tính

**2. Tọa độ cầu suy rộng**

$$\text{Đặt } \begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi, \\ y = r \sin \theta \sin \varphi, \\ z = \frac{1}{2} + r \cos \theta. \end{cases}$$

Ta có

$$\begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\ 0 \leq \theta \leq \pi, \\ 0 \leq r \leq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{4} - r^2} \cdot r^2 \sin \theta dr \\ &= \frac{\pi^2}{64}. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

**Bài tập 2.42.** [Cuối kì, K62] Tính tích phân bội ba  $\iiint_V (4z - x^2 - y^2 - z^2) dx dy dz$ , ở đó  $V$  là hình cầu  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4z$ .

*Lời giải.* **1. Tọa độ cầu thông thường**

$$\text{Đặt } \begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta. \end{cases}$$

Ta có

$$\begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq r \leq 4 \cos \theta. \end{cases}$$

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{4 \cos \theta} (4r \cos \theta - r^2) r^2 \sin \theta dr$$

tích phân này tính hơi dài

**2. Tọa độ cầu suy rộng**

$$\text{Đặt } \begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi, \\ y = r \sin \theta \sin \varphi, \\ z = 2 + r \cos \theta. \end{cases}$$

Ta có

$$\begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\ 0 \leq \theta \leq \pi, \\ 0 \leq r \leq 2. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^2 (4 - r^2) r^2 \sin \theta dr \\ &= \frac{256\pi}{15}. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

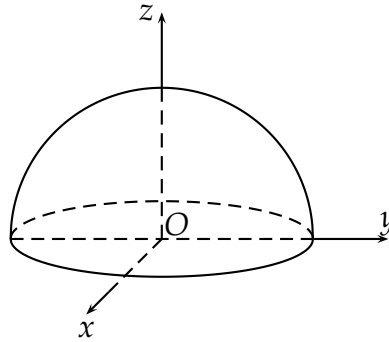


### Tọa độ cầu vs Tọa độ trụ

Nói chung thì việc sử dụng tọa độ cầu hay tọa độ trụ phụ thuộc vào hai yếu tố chính: hình dáng của miền  $V$  và biểu thức tính tích phân.

- Nếu miền  $V$  có dạng hình cầu, chòm cầu và biểu thức tính tích phân có chứa  $x^2 + y^2 + z^2$  thì ta thường sử dụng phép đổi biến trong tọa độ cầu (khi đó  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ ).
- Nếu miền  $V$  có dạng hình trụ hoặc có chứa mặt nón, mặt paraboloid và biểu thức tính tích phân có chứa  $x^2 + y^2$  thì ta thường sử dụng phép đổi biến trong tọa độ trụ (khi đó  $x^2 + y^2 = r^2$ ).

Trong nhiều trường hợp thì chúng ta có thể sử dụng được đồng thời cả tọa độ trụ lẫn tọa độ cầu. Chẳng hạn như, tính  $\iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz$ , trong đó  $V$  là nửa phía trên của hình cầu  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0$ .



#### 1. Tọa độ cầu.

$$\text{Đặt } \begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi, \\ y = r \sin \theta \sin \varphi, \\ z = r \cos \theta. \end{cases}$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0 \leq r \leq 1. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 r^2 \sin^2 \theta \cdot r^2 \sin \theta dr \\ &= \frac{4\pi}{15}. \end{aligned}$$

#### 2. Tọa độ trụ.

$$\text{Đặt } \begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\ 0 \leq r \leq 1, \\ 0 \leq z \leq \sqrt{1 - r^2}. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr \int_0^{\sqrt{1-r^2}} r^2 \cdot r dz \\ &= \frac{4\pi}{15}. \end{aligned}$$

Tuy nhiên, cũng có những tình huống mặc dù miền lấy tích phân là hình cầu nhưng việc sử dụng tọa độ trụ lại thuận tiện hơn (vì biểu thức tính tích phân có chứa  $x^2 + y^2$ ). Chẳng hạn như, tính  $\iiint_V \sqrt{1 - x^2 - y^2} dx dy dz$ , trong đó  $V$  là nửa phía trên của hình cầu  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0$  (xem hình vẽ của ví dụ phía trên).

### 1. Tọa độ cầu.

$$\text{Đặt } \begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi, \\ y = r \sin \theta \sin \varphi, \\ z = r \cos \theta. \end{cases}$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0 \leq r \leq 1. \end{cases}$$

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \sqrt{1 - r^2 \sin^2 \theta} \cdot r^2 \sin \theta dr$$

(tích phân này không dễ tính).

### 2. Tọa độ trụ.

$$\text{Đặt } \begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\ 0 \leq r \leq 1, \\ 0 \leq z \leq \sqrt{1 - r^2}. \end{cases}$$

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr \int_0^{\sqrt{1-r^2}} \sqrt{1 - r^2} \cdot r dz = \frac{\pi}{2}.$$

Tác giả tin rằng các bạn đọc giả sau khi làm một vài ví dụ sẽ tự rút cho mình được kinh nghiệm và quyết định được là sẽ sử dụng phép đổi biến nào thích hợp.

## 2.4 Bài tập ôn tập

**Bài tập 2.43 (Cuối kì, K62).** Tính tích phân bội ba  $\iiint_V xz dx dy dz$ , ở đó  $V$  là miền thỏa mãn  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z \leq -2$ .

[Gợi ý] Nhận xét rằng miền  $V$  có dạng  $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 \leq 1$ . Nếu thực hiện phép đổi biến số trong tọa độ cầu suy rộng  $\begin{cases} x = 1 + r \sin \theta \cos \varphi, \\ y = 1 + r \sin \theta \sin \varphi, \\ z = 1 + r \cos \theta \end{cases}$  thì

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^1 (1 + r \sin \theta \cos \varphi)(1 + r \cos \theta) r^2 \sin \theta dr.$$

Tích phân này tính được nhưng dài dòng. Nếu tinh tế hơn một chút, đặt  $\begin{cases} u = x - 1, \\ v = y - 1, \\ w = z - 1 \end{cases}$  thì

$$V' : u^2 + v^2 + w^2 \leq 1 \text{ và}$$

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{V'} (u+1)(w+1) du dv dw \\ &= \iiint_{V'} u w du dv dw + \iiint_{V'} u du dv dw + \iiint_{V'} w du dv dw + \iiint_{V'} du dv dw. \end{aligned}$$

Dựa vào tính đối xứng của miền lấy tích phân và tính chẵn lẻ của hàm lấy tích phân ta có

$$\iiint_{V'} u w du dv dw = 0, \quad \iiint_{V'} u du dv dw = 0, \quad \iiint_{V'} w du dv dw = 0.$$

Do đó,

$$I = \iiint_{V'} du dv dw = \frac{4}{3}\pi.$$

#### Bài tập 2.44. Tính

$$I = \iiint_V \frac{dx dy dz}{(1+x+y+z)^3},$$

trong đó  $V$  là tứ diện giới hạn bởi các mặt phẳng  $x=0, y=0, z=0$  và  $x+y+z=1$ .

[Đáp số]  $I = \frac{1}{2} (\ln 2 - \frac{5}{8}).$

#### Bài tập 2.45. Tính

$$\iiint_V z dx dy dz,$$

trong đó  $V$  là nửa trên của ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1, (z \geq 0).$$

[Đáp số]  $I = \frac{\pi abc^2}{4}.$

#### Bài tập 2.46. Tính các tích phân sau

a)  $I_1 = \iiint_B \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right),$  trong đó  $B$  là ellipsoid  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1.$

b)  $I_2 = \iiint_C z dx dy dz,$  trong đó  $C$  là miền giới hạn bởi mặt nón  $z^2 = \frac{h^2}{R^2}(x^2 + y^2)$  và mặt phẳng  $z = h.$

c)  $I_3 = \iiint_D z^2 dx dy dz$ , trong đó  $D$  là phần chung của hình cầu  $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$  và hình cầu  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2Rz$ .

d)  $I_4 = \iiint_V (x + y + z)^2 dx dy dz$ , trong đó  $V$  là phần chung của paraboloid  $x^2 + y^2 \leq 2az$  và hình cầu  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 3a^2$ .

**Bài tập 2.47.** Tính thể tích của vật thể giới hạn phía dưới bởi mặt phẳng  $0xy$ , mặt bên là các mặt phẳng  $x = 0, x = a, y = 0, y = b$ , phía trên bởi paraboloid elliptic

$$z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}, \quad (p > 0, q > 0).$$

**Bài tập 2.48.** Tính tích phân

$$I = \iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz,$$

trong đó  $V$  là miền giới hạn bởi mặt  $x^2 + y^2 + z^2 = z$ .

[Đáp số]  $I = \frac{\pi}{10}$ .

**Bài tập 2.49.** Tính

$$I = \iiint_V z dx dy dz,$$

trong đó  $V$  là miền giới hạn bởi các mặt  $z = x^2 + y^2$  và  $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ .

[Đáp số]  $I = \frac{11\pi}{3}$ .

**Bài tập 2.50.** Tính tích phân

$$I = \iiint_V \frac{xyz}{x^2 + y^2} dx dy dz,$$

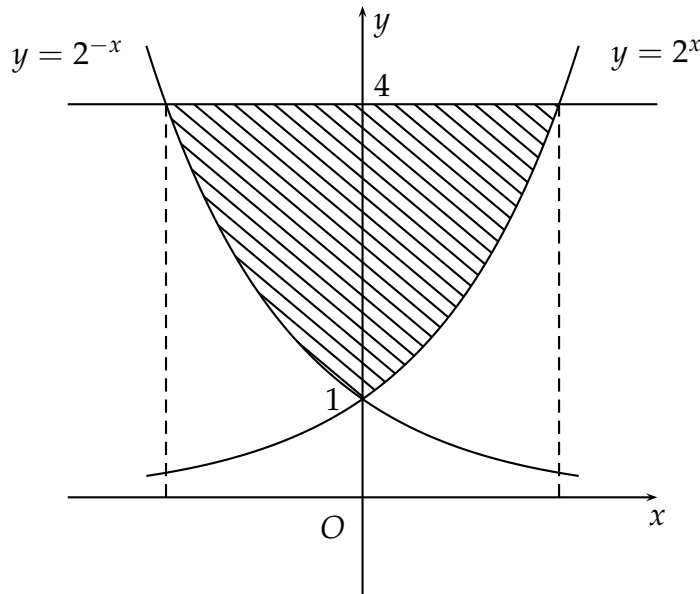
trong đó  $V$  là vật thể giới hạn phía trên bởi mặt  $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2 xy$  và phía dưới bởi mặt  $z = 0$ .

### §3. CÁC ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN BỘI

#### 3.1 Tính diện tích hình phẳng

Công thức tổng quát:  $S = \iint_D dx dy$

**Bài tập 2.51.** Tính diện tích của miền  $D$  giới hạn bởi:  $\begin{cases} y = 2^x \\ y = 2^{-x} \\ y = 4. \end{cases}$



Hình 2.51

*Lời giải.* Nhận xét:  $D = D_1 \cup D_2$ , ở đó

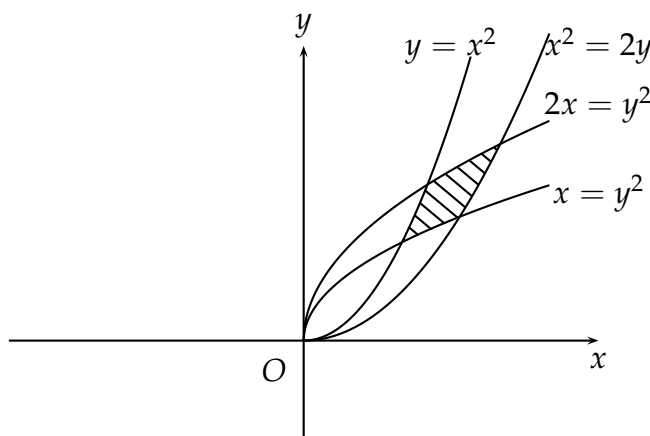
$$D_1 = \begin{cases} -2 \leq x \leq 0 \\ 2^{-x} \leq y \leq 4 \end{cases}, D_2 = \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 2^x \leq y \leq 4 \end{cases}.$$

Do đó

$$S = \iint_D dx dy = \iint_{D_1} dx dy + \iint_{D_2} dx dy = 2 \iint_{D_1} dx dy = \dots = 2 \left( 8 - \frac{3}{\ln 2} \right).$$

■

**Bài tập 2.52.** Tính diện tích của miền  $D$  giới hạn bởi:  $\begin{cases} y^2 = x, y^2 = 2x \\ x^2 = y, x^2 = 2y. \end{cases}$



Hình 2.52

*Lời giải.* Ta có  $S = \iint_D dx dy$ . Thực hiện phép đổi biến

$$\begin{cases} u = \frac{y^2}{x} \\ v = \frac{x^2}{y} \end{cases} \Rightarrow D_{uv} : \begin{cases} 1 \leq u \leq 2 \\ 1 \leq v \leq 2 \end{cases},$$

và

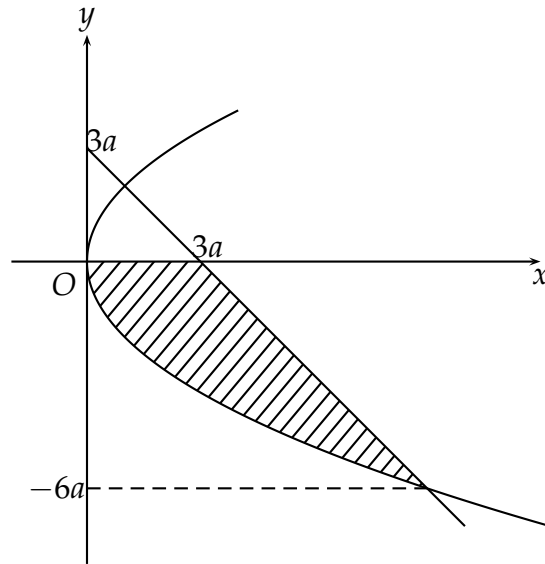
$$J^{-1} = \frac{D(u, v)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} -\frac{y^2}{x^2} & \frac{2y}{x} \\ \frac{2x}{y} & -\frac{x^2}{y^2} \end{vmatrix} = -3.$$

Vậy

$$S = \iint_{D_{uv}} \frac{1}{3} du dv = \frac{1}{3}.$$

■

**Bài tập 2.53.** Tính diện tích miền  $D$  giới hạn bởi  $\begin{cases} y = 0, y^2 = 4ax \\ x + y = 3a, y \leq 0 \end{cases} (a > 0).$

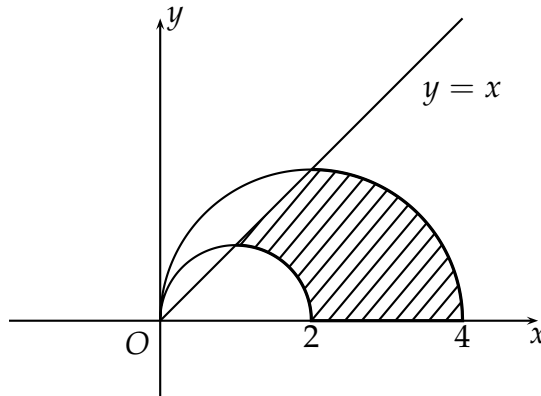


Hình 2.53

Lời giải. Nhìn hình vẽ ta thấy  $D : \begin{cases} -6a \leq y \leq 0 \\ \frac{y^2}{4a} \leq x \leq 3a - y \end{cases}$  nên

$$S = \iint_D dx dy = \int_{-6a}^0 dy \int_{\frac{y^2}{4a}}^{3a-y} dx = \int_{-6a}^0 \left( 3a - y - \frac{y^2}{4a} \right) dy = 18a^2.$$

**Bài tập 2.54.** Tính diện tích miền  $D$  giới hạn bởi  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2x, x^2 + y^2 = 4x \\ x = y, y = 0. \end{cases}$



Hình 2.54

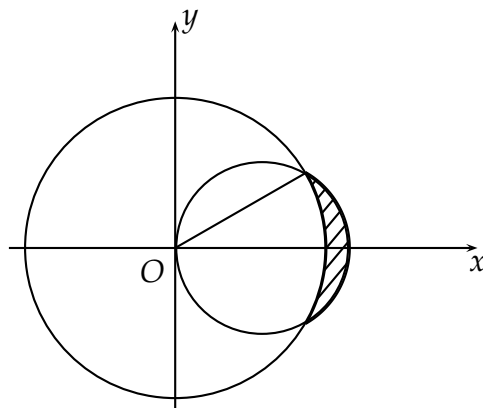
Lời giải. Ta có  $S = \iint_D dx dy$ . Đặt  $\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$  thì  $D : \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} \\ 2 \cos \varphi \leq r \leq 4 \cos \varphi \end{cases}$  nên

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_{2 \cos \varphi}^{4 \cos \varphi} r dr = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} 12 \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{3\pi}{4} + \frac{3}{2}.$$

**Bài tập 2.55.** Tính diện tích miền  $D$  giới hạn bởi đường tròn  $r = 1, r = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos \varphi$ .

**Chú ý:**

- $r = a$  là phương trình đường tròn tâm  $O(0,0)$ , bán kính  $a$ .
- $r = 2a \cos \varphi$  là phương trình đường tròn tâm  $(a,0)$ , bán kính  $a$ .
- $r = 2a \sin \varphi$  là phương trình đường tròn tâm  $(0,a)$ , bán kính  $a$ .



Hình 2.55

*Lời giải.* Giao tại giao điểm của 2 đường tròn:

$$r = 1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos \varphi \Leftrightarrow \varphi = \pm \frac{\pi}{6}.$$

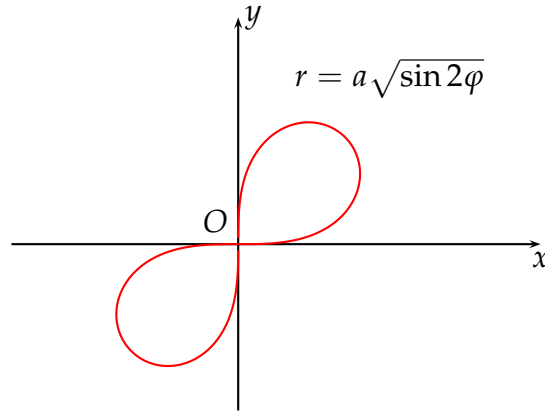
Do đó

$$S = 2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} d\varphi \int_1^{\frac{2}{\sqrt{3}} \cos \varphi} r dr = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left( \frac{4}{3} \cos^2 \varphi - 1 \right) d\varphi = \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{\pi}{18}.$$

■

**Bài tập 2.56.** Tính diện tích miền  $D$  giới hạn bởi đường  $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2 xy$  ( $a > 0$ ).





Hình 2.56

*Lời giải.* Tham số hoá đường cong đã cho, đặt  $\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$ , phương trình đường cong tương đương với  $r^2 = a^2 \sin 2\varphi$ . Khảo sát và vẽ đường cong đã cho trong hệ toạ độ cực (xem hình vẽ 2.56). Ta có

$$D : \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \pi \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2} \\ 0 \leq r \leq a\sqrt{\sin 2\varphi} \end{cases}$$

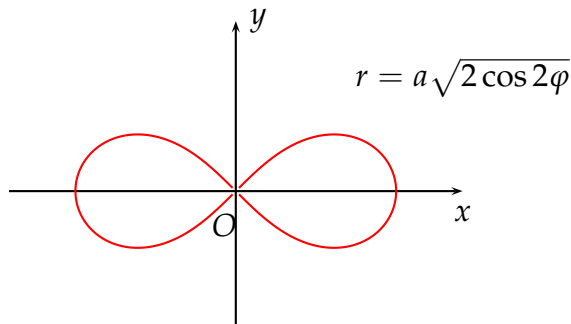
Do tính đối xứng của hình vẽ nên

$$S = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}} r dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \sin 2\varphi d\varphi = a^2.$$

■

**Bài tập 2.57.** Tính diện tích của miền giới hạn bởi đường Lemniscate

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2) \quad (a > 0).$$

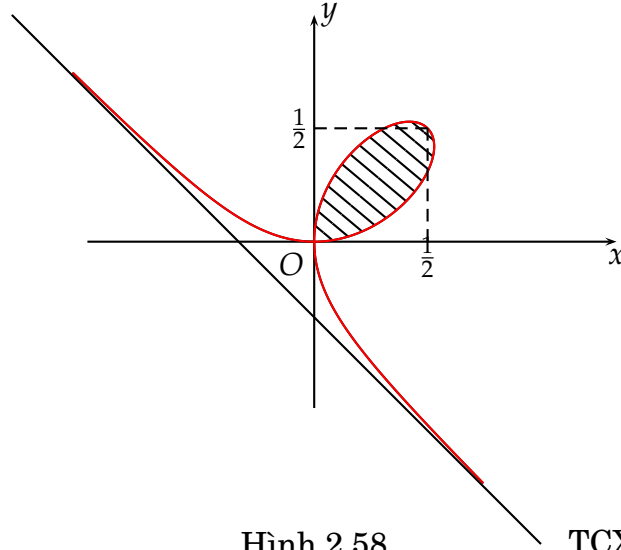


Hình 2.57

[Gợi ý] Phương trình của đường Lemniscate trong tọa độ cực là  $r^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$ , và do tính đối xứng của miền nên

$$\frac{S}{4} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{2\cos 2\varphi}} r dr = \frac{a^2}{2}.$$

**Bài tập 2.58.** Tính diện tích miền  $D$  giới hạn bởi đường  $x^3 + y^3 = axy$  ( $a > 0$ ) (Lá Descartes).



Hình 2.58

TCX:  $y = -x - \frac{1}{3}$

Tham số hoá đường cong đã cho, đặt  $\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$ , phương trình đường cong tương đương với

$$r = \frac{a \sin \varphi \cos \varphi}{\sin^3 \varphi + \cos^3 \varphi}.$$

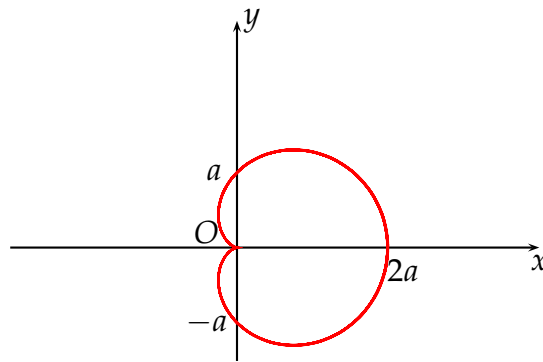
Khảo sát và vẽ đường cong đã cho trong hệ tọa độ cực (xem hình vẽ 2.58). Ta có

$$D : \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq r \leq \frac{a \sin \varphi \cos \varphi}{\sin^3 \varphi + \cos^3 \varphi} \end{cases}.$$

Do đó

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{a \sin \varphi \cos \varphi}{\sin^3 \varphi + \cos^3 \varphi}} r dr = \frac{a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{(\sin^3 \varphi + \cos^3 \varphi)^2} d\varphi \stackrel{t=\tan \varphi}{=} \frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{3} \int_0^{+\infty} \frac{d(t^3 + 1)}{(t^3 + 1)^2} = \frac{a^2}{6}.$$

**Bài tập 2.59.** Tính diện tích miền  $D$  giới hạn bởi đường  $r = a(1 + \cos \varphi)$  ( $a > 0$ ) (đường Cardioids hay đường hình tim)



Hình 2.59

Lời giải. Ta có

$$D = \{0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq a(1 + \cos \varphi)\}$$

nên

$$S = 2 \int_0^\pi d\varphi \int_0^{a(1+\cos \varphi)} r dr = a^2 \int_0^\pi (1 + \cos \varphi)^2 d\varphi = \dots = \frac{3\pi a^2}{2}.$$

■

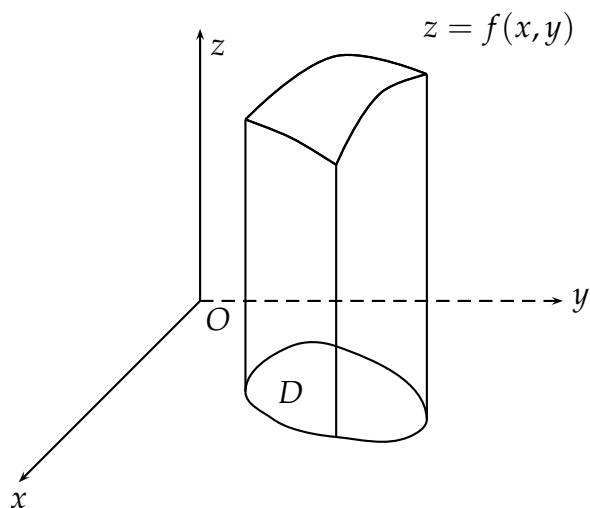
## 3.2 Tính thể tích vật thể

Công thức tổng quát:

$$V = \iiint_V dx dy dz$$

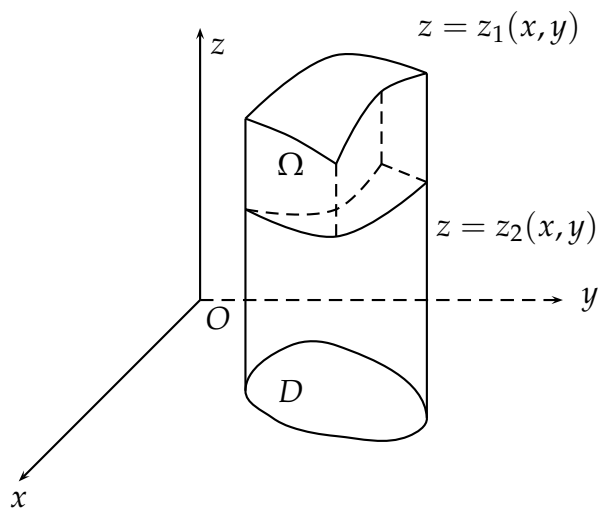
### Các trường hợp đặc biệt

1. Vật thể hình trụ, mặt xung quanh là mặt trụ có đường sinh song song với trục  $Oz$ , đáy là miền  $D$  trong mặt phẳng  $Oxy$ , phía trên giới hạn bởi mặt cong  $z = f(x, y)$ ,  $f(x, y) \geq 0$  và liên tục trên  $D$  thì  $V = \iint_D f(x, y) dx dy$ . (Xem hình vẽ dưới đây).

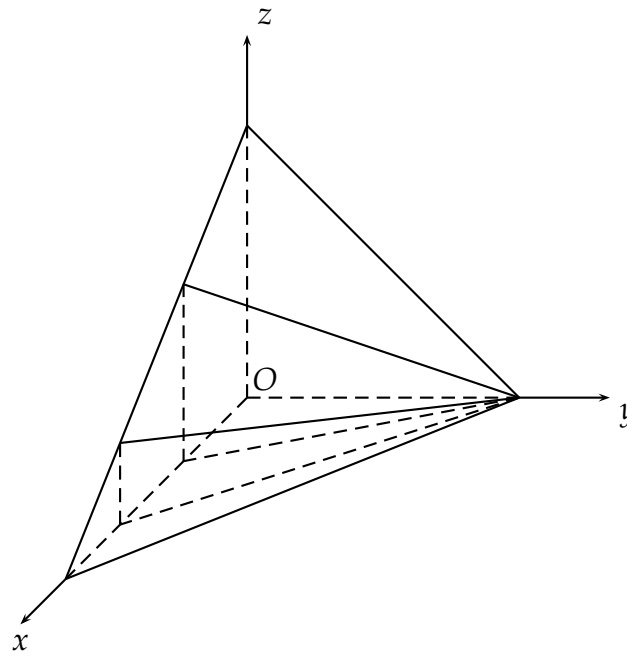


2. Vật thể là khối trụ, giới hạn bởi các đường sinh song song với trục  $Oz$ , hai mặt  $z = z_1(x, y), z = z_2(x, y)$ . Chiếu các mặt này lên mặt phẳng  $Oxy$  ta được miền  $D$ ,  $z_1(x, y), z_2(x, y)$  là các hàm liên tục, có đạo hàm riêng liên tục trên  $D$ . Khi đó:

$$V = \iint_D |z_1(x, y) - z_2(x, y)| dx dy$$



**Bài tập 2.60.** Tính thể tích miền giới hạn bởi 
$$\begin{cases} 3x + y \geq 1 \\ 3x + 2y \leq 2 \\ y \geq 0, 0 \leq z \leq 1 - x - y. \end{cases}$$



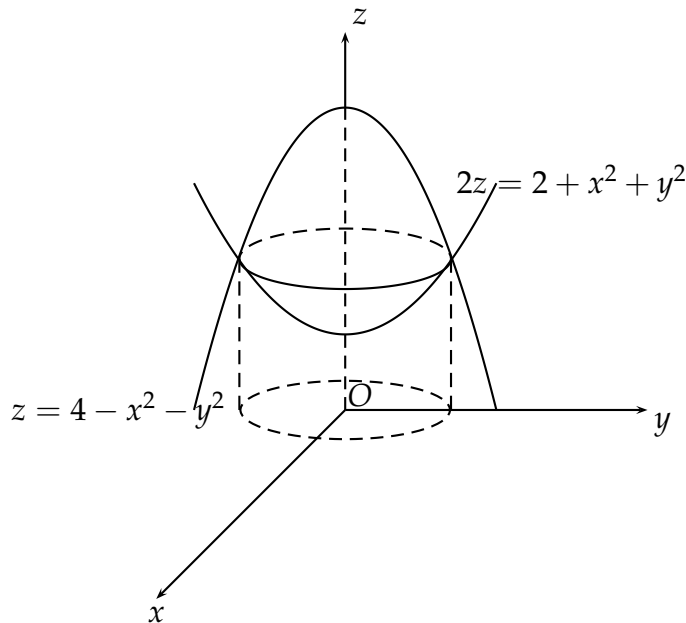
Hình 2.60

Lời giải.

$$V = \iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^1 dy \int_{\frac{1-y}{3}}^{\frac{2-2y}{3}} (1-x-y) dx = \frac{1}{6} \int_0^1 (1-2y+y^2) dy = \frac{1}{18}.$$

■

**Bài tập 2.61.** Tính thể tích của miền  $V$  giới hạn bởi  $\begin{cases} z = 4 - x^2 - y^2 \\ 2z = 2 + x^2 + y^2 \end{cases}$ .



Hình 2.61

*Lời giải.* Giao tuyến của hai mặt cong:  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ z = 2, \end{cases}$  nên hình chiếu của  $V$  lên mặt phẳng

$Oxy$  là  $D : x^2 + y^2 \leq 2$ . Hơn nữa trên  $D$  thì  $4 - x^2 - y^2 \geq \frac{2+x^2+y^2}{2}$  nên ta có:

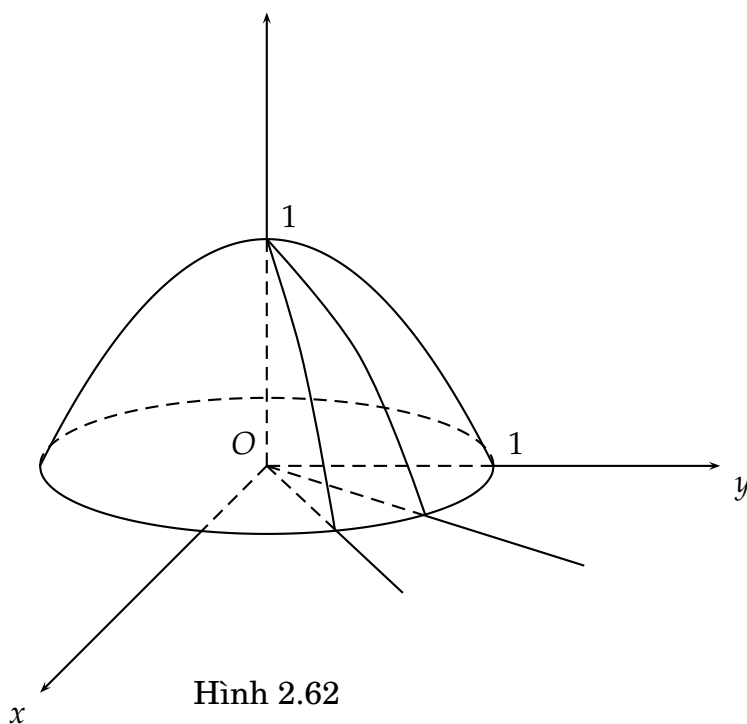
$$V = \iint_D \left( 4 - x^2 - y^2 - \frac{2+x^2+y^2}{2} \right) dx dy.$$

Đặt  $\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$  thì  $\begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq \sqrt{2}. \end{cases}$   
Do đó

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} \left( 3 - \frac{3}{2}r^2 \right) r dr = \dots = 3\pi.$$

■

**Bài tập 2.62.** Tính thể tích của  $V : \begin{cases} 0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2 \\ y \geq x, y \leq \sqrt{3}x. \end{cases}$



Hình 2.62

*Lời giải.* Do  $x \leq y \leq \sqrt{3}x$  nên  $x, y \geq 0$ . Ta có

$$V = \iint_D (1 - x^2 - y^2) dx dy.$$

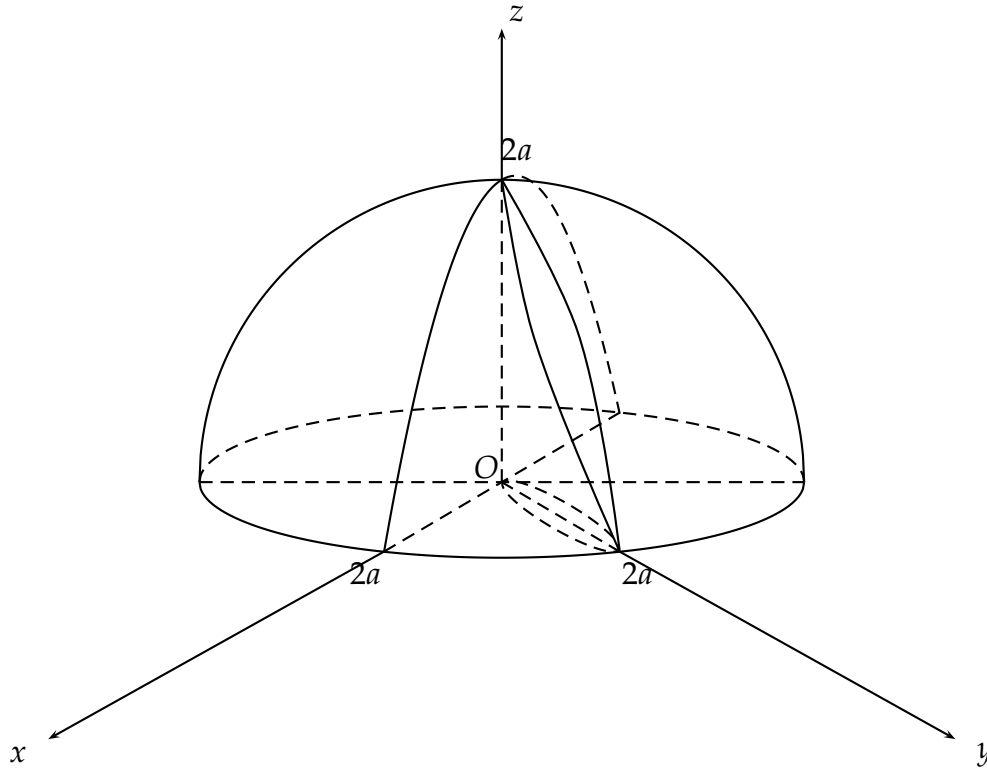
Đặt  $\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$  thì  $\begin{cases} \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3} \\ 0 \leq r \leq 1. \end{cases}$

Vậy

$$V = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_0^1 (1 - r^2) r dr = \dots = \frac{\pi}{48}.$$

■

**Bài tập 2.63.** Tính thể tích  $V$  :  $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \leq 4a^2 \\ x^2 + y^2 - 2ay \leq 0. \end{cases}$



Hình 2.63

*Lời giải.* Do tính chất đối xứng của miền  $V$  nên

$$V = 4 \iint_D \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2} dx dy,$$

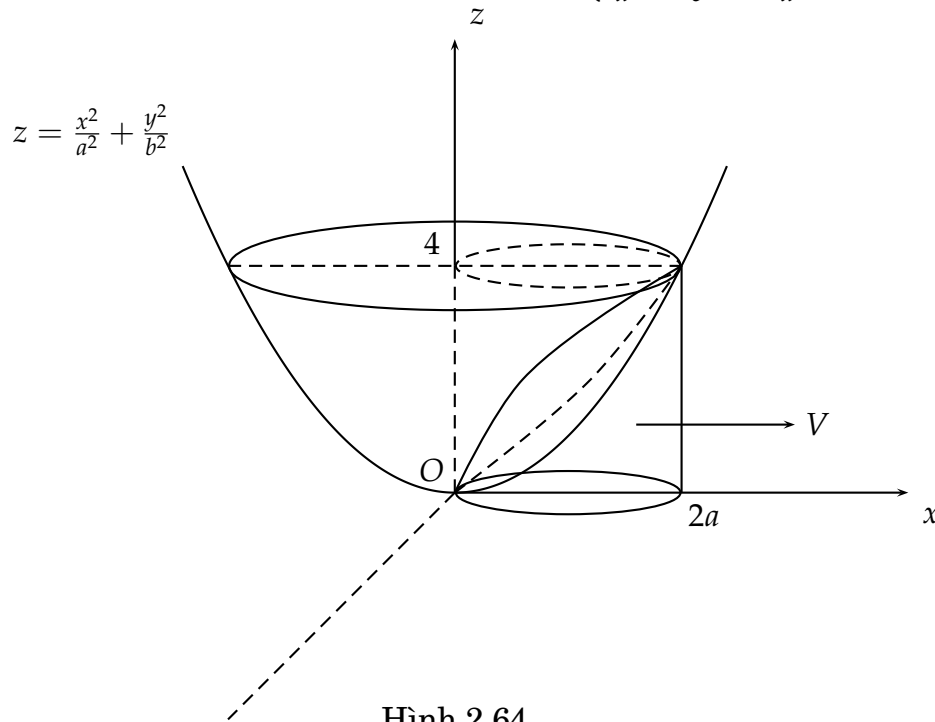
trong đó  $D$  là nửa hình tròn  $D : \begin{cases} x^2 + y^2 - 2ay \leq 0 \\ x \geq 0. \end{cases}$

Đặt  $\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$  thì  $\begin{cases} 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq r \leq 2a \sin \varphi. \end{cases}$

Vậy

$$\begin{aligned}
 V &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2a \sin \varphi} \sqrt{4a^2 - r^2} r dr \\
 &= 4 \cdot \frac{-1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{3} (4a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_{r=0}^{r=2a \sin \varphi} d\varphi \\
 &= \frac{4}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (8a^3 - 8a^3 \cos^3 \varphi) d\varphi \\
 &= \frac{32a^3}{3} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right).
 \end{aligned}$$

**Bài tập 2.64.** Tính thể tích của miền  $V$  giới hạn bởi

$$\begin{cases} z = 0 \\ z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{2x}{a}. \end{cases}$$


Hình 2.64

*Lời giải.* Ta có hình chiếu của  $V$  lên mặt phẳng  $Oxy$  là miền  $D : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq \frac{2x}{a}$ . Do tính chất đối xứng của miền  $V$  nên:

$$V = 2 \iint_{D^+} \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) dx dy,$$



trong đó  $D^+$  là nửa ellipse  $D^+ : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq \frac{2x}{a}, y \geq 0$

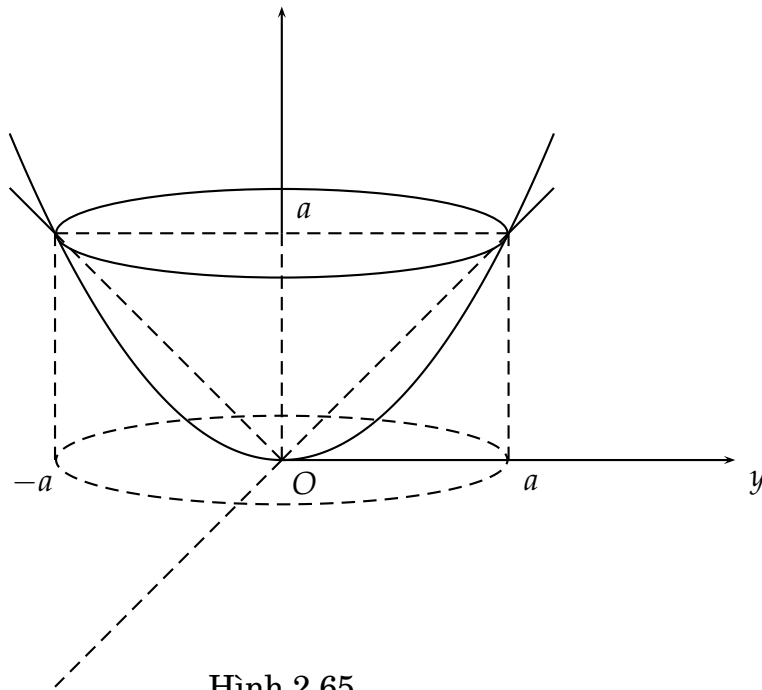
Đặt  $\begin{cases} x = ar \cos \varphi \\ y = br \sin \varphi \end{cases}$  thì  $|J| = abr$ ,  $\begin{cases} 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq r \leq 2 \cos \varphi. \end{cases}$

Vậy

$$V = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2 \cos \varphi} r^2 dr = \dots = \frac{3\pi}{2}.$$

■

**Bài tập 2.65.** Tính thể tích của miền  $V : \begin{cases} az = x^2 + y^2 \\ z = \sqrt{x^2 + y^2}. \end{cases}$



Hình 2.65

*Lời giải.* Giao tuyến của hai đường cong:

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{x^2 + y^2}{a} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ z = a \end{cases}$$

Vậy hình chiếu của  $V$  lên mặt phẳng  $Oxy$  là

$$D : x^2 + y^2 \leq a^2.$$

Nhận xét rằng, ở trong miền  $D$  thì mặt nón ở phía trên mặt paraboloid nên:

$$V = \iint_D \left( \sqrt{x^2 + y^2} - \frac{x^2 + y^2}{a} \right) dx dy.$$

Đặt  $\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$  thì  $\begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq a. \end{cases}$   
 Vậy

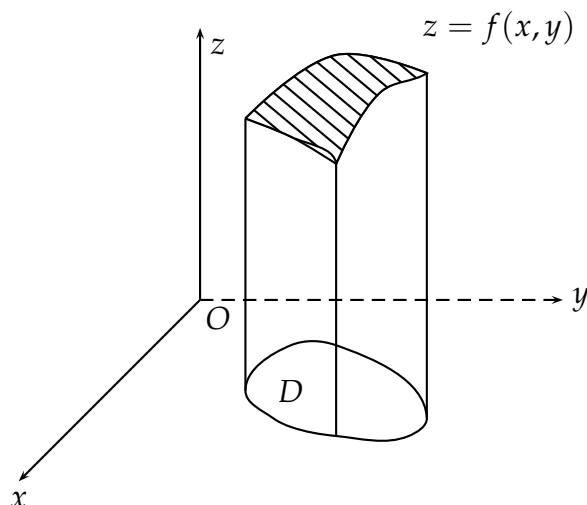
$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \left(r - \frac{r^2}{a}\right) r dr = \dots = \frac{\pi a^3}{6}.$$

■

### 3.3 Tính diện tích mặt cong

Mặt  $z = f(x, y)$  giới hạn bởi một đường cong kín, hình chiếu của mặt cong lên mặt phẳng  $Oxy$  là  $D$ . Giả thiết  $f(x, y)$  là hàm số liên tục, có các đạo hàm riêng liên tục trên  $D$ . Khi đó:

$$\sigma = \iint_D \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx dy, \quad p = f'_x, q = f'_y$$



**Ví dụ 3.1 (Cuối kì, K62).** Tính diện tích của phần mặt paraboloid  $x = y^2 + z^2$  thỏa mãn  $x \leq 1$ .

Lời giải. i) Ta có miền  $D : \begin{cases} y^2 + z^2 \leq 1, \\ x = 0 \end{cases}$  nên

$$S = \iint_D \sqrt{1 + (x'_y)^2 + (x'_z)^2} dy dz = \iint_D \sqrt{1 + 4y^2 + 4z^2} dy dz.$$

ii) Đặt  $\begin{cases} y = r \cos \varphi, \\ z = r \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow S = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r \sqrt{1 + 4r^2} dr = \frac{\pi}{6} (5\sqrt{5} - 1).$

■

### 3.4 Bài tập ôn tập

**Bài tập 2.66.** Tính thể tích của vật thể giới hạn bởi hình trụ elliptic  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , mặt phẳng  $z = 0$  và paraboloid elliptic  $\frac{2z}{c} = \frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2}$  ( $c > 0$ ).

**Bài tập 2.67.** Tính thể tích của miền giới hạn bởi các mặt hyperbolic  $xy = 1, xy = 9, xz = 4, xz = 36, yz = 25, yz = 49$ .

[Gợi ý] Đặt  $u = xy, v = xz, w = yz$ . Đáp số  $V = 64$ .



# CHƯƠNG 3

## TÍCH PHÂN PHỤ THUỘC THAM SỐ.

### §1. TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH PHỤ THUỘC THAM SỐ.

#### 1.1 Giới thiệu

Xét tích phân xác định phụ thuộc tham số:  $I(y) = \int_a^b f(x, y) dx$ , trong đó  $f(x, y)$  khả tích theo  $x$  trên  $[a, b]$  với mỗi  $y \in [c, d]$ . Trong bài học này chúng ta sẽ nghiên cứu một số tính chất của hàm số  $I(y)$  như tính liên tục, khả vi, khả tích.

#### 1.2 Các tính chất của tích phân xác định phụ thuộc tham số.

##### 1) Tính liên tục.

**Định lý 3.11.** Nếu  $f(x, y)$  là hàm số liên tục trên  $[a, b] \times [c, d]$  thì  $I(y)$  là hàm số liên tục trên  $[c, d]$ . Tức là:

$$\lim_{y \rightarrow y_0} I(y) = I(y_0) \Leftrightarrow \lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b f(x, y_0) dx$$

(có thể chuyển dấu lấy giới hạn vào bên trong biểu thức tích phân)

**Ví dụ 1.1.** Khảo sát sự liên tục của tích phân  $I(y) = \int_0^1 \frac{yf(x)}{x^2+y^2} dx$ , với  $f(x)$  là hàm số dương, liên tục trên  $[0, 1]$ .

*Lời giải.* Nhận xét rằng hàm số  $g(x, y) = \frac{yf(x)}{x^2+y^2}$  liên tục trên mỗi hình chữ nhật  $[0, 1] \times [c, d]$  và  $[0, 1] \times [-d, -c]$  với  $0 < c < d$  bất kì, nên theo Định lý 3.11,  $I(y)$  liên tục trên mỗi  $[c, d], [-d, -c]$ , hay nói cách khác  $I(y)$  liên tục với mọi  $y \neq 0$ .

Bây giờ ta xét tính liên tục của hàm số  $I(y)$  tại điểm  $y = 0$ . Do  $f(x)$  liên tục trên  $[0, 1]$  nên tồn tại  $m = \min_{[0,1]} f(x) > 0$ . Khi đó  $f(x) \geq m > 0 \forall x \in [0, 1]$  và với  $\varepsilon > 0$  thì:

$$I(\varepsilon) = \int_0^1 \frac{\varepsilon f(x)}{x^2 + \varepsilon^2} dx \geq \int_0^1 \frac{\varepsilon m}{x^2 + \varepsilon^2} dx = m \cdot \arctan \frac{x}{\varepsilon},$$

$$I(-\varepsilon) = \int_0^1 \frac{-\varepsilon f(x)}{x^2 + \varepsilon^2} dx \leq \int_0^1 \frac{-\varepsilon m}{x^2 + \varepsilon^2} dx = -m \cdot \arctan \frac{x}{\varepsilon}.$$

Suy ra  $|I(\varepsilon) - I(-\varepsilon)| \geq 2m \cdot \arctan \frac{x}{\varepsilon} \rightarrow 2m \cdot \frac{\pi}{2}$  khi  $\varepsilon \rightarrow 0$ , tức là  $|I(\varepsilon) - I(-\varepsilon)|$  không tiến tới 0 khi  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $I(y)$  gián đoạn tại  $y = 0$ . ■

**Ví dụ 1.2.** Xét tính liên tục của hàm số  $I(y) = \int_0^1 \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} dx$ .

*Lời giải.* Tại  $y = 0$ ,  $I(0) = \int_0^1 -\frac{1}{x^2} dx = -\infty$ , nên hàm số  $I(y)$  không xác định tại  $y = 0$ .

Tại  $y \neq 0$ , cũng có thể sử dụng Định lý 3.11 để khảo sát tính liên tục của  $I(y)$ . Khi đó phải xét hàm số  $f(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$  trong khoảng  $[0, 1] \times [c, d]$  với  $d > c > 0$  bất kì (để tránh điểm  $y = 0$ ) giống như trong Ví dụ 1.1. Tuy nhiên, trong trường hợp này có thể tính được  $I(y)$  một cách trực tiếp như sau:

$$I(y) = \int_0^1 \frac{(x^2 + y^2) - 2x \cdot x}{(x^2 + y^2)^2} dx = \int_0^1 d \left( \frac{x}{x^2 + y^2} \right) = \frac{1}{1 + y^2}.$$

Do đó  $I(y)$  xác định và liên tục với mọi  $y \neq 0$ . ■

## 2) Tính khả vi.

**Định lý 3.12.** Nếu

i)  $f(x, y)$  liên tục trên  $[a, b] \times [c, d]$ ,

ii)  $f'_y(x, y)$  liên tục trên  $[a, b] \times [c, d]$

thì  $I(y)$  là hàm số khả vi trên  $(c, d)$  và

$$I'(y) = \int_a^b f'_y(x, y) dx,$$

nói cách khác, có thể đưa dấu đạo hàm vào trong dấu tích phân.

**Ví dụ 1.3.** Tính các tích phân sau:

a)  $I_n(\alpha) = \int_0^1 x^\alpha \ln^n x dx$ ,  $n$  là số nguyên dương.

*Lời giải.* \* Với mỗi  $\alpha > 0$ , hàm số  $f_n(x, \alpha) = x^\alpha \ln^n x$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  liên tục theo  $x$  trên  $[0, 1]$

\* Vì  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln^{n+1} x = 0$  nên  $\frac{\partial f_n(x, \alpha)}{\partial \alpha} = x^\alpha \ln^{n+1} x$  liên tục trên  $[0, 1] \times (0, +\infty)$ . ■

Nghĩa là hàm số  $f_n(x, \alpha) = x^\alpha \ln^n x$  thoả mãn các điều kiện của Định lý 3.12 nên:

$$I'_{n-1}(\alpha) = \frac{d}{d\alpha} \int_0^1 x^\alpha \ln^{n-1} x dx = \int_0^1 \frac{d}{d\alpha} (x^\alpha \ln^{n-1} x) dx = \int_0^1 x^\alpha \ln^n x dx = I_n(\alpha).$$

Tương tự,  $I'_{n-2} = I_{n-1}, \dots, I'_2 = I_1, I'_1 = I_0$ , suy ra  $I_n(\alpha) = [I_0(\alpha)]^{(n)}$ . Mà

$$I_0(\alpha) = \int_0^1 x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha + 1} \Rightarrow I_n(\alpha) = \left[ \frac{1}{\alpha + 1} \right]^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(\alpha + 1)^{n+1}}.$$

b)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 + y \sin^2 x) dx$ , với  $y > 1$ .

*Lời giải.* Xét hàm số  $f(x, y) = \ln(1 + y \sin^2 x)$  thoả mãn các điều kiện sau:

- $f(x, y) = \ln(1 + y \sin^2 x)$  xác định trên  $[0, \frac{\pi}{2}] \times (1, +\infty)$  và với mỗi  $y > -1$  cho trước,  $f(x, y)$  liên tục theo  $x$  trên  $[0, \frac{\pi}{2}]$ .
- Tồn tại  $f'_y(x, y) = \frac{\sin^2 x}{1 + y \sin^2 x}$  xác định, liên tục trên  $[0, \frac{\pi}{2}] \times (1, +\infty)$ .

Theo Định lý 3.12,  $I'(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{1 + y \sin^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\frac{1}{\sin^2 x} + y}$ .

Đặt  $t = \tan x$  thì  $dx = \frac{dt}{1+t^2}$ ,  $0 \leq t \leq +\infty$ .

$$\begin{aligned} I'(y) &= \int_0^{+\infty} \frac{t^2 dt}{(t^2+1)(1+t^2+yt^2)} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{y} \left[ \frac{1}{t^2+1} - \frac{1}{1+(y+1)t^2} \right] dt \\ &= \frac{1}{y} \left[ \arctan t \Big|_0^{+\infty} - \frac{1}{\sqrt{y+1}} \arctan \left( t\sqrt{y+1} \right) \Big|_0^{+\infty} \right] \\ &= \frac{\pi}{2y} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1+y}} \right) = \frac{\pi}{2\sqrt{1+y}} \cdot \frac{1}{1+\sqrt{1+y}}. \end{aligned}$$

Suy ra

$$I(y) = \int I'(y) dy = \int \frac{\pi}{2\sqrt{1+y}} \cdot \frac{1}{1+\sqrt{1+y}} dy = \pi \ln \left( 1 + \sqrt{1+y} \right) + C.$$

Do  $I(0) = 0$  nên  $C = -\pi \ln 2$  và  $I(y) = \pi \ln \left( 1 + \sqrt{1+y} \right) - \pi \ln 2$ . ■

### 3) Tính khả tích.

**Định lý 3.13.** Nếu  $f(x, y)$  là hàm số liên tục trên  $[a, b] \times [c, d]$  thì  $I(y)$  là hàm số khả tích trên  $[c, d]$ , và:

$$\int_c^d I(y) dy := \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx$$

**Ví dụ 1.4.** Tính  $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx$ , ( $0 < a < b$ ).

**Lời giải.** Hàm lấy tích phân  $f(x) = \frac{x^b - x^a}{\ln x}$  mặc dù không xác định tại  $x = 0$  nhưng  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^b - x^a}{\ln x} = 0$  nên có thể xếp tích phân này vào loại tích phân xác định.

Ta có:

$$\frac{x^b - x^a}{\ln x} = F(x, b) - F(x, a) = \int_a^b F'_y(x, y) dy = \int_a^b x^y dy; \quad \left( F(x, y) := \frac{x^y}{\ln x} \right)$$

nên:

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx = \int_0^1 \left( \int_a^b x^y dy \right) dx = \int_a^b \left( \int_0^1 x^y dx \right) dy = \int_a^b \frac{1}{y+1} dy = \ln \frac{b+1}{a+1}.$$

Bạn đọc tự kiểm tra điều kiện về đổi thứ tự lấy tích phân. ■



## 1.3 Các tính chất của tích phân phụ thuộc tham số với cận biến đổi.

Xét tích phân phụ thuộc tham số với cận biến đổi

$$J(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx, \text{ với } y \in [c, d], a \leq a(y), b(y) \leq b \forall y \in [c, d].$$

### 1) Tính liên tục

**Định lý 3.14.** Nếu

i) hàm số  $f(x, y)$  liên tục trên  $[a, b] \times [c, d]$ ,

ii) các hàm số  $a(y), b(y)$  liên tục trên  $[c, d]$  và thoả mãn điều kiện  $a \leq a(y), b(y) \leq b \forall y \in [c, d]$

thì  $J(y)$  là một hàm số liên tục (đối với  $y$ ) trên  $[c, d]$ .

### 2) Tính khả vi

**Định lý 3.15 (Định lý Leibniz).** Nếu

i) hàm số  $f(x, y)$  liên tục trên  $[a, b] \times [c, d]$ ,

ii) hàm số  $f'_y(x, y)$  liên tục trên  $[a, b] \times [c, d]$ ,

iii) các hàm số  $a(y), b(y)$  khả vi trên  $[c, d]$  và thoả mãn điều kiện  $a \leq a(y), b(y) \leq b \forall y \in [c, d]$

thì  $J(y)$  là một hàm số khả vi (đối với  $y$ ) trên  $[c, d]$ , và:

$$J'(y) = f(b(y), y) b'_y(y) - f(a(y), y) a'_y(y) + \int_{a(y)}^{b(y)} f'_y(x, y) dx.$$

**Ví dụ 1.5.** Tìm  $\lim_{y \rightarrow 0} \int_y^{1+y} \frac{dx}{1+x^2+y^2}$ .

*Lời giải.* Dễ dàng kiểm tra được hàm số  $I(y) = \int_y^{1+y} \frac{dx}{1+x^2+y^2}$  liên tục tại  $y = 0$  dựa vào định

lý 3.14, nên  $\lim_{y \rightarrow 0} \int_y^{1+y} \frac{dx}{1+x^2+y^2} = I(0) = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$ . ■

## 1.4 Bài tập

**Dạng 1. Tính tích phân suy rộng phụ thuộc tham số bằng cách đổi thứ tự lấy tích phân**

Giả sử cần tính  $I(y) = \int_a^b f(x, y) dx$ .

**B1.** Biểu diễn  $f(x, y) = \int_c^d F(x, y) dy$ .

**B2.** Sử dụng tính chất đổi thứ tự lấy tích phân:

$$I(y) = \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \left( \int_c^d F(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left( \int_a^b F(x, y) dx \right) dy.$$

**Dạng 2. Tính tích phân bằng cách đạo hàm qua dấu tích phân.**

Giả sử cần tính  $I(y) = \int_a^b f(x, y) dx$ .

**B1.** Tính  $I'(y)$  bằng cách  $I'(y) = \int_a^b f'_y(x, y) dx$ .

**B2.** Dùng công thức Newton-Leibniz để khôi phục lại  $I(y)$  bằng cách  $I(y) = \int I'(y) dy + C$ .

**B3.** Cho một giá trị đặc biệt của  $y$  để xác định  $C$ .

**Chú ý:** Phải kiểm tra điều kiện đổi thứ tự lấy tích phân trong Định lý 3.13 hoặc chuyển dấu đạo hàm qua tích phân trong Định lý 3.12.

**Bài tập 3.1.** Tính  $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx$ , ( $0 < a < b$ ).

Lời giải.

**Cách 1: Đổi TT lấy TP**

$$\begin{aligned} \frac{x^b - x^a}{\ln x} &= F(x, b) - F(x, a) \\ &= \int_a^b F'_y(x, y) dy \\ &= \int_a^b x^y dy \\ &\left( F(x, y) := \frac{x^y}{\ln x} \right). \end{aligned}$$

nên:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx &= \int_0^1 \left( \int_a^b x^y dy \right) dx \\ &= \int_a^b \left( \int_0^1 x^y dx \right) dy \\ &= \int_a^b \frac{1}{y+1} dy \\ &= \ln \frac{b+1}{a+1}. \end{aligned}$$

**Cách 2: Đạo hàm qua dấu TP**

$$\text{Đặt } I(b) = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx.$$

Ta có

$$I'(b) = \int_0^1 x^b dx = \frac{1}{b+1}.$$

nên

$$I(b) = \int I'(b) db = \ln(b+1) + C.$$

Thay giá trị đặc biệt  $b = a$  vào biểu thức tính tích phân  $I(b)$  ta được

$$I(a) = 0 \Leftrightarrow C = -\ln(a+1).$$

Do đó  $I = \ln \frac{b+1}{a+1}$ . ■

**Bài tập 3.2.** Tính tích phân sau:

$$\text{a) } I(y) = \int_0^1 \arctan \frac{x}{y} dx.$$

$$\text{b) } J(y) = \int_0^1 \ln(x^2 + y^2) dx.$$

[Gợi ý]

a) B1. Kiểm tra  $I(y)$  thỏa mãn các điều kiện của Định lý về tính khả vi.

B2. Nhận xét rằng  $I'(y) = \frac{1}{2} \ln \frac{y^2}{1+y^2}$ .

B3.  $I(y) = \arctan \frac{1}{y} + \frac{1}{2} y \ln \frac{y^2}{1+y^2} + C$ .

B4. Thay một giá trị đặc biệt  $y = y_0$  vào để tính  $C$ . Chẳng hạn,  $I(1) = \int_0^1 \arctan x dx$ , và tính được  $C = 0$ .

b) B1. Kiểm tra  $J(y)$  thỏa mãn các điều kiện của Định lý về tính khả vi.

B2. Tính  $I'(y) = 2 \arctan \frac{1}{y}$ .

B3.  $I(y) = \ln(1 + y^2) - 2 + 2y \arctan \frac{1}{y}$ .

B4. Thay một giá trị đặc biệt  $y = y_0$  vào để tính  $C$ . Chẳng hạn,  $I(0) = \int_0^1 \ln x^2 dx$ , và tính được  $C = 0$ .

**Bài tập 3.3.** Cho hàm số  $f(x) = \begin{cases} \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, & 0 < x, y \leq 1, \\ 0, & x = y = 0. \end{cases}$

Chứng minh rằng

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \left( \int_0^1 f(x, y) dx \right) dy \neq \int_0^1 \left( \int_0^1 f(x, y) dy \right) dx = -\frac{\pi}{4},$$

nghĩa là hàm số  $I(y) = \int_0^1 f(x, y) dx$  khả tích trên đoạn  $[0, 1]$  nhưng không thể đổi thứ tự lấy tích phân được trong trường hợp này. Hãy giải thích vì sao.

**Bài tập 3.4.** Chứng minh hàm Bessel

$$I_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\varphi - x \sin \varphi) d\varphi$$

thỏa mãn phương trình Bessel

$$x^2 I_n''(x) + x I_n'(x) + (x^2 - n^2) I_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

## §2. TÍCH PHÂN SUY RỘNG PHỤ THUỘC THAM SỐ.

Xét tích phân suy rộng phụ thuộc tham số  $I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y)dx$ ,  $y \in [c, d]$ . Các kết quả dưới đây tuy phát biểu đối với tích phân suy rộng loại II (có cận bằng vô cùng) nhưng đều có thể áp dụng một cách thích hợp cho trường hợp tích phân suy rộng loại I (có hàm dưới dấu tích phân không bị chặn). Mục đích chính cũng là nghiên cứu các tính chất liên tục, khả vi, khả tích của  $I(y)$ . Tuy nhiên, các điều kiện để  $I(y)$  thỏa mãn các tính chất liên tục, khả vi, khả tích sẽ không còn đơn giản như đối với tích phân xác định phụ thuộc tham số nữa.

### 2.1 Các tính chất của tích phân suy rộng phụ thuộc tham số.

Giả thiết

- $f(x, y)$  là hàm số xác định trên  $[a, \infty) \times [c, d]$ ,
- với mỗi  $y \in [c, d]$  cố định,  $f(x, y)$  khả tích theo  $x$  trên  $[a, b]$ ,  $\forall b > a$ .

**Định nghĩa 3.11.** Ta nói TPSR phụ thuộc tham số là

- hội tụ tại  $y_0 \in [c, d]$  nếu  $\int_a^\infty f(x, y_0)dx$  hội tụ, nghĩa là với mọi  $\epsilon > 0$ , tồn tại  $b(\epsilon, y_0) > a$  (phụ thuộc vào  $\epsilon$  và  $y_0$ ) sao cho

$$\left| I(y_0) - \int_a^b f(x, y_0)dx \right| = \left| \int_b^\infty f(x, y_0)dx \right| < \epsilon \text{ với mọi } b > b(\epsilon, y_0).$$

- hội tụ trên  $[c, d]$  nếu  $I(y)$  hội tụ tại mọi  $y \in [c, d]$ ,
- hội tụ đều trên  $[c, d]$  nếu với mọi  $\epsilon > 0$ , tồn tại  $b_\epsilon > a$  (chỉ phụ thuộc vào  $\epsilon$  mà không phụ thuộc vào  $y$ ) sao cho

$$\left| I(y) - \int_a^b f(x, y)dx \right| = \left| \int_b^\infty f(x, y)dx \right| < \epsilon \text{ với mọi } b > b_\epsilon \text{ và với mọi } y \in [c, d].$$

**Ví dụ 2.6.**  $I(y) = \int_1^\infty \sin(yx)dx$  hội tụ khi  $y = 0$  và phân kỳ khi  $y \neq 0$ .

**Ví dụ 2.7.** a) Tính  $I(y) = \int_0^{+\infty} ye^{-yx} dx$  ( $y > 0$ ).

b) Chứng minh rằng  $I(y)$  hội tụ đều tới 1 trên  $[y_0, +\infty)$  với mọi  $y_0 > 0$ .

c) Giải thích tại sao  $I(y)$  không hội tụ đều trên  $(0, +\infty)$ .

[Gợi ý]

a)  $I(y) = -e^{-yx} \Big|_0^{\infty} = 1$  với mọi  $y > 0$ .

b) Theo định nghĩa, muốn chỉ ra  $I(y)$  hội tụ đều tới 1 trên  $[y_0, +\infty)$  ta phải chỉ ra với mỗi  $\epsilon > 0$ , tồn tại số  $b_\epsilon$  chỉ phụ thuộc vào  $\epsilon$ , không phụ thuộc vào  $y$  sao cho

$$\left| I(y) - \int_0^b ye^{-yx} dx \right| < \epsilon, \quad \forall b > b_\epsilon.$$

Thật vậy,

$$\left| I(y) - \int_0^b ye^{-yx} dx \right| = |1 - (1 - e^{-by})| = e^{-by} \leq e^{-by_0} < \epsilon \text{ nếu } b > \frac{1}{y_0} \ln \frac{1}{\epsilon}.$$

Do đó, có thể chọn  $b_\epsilon = \frac{1}{y_0} \ln \frac{1}{\epsilon}$ .

c) Ta có

$$\left| I(y) - \int_0^b ye^{-yx} dx \right| = |1 - (1 - e^{-by})| = e^{-by}.$$

Muốn  $\left| I(y) - \int_0^b ye^{-yx} dx \right| < \epsilon$  thì  $e^{-by} < \epsilon \Leftrightarrow b > \frac{1}{y} \ln \frac{1}{\epsilon}$ . Tuy nhiên,  $\frac{1}{y} \ln \frac{1}{\epsilon} \rightarrow +\infty$  khi  $y \rightarrow 0^+$ . Do đó, không thể chọn được hằng số  $b_\epsilon$  chỉ phụ thuộc vào  $\epsilon$  thỏa mãn yêu cầu của hội tụ đều.

**Ví dụ 2.8.** Chứng minh rằng  $\int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos yx dx = \frac{a}{y^2 + a^2}$  với  $a > 0$  và với mọi  $y$ .

[Gợi ý]

$$\int e^{-ax} \cos yx dx = -\frac{a}{a^2 + y^2} e^{-ax} \cos yx + \frac{y}{a^2 + y^2} e^{-ax} \sin yx,$$

nên  $\int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos yx dx = \frac{a}{a^2 + y^2}$ .

**1) Tiêu chuẩn hội tụ đều Weierstrass****Định lý 3.16.** *Nếu*

$$i) |f(x, y)| \leq g(x), \forall (x, y) \in [a, +\infty) \times [c, d],$$

$$ii) \text{ tích phân suy rộng } \int_a^{+\infty} g(x) dx \text{ hội tụ,}$$

thì tích phân suy rộng  $I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$  hội tụ đều đối với  $y \in [c, d]$ .

**Ví dụ 2.9.** *Chứng minh rằng*

$$a) I(y) = \int_0^{\infty} \frac{\cos yx}{x^2+1} dx \text{ là hội tụ đều trên } \mathbf{R}.$$

$$b) I(y) = \int_0^{+\infty} ye^{-yx} dx \quad (y > 0) \text{ hội tụ đều trên } [y_0, +\infty) \text{ với mọi } y_0 > 0.$$

$$c) I(y) = \int_0^{+\infty} e^{-yx} \cos \alpha x \text{ hội tụ đều trên khoảng } [a, b] \text{ với mọi } 0 < a < b \text{ và } \alpha \in \mathbf{R}.$$

**2) Tính liên tục****Định lý 3.17.** *Nếu*

$$i) \text{ hàm số } f(x, y) \text{ liên tục trên } [a, +\infty) \times [c, d],$$

$$ii) \text{ tích phân suy rộng } I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx \text{ hội tụ đều đối với } y \in [c, d]$$

thì  $I(y)$  là một hàm số liên tục trên  $[c, d]$ , nghĩa là

$$\lim_{y \rightarrow y_0} I(y) = \lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} f(x, y_0) dx = I(y_0).$$

**Ví dụ 2.10.** *Tính*  $\lim_{y \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{\cos yx}{x^2+1} dx$ .

**Ví dụ 2.11.** Chứng minh rằng  $I(y) = \int_0^{+\infty} ye^{-yx} dx$  không liên tục phải tại  $y = 0$ , nghĩa là

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \left( \int_0^{+\infty} ye^{-yx} dx \right) \neq \int_0^{+\infty} \left( \lim_{y \rightarrow 0^+} ye^{-yx} \right) dx.$$

Hãy giải thích tại sao không chuyển được dấu giới hạn vào trong biểu thức tích phân trong trường hợp này.

### 3) Tính khả vi

**Định lý 3.18.** Nếu

i) các hàm số  $f(x, y)$  và  $f'_y(x, y)$  liên tục trên  $[a, +\infty) \times [c, d]$ ,

ii) tích phân suy rộng  $I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$  hội tụ với mỗi  $y \in [c, d]$ ,

iii) tích phân suy rộng  $\int_a^{+\infty} f'_y(x, y) dx$  hội tụ đều đối với  $y \in [c, d]$

thì  $I(y)$  là hàm số khả vi trên  $[c, d]$  và  $I'(y) = \int_a^{+\infty} f'_y(x, y) dx$ .

**Ví dụ 2.12.** Chứng minh rằng tích phân phụ thuộc tham số  $I(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\arctan(x+y)}{1+x^2} dx$  là một hàm số liên tục khả vi đối với biến  $y$ . Tính  $I'(y)$  rồi suy ra biểu thức của  $I(y)$ .

Lời giải. Ta có:

1)  $f(x, y) = \frac{\arctan(x+y)}{1+x^2}$  liên tục trên  $[-\infty, +\infty) \times [-\infty, +\infty]$ .

2)  $\left| \frac{\arctan(x+y)}{1+x^2} \right| \leq \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2}$ , mà  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} = \pi$  hội tụ, nên  $I(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\arctan(x+y)}{1+x^2} dx$  hội tụ đều trên  $[-\infty, +\infty]$ .

Theo Định lý 3.17,  $I(y)$  liên tục trên  $[-\infty, +\infty]$ .

Hơn nữa  $\left| f'_y(x, y) \right| = \frac{1}{(1+x^2)[1+(x+y)^2]} \leq \frac{1}{1+x^2}$ ,  $\forall y$ ; do đó  $\int_{-\infty}^{+\infty} f'_y(x, y) dx$  hội tụ đều trên

$[-\infty, +\infty]$ . Theo Định lý 3.18,  $I(y)$  khả vi trên  $[-\infty, +\infty]$ , và:  $I'(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)[1+(x+y)^2]} dx$ .



Đặt  $\frac{1}{(1+x^2)[1+(x+y)^2]} = \frac{Ax+B}{1+x^2} + \frac{Cx+D}{1+(x+y)^2}$ , dùng phương pháp đồng nhất hệ số ta thu được:  $A = \frac{-2}{y(y^2+4)}, B = \frac{2}{y(y^2+4)}, C = \frac{1}{y^2+4}, D = \frac{3}{y^2+4}$ . Do đó:

$$\begin{aligned} I'(y) &= \frac{1}{y^2+4} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{-2x+y}{1+x^2} + \frac{2x+3y}{1+(x+y)^2} \right] \\ &= \frac{1}{y^2+4} \left[ -\ln(1+x^2) + y \arctan x + \ln(1+(x+y)^2) + y \arctan(x+y) \right] \Big|_{x=-\infty}^{+\infty} \\ &= \frac{4\pi}{y^2+4} \end{aligned}$$

Suy ra  $I(y) = \int I'(y) dy = 2 \arctan \frac{y}{2} + C$ , mặt khác  $I(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2} dx = 0$  nên  $C = 0$  và  $I(y) = 2 \arctan \frac{y}{2}$ . ■

**Ví dụ 2.13.** Tính  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+y)^{n+1}}$

**Lời giải.** Đặt  $I_n(y) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+y)^{n+1}}, f_n(x, y) = \frac{1}{(x^2+y)^{n+1}}$ . Khi đó:

$$[I_{n-1}(y)]'_y = \left[ \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+y)^n} \right]'_y = -n \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+y)^{n+1}} = -n I_n(y) \Rightarrow I_n = -\frac{1}{n} (I_{n-1})'.$$

Tương tự,  $I_{n-1} = -\frac{1}{n-1} (I_{n-2})', I_{n-2} = -\frac{1}{n-2} (I_{n-3})', \dots, I_1 = -(I_0)'$ .

Do đó,  $I_n(y) = \frac{(-1)^n}{n!} [I_0(y)]^{(n)}$ . Mà  $I_0(y) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+y} dx = \frac{1}{\sqrt{y}} \arctan \frac{x}{\sqrt{y}} \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{y}}$  nên

$$I_n(y) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{1}{\sqrt{y^{2n+1}}}.$$

Vấn đề còn lại là việc kiểm tra điều kiện chuyển đạo hàm qua dấu tích phân.

1) Các hàm số  $f(x, y) = \frac{1}{x^2+y}, f'_y(x, y) = \frac{-1}{(x^2+y)^2}, \dots, f_{y^n}^{(n)}(x, y) = \frac{(-1)^n}{(x^2+y)^{n+1}}$  liên tục trong  $[0, +\infty) \times [\varepsilon, +\infty)$  với mỗi  $\varepsilon > 0$  cho trước.

$$2) \frac{1}{x^2+y} \leq \frac{1}{x^2+\varepsilon}, \left| \frac{-1}{(x^2+y)^2} \right| \leq \frac{1}{(x^2+\varepsilon)^2}, \dots, \left| \frac{(-1)^n}{(x^2+y)^{n+1}} \right| \leq \frac{1}{(x^2+\varepsilon)^{n+1}}$$

Mà các tích phân  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+\varepsilon} dx, \dots, \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+\varepsilon)^{n+1}} dx$  đều hội tụ, do đó

$\int_0^{+\infty} f(x, y) dx, \int_0^{+\infty} f'_y(x, y) dx, \dots, \int_0^{+\infty} f_{y^n}^{(n)}(x, y) dx$  hội tụ đều trên  $[\varepsilon, +\infty)$  với mỗi  $\varepsilon > 0$ . ■

#### 4) Tính khả tích

**Định lý 3.19.** Nếu

i) hàm số  $f(x, y)$  liên tục trên  $[a, +\infty] \times [c, d]$ ,

ii) tích phân suy rộng  $I(y)$  hội tụ đều đối với  $y \in [c, d]$ ,

thì  $I(y)$  là hàm số khả tích trên  $[c, d]$  và ta có thể đổi thứ tự lấy tích phân theo công thức:

$$\int_c^d I(y) dy := \int_c^d \left( \int_a^{+\infty} f(x, y) dx \right) dy = \int_a^{+\infty} \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx.$$

**Ví dụ 2.14.** Tính  $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} dx, (\alpha, \beta > 0).$

Lời giải. Ta có:

$$\frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \left( F(x, y) := \frac{e^{-yx}}{x} \right) = F(x, \alpha) - F(x, \beta) = \int_{\beta}^{\alpha} F'_y(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} e^{-yx} dy$$

nên:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} dx = \int_0^{+\infty} \left( \int_{\alpha}^{\beta} e^{-yx} dy \right) dx = \int_{\alpha}^{\beta} \left( \int_0^{+\infty} e^{-yx} dx \right) dy = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dy}{y} = \ln \frac{\beta}{\alpha}.$$

Bạn đọc tự kiểm tra điều kiện về đổi thứ tự lấy tích phân. ■

**Ví dụ 2.15 (Tích phân Gauss).**

$$G = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Đặt  $x = ut$  ta có

$$G = u \int_0^{+\infty} e^{-u^2 t^2} dt.$$

Ta có

$$\begin{aligned}
 G^2 &= G \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du \\
 &= \int_0^{+\infty} \left( u e^{-u^2} \int_0^{+\infty} e^{-u^2 t^2} dt \right) du \\
 &= \int_0^{+\infty} \left( \int_0^{+\infty} u e^{-(1+t^2)u^2} du \right) dt \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} \\
 &= \frac{\pi}{4}.
 \end{aligned}$$

Suy ra

$$G = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Bạn đọc tự kiểm tra điều kiện về đổi thứ tự lấy tích phân.

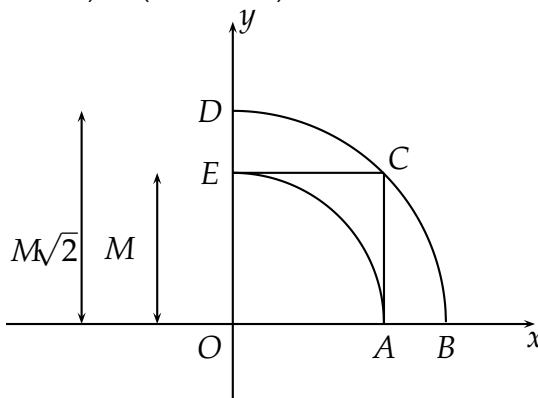
**Ví dụ 2.16.** Chứng minh công thức tích phân Gauss

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

bằng tích phân kép.

Lời giải. Đặt  $I_M = \int_0^M e^{-x^2} dx = \int_0^M e^{-y^2} dy$  ta có

$$I_M^2 = \left( \int_0^M e^{-x^2} dx \right) \left( \int_0^M e^{-y^2} dy \right) = \int_0^M \int_0^M e^{-(x^2+y^2)} dx dy.$$



Hình 2.16

Vì  $e^{-(x^2+y^2)} dx dy \geq 0$  nên

$$\int_{OAE} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \leq I_M^2 = \int_{OACE} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \leq \int_{OBD} e^{-(x^2+y^2)} dx dy.$$

Sử dụng tọa độ cực ta có

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^M e^{-r^2} r dr \leq I_M^2 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{M\sqrt{2}} e^{-r^2} r dr$$

hay là

$$\frac{\pi}{4}(1 - e^{-M^2}) \leq I_M^2 \leq \frac{\pi}{4}(1 - e^{-2M^2})$$

Cho  $M \rightarrow +\infty$  ta được

$$\frac{\pi}{4} \leq I^2 \leq \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \quad \blacksquare$$

**Ví dụ 2.17 (Tích phân Dirichlet).**

$$D = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Nhận xét

$$\frac{1}{x} = \int_0^{\infty} e^{-xt} dt,$$

ta có

$$\begin{aligned} D &= \int_0^{\infty} \sin x \left( \int_0^{\infty} e^{-xt} dt \right) dx \\ &= \int_0^{\infty} \left( \int_0^{\infty} e^{-xt} \sin x dx \right) dt \\ &= \int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} \\ &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

*Bạn đọc tự kiểm tra điều kiện về đổi thứ tự lấy tích phân.*

**Chú ý:** Bạn đọc có thể so sánh với một kết quả trong Giải tích III, đó là  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} = \frac{\pi-1}{2}$ .

**Ví dụ 2.18.** Áp dụng công thức tích phân Dirichlet, chứng minh rằng

$$a) \int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x} dx = \frac{\pi}{4}. \quad b) \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2} \quad c) \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}.$$

[Gợi ý]

a) Áp dụng công thức hạ bậc  $\sin^3 x = \frac{1}{4} \sin 3x + \frac{3}{4} \sin x$ .

b) Áp dụng công thức tích phân từng phần,

$$\int_{\epsilon}^M \frac{1-\cos x}{x^2} dx = \left(-\frac{1}{x}\right) (1-\cos x) \Big|_{\epsilon}^M + \int_{\epsilon}^M \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1-\cos \epsilon}{\epsilon} - \frac{1-\cos M}{M} + \int_{\epsilon}^M \frac{\sin x}{x} dx.$$

Cho  $\epsilon \rightarrow 0^+$  và  $M \rightarrow +\infty$  ta được

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1-\cos \epsilon}{\epsilon} = 0, \quad \lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{1-\cos M}{M} = 0$$

Do đó,

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

c) Hơn nữa,

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2} dx = 2 \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2} du.$$

**Ví dụ 2.19 (Tích phân Fresnel).**

$$I = \int_0^{\infty} \sin(x^2) dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad J = \int_0^{\infty} \cos(x^2) dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Đổi biến  $x^2 = t$  ta có

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt, \quad J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt.$$

Từ công thức tích phân Gauss  $\int_0^{\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  suy ra

$$\frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-tu^2} du.$$

Ta có

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \sin t \int_0^{\infty} e^{-tu^2} du \\
 &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} du \int_0^{\infty} e^{-tu^2} \sin t dt \\
 &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{du}{1+u^2} \\
 &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \\
 &= \sqrt{\frac{\pi}{2}}.
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Kết luận

$$I = J = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

*Bạn đọc tự kiểm tra điều kiện về đổi thứ tự lấy tích phân.*

## 2.2 Bài tập

**Dạng 1. Tính tích phân suy rộng phụ thuộc tham số bằng cách đổi thứ tự lấy tích phân**

Giả sử cần tính  $I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ .

**B1.** Biểu diễn  $f(x, y) = \int_c^d F(x, y) dy$ .

**B2.** Sử dụng tính chất đổi thứ tự lấy tích phân:

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} \left( \int_c^d F(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left( \int_a^{+\infty} F(x, y) dx \right) dy.$$

**Dạng 2. Tính tích phân suy rộng phụ thuộc tham số bằng cách đạo hàm qua dấu tích phân.**

Giả sử cần tính  $I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ .

**B1.** Tính  $I'(y)$  bằng cách  $I'(y) = \int_a^{+\infty} f'_y(x, y) dx$ .

**B2.** Dùng công thức Newton-Leibniz để khôi phục  $I(y)$  bằng cách  $I(y) = \int I'(y) dy + C$ .

**B3.** Cho một giá trị đặc biệt của  $y$  để xác định  $C$ .

**Chú ý:** Phải kiểm tra các điều kiện đổi thứ tự lấy tích phân trong Định lý 3.19 hoặc chuyển dấu đạo hàm qua tích phân trong Định lý 3.18.

**Bài tập 3.5.** Tính  $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} dx$ ,  $(\alpha, \beta > 0)$ .

*Lời giải.* **Cách 1: Đổi TT lấy TP**

Ta có:

$$\begin{aligned} & \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \left( F(x, y) := \frac{e^{-yx}}{x} \right) \\ &= F(x, \alpha) - F(x, \beta) \\ &= \int_{\beta}^{\alpha} F'_y(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} e^{-yx} dy. \end{aligned}$$

nên

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \left( \int_{\alpha}^{\beta} e^{-yx} dy \right) dx \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \left( \int_0^{+\infty} e^{-yx} dx \right) dy \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dy}{y} = \ln \frac{\beta}{\alpha}. \end{aligned}$$

Kiểm tra điều kiện chuyển đạo hàm qua dấu tích phân.

Với  $f(x, \alpha) = \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x}$  ta có:

- 1)  $f(x, \alpha) = \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x}$  liên tục theo  $x$  trên  $[0, +\infty)$  với mỗi  $\alpha, \beta > 0$ .
- 2)  $f'_\alpha(x, \alpha) = -e^{-\alpha x}$  liên tục trên  $[0, +\infty) \times (0, +\infty)$ .
- 3)  $\int_0^{+\infty} f'_\alpha(x, \alpha) dx = \int_0^{+\infty} -e^{-\alpha x} dx = -\frac{1}{\alpha}$  hội tụ đều đối với  $\alpha$  trên mỗi khoảng  $[\varepsilon, +\infty)$  theo

tiêu chuẩn Weierstrass, thật vậy,  $|-e^{-\alpha x}| \leq e^{-\varepsilon x}$ , mà  $\int_0^{+\infty} e^{-\varepsilon x} dx = \frac{1}{\varepsilon}$  hội tụ.

Bạn đọc tự kiểm tra điều kiện về đổi thứ tự lấy tích phân. ■

**Cách 2: Đạo hàm qua dấu TP**

$$\text{Đặt } I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} dx.$$

$$\begin{aligned} I'(\alpha) &= \int_0^{+\infty} f'_\alpha(x, \alpha) dx \\ &= \int_0^{+\infty} -e^{-\alpha x} dx \\ &= -\frac{1}{\alpha}. \end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned} I(\alpha) &= \int I'(\alpha) d\alpha \\ &= -\ln \alpha + C. \end{aligned}$$

Mặt khác,  $I(\beta) = 0$  nên  $C = \ln \beta$ .

Kết luận

$$I = \ln \frac{\beta}{\alpha}.$$



**Bài tập 3.6.** Tính  $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x^2} dx, (\alpha, \beta > 0).$

*Lời giải.* **Cách 1: Đổi TT lấy TP.**

$$\begin{aligned} & \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x^2} \quad \left( F(x, y) := \frac{e^{-yx^2}}{x^2} \right) \\ &= F(x, \alpha) - F(x, \beta) \\ &= \int_{\beta}^{\alpha} F'_y(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} e^{-yx^2} dy. \end{aligned}$$

nên:

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x^2} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \left( \int_{\alpha}^{\beta} e^{-x^2 y} dy \right) dx \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \left( \int_0^{+\infty} e^{-x^2 y} dx \right) dy \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{y}} dy = \sqrt{\pi} (\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha}) \end{aligned}$$

Kiểm tra điều kiện chuyển đạo hàm qua dấu tích phân.

Với  $f(x, \alpha) = \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x^2}$  ta có:

- 1)  $f(x, \alpha) = \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x^2}$  liên tục theo  $x$  trên  $[0, +\infty)$  với mỗi  $\alpha, \beta > 0$ .
- 2)  $f'_\alpha(x, \alpha) = -e^{-\alpha x^2}$  liên tục trên  $[0, +\infty) \times (0, +\infty)$ .
- 3)  $\int_0^{+\infty} f'_\alpha(x, \alpha) dx = \int_0^{+\infty} -e^{-\alpha x^2} dx \stackrel{x\sqrt{\alpha}=y}{=} - \int_0^{+\infty} e^{-y^2} \frac{dy}{\sqrt{\alpha}} = -\frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$  hội tụ đều theo  $\alpha$  trên

$[\varepsilon, +\infty)$  theo tiêu chuẩn Weierstrass, thật vậy,  $|-e^{-\alpha x^2}| \leq e^{-\varepsilon x^2}$  mà  $\int_0^{+\infty} e^{-\varepsilon x^2} dx$  hội tụ.

Trong chứng minh trên ta đã sử dụng công thức  $\int_0^{+\infty} e^{-x^2 y} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{y}}.$

Bạn đọc tự kiểm tra điều kiện về đổi thứ tự lấy tích phân. ■

**Cách 2: Đạo hàm qua dấu TP.**

$$\text{Đặt } I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x^2} dx.$$

Ta có

$$\begin{aligned} I'(\alpha) &= \int_0^{+\infty} f'_\alpha(x, \alpha) dx \\ &= \int_0^{+\infty} -e^{-\alpha x^2} dx \\ &= -\frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \\ \Rightarrow I(\alpha) &= \int I'(\alpha) d\alpha \\ &= -\sqrt{\pi} \cdot \sqrt{\alpha} + C. \end{aligned}$$

Mặt khác,  $I(\beta) = 0$  nên  $C = \sqrt{\pi} \cdot \sqrt{\beta}.$

**Kết luận**

$$I(\alpha) = \sqrt{\pi} (\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha}).$$

**Bài tập 3.7.** Tính  $\int_0^{+\infty} e^{-ax} \frac{\sin bx - \sin cx}{x} dx, (a > 0).$

Lời giải.

**Cách 1: Đổi TT lấy TP**

Ta có:

$$\begin{aligned} & e^{-ax} \frac{\sin bx - \sin cx}{x} \\ &= F(x, b) - F(x, c) \quad \left( F(x, y) = \frac{e^{-ax} \sin yx}{x} \right) \\ &= \int_c^b F'_y(x, y) dy = \int_c^b e^{-ax} \cos yx dx. \end{aligned}$$

nên

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{+\infty} \left( \int_c^b e^{-ax} \cos yx dy \right) dx \\ &= \int_c^b \left( \int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos yx dx \right) dy \\ &= \int_c^b \frac{a}{a^2 + y^2} dy \\ &= \arctan \frac{b}{a} - \arctan \frac{c}{a}. \end{aligned}$$

**Cách 2: Đạo hàm qua dấu TP**

$$\text{Đặt } I(b) = \int_0^{+\infty} e^{-ax} \frac{\sin bx - \sin cx}{x} dx. \text{ Ta có}$$

$$I'_b(x, b) = \int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos bx = \frac{a}{a^2 + b^2},$$

nên

$$I = \int \frac{a}{a^2 + b^2} db = \arctan \frac{b}{a} + C.$$

Mặt khác  $I(c) = 0$  nên  $C = -\arctan \frac{c}{a}$ .

Kết luận

$$I = \arctan \frac{b}{a} - \arctan \frac{c}{a}.$$

Kiểm tra điều kiện chuyển đạo hàm qua dấu tích phân.

Với  $f(x, b) = e^{-ax} \frac{\sin bx - \sin cx}{x}$  ta có

1.  $f(x, b) = e^{-ax} \frac{\sin bx - \sin cx}{x}$  liên tục theo  $x$  trên  $[0, +\infty)$  với mỗi  $a, b, c > 0$ .
2.  $f'_b(x, b) = e^{-ax} \cos bx$  liên tục trên  $[0, +\infty) \times (0, +\infty)$ .
- 3.

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} f'_b(x, b) dx &= \int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos bx = \left( -\frac{a}{a^2 + b^2} e^{-ax} \cos bx + \frac{b}{a^2 + b^2} e^{-ax} \sin bx \right) \Big|_0^{+\infty} \\ &= \frac{a}{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

hội tụ đều theo  $b$  trên mỗi  $(0, +\infty)$  theo tiêu chuẩn Weierstrass, thật vậy,

$$|e^{-ax} \cos bx| \leq e^{-ax^2} \text{ mà } \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} dx \text{ hội tụ.}$$

Trong chứng minh trên ta đã sử dụng công thức

$$\int e^{-ax} \cos yx dx = -\frac{a}{a^2 + y^2} e^{-ax} \cos yx + \frac{y}{a^2 + y^2} e^{-ax} \sin yx,$$

nên  $\int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos yx dx = \frac{a}{a^2 + y^2},$

Bạn đọc tự kiểm tra điều kiện về đối thứ tự lấy tích phân. ■

**Bài tập 3.8.** Một cách tương tự như Bài tập 3.7, tính

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax} \frac{\cos bx - \cos cx}{x}, \quad (a > 0).$$

[Đáp số]  $I = \frac{1}{2} \ln \frac{a^2 + c^2}{a^2 + b^2}.$

**Hệ quả 3.1.**

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos bx - \cos cx}{x} = \ln \frac{c}{b}.$$

**Bài tập 3.9.** Tính  $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos(yx) dx.$

*Lời giải.* Đặt  $I(y) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos(yx) dx, f(x, y) = e^{-x^2} \cos(yx).$  Ta có:

- 1)  $f(x, y)$  liên tục trên  $[0, +\infty) \times (-\infty, +\infty).$
- 2)  $f'_y(x, y) = -xe^{-x^2} \sin yx$  liên tục trên  $[0, +\infty) \times (-\infty, +\infty).$
- 2)

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} f'_y(x, y) dx &= \int_0^{+\infty} -xe^{-x^2} \sin yx dx = \frac{1}{2} e^{-x^2} \sin yx \Big|_0^{+\infty} - \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} ye^{-x^2} \cos yx dx \\ &= -\frac{y}{2} I(y) \end{aligned}$$

hội tụ đều theo tiêu chuẩn Weierstrass, thật vậy,

$$|f'_y(x, y)| \leq xe^{-x^2}, \text{ mà } \int_0^{+\infty} xe^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \text{ hội tụ.}$$

Do đó theo Định lý 3.18,  $\frac{I'(y)}{I(y)} = -\frac{y}{2} \Rightarrow I = Ce^{-\frac{y^2}{4}}.$

Mà  $I(0) = C = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  nên  $I(y) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{y^2}{4}}.$  ■

## 2.3 Một số tích phân quan trọng

### Tích phân Dirichlet

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

### Tích phân Gauss

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

### Tích phân Fresnel

$$\int_0^{\infty} \sin(x^2) dx = \int_0^{\infty} \cos(x^2) dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

## 2.4 Bài tập ôn tập

**Bài tập 3.10.** [Giữa kì, K62] Tính các tích phân

a)  $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x} dx$  với  $a, b > 0$ .

b)  $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax^3} - e^{-bx^3}}{x} dx$  với  $a, b > 0$ .

**Bài tập 3.11.** Tính các tích phân sau

a)  $\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax^2} - \cos bx}{x^2} dx, (a > 0)$

e)  $\int_0^{\infty} e^{-ax^2} \cos bxdx (a > 0),$

b)  $\int_0^{\pi} \ln(1 + y \cos x) dx,$

f)  $\int_0^{\infty} x^{2n} e^{-x^2} \cos bxdx, n \in \mathbb{N}.$

c)  $\int_0^{\infty} e^{-x^2} \sin ax dx,$

g)  $\int_0^{\infty} \frac{\sin ax \cos bx}{x} dx,$

d)  $\int_0^{\infty} \frac{\sin xy}{x} dx, y \geq 0,$

h)  $\int_0^{\infty} \frac{\sin ax \sin bx}{x} dx.$

[Gợi ý]

a) Đặt  $I(a) = \int_0^\infty \frac{e^{-ax^2} - \cos bx}{x^2} dx$  và sử dụng công thức đạo hàm qua dấu tích phân. Chú ý rằng  $I(0) = \int_0^\infty \frac{1 - \cos bx}{x^2} dx = b \int_0^\infty \frac{1 - \cos bx}{(bx)^2} dbx = \frac{b\pi}{2}$ .

b) Đặt  $I(y) = \int_0^\pi \ln(1 + y \cos x) dx$  và sử dụng công thức đạo hàm qua dấu tích phân.

c) Đặt  $I(a) = \int_0^\infty e^{-x^2} \sin ax dx$  và sử dụng công thức đạo hàm qua dấu tích phân.

d) Sử dụng công thức tích phân Dirichlet.

e) Đặt  $I(b) = \int_0^\infty e^{-ax^2} \cos bxdx$  và sử dụng công thức đạo hàm qua dấu tích phân.

f) Đặt  $I_n(b) = \int_0^\infty x^{2n} e^{-x^2} \cos bxdx$  và sử dụng công thức đạo hàm qua dấu tích phân để ra công thức truy hồi.

g) Sử dụng công thức biến đổi tích thành tổng và tích phân Dirichlet.

h) Sử dụng công thức biến đổi tích thành tổng và Hệ quả 3.1.

### Bài tập 3.12. Chứng minh rằng

$$\text{a) } \int_0^\infty \frac{\sin yx}{x(1+x^2)} dx = \frac{\pi}{2}(1 - e^{-y}), \quad y \geq 0. \quad \text{c) } \int_0^\infty \frac{x \sin yx}{a^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{2}e^{-ay}, \quad a, y \geq 0.$$

$$\text{b) } \int_0^\infty \frac{1 - \cos yx}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}|y|. \quad \text{d) } \int_0^\infty e^{-yx^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{y}}, \quad y > 0.$$

### Bài tập 3.13. Sử dụng công thức

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2a},$$

tính

$$I_n = \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}.$$

### Bài tập 3.14. Chứng minh rằng

$$\text{a) } I(y) = \int_0^{+\infty} e^{-yx} \frac{\sin x}{x} \text{ hội tụ đều trên } [0, +\infty).$$

b)  $I(y) = \frac{\pi}{2} - \arctan y.$

**Bài tập 3.15.** Chứng minh rằng

$$\int_0^{+\infty} \left( e^{-\frac{a}{x^2}} - e^{-\frac{b}{x^2}} \right) dx = \sqrt{\pi b} - \sqrt{\pi a}, \quad (a, b > 0).$$

**Bài tập 3.16.** Chứng minh rằng

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan \frac{x}{a} - \arctan \frac{x}{b}}{x} dx = \frac{\pi}{2} \ln \frac{b}{a}, \quad (a, b > 0).$$

**Bài tập 3.17.** a) Chứng minh rằng

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1 + \alpha^2 x^2)}{1 + x^2} dx = \pi \ln(1 + \alpha), \quad \alpha \geq 0.$$

b) Sử dụng câu a), chứng minh rằng

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin \theta) d\theta = -\frac{\pi}{2} \ln 2.$$

**Bài tập 3.18.** Chứng minh rằng  $\int_0^{\infty} \frac{\sin^4 x}{x^4} dx = \frac{\pi}{3}.$

**Bài tập 3.19.** Sử dụng tích phân Fresnel chứng minh rằng

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \sin(x^2 + y^2) dx dy = \frac{\pi}{4}.$$

**Bài tập 3.20.** Chứng minh rằng

$$I(y) = \int_0^{+\infty} e^{-(x-\frac{y}{x})^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Áp dụng, tính  $\int_0^{+\infty} e^{-(x^2+x^{-2})} dx.$

**Bài tập 3.21.** Chứng minh rằng  $I(y) = \int_0^{+\infty} y^2 x e^{-yx^2}$  không liên tục tại  $y = 0$ , nghĩa là

$$\lim_{y \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} y^2 x e^{-yx^2} \neq \int_0^{+\infty} \lim_{y \rightarrow 0} y^2 x e^{-yx^2}.$$

Hãy giải thích tại sao?

**Bài tập 3.22.** Chứng minh rằng  $I(y) = \int_0^{+\infty} y^2 x e^{-yx}$  không liên tục tại  $y = 0$ , nghĩa là

$$\lim_{y \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} y^2 x e^{-yx} \neq \int_0^{+\infty} \lim_{y \rightarrow 0} y^2 x e^{-yx}.$$

Hãy giải thích tại sao?

### §3. TÍCH PHÂN EULER

#### 3.1 Hàm Gamma

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx \text{ xác định trên } (0, +\infty).$$

Thật vậy,

$$\Gamma(p) = \int_0^1 x^{p-1} e^{-x} dx + \int_1^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx = I_1 + I_2.$$

- Với tích phân  $I_2$  ta so sánh với  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ . Ta có

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x^{p-1} e^{-x} : \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{1+p}}{e^x} = 0,$$

mà  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$  hội tụ nên  $I_2$  hội tụ. Thậm chí, tích phân  $I_2$  hội tụ với mọi  $p \in \mathbf{R}$ .

- Với tích phân  $I_1$  thì nếu  $p \geq 1$  ta có  $I_1$  thực chất là tích phân xác định. Còn nếu  $0 < p < 1$  thì ta so sánh  $I_1$  với  $\int_0^1 \frac{dx}{x^{1-p}}$ . Ta có

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( x^{p-1} e^{-x} : \frac{1}{x^{1-p}} \right) = 1,$$

mà  $\int_0^1 \frac{dx}{x^{1-p}}$  hội tụ nên  $I_1$  cũng hội tụ. Nếu  $p < 0$  thì  $\int_0^1 \frac{dx}{x^{1-p}}$  phân kì nên  $I_1$  sẽ phân kì.

#### Các tính chất

1. Hạ bậc:  $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$ . Công thức này có thể chứng minh một cách dễ dàng bằng tích phân từng phần. Thật vậy,

$$\Gamma(p+1) = \int_0^{+\infty} x^p e^{-x} dx = - \int_0^{+\infty} x^p d(e^{-x}) = -x^p e^{-x} \Big|_0^{+\infty} + p \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx = p\Gamma(p).$$

**Ý nghĩa:** Để nghiên cứu  $\Gamma(p)$  ta chỉ cần nghiên cứu  $\Gamma(p)$  với  $0 < p \leq 1$  mà thôi, còn với  $p > 1$  chúng ta sẽ sử dụng công thức hạ bậc.

2. Đặc biệt,

- $\Gamma(1) = 1$  (tính trực tiếp) nên  $\Gamma(n) = (n-1)! \forall n \in \mathbf{N}$ .



- Từ công thức tích phân Gauss  $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  suy ra  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx = \sqrt{\pi}$ .  
Do đó,  $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\pi}$ .

3. Đạo hàm của hàm Gamma:  $\Gamma^{(k)}(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} (\ln^k x) \cdot e^{-x} dx$ .

4.  $\Gamma(p) \cdot \Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi} \forall 0 < p < 1$ .

## 3.2 Hàm Beta

**Dạng 1:**  $B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$ . Bằng cách đổi biến số  $x = \frac{t}{t+1}$  ta sẽ thu được:

**Dạng 2:**  $B(p, q) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}} dx$ .

**Ví dụ 3.20.** Biểu thị  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x dx$  qua hàm  $B(m, n)$ .

*Lời giải.* Đặt  $\sin x = \sqrt{t} \Rightarrow 0 \leq t \leq 1, \cos x dx = \frac{1}{2\sqrt{t}} dt$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x (1 - \sin^2 x)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \cos x dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^{\frac{m}{2}} (1-t)^{\frac{n-1}{2}} t^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2} B\left(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right) \end{aligned}$$

Từ ví dụ này ta suy ra:

**Dạng lượng giác:**  $B(p, q) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1} t \cos^{2q-1} t dt$ .

**Các tính chất:**

1. Tính đối xứng:  $B(p, q) = B(q, p)$ .

2. Hạ bậc:

$$\begin{cases} B(p, q) = \frac{p-1}{p+q-1} B(p-1, q), & \text{nếu } p > 1 \\ B(p, q) = \frac{q-1}{p+q-1} B(p, q-1), & \text{nếu } q > 1 \end{cases}$$

Ý nghĩa của công thức trên ở chỗ muốn nghiên cứu hàm beta ta chỉ cần nghiên cứu nó trong khoảng  $(0, 1] \times (0, 1]$  mà thôi.

3. Đặc biệt,  $B(1, 1) = 1$  nên

$$\begin{cases} B(m, n) = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}, \forall m, n \in \mathbb{N} \\ B(p, n) = \frac{(n-1)!}{(p+n-1)(p+n-2)\dots(p+1)p} B(p, 1) \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

4. Công thức liên hệ giữa hàm Beta và Gamma:  $B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ .

*Chứng minh.*

Ta có

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \int_0^{+\infty} t^{p-1} e^{-t} dt \int_0^{+\infty} s^{q-1} e^{-s} ds = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} t^{p-1} s^{q-1} e^{-(t+s)} dt ds.$$

Áp dụng công thức đổi biến  $t = xy$  và  $s = x(1-y)$  ta được

$$\begin{cases} 0 \leq t < +\infty, \\ 0 \leq s < +\infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq x < +\infty, \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}, J = \frac{D(t, s)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} y & x \\ 1-y & -x \end{vmatrix} = -x.$$

Do đó,

$$\begin{aligned} \Gamma(p)\Gamma(q) &= \int_0^1 \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{p-1} y^{p-1} x^{q-1} (1-y)^{q-1} x dx dy \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{p+q-1} dx \int_0^1 y^{p-1} (1-y)^{q-1} dy \\ &= \Gamma(p+q) B(p, q). \end{aligned}$$

5.  $B(p, 1-p) = \Gamma(p) \Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}$ .

**Ví dụ 3.21.** Chứng minh công thức liên hệ giữa hàm Beta và Gamma  $B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$  bằng tích phân kép.

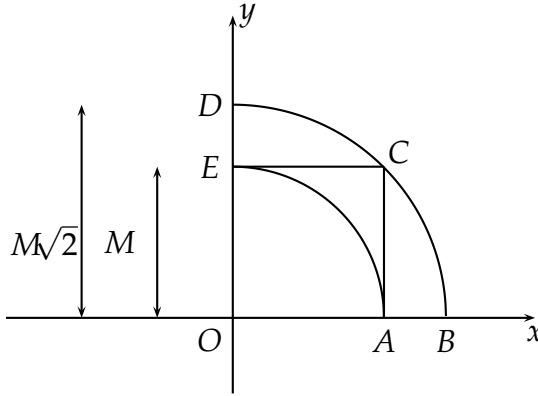
*Lời giải.* Xuất phát từ công thức  $\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$  thực hiện phép đổi biến  $x = t^2$  ta được

$$\Gamma(p) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-t^2} t^{2p-1} dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} x^{2p-1} dx.$$

Do đó,

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = 4 \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} x^{2p-1} y^{2q-1} dx dy.$$

Đặt  $I_M = \int_0^M \int_0^M e^{-(x^2+y^2)} x^{2p-1} y^{2q-1} dx dy$ . Ta có  $\lim_{M \rightarrow +\infty} = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{4}$ .



Hình 2.16

Ta có

$$\int_{OAE} e^{-(x^2+y^2)} x^{2p-1} y^{2q-1} dx dy \leq I_M \leq \int_{OBD} e^{-(x^2+y^2)} x^{2p-1} y^{2q-1} dx dy.$$

Thực hiện phép đổi biến số trong tọa độ cực  $\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$  ta có

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \varphi)^{2p-1} (\sin \varphi)^{2q-1} d\varphi \int_0^M r^{2p+2q-1} e^{-r^2} dr \\ & \leq I_M \leq \\ & \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \varphi)^{2p-1} (\sin \varphi)^{2q-1} d\varphi \int_0^{M\sqrt{2}} r^{2p+2q-1} e^{-r^2} dr. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Ta có

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \int_0^M r^{2p+2q-1} e^{-r^2} dr = \int_0^{+\infty} r^{2(p+q)-1} e^{-r^2} dr = \frac{\Gamma(p+q)}{2}$$

và

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \int_0^{M\sqrt{2}} r^{2p+2q-1} e^{-r^2} dr = \int_0^{+\infty} r^{2(p+q)-1} e^{-r^2} dr = \frac{\Gamma(p+q)}{2}.$$

Ngoài ra,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \varphi)^{2p-1} (\sin \varphi)^{2q-1} d\varphi = \frac{1}{2} B(p, q).$$

Cho  $M \rightarrow +\infty$  trong bất đẳng thức (3.2) ta được

$$\frac{1}{2}B(p, q) \frac{1}{2}\Gamma(p+q) \leq \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{4} \leq \frac{1}{2}B(p, q) \frac{1}{2}\Gamma(p+q).$$

Do đó,

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

■

### 3.3 Bài tập

#### Bài tập 3.23.

a)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x \cos^4 x dx.$

Lời giải. Ta có

$$I = \frac{1}{2}B\left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma(6)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(3 + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(2 + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(6)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{5!!}{2^3}\sqrt{\pi} \cdot \frac{3!!}{2^2}\sqrt{\pi}}{5!} = \frac{3\pi}{512}$$

b)  $\int_0^a x^{2n} \sqrt{a^2 - x^2} dx \quad (a > 0).$

Lời giải. Đặt  $x = a\sqrt{t} \Rightarrow dx = \frac{adt}{2\sqrt{t}}$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 a^{2n} t^n \cdot a(1-t)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{adt}{2\sqrt{t}} = \frac{a^{2n+2}}{2} \cdot \int_0^1 t^{n-\frac{1}{2}} (1-t)^{\frac{1}{2}} dt = \frac{a^{2n+2}}{2} B\left(n + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \\ &= \frac{a^{2n+2}}{2} \frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(n+2)} = \frac{a^{2n+2}}{2} \cdot \frac{\frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}}{(n+1)!} = \pi \frac{a^{2n+2}}{2} \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!} \end{aligned}$$

■

c)  $\int_0^{+\infty} x^{10} e^{-x^2} dx.$

Lời giải. Đặt  $x = \sqrt{t} \Rightarrow dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$

$$I = \int_0^{+\infty} t^5 e^{-t} \cdot \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} t^{\frac{9}{2}} e^{-t} dt = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{11}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{9!!\sqrt{\pi}}{2^5} = \frac{9!!\sqrt{\pi}}{2^6}.$$

d)  $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x^2)^2} dx.$

Lời giải. Đặt  $x^2 = t \Rightarrow 2x dx = dt$

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{1}{4}} \cdot \frac{dt}{2\sqrt{t}}}{(1+t)^2} = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{t^{-\frac{1}{4}} dt}{(1+t)^2} = \frac{1}{2} B(p, q) \text{ với } \begin{cases} p-1 = -\frac{1}{4} \\ p+q = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = \frac{3}{4} \\ q = \frac{5}{4} \end{cases} \quad \blacksquare$$

Vậy

$$I = \frac{1}{2} B\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{5}{4} - 1}{\frac{3}{4} + \frac{5}{4} - 1} B\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8} \cdot B\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8} \cdot \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}$$

e)  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^3} dx.$

Lời giải. Đặt  $x^3 = t \Rightarrow dx = \frac{1}{3} t^{-\frac{2}{3}} dt$

$$I = \frac{1}{3} \int_0^{+\infty} \frac{t^{-\frac{2}{3}} dt}{1+t} = \frac{1}{3} B\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3} \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

f)  $\int_0^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(1+x^n)^2} dx, \quad (2 < n \in \mathbb{N}).$

Lời giải. Đặt  $x^n = t \Rightarrow dx = \frac{1}{n} t^{\frac{1}{n}-1} dt$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{n+1}{n}} \cdot \frac{1}{n} t^{\frac{1}{n}-1} dt}{(1+t)^2} = \frac{1}{n} \int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{2}{n}}}{(1+t)^2} dt = \frac{1}{n} B\left(\frac{2}{n} + 1, 1 - \frac{2}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} \cdot \frac{\frac{2}{n}}{\left(\frac{2}{n} + 1\right) + \left(1 - \frac{2}{n}\right) - 1} B\left(\frac{2}{n}, 1 - \frac{2}{n}\right) = \frac{2}{n^2} \frac{\pi}{\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

g)  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[n]{1-x^n}} dx, \quad n \in \mathbb{N}^*.$

Lời giải. Đặt  $x^n = t \Rightarrow dx = \frac{1}{n} t^{\frac{1}{n}-1} dt$

$$I = \int_0^1 \frac{\frac{1}{n} t^{\frac{1}{n}-1} dt}{(1-t)^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n} \int_0^1 t^{\frac{1}{n}-1} \cdot (1-t)^{-\frac{1}{n}} dt = \frac{1}{n} B\left(\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{n}}$$

**Bài tập 3.24.** Chứng minh công thức Jacobi

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

[Gợi ý] Viết

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-y} y^{p-1} dy, \Gamma(q) = \int_0^\infty e^{-x} x^{q-1} dx.$$

Nên

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x-y} x^{q-1} y^{p-1} dx dy.$$

Thực hiện phép đổi biến số  $x = u(v-1)$ ,  $y = uv$  để suy ra

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \Gamma(p+q)B(p, q).$$

**Bài tập 3.25.** [Cuối kì, K62] Tính các tích phân

$$\text{a) } \int_0^{+\infty} \frac{x^4}{(1+x^3)^2} dx,$$

$$\text{b) } \int_0^{+\infty} \frac{x^7}{(1+x^6)^2} dx.$$

### 3.4 Đọc thêm: Tích phân Euler và Phép tính vi tích phân cấp phân số

Chúng ta biết rằng đạo hàm cấp  $n$  của một hàm số

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n}$$

đòi hỏi cấp của đạo hàm phải là một số tự nhiên, i.e.,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Bạn đã bao giờ nghe nói đến đạo hàm cấp  $\frac{1}{2}$  của hàm số  $f(x)$ ? Vào năm 1695, trong một cuộc thảo luận giữa Leibniz và L'Hospital, L'Hospital đã hỏi Leibniz, "... and what if  $n$  be  $\frac{1}{2}$ ". Leibniz đã trả lời rằng "It will lead to a paradox, from which one day useful consequences will be drawn." Đây là sự khởi đầu cho phép tính vi tích phân cấp phân số ra đời. Ý tưởng là mở rộng khái niệm đạo hàm và tích phân cấp  $n \in \mathbf{N}$  cho cấp  $s \in \mathbf{R}$  tùy ý. Việc này khởi đầu bằng các công trình của Euler khi vào năm 1729 ông đưa ra hàm Gamma

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} t^{p-1} e^{-t} dt \Rightarrow \Gamma(n) = (n-1)!$$

Một năm sau (1730), ông đã công bố một số ý tưởng ban đầu cho việc định nghĩa đạo hàm cấp phân số như sau.

- Trước hết, xét đạo hàm cấp  $n$  của hàm số  $f(x) = x^m$ ,

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n} = \begin{cases} \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n}, & \text{nếu } m \geq n, \\ 0, & \text{nếu } m < n. \end{cases}$$

Sử dụng hàm Gamma để mở rộng cho  $s, \mu \in \mathbf{R}_{\geq 0}$ .

$$f(x) = x^\mu \Rightarrow D^s f = \frac{d^s f}{dx^s} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-s+1)} x^{\mu-s}.$$

- Bạn đọc có thể kiểm tra tính chất sau của đạo hàm cấp phân số

$$D^s D^t f = D^{s+t} f \Rightarrow D^s D^t f = D^t D^s f.$$

- Công việc tiếp theo là dùng tính chất tuyến tính của đạo hàm cấp phân số để định nghĩa đạo hàm cấp phân số cho các hàm đa thức  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ . Rồi sau đó mở rộng cho một hàm giải tích bất kì dựa vào khai triển Maclaurin của nó

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Tiếp theo các công trình của Euler là các đóng góp của Riemann và Liouville. Ta biết rằng hàm tích phân

$$J^1 f(x) = \int_a^x f(t) dt = \frac{1}{(1-1)!} \int_a^x (x-t)^{1-1} f(t) dt.$$

thỏa mãn tính chất  $\frac{d}{dx} (J^1 f(x)) = f(x)$ . Công thức này có thể mở rộng cho cấp  $n$  (thường được gọi là công thức Cauchy) như sau

$$J^n f(x) = \int_a^x \int_a^{x_1} \dots \int_a^{x_{n-1}} f(x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt.$$

Nghĩa là, tích phân cấp  $n \in \mathbf{N}$  của hàm số  $f(x)$  được định nghĩa như sau:

$$J^n f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt.$$

Mở rộng kết quả này cho cấp  $\alpha > 0$  ta được

$$J^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad x > 0.$$

Sau khi đã định nghĩa được tích phân cấp  $\alpha > 0$  của hàm số  $f(x)$ , ta định nghĩa đạo hàm cấp  $\alpha$  của nó với  $n - 1 < \alpha \leq n$  như là đạo hàm cấp  $n$  của tích phân cấp  $n - \alpha$ :

$$D^\alpha f(x) := D^n J^{n-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} D^n \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t) dt.$$

Nếu  $0 < \alpha \leq 1$ , thì

$$D^\alpha f(x) := D^1 J^{1-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \left( \int_a^x (x-t)^{-\alpha} f(t) dt \right).$$

Nói riêng, đạo hàm cấp  $\frac{1}{2}$  được định nghĩa như sau

$$D^{\frac{1}{2}} f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx} \left( \int_a^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}} dt \right).$$

**Chú ý 3.10.** • Đạo hàm cấp phân số của tại điểm  $x$  phụ thuộc vào tất cả các giá trị của hàm  $f$  trong khoảng từ  $a$  đến  $x$ . Điều này là khác so với khái niệm đạo hàm theo nghĩa cổ điển, khi mà giá trị của đạo hàm chỉ phụ thuộc một cách địa phương tại điểm mà hàm số đó lấy đạo hàm.

• Riemann và Liouville phát triển lý thuyết này một cách độc lập. Liouville công bố các công trình của mình vào khoảng 1832 và sử dụng  $a = -\infty$ , trong khi đó Riemann công bố các công trình của mình vào khoảng 1848 khi ông thậm chí vẫn còn là sinh viên và sử dụng  $a = 0$ . Nếu không chú thích gì thêm thì  $a = 0$  thường được chọn để làm định nghĩa cho đạo hàm và tích cấp phân số Riemann-Liouville.

• Chọn  $a = 0$  và quay trở lại trường hợp  $f(x) = x^\mu$  của Euler:

$$D^s f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-s)} D^n \int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1} t^\mu dt = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-s+1)} x^{\mu-s}.$$

Như vậy, đạo hàm Riemann-Liouville cấp phân số đã mở rộng các kết quả của Euler.

• Chọn  $a = -\infty$  thì ta có

$$J^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} f(x-t) dt \quad (\text{đổi biến } t \mapsto x-t).$$



Khi đó, nếu  $f(x) = e^{ax}$  thì

$$\begin{aligned}
 J^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{a(x-t)} dt \\
 &= e^{ax} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-at} dt \\
 &= a^{-\alpha} e^{ax} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt \\
 &= a^{-\alpha} e^{ax}.
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Một cách tương tự,

$$D^\alpha f(x) = a^\alpha e^{ax}.$$

- Thuật ngữ đạo hàm (tích phân) cấp phân số (fractional derivatives, fractional integrals, fractional calculus) có lẽ xuất phát từ yếu tố lịch sử của nó, khi mà Euler phát triển khái niệm này cho  $\alpha = \frac{1}{2}$ . Tuy rằng sau này, đạo hàm cấp  $\alpha$  có thể được định nghĩa cho  $\alpha > 0$  bất kì, thuật ngữ đạo hàm cấp phân số tiếp tục được sử dụng cho đến ngày nay.

**Ví dụ 3.22.**

$$f(x) = 1 = x^0 \Rightarrow \frac{d^{\frac{1}{2}} f}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{\Gamma(0+1)}{\Gamma(0-\frac{1}{2}+1)} x^{0-\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Chú ý rằng trong ví dụ trên, đạo hàm cấp phân số của một hàm số hằng không nhất thiết bằng 0!!!

Một cách định nghĩa khác của đạo hàm cấp phân số, được đưa ra bởi Caputo, như sau:

$$D_*^\alpha f(x) := J^{n-\alpha} D^n f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(u)}{(t-u)^{\alpha+1-n}} du,$$

tức là nó bằng tích phân cấp  $n - \alpha$  của đạo hàm cấp  $n$ .

**Ví dụ 3.23 (Bài toán tautochrone).** Tìm đường đi  $C$  sao cho dù đặt viên bi ở đâu trên  $C$  thì nó cũng mất một khoảng thời gian như nhau để lăn về đáy (giả thiết ma sát bằng không).

**Lời giải của Abel.**



- Từ định luật bảo toàn năng lượng,

$$\frac{1}{2}m \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 = mg(y_0 - y) \Rightarrow dt = -\frac{1}{\sqrt{2g(y_0 - y)}} \frac{ds}{dy} dy,$$

ở đó  $s$  là độ dài cung và  $y$  là chiều cao.

- Thời gian để vật lăn về đáy là

$$T = \int_0^{y_0} (y_0 - y)^{-\frac{1}{2}} f(y) dy, \quad \left( \text{ở đó } f(y) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \frac{ds}{dy} \right).$$

Chú ý rằng chúng ta mong muốn  $T$  là một hằng số, và đây chính là  $\Gamma(\frac{1}{2})$  lần tích phân cấp  $\frac{1}{2}$  của hàm số  $f$ .

- Tác động tích phân cấp  $\frac{1}{2}$ ,  $J^{\frac{1}{2}}$ , vào hai vế của phương trình trên ta được

$$J^{\frac{1}{2}} T = \sqrt{\pi} J^{\frac{1}{2}} J^{\frac{1}{2}} f(y_0) = \sqrt{\pi} J^1 f(y_0).$$

- Lấy đạo hàm hai vế ta được

$$f(y_0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dy_0} \int_0^{y_0} (y_0 - y)^{-\frac{1}{2}} T dy = D^{\frac{1}{2}} T.$$

- Công việc tiếp theo là đi tính đạo hàm cấp  $\frac{1}{2}$  của hàm hằng số  $T$ :

$$D^{\frac{1}{2}} T = T \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dy_0} \int_0^{y_0} (y_0 - y)^{-\frac{1}{2}} dy = \frac{2T}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dy_0} \sqrt{y_0} = \frac{T}{\sqrt{\pi y_0}}.$$

Vậy

$$f(y_0) = \frac{T}{\sqrt{\pi y_0}}.$$

- Nhớ lại rằng  $f(y) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \frac{ds}{dy}$ , ta có

$$\frac{ds}{dy} = T \frac{\sqrt{2g}}{\pi} \frac{1}{\sqrt{y}}.$$

Đây chính là phương trình của đường cong cycloid (ở đây ta đã đổi  $y_0$  thành  $y$ ).

Thật vậy, bạn đọc có thể kiểm ra dễ dàng rằng đường cong cycloid có phương trình

$$\text{tham số } \begin{cases} x = a(1 - \cos t), \\ y = a(t - \sin t) \end{cases} \quad \text{thỏa mãn}$$

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dy} &= \frac{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt}{y'(t) dt} \\ &= \frac{a\sqrt{\sin^2 t + (1 - \cos t)^2}}{a(1 - \cos t)} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 - \cos t}} \\ &= \frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{y}} \quad \left( \text{nếu vậy } T \frac{\sqrt{2g}}{\pi} = \sqrt{2a} \right). \end{aligned}$$

Điều này, về sau được nhà Vật lý người Hà Lan Huyghens ứng dụng để phát minh ra đồng hồ quả lắc. Ông là người đầu tiên tìm ra công thức toán học

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

ở đó  $T$  là chu kỳ dao động của quả lắc,  $l$  là độ dài của quả lắc và  $g$  là gia tốc trọng trường.



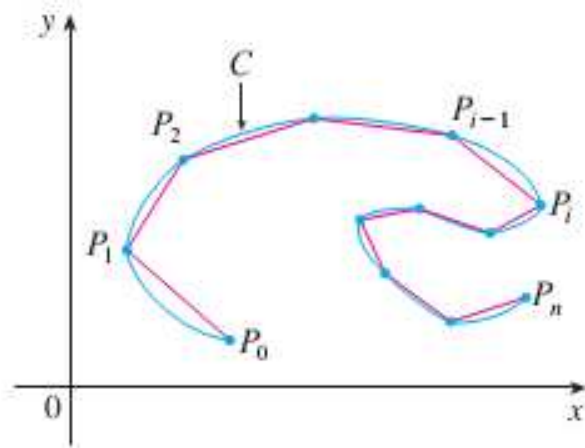
# CHƯƠNG 4

## TÍCH PHÂN ĐƯỜNG

### §1. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI I

#### 1.1 Định nghĩa và tính chất

Bài toán dẫn đến tích phân đường loại một



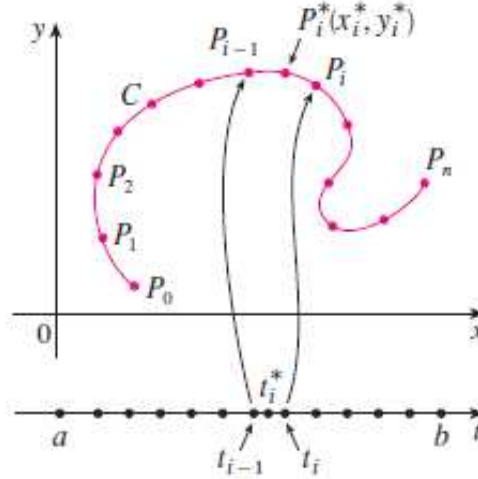
Cho  $C : x = x(t), y = y(t), a \leq t \leq b$  là một đường cong và dọc theo  $C$  có phân phối một khối lượng vật chất với mật độ tại  $(x, y)$  là  $f(x, y)$ . Tính khối lượng của  $C$ .

#### Định nghĩa

Tích phân đường của hàm số  $f(x, y)$  được định nghĩa giống như tích phân xác định của hàm số một biến số  $f(x)$ , ngoại trừ việc thay vì lấy tích phân trên đoạn  $[a, b]$  ta lấy tích

phân dọc theo đường cong  $C$ . Cho hàm số  $f(x, y)$  xác định trên đường cong  $C$  có phương trình  $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}, a \leq t \leq b$ .

- Chia đoạn  $[a, b]$  thành  $n$  đoạn bằng nhau  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ . Khi đó,  $P_i(x_i, y_i)$  sẽ chia  $C$  thành  $n$  cung nhỏ.
- Chọn  $P_i^*(x_i^*, y_i^*)$  và lập tổng tích phân  $S_n = \sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*) \Delta s_i$ .



**Định nghĩa 4.12.** Tích phân đường loại một của hàm số  $f(x, y)$  dọc theo đường cong  $C$  là

$$\int_C f(x, y) ds = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*) \Delta s_i, \quad (4.1)$$

nếu giới hạn này tồn tại và không phụ thuộc vào cách chọn điểm  $P_i^*(x_i^*, y_i^*)$ .

Trong Chương 1, độ dài của cung  $C$  được tính theo công thức

$$l = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.$$

Một cách hoàn toàn tương tự, nếu hàm  $f(x, y)$  là liên tục, thì giới hạn (4.1) luôn luôn tồn tại, và

$$\int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt \quad (4.2)$$

hay là dưới dạng vectơ

$$\int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) |\mathbf{r}'(t)| dt. \quad (4.3)$$

**Tích phân đường dọc theo đường cong  $C$  ứng với  $x$  hoặc  $y$** 

Hai loại tích phân đường khác, thu được bằng cách thay thế  $\Delta s_i$  bởi  $\Delta x_i$  hoặc  $\Delta y_i$  (một dạng đặc biệt của tích phân đường loại II) được định nghĩa một cách tương tự như sau:

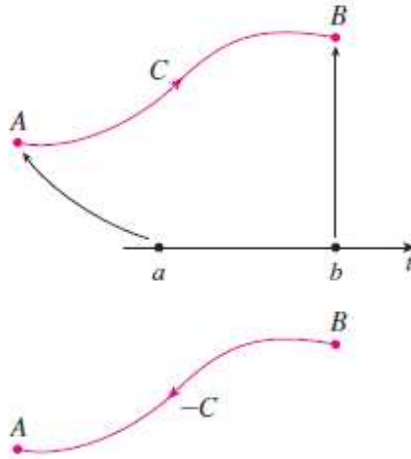
$$\int_C f(x, y) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*) \Delta x_i = \int_a^b f(x(t), y(t)) x'(t) dt, \quad (4.4)$$

$$\int_C f(x, y) dy = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*) \Delta y_i = \int_a^b f(x(t), y(t)) y'(t) dt. \quad (4.5)$$

**Chú ý 4.11.** Nói chung, phương trình vectơ  $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$ ,  $a \leq t \leq b$  của đường cong  $C$  xác định hướng dương của đường cong, tương ứng với chiều khi  $t$  tăng. Nếu ta kí hiệu  $-C$  vẫn là đường cong  $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$  nhưng theo hướng ngược lại, thì

$$\int_{-C} f(x, y) dx = - \int_C f(x, y) dx, \quad \int_{-C} f(x, y) dy = - \int_C f(x, y) dy.$$

Nghĩa là các tích phân đường  $\int_C f(x, y) dx$  và  $\int_C f(x, y) dy$  đổi dấu nếu ta đổi hướng của  $C$ .



Tuy nhiên, nếu tích phân đường này được lấy theo  $ds$  thay vì  $dx$  hay  $dy$  thì giá trị của tích phân không đổi khi ta đổi hướng của đường cong,

$$\int_{-C} f(x, y) ds = \int_C f(x, y) ds.$$

Lý do là  $\Delta s_i$  luôn luôn là một đại lượng dương, trong khi đó,  $\Delta x_i$  và  $\Delta y_i$  đổi dấu khi ta đổi hướng của đường cong.

### Các tính chất cơ bản

- Tích phân đường loại một không phụ thuộc vào hướng của cung  $C$ .
- Nếu cung  $C$  có khối lượng riêng tại  $M(x, y)$  là  $\rho(x, y)$  thì khối lượng của nó là  $\int_C \rho(x, y) ds$ , nếu tích phân đó tồn tại.

**Ví dụ 1.1 (Cuối kì, K62).** *Tính khối lượng của đường cong*  $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sqrt{2} \sin t, \end{cases}$  *biết*  $\frac{2\pi}{3} \leq t \leq \frac{5\pi}{6}$  *mật độ của nó tại điểm*  $(x, y)$  *là*  $\rho(x, y) = |xy|$ .

*Lời giải.*

$$\begin{aligned} m &= \sqrt{2} \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{6}} |\sin t \cos t| \sqrt{1 + \cos^2 t} dt \\ &= -\sqrt{2} \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{6}} \sin t \cos t \sqrt{1 + \cos^2 t} dt \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{6}} \sqrt{1 + \cos^2 t} d(1 + \cos^2 t) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{7\sqrt{7} - 5\sqrt{5}}{8}. \end{aligned}$$

- Chiều dài của cung  $C$  được tính theo công thức  $l = \int_C ds$ .
- Tích phân đường loại một có các tính chất giống như tích phân xác định như tính tuyến tính và tính cộng tính.

## 1.2 Các công thức tính tích phân đường loại I

1. Nếu  $C$  cho bởi phương trình  $x = x(t), y = y(t), a \leq t \leq b$ , thì

$$\int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt, \quad (4.6)$$



hay là dưới dạng véctơ

$$\int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) |\mathbf{r}'(t)| dt. \quad (4.7)$$

2. Nếu cung  $C$  cho bởi phương trình  $y = y(x)$ ,  $a \leq x \leq b$  thì

$$\int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + y'^2(x)} dx. \quad (4.8)$$

3. Nếu cung  $C$  cho bởi phương trình  $x = x(y)$ ,  $c \leq y \leq d$  thì

$$\int_C f(x, y) ds = \int_c^d f(x(y), y) \sqrt{1 + x'^2(y)} dy. \quad (4.9)$$

4. Nếu cung  $C$  cho bởi phương trình trong toạ độ cực  $r = r(\varphi)$ ,  $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$  thì coi nó như là phương trình dưới dạng tham số, ta được  $ds = \sqrt{r'^2(\varphi) + r^2(\varphi)} d\varphi$  và

$$\int_C f(x, y) ds = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(r(\varphi) \cos \varphi, r(\varphi) \sin \varphi) \sqrt{r'^2(\varphi) + r^2(\varphi)} d\varphi. \quad (4.10)$$

### 1.3 Tích phân đường trong không gian

Cho  $C$  là một đường cong trơn trong không gian cho bởi phương trình véctơ

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, a \leq t \leq b$$

và  $f(x, y, z)$  là một hàm số liên tục trên một miền nào đó của  $\mathbf{R}^3$  chứa  $C$ . Tích phân đường của hàm số  $f(x, y, z)$  dọc theo đường cong  $C$  được định nghĩa hoàn toàn tương tự như đã làm trong mặt phẳng

$$\int_C f(x, y, z) ds = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \Delta s_i = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt, \quad (4.11)$$

hay là dưới dạng véctơ

$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) |\mathbf{r}'(t)| dt. \quad (4.12)$$

Tích phân đường dọc theo  $C$  theo  $x, y$ , hoặc  $z$  cũng được định nghĩa tương tự

$$\int_C f(x, y, z) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \Delta x_i = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) x'(t) dt, \quad (4.13)$$

$$\int_C f(x, y, z) dy = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \Delta y_i = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) y'(t) dt, \quad (4.14)$$

$$\int_C f(x, y, z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \Delta z_i = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) z'(t) dt. \quad (4.15)$$

## 1.4 Bài tập

**Bài tập 4.1.** Tính  $\int_C (x - y) ds$ ,  $C$  là đường tròn có phương trình  $x^2 + y^2 = 2x$ .

Lời giải. Đặt  $\begin{cases} x = 1 + \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi$

$$I = \int_0^{2\pi} (1 + \cos t - \sin t) \sqrt{(-\sin t)^2 + \cos^2 t} dt = 2\pi$$

■

**Bài tập 4.2.** Tính  $\int_C y^2 ds$ ,  $C$  là đường cong  $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi, a > 0$ .

Lời giải.

$$\begin{cases} x'(t) = a(1 - \cos t) \\ y'(t) = a \sin t \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} = 2a \sin \frac{t}{2}$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos t)^2 \cdot 2a \sin \frac{t}{2} dt = \frac{256a^3}{15}.$$

**Bài tập 4.3.** Tính  $\int_C \sqrt{x^2 + y^2} ds$ ,  $C$  là đường  $\begin{cases} x = a(\cos t + t \sin t) \\ y = a(\sin t - t \cos t) \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi, a > 0$ .

Lời giải.

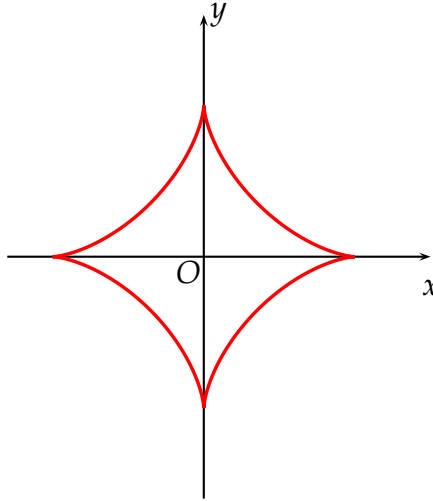
$$\begin{cases} x'(t) = at \cos t \\ y'(t) = at \sin t \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} = at$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 [(\cos t + t \sin t)^2 + (\sin t - t \cos t)^2]} \cdot at dt = \frac{a^3}{3} \left( \sqrt{(1 + 4\pi^2)^3} - 1 \right)$$

**Bài tập 4.4.** Tính tích phân đường

$$I = \int_L \left( x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}} \right) ds,$$

trong đó  $L$  là đường Astroid  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$  ( $a > 0$ ).



Hình 4.4

[Gợi ý] Tham số hóa đường cong  $\begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t, \end{cases} (0 \leq t \leq 2\pi, a > 0)$  và dựa vào tính đối xứng của đường cong và hàm dưới dấu tích phân để tính  $I$ . Đáp số:  $I = 4a^{\frac{7}{3}}$ .

**Bài tập 4.5.** Tính

$$I = \int_{\gamma} (x^2 + y^2 + z^2) ds,$$

trong đó  $\gamma$  là đường xoắn ốc cho bởi phương trình tham số

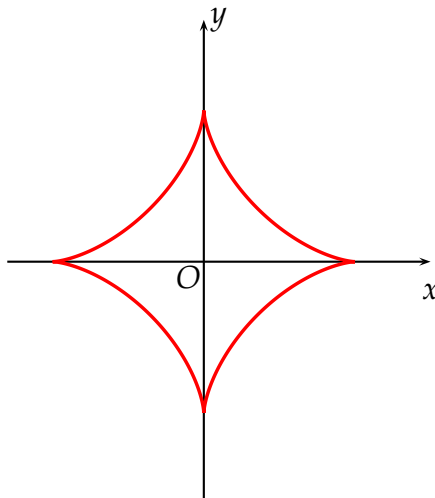
$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t, \\ z = bt, \end{cases} (0 \leq t \leq 2\pi, a, b > 0).$$

[Đáp số]  $I = 2\pi\sqrt{a^2 + b^2} \left( a^2 + \frac{4}{3}\pi^2 b^2 \right)$

## 1.5 Bài tập ôn tập

**Bài tập 4.6.** Tính độ dài các cung sau đây.

a)  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \ (a > 0).$



Hình 4.6a

b)  $y^2 = 2px, \ x \in [0, a], \ p > 0, a > 0.$

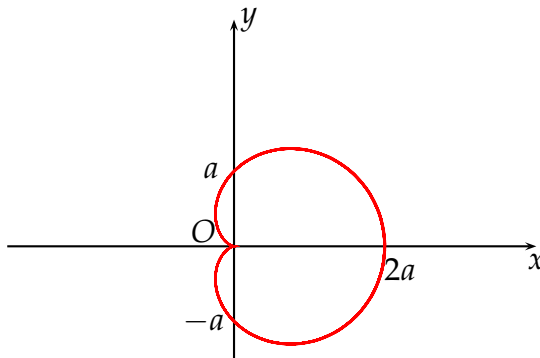
c)  $x = \cos^4 t, \ y = \sin^4 t.$

d)  $x = a(t - \sin t), \ y = a(1 - \cos t), \ (0 \leq t \leq 2\pi).$

**Bài tập 4.7.** Tính các tích phân đường loại I.

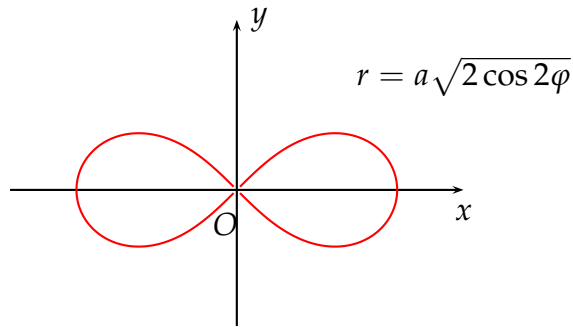
a)  $I = \int_L xy ds$ , trong đó  $L$  là cung ellip  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  nằm trong góc phần tư thứ nhất.

b)  $I = \int_L |y| ds$ , trong đó  $L$  là đường Cardioid  $r = a(1 + \cos \varphi) \ (a > 0).$



Hình 4.7b

c)  $I = \int_L |y| ds$ , trong đó  $L$  là cung Lemniscate  $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2).$



Hình 4.7c

d)  $I = \int_L \sqrt{x^2 + y^2} ds$ , trong đó  $L$  đường tròn  $x^2 + y^2 = ax$ .

e)  $I = \int_L x^2 ds$ , trong đó  $L$  là đường tròn  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x + y + z = 0$ .

**Bài tập 4.8 (Cuối kì, K62).** Tính các tích phân đường

a)  $\int_C (x + y) ds,$

b)  $\int_C (x - y) ds,$

ở đó  $C$  là đường tròn có phương trình  $x^2 + y^2 = 2y$ .

## §2. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI II

### 2.1 Định nghĩa và tính chất

#### Bài toán dẫn đến tích phân đường loại hai

Cho  $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$  là một trường lực biến đổi liên tục trên  $\mathbf{R}^2$ . Tính công thực hiện bởi lực này để di chuyển một hạt dọc theo đường cong  $C$ .

#### Định nghĩa

Cho hai hàm số  $P(x, y), Q(x, y)$  xác định trên cung  $C$  cho bởi phương trình véc tơ  $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}, a \leq t \leq b$ .

- Chia đoạn  $[a, b]$  thành  $n$  đoạn bằng nhau  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ . Khi đó,  $P_i(x_i, y_i)$  sẽ chia  $C$  thành  $n$  cung nhỏ.
- Chọn  $P_i^*(x_i^*, y_i^*)$  ứng với  $t_i^*$ . Khi đó, công thực hiện bởi lực  $\mathbf{F}$  để di chuyển hạt từ  $P_{i-1}$  đến  $P_i$  được xấp xỉ bởi

$$[\mathbf{F}(x_i^*, y_i^*) \cdot \mathbf{T}(t_i^*)] \Delta s_i,$$

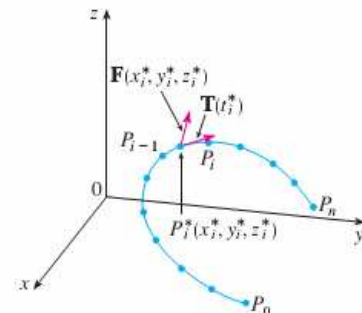
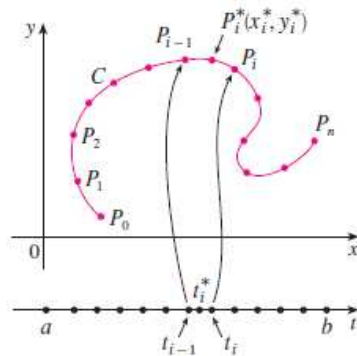
ở đó  $\mathbf{T}(t_i^*)$  là véc tơ tiếp tuyến đơn vị.

- Toàn bộ công sẽ được xấp xỉ bởi

$$\sum_{i=1}^n [\mathbf{F}(x_i^*, y_i^*) \cdot \mathbf{T}(t_i^*)] \Delta s_i.$$

- Xấp xỉ này càng tốt nếu ta chia đường cong  $C$  càng nhỏ, do đó, ta định nghĩa công thực hiện bởi lực  $\mathbf{F}$  là giới hạn

$$W = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n [\mathbf{F}(x_i^*, y_i^*) \cdot \mathbf{T}(t_i^*)] \Delta s_i = \int_C \mathbf{F}(x, y) \mathbf{T}(x, y) ds.$$



**Định nghĩa 4.13.** Cho  $\mathbf{F}$  là một trường véc tơ xác định trên đường cong  $C$  trơn cho bởi phương trình véc tơ  $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$ ,  $a \leq t \leq b$ . Tích phân đường loại II của  $\mathbf{F}$  dọc theo đường cong  $C$  là

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds.$$

**Chú ý 4.12.** Vì  $\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}$  và  $|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$  nên

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds = \int_a^b \mathbf{F}(x, y) \cdot \mathbf{T}(x, y) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt \\ &= \int_a^b \mathbf{F}(x, y) \cdot \mathbf{r}'(t) dt \\ &= \int_a^b (P(x(t), y(t)), Q(x(t), y(t))) \cdot (x'(t), y'(t)) dt \\ &= \int_a^b [P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)] dt \\ &= \int_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy \quad (\text{xem lại (4.4), (4.5)}). \end{aligned} \tag{4.16}$$

### Các tính chất cơ bản

- Mặc dù  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds$  và tích phân đường loại I không phụ thuộc vào hướng của đường cong, tích phân đường loại hai lại phụ thuộc vào hướng của đường cong,

$$\int_{-C} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = - \int_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$

Lý do là véc tơ tiếp tuyến đơn vị  $\mathbf{T}$  sẽ được thay thế bởi  $-\mathbf{T}$  nếu  $C$  được thay bởi  $-C$ .

- Tích phân đường loại hai có các tính chất giống như tích phân xác định, đó là tính chất tuyến tính và tích chất cộng tính.

## 2.2 Các công thức tính tích phân đường loại II

1. Nếu cung  $C$  được cho bởi phương trình  $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ , điểm đầu và điểm cuối tương ứng với  $t = a, t = b$  thì

$$\int_C Pdx + Qdy = \int_a^b [P(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + Q(x(t), y(t)) \cdot y'(t)] dt. \quad (4.17)$$

2. Nếu cung  $C$  được cho bởi phương trình  $y = y(x)$ , điểm đầu và điểm cuối ứng với  $x = a, x = b$  thì

$$\int_C Pdx + Qdy = \int_a^b [P(x, y(x)) + Q(x, y(x)) \cdot y'(x)] dx. \quad (4.18)$$

3. Nếu cung  $C$  được cho bởi phương trình  $x = x(y)$ , điểm đầu và điểm cuối ứng với  $y = c, y = d$  thì

$$\int_C Pdx + Qdy = \int_c^d [P(x(y), y) \cdot x'(y) + Q(x(y), y)] dy. \quad (4.19)$$

## 2.3 Tích phân đường trong không gian

Cho  $C$  là một đường cong trơn trong không gian cho bởi phương trình vectơ

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, a \leq t \leq b$$

và  $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$  là một trường vectơ liên tục trên một miền nào đó của  $\mathbf{R}^3$  chứa  $C$ . Tích phân đường của trường vectơ  $\mathbf{F}$  dọc theo đường cong  $C$  được định nghĩa hoàn toàn tương tự như đã làm trong mặt phẳng

$$\begin{aligned} & \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt \\ &= \int_a^b [P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t)] dt \\ &= \int_C Pdx + Qdy + Rdz \quad (\text{xem lại (4.13), (4.14), (4.15)}). \end{aligned} \quad (4.20)$$



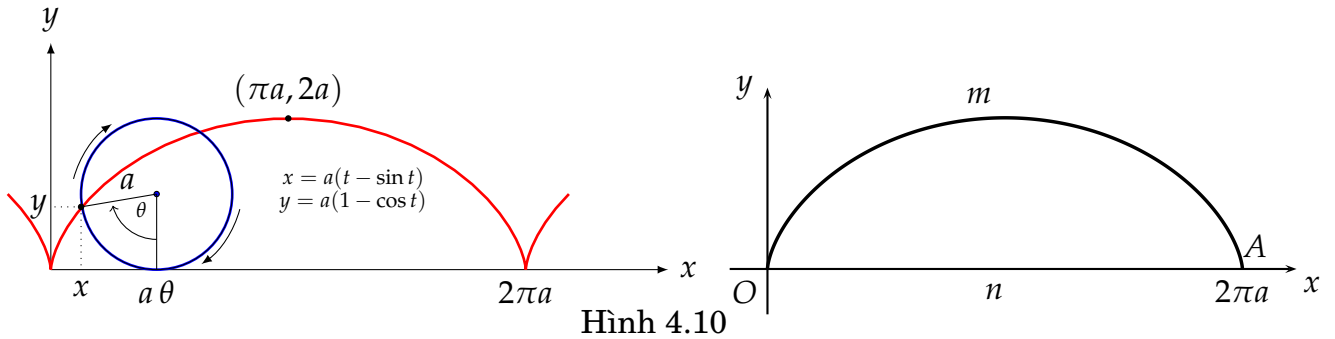
## 2.4 Bài tập

**Bài tập 4.9.** Tính  $\int_{\widehat{AB}} (x^2 - 2xy) dx + (2xy - y^2) dy$ , trong đó  $\widehat{AB}$  là cung parabol  $y = x^2$  từ  $A(1,1)$  đến  $B(2,4)$ .

*Lời giải.* Áp dụng công thức (5) ta có:

$$I = \int_1^2 \left[ (x^2 - 2x^3) + (2x^3 - x^4) \cdot 2x \right] dx = -\frac{41}{30}.$$

**Bài tập 4.10.** Tính  $\int_C (x^2 - 2xy) dx + (2xy - y^2) dy$  trong đó  $C$  là đường cong xác định bởi một nhịp cycloid  $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$  theo chiều tăng của  $t, 0 \leq t \leq 2\pi, a > 0$ .



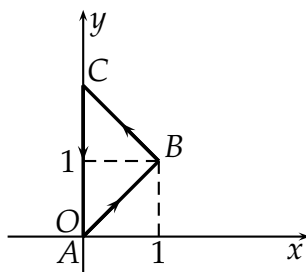
Hình 4.10

*Lời giải.* Ta có  $\begin{cases} x'(t) = a(1 - \cos t) \\ y'(t) = a \sin t \end{cases}$  nên:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \{ [2a(t - \sin t) - a(1 - \cos t)] a(1 - \cos t) + a(t - \sin t) \cdot a \sin t \} dt \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} [(2t - 2) + \sin 2t + (t - 2) \sin t - (2t - 2) \cos t] dt \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} [(2t - 2) + t \sin t - 2t \cos t] dt \\ &= a^2 (4\pi^2 - 6\pi). \end{aligned}$$

■

**Bài tập 4.11.** Tính  $\int_{ABCA} 2(x^2 + y^2) dx + x(4y + 3) dy$  ở đó  $ABCA$  là đường gấp khúc đi qua các điểm  $A(0,0), B(1,1), C(0,2)$ .



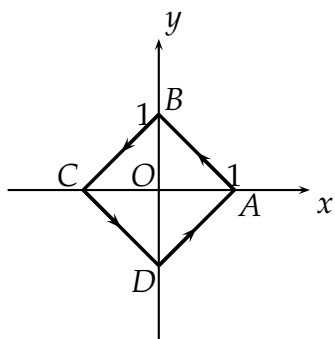
Hình 4.11

Lời giải. Ta có  $\begin{cases} \text{phương trình đường thẳng } AB : x = y \\ \text{phương trình đường thẳng } BC : x = 2 - y \text{ nên} \\ \text{phương trình đường thẳng } CA : x = 0 \end{cases}$

$$\begin{aligned} I &= \int_{AB} \dots + \int_{BC} \dots + \int_{CA} \dots \\ &= \int_0^1 [2(y^2 + y^2) + y(4y + 3)] dy + \int_1^2 2[(2 - y)^2 + y^2] \cdot (-1) + (2 - y)(4y + 3) dy + 0 \\ &= 3 \end{aligned}$$

■

**Bài tập 4.12.** Tính  $\int_{ABCD} \frac{dx + dy}{|x| + |y|}$  trong đó  $ABCD$  là đường gấp khúc qua các điểm  $A(1,0), B(0,1), C(-1,0), D(0,-1)$ .



Hình 4.12

Lời giải. Ta có

$$\begin{cases} AB : x + y = 1 & \Rightarrow dx + dy = 0 \\ BC : x - y = -1 & \Rightarrow dx = dy \\ CD : x + y = -1 & \Rightarrow dx + dy = 0 \\ DA : x - y = 1 & \Rightarrow dx = dy \end{cases}$$

nên

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{AB} \dots + \int_{BC} \dots + \int_{CD} \dots + \int_{DA} \dots \\
 &= 0 + \int_{BC} \frac{2dx}{x+y} + 0 + \int_{DA} \frac{2dx}{x-y} \\
 &= \int_0^{-1} 2dx + \int_0^1 2dx \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

**Bài tập 4.13.** Tính  $\int_C \frac{\sqrt[4]{x^2+y^2}}{2} dx + dy$  trong đó  $\begin{cases} x = t \sin \sqrt{t} \\ y = t \cos \sqrt{t} \\ 0 \leq t \leq \frac{\pi^2}{4} \end{cases}$  theo chiều tăng của  $t$ .

*Lời giải.* Đặt  $u = \sqrt{t} \Rightarrow 0 \leq u \leq \pi$ ,  $\begin{cases} x = u^2 \sin u \\ y = u^2 \cos u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(u) = 2u \sin u + u^2 \cos u \\ y'(u) = 2u \cos u - u^2 \sin u \end{cases}$

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \frac{u}{2} (2u \sin u + u^2 \cos u) + 2u \cos u - u^2 \sin u \right] du \\
 &= \int_0^{\pi} \left( \frac{u^3}{2} + 2u \right) \cos u du \\
 &= -\frac{3}{2}\pi^2 + 2
 \end{aligned}$$

**Bài tập 4.14 (Cuối kì, K62).** Tính các tích phân đường

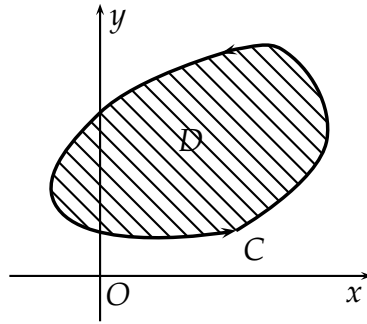
a)  $\oint_L |x|(dx + dy),$

b)  $\oint_L |y|(dx + dy),$

ở đó  $L$  là đường tròn  $x^2 + y^2 = 1$  hướng ngược chiều kim đồng hồ.

## 2.5 Công thức Green.

**Hướng dương của đường cong kín:** Nếu đường lấy tích phân là đường cong kín thì ta quy ước hướng dương của đường cong là hướng sao cho một người đi dọc theo đường cong theo hướng ấy sẽ nhìn thấy miền giới hạn bởi nó ở gần phía mình nhất nằm về phía bên trái.



Giả sử  $D \subset \mathbb{R}^2$  là miền đơn liên, liên thông, bị chặn với biên giới  $\partial D$  là đường cong kín với hướng dương, hơn nữa  $P, Q$  cùng các đạo hàm riêng cấp một của chúng liên tục trên  $D$ . Khi đó

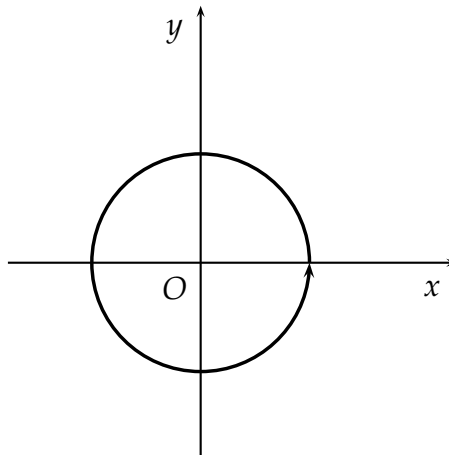
$$\int_C Pdx + Qdy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

**Chú ý:**

- Nếu  $\partial D$  có hướng âm thì  $\int_C Pdx + Qdy = - \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$
- Trong nhiều bài toán, nếu  $C$  là đường cong không kín, ta có thể bổ sung  $C$  để được đường cong kín và áp dụng công thức Green. Tất nhiên, sau đó phải trừ đi phần đã bổ sung.

**Bài tập 4.15.** Tính các tích phân sau  $\int_C (xy + x + y) dx + (xy + x - y) dy$  bằng hai cách: tính trực tiếp, tính nhờ công thức Green rồi so sánh các kết quả, với  $C$  là đường:

a)  $x^2 + y^2 = R^2$



Hình 4.15 a

**1. Tính trực tiếp.***Tham số hóa đường cong*

$$\begin{cases} x = R \cos t \\ y = R \sin t \end{cases} \Rightarrow 0 \leq t \leq 2\pi.$$

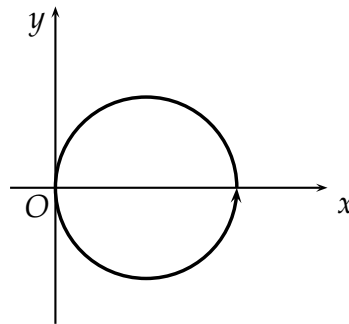
*Ta có*

$$I = \dots$$

$$= \frac{R^3}{2} \int_0^{2\pi} (\cos t \cos 2t + \sin t \cos 2t) dt$$

$$= 0.$$

$$b) x^2 + y^2 = 2x$$



Hình 4.15 b

**2. Sử dụng công thức Green.**

$$\begin{cases} P(x, y) = xy + x + y \\ Q(x, y) = xy + x - y \end{cases}$$

$$\text{Ta có } \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = y - x,$$

$$\begin{aligned} I &= \iint_D (y - x) dx dy \\ &= \iint_D y dx dy - \iint_D x dx dy \\ &= 0. \end{aligned}$$

**1. Tính trực tiếp.**

$$\text{Vì } x^2 + y^2 = 2x \Leftrightarrow (x - 1)^2 + y^2 = 1$$

*nên tham số hóa đường cong*

$$\begin{cases} x = 1 + \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi$$

*ta được*

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} [(1 + \cos t) \sin t + (1 + \cos t) + \sin t] \\ &\quad \times (-\sin t) dt \\ &\quad + \int_0^{2\pi} [(1 + \cos t) \sin t + (1 + \cos t) - \sin t] \\ &\quad \times \cos t dt \\ &= -\pi. \end{aligned}$$

**2. Sử dụng công thức Green.**

$$\text{Ta có } \begin{cases} P(x, y) = xy + x + y \\ Q(x, y) = xy + x - y \\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = y - x \end{cases}$$

$$I = \iint_{(x-1)^2 + y^2 \leq 1} (y - x) dx dy.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2 \cos \varphi} (r \sin \varphi - 1 - r \cos \varphi) r dr \\ &= -\pi. \end{aligned}$$

c)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, (a, b > 0).$

### 1. Tính trực tiếp

$$\text{Đặt } \begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq t \leq 2\pi \\ x'(t) = -a \sin t \\ y'(t) = b \cos t \end{cases}$$

$$I = \dots$$

$$= \int_0^{2\pi} (-ab \sin^2 t + ab \cos^2 t) dt$$

$$= 0.$$

### 2. Sử dụng công thức Green

$$\begin{cases} P(x, y) = xy + x + y \\ Q(x, y) = xy + x - y \end{cases}$$

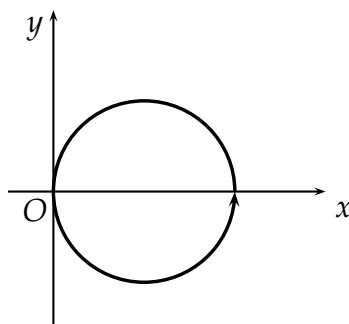
$$\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = y - x$$

$$\Rightarrow I = \iint_D (y - x) dx dy$$

$$= \iint_D y dx dy - \iint_D x dx dy$$

$$= 0.$$

**Bài tập 4.16.** Tính  $\int_{x^2+y^2=2x} x^2 \left(y + \frac{x}{4}\right) dy - y^2 \left(x + \frac{y}{4}\right) dx.$



Hình 4.16

*Lời giải.* Áp dụng công thức Green ta có:

$$I = \int_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_D \left( 4xy + \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}y^2 \right) dx dy = \frac{3}{4} \int_D (x^2 + y^2) dx dy.$$

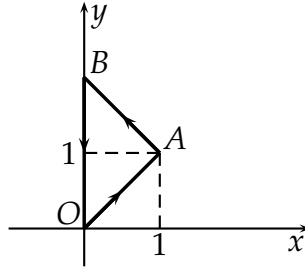
$$\left( \text{vì } \int_D 4xy dx dy = 0 \right).$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}, \text{ ta có } -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 2 \cos \varphi. \text{ Vậy}$$

$$I = \frac{3}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2 \cos \varphi} r^2 \cdot r dr = \frac{3}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4 \cos^4 \varphi d\varphi = \frac{9}{8} \pi.$$

■

**Bài tập 4.17.** Tính  $\oint_{OABO} e^x [(1 - \cos y) dx - (y - \sin y) dy]$  trong đó  $OABO$  là đường gấp khúc  $O(0,0), A(1,1), B(0,2)$



Hình 4.17

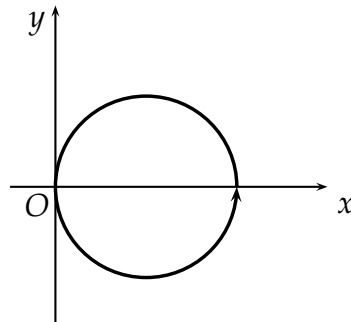
Lời giải. Đặt  $\begin{cases} P(x,y) = e^x (1 - \cos y) \\ Q(x,y) = -e^x (y - \sin y) \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -e^x y.$

Áp dụng công thức Green ta có:

$$\begin{aligned} I &= \iint_D -e^x y dx dy \\ &= \int_0^1 dx \int_x^{2-x} -e^x y dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 e^x (4x - 4) dx \\ &= 4 - 2e. \end{aligned}$$

■

**Bài tập 4.18.** Tính  $\oint_{x^2+y^2=2x} (xy + e^x \sin x + x + y) dx - (xy - e^{-y} + x - \sin y) dy$



Hình 4.18

Lời giải. Đặt  $\begin{cases} P(x, y) = xy + e^x \sin x + x + y \\ Q(x, y) = xy - e^{-y} + x - \sin y \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -y - x - 2.$

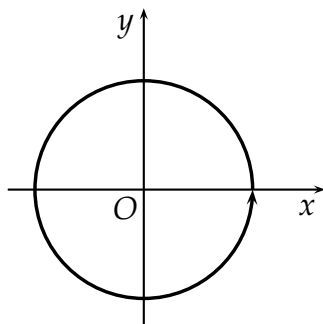
Áp dụng công thức Green ta có:

$$\begin{aligned} I &= \iint_D -y - x - 2 dx dy \\ &= \iint_D -x - 2 dx dy \text{ vì } \iint_D y dx dy = 0 \\ &\text{đặt } \begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 2 \cos \varphi \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2 \cos \varphi} (-r \cos \varphi - 2) r dr \\ &= -3\pi. \end{aligned}$$

■

**Bài tập 4.19.** Tính  $\oint_C (xy^4 + x^2 + y \cos xy) dx + \left(\frac{x^3}{3} + xy^2 - x + x \cos xy\right) dy$

trong đó  $C \begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \end{cases} \quad (a > 0).$



Hình 4.19

Lời giải. Đặt  $\begin{cases} P(x, y) = xy^4 + x^2 + y \cos xy \\ Q(x, y) = \frac{x^3}{3} + xy^2 - x + x \cos xy \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = x^2 + y^2 - 4xy^3 - 1.$



Áp dụng công thức Green ta có:

$$\begin{aligned}
 I &= \iint_D x^2 + y^2 - 4xy^3 - 1 dx dy \\
 &= \iint_D x^2 + y^2 - 1 dx dy \text{ vì } \iint_D 4xy^3 dx dy = 0 \\
 &\text{đặt } \begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq a \\
 &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a (r^2 - 1) r dr \\
 &= \pi \left( \frac{a^4}{2} - a^2 \right).
 \end{aligned}$$

■

## 2.6 Ứng dụng của tích phân đường loại II

Áp dụng công thức Green cho hàm số  $P(x, y), Q(x, y)$  thỏa mãn  $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$  ta có:

$$S(D) = \iint_D 1 dx dy = \int_{\partial D} P dx + Q dy.$$

- Lấy  $P(x, y) = 0, Q(x, y) = x$  thì  $S(D) = \int_{\partial D} x dy$ .
- Lấy  $P(x, y) = -y, Q(x, y) = 0$  thì  $S(D) = \int_{\partial D} -y dx$ .
- Lấy  $P(x, y) = \frac{1}{2}x, Q(x, y) = \frac{1}{2}y$  thì  $S(D) = \frac{1}{2} \int_{\partial D} x dy - y dx$ .

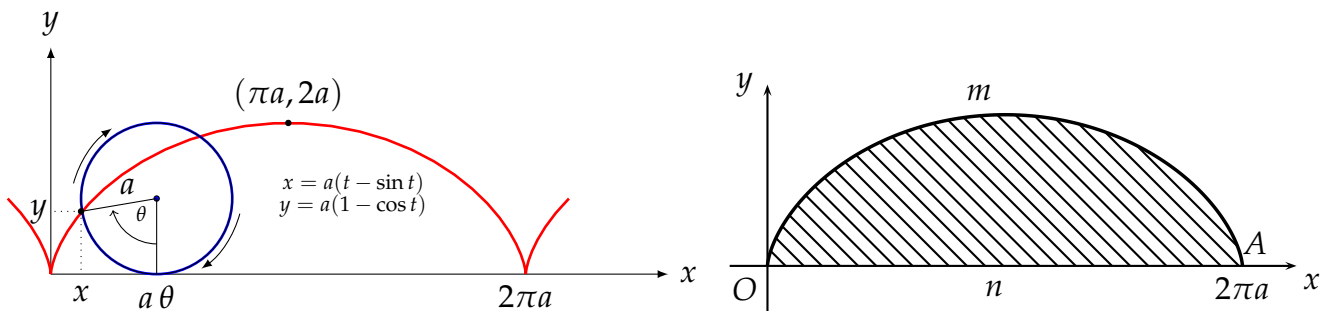
**Bài tập 4.20.** Tính diện tích của miền elip  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ .

[Gợi ý] Phương trình tham số của đường elip là  $x = a \cos \theta, y = b \sin \theta$ . Do đó

$$S = \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a \cos \theta)(b \sin \theta) d\theta - (b \sin \theta)(-a \sin \theta) d\theta = \pi ab.$$

**Bài tập 4.21.** Dùng tích phân đường loại II, tính diện tích của miền giới hạn bởi một nhịp

$$\text{cycloid } \begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \text{ và } Ox \ (a > 0).$$

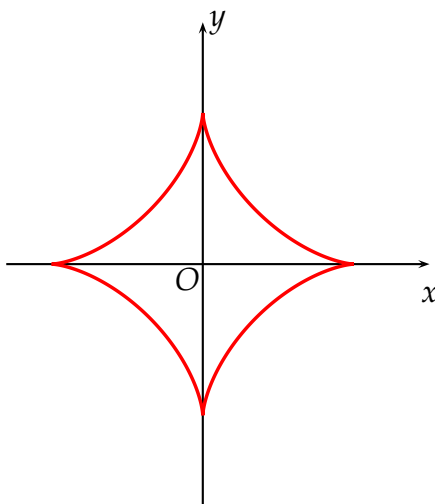


Hình 4.21

Lời giải. Áp dụng công thức

$$S(D) = \int_{\partial D} x dy = \int_{AmO} x dy + \int_{OnA} x dy = \int_{2\pi}^0 a(t - \sin t) \cdot a \sin t dt = 3\pi a^2.$$

**Bài tập 4.22.** Dùng tích phân đường loại II, tính diện tích của miền giới hạn bởi đường Astroid  $x = \cos^3 t, y = \sin^3 t, 0 \leq t \leq 2\pi$ .

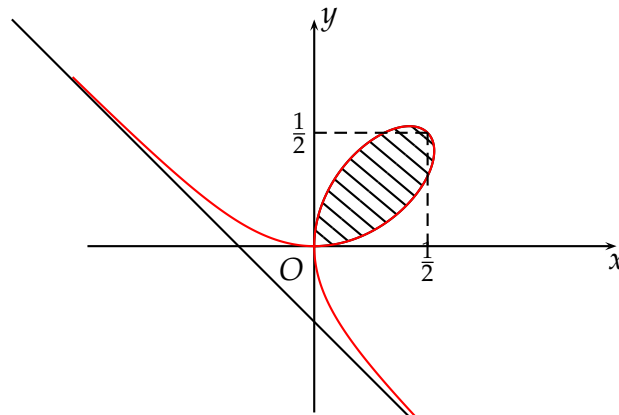


Hình 4.6a

[Đáp số]  $S = \frac{3\pi a^2}{8}$ .

**Bài tập 4.23.** Dùng tích phân đường loại II, tính diện tích của miền giới hạn bởi đường sau

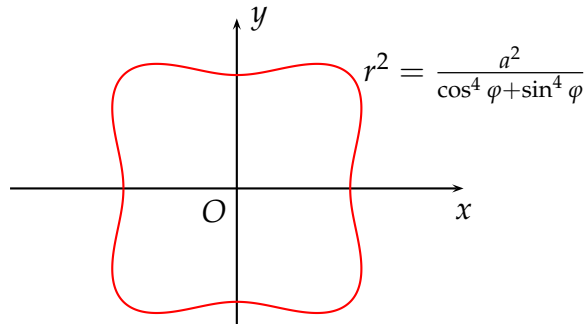
a)  $x^2 + y^3 = 3axy, a > 0$  (lá Descartes, xem thêm Bài tập 2.58).



Hình 4.23a

$$TCX: y = -x - \frac{1}{3}$$

$$b) x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2).$$



Hình 4.23b

## 2.7 Điều kiện để tích phân đường không phụ thuộc đường lấy tích phân.

Giả sử rằng  $D$  là miền đơn liên, liên thông,  $P, Q$  cùng với các đạo hàm riêng cấp một của chúng liên tục trên  $\overline{D}$ . Khi đó bốn mệnh đề sau là tương đương:

- 1)  $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$  với mọi  $(x, y) \in D$ .
- 2)  $\int_L Pdx + Qdy = 0$  với mọi đường cong đóng kín  $L$  nằm trong  $D$ .
- 3)  $\int_{AB} Pdx + Qdy$  không phụ thuộc vào đường đi từ  $A$  đến  $B$ , với mọi đường cong  $AB$  nằm trong  $D$ .

- 4)  $Pdx + Qdy$  là vi phân toàn phần. Nghĩa là có hàm số  $u(x, y)$  sao cho  $du = Pdx + Qdy$ .  
Hàm  $u$  có thể được tìm theo công thức:

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^y Q(x, y)dy = \int_{x_0}^x P(x, y)dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y)dy$$

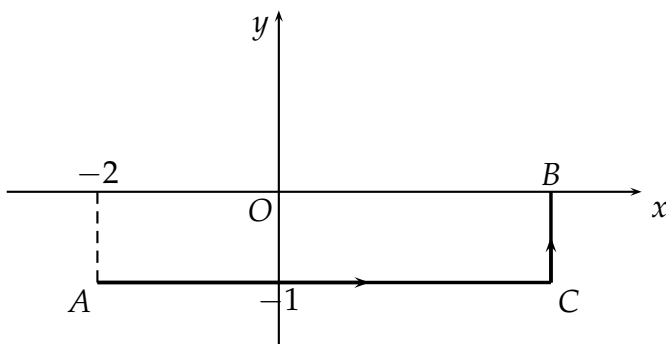
**Giải bài toán tính tích phân đường không phụ thuộc đường đi:**

- 1) Kiểm tra điều kiện  $P'_y = Q'_x$ . (1)
- 2) Nếu điều kiện (1) được thoả mãn và đường lấy tích phân là đường cong kín thì  $I = 0$ .
- 3) Nếu điều kiện (1) được thoả mãn và cần tính tích phân trên cung  $AB$  không đóng thì ta chọn đường tính tích phân sao cho việc tính tích phân là đơn giản nhất, thông thường ta chọn là đường thẳng nối  $A$  với  $B$ , hoặc đường gấp khúc có các cạnh song song với các trục toạ độ. Mặt khác, nếu tìm được hàm  $u$  sao cho  $du = Pdx + Qdy$ , hay là

$$\mathbf{F} = (P, Q) = \overrightarrow{\text{grad}u} = (u'_x, u'_y)$$

thì  $I = u(B) - u(A)$ .

**Bài tập 4.24.** Tính  $\int_{(-2,1)}^{(3,0)} (x^4 + 4xy^3) dx + (6x^2y^2 - 5y^4) dy$ .

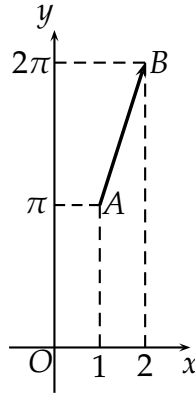


Hình 4.24

*Lời giải.* Nhận xét rằng  $(x^4 + 4xy^3)'_y = (6x^2y^2 - 5y^4)'_x$  nên tích phân đã cho không phụ thuộc vào đường đi. Vậy ta chọn đường đi là đường gấp khúc  $ACB$  như hình vẽ.

$$I = \int_{AC} Pdx + Qdy + \int_{CB} Pdx + Qdy = 62.$$

**Bài tập 4.25.** Tính  $\int_{(1,\pi)}^{(2,\pi)} \left(1 - \frac{y^2}{x^2} \cos \frac{y}{x}\right) dx + \left(\sin \frac{y}{x} + \frac{y}{x} \cos \frac{y}{x}\right) dy$ .



Hình 4.25

*Lời giải.* Đặt  $\begin{cases} P = 1 - \frac{y^2}{x^2} \cos \frac{y}{x} \\ Q = \sin \frac{y}{x} + \frac{y}{x} \cos \frac{y}{x} \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{2y}{x^2} \cos \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^3} \sin \frac{y}{x}$  nên tích phân đã cho không phụ thuộc vào đường đi từ  $A$  đến  $B$ . Khi đó ta chọn đường lấy tích phân là đường thẳng  $AB$ , nó có phương trình  $y = \pi x$ .

$$I = \int_1^2 \left(1 - \pi^2 \cos \pi\right) dx + \int_1^2 (\sin \pi + \pi \cos \pi) \pi dx = 1.$$

**Bài tập 4.1.** [Cuối kì, K62] Chứng minh rằng nếu  $f(u)$  là một hàm số cùng với đạo hàm của nó liên tục trên  $\mathbf{R}$  và  $L$  là đường đi từ  $O(0,0)$  đến  $A(a,b)$  thì

$$\int_L f(x+y)(dx+dy) = \int_0^{a+b} f(u)du.$$

## 2.8 Tích phân đường (trong không gian) không phụ thuộc đường đi

Cho  $\Omega \subset \mathbf{R}^3$  là miền đơn liên, liên thông,  $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$  là một trường véctơ thỏa mãn  $P, Q, R$  cùng với các đạo hàm riêng cấp một của chúng liên tục trên  $\overline{\Omega}$ . Khi đó các mệnh đề sau là tương đương:

- 1)  $\int_{AB} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz$  không phụ thuộc vào đường đi từ  $A$  đến  $B$ , với mọi đường cong  $AB$  nằm trong  $\Omega$ .

- 2)  $\mathbf{F}$  là một trường bảo toàn (hay còn gọi là trường thế), nghĩa là có hàm số  $u(x, y, z)$  sao cho

$$^{(1)}\overrightarrow{\text{grad}}u = (u'_x, u'_y, u'_z) = \mathbf{F}.$$

Hàm thế vị  $u$  có thể được tìm theo công thức:

$$u = \int_{x_0}^x P(t, y_0, z_0)dt + \int_{y_0}^y Q(x, t, z_0)dt + \int_{z_0}^z R(x, y, t)dt + C. \quad (4.21)$$

Khi đó,

$$\int_{AB} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = u(B) - u(A).$$

## 2.9 Tích phân đường không phụ thuộc đường đi và định luật bảo toàn năng lượng

Chúng ta áp dụng các kiến thức đã biết trong chương này để liên hệ với định luật bảo toàn năng lượng trong Vật lý. Cho  $\mathbf{F}$  là một trường lực liên tục, để di chuyển một vật dọc theo đường cong  $C$  cho bởi  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), a \leq t \leq b$ , ở đó điểm đầu  $A = \mathbf{r}(a)$  và điểm cuối  $B = \mathbf{r}(b)$ . Trước hết, theo định luật II Newton, lực  $\mathbf{F}$  và gia tốc  $\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t)$  được liên hệ với nhau bởi công thức

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = m\mathbf{r}''(t).$$

Do đó, công thực hiện bởi lực  $\mathbf{F}$  là

$$\begin{aligned} W &= \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)dt \\ &= \int_a^b m\mathbf{r}''(t) \cdot \mathbf{r}'(t)dt \\ &= \frac{m}{2} \int_a^b \frac{d}{dt} [\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}'(t)]dt \\ &= \frac{m}{2} \int_a^b \frac{d}{dt} |\mathbf{r}'(t)|^2 dt \\ &= \frac{m}{2} (|\mathbf{r}'(b)|^2 - |\mathbf{r}'(a)|^2) \\ &= \frac{m}{2} |\mathbf{v}(b)|^2 - \frac{m}{2} |\mathbf{v}(a)|^2, \end{aligned} \quad (4.22)$$

<sup>(1)</sup>Trong các tài liệu tiếng Anh, véctơ gradient  $\overrightarrow{\text{grad}}u$  của trường vô hướng  $u$  thường được kí hiệu là  $\nabla u$

ở đó  $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$  là vận tốc. Đại lượng  $K(t) = \frac{m}{2}|\mathbf{v}(t)|^2$  được gọi là động năng của vật (kinetic energy). Do đó, công thức (4.22) có thể được viết lại thành

$$W = K(B) - K(A),$$

nghĩa là, công thực hiện bởi lực  $\mathbf{F}$  để di chuyển một vật dọc theo đường cong  $C$  thì bằng với sự thay đổi động năng của vật đó tại hai điểm đầu và cuối. Bây giờ, giả thiết thêm trường vectơ  $\mathbf{F}$  là một trường lực bảo toàn<sup>(2)</sup> (conservative forced field), nghĩa là

$$\mathbf{F} = \overrightarrow{\text{grad}}u = (u'_x, u'_y, u'_z).$$

Trong Vật lý, thế năng (potential energy)<sup>(3)</sup> của một vật được định nghĩa bởi

$$\phi(x, y, z) = -u(x, y, z)^{(4)}.$$

Do đó  $\mathbf{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\phi$  và

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \phi(A) - \phi(B). \quad (4.23)$$

Từ (4.22) và (4.23) ta có

$$K(B) - K(A) = \phi(A) - \phi(B) \Rightarrow \boxed{\phi(A) + K(A) = \phi(B) + K(B)}.$$

Nói cách khác, nếu một vật di chuyển từ một điểm  $A$  đến một điểm  $B$  dưới tác dụng của một trường lực bảo toàn thì tổng động năng và thế năng của nó luôn luôn là một hằng số. Đây chính là **Định luật bảo toàn năng lượng** trong Vật lý.

**Chú ý 4.13.** Định luật bảo toàn năng lượng trong tiếng Anh là the **Law of Conservation of Energy**. Đó là lý do vì sao trường thế  $\mathbf{F}$  trong tiếng Anh được gọi là the conservative field. Thuật ngữ trường thế trong tiếng Việt (xem Chương 6) có lẽ xuất phát từ việc nó là gradient của một hàm thế vị (potential function)  $\mathbf{F} = \overrightarrow{\text{grad}}u$ . Một trong những trường lực bảo toàn ai cũng biết (hoặc ít nhất đã từng nghe nói đến), là trường hấp dẫn. Trường hấp dẫn  $\mathbf{g}$  xung quanh một hạt khối lượng  $M$  là một trường vectơ mà tại mỗi điểm chứa một vectơ chỉ theo hướng ra xa khỏi hạt. Độ lớn của trường tại mỗi điểm được tính bằng định luật của Newton, và miêu tả lực trên một đơn vị khối lượng tác động lên một vật thể bất kỳ nằm tại điểm đó trong không gian. Phương trình trường hấp dẫn là

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{F}}{m} = -\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} = -GM\frac{\mathbf{T}}{|\mathbf{R}|^2} = -\overrightarrow{\text{grad}}\phi,$$

<sup>(2)</sup>Còn gọi là trường thế

<sup>(3)</sup>Trong nhiều tài liệu, thế năng của một trường vectơ lực bảo toàn  $\mathbf{F}$  được định nghĩa, một cách tương đương, như sau:  $\phi(\mathbf{r}) = \phi(\mathbf{r}_0) + \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ , ở đó  $\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  là tích phân đường không phụ thuộc đường đi cụ thể từ  $\mathbf{r}_0$  đến  $\mathbf{r}$  và  $\phi(\mathbf{r}_0)$  là giá trị thế năng quy ước ở mốc  $\mathbf{r}_0$ . Đôi khi, khái niệm hiệu thế năng thường được dùng khi so sánh thế năng giữa hai điểm, hoặc nói về thế năng của một điểm khi lấy điểm kia là mốc có thế năng bằng 0.

<sup>(4)</sup>Dấu trừ trong công thức này để cho công thực hiện bởi lực  $\mathbf{F}$  làm giảm thế năng

ở đó  $F$  là lực hấp dẫn,  $m$  là khối lượng của hạt thử,  $\mathbf{R}$  là vị trí của hạt thử,  $\mathbf{T}$  là vectơ tiếp tuyến đơn vị theo hướng của  $\mathbf{R}$ ,  $t$  là thời gian và  $G$  là hằng số hấp dẫn.

Nếu chỉ tính về mặt độ lớn, thì theo Định luật này, vật có khối lượng  $m$  sẽ bị kéo về gần vật có khối lượng  $M$  với gia tốc

$$g = \frac{GM}{r^2},$$

với  $r$  là khoảng cách giữa hai vật. Cũng theo Định luật II Newton, vật có khối lượng  $m$  chịu lực hấp dẫn có độ lớn

$$F = mg \Rightarrow \boxed{F = \frac{GMm}{r^2}}.$$

Công thức được đóng khung trên thường được gọi là định luật vạn vật hấp dẫn Newton, trong đó lực hấp dẫn tỷ lệ thuận với tích của hai khối lượng và tỉ lệ nghịch với bình phương khoảng cách hai vật. Trong công thức này, kích thước các vật được coi là rất nhỏ so với khoảng cách giữa chúng.



# CHƯƠNG 5

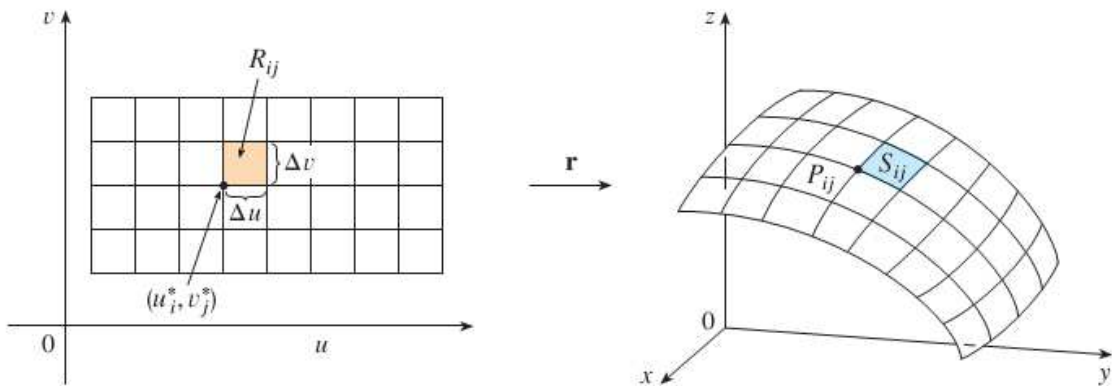
## TÍCH PHÂN MẶT

### §1. TÍCH PHÂN MẶT LOẠI I

#### 1.1 Diện tích mặt cong

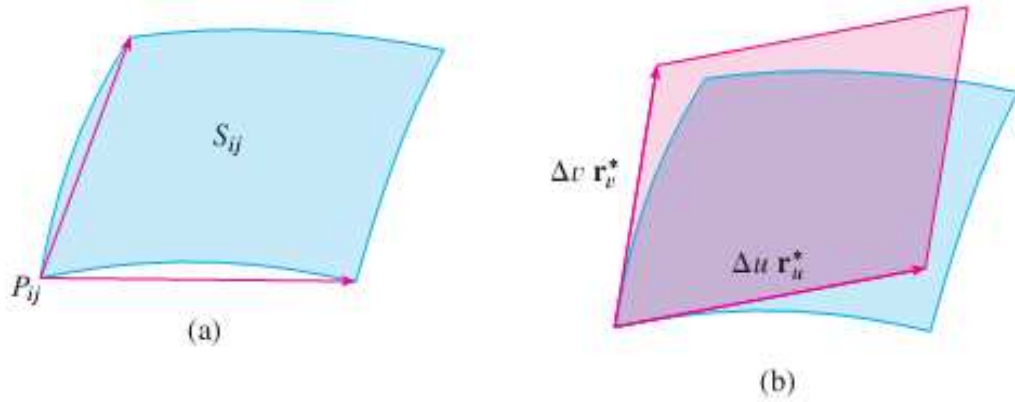
Xét mặt cong cho bởi phương trình tham số

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}.$$



Để đơn giản ta chọn miền  $D$  là hình chữ nhật và chia  $D$  thành các hình chữ nhật con có các cạnh song song với các trục tọa độ  $Ou$  và  $Ov$ . Giả sử  $S_{ij}$  là ảnh của hình chữ nhật  $R_{ij}$ . Khi đó

$$\mathbf{r}_u = \mathbf{r}_u(u_i, v_j) \text{ và } \mathbf{r}_v = \mathbf{r}_v(u_i, v_j)$$



là các véc tơ chỉ phương của mặt phẳng tiếp diện của mặt cong  $S$  tại điểm  $P_{ij}$ .

Diện tích của  $S_{ij}$  có thể được xấp xỉ bởi diện tích của hình bình hành có hai cạnh là  $\overrightarrow{P_{ij}P_{i+1,j}}$  và  $\overrightarrow{P_{ij}P_{i,j+1}}$ . Do đó,

$$A(S_{ij}) \approx |\overrightarrow{P_{ij}P_{i+1,j}} \wedge \overrightarrow{P_{ij}P_{i,j+1}}| \approx |(\Delta u \mathbf{r}_u) \wedge (\Delta v \mathbf{r}_v)| = |\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v| \Delta u \Delta v.$$

Vậy công thức tính xấp xỉ diện tích của mặt  $S$  là

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v| \Delta u \Delta v.$$

Nhận xét rằng nếu chia miền  $D$  thành các mảnh càng nhỏ thì công thức tính xấp xỉ trên càng tốt. Đồng thời, công thức ở vế phải chính là tổng Riemann của tích phân kép  $\iint_D |\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v| du dv$ . Điều này dẫn chúng ta tới định nghĩa sau:

**Định nghĩa 5.14.** Cho mặt cong  $S$  trơn, cho bởi phương trình tham số

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}, \quad (u, v) \in D \subset \mathbf{R}^2$$

và  $S$  chỉ được phủ một lần khi  $(u, v)$  biến thiên trên miền  $D$ . Khi đó diện tích của mặt cong  $S$  được định nghĩa bởi

$$A = \iint_D |\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v| du dv,$$

ở đó

$$\mathbf{r}_u = \frac{\partial x}{\partial u}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\mathbf{k}, \quad \mathbf{r}_v = \frac{\partial x}{\partial v}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\mathbf{k}.$$

**Ví dụ 1.1.** Tính diện tích của mặt cầu  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ .

[Lời giải] Mặt cầu  $S$  có phương trình tham số trong tọa độ cầu là 
$$\begin{cases} x = R \sin \theta \cos \varphi, \\ y = R \sin \theta \sin \varphi, \\ z = R \cos \theta. \end{cases}$$

Do đó,

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_\theta \wedge \mathbf{r}_\varphi &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ R \cos \theta \cos \varphi & R \cos \theta \sin \varphi & -R \sin \theta \\ -R \sin \theta \sin \varphi & R \sin \theta \cos \varphi & 0 \end{vmatrix} \\ &= R^2 \sin^2 \theta \cos \varphi \mathbf{i} + R^2 \sin^2 \theta \sin \varphi \mathbf{j} + R^2 \sin \theta \cos \theta \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Vì vậy,  $|\mathbf{r}_\theta \wedge \mathbf{r}_\varphi| = R^2 \sin \theta$  và

$$A = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi R^2 \sin \theta d\theta = 4\pi R^2.$$

Trường hợp đặc biệt, nếu mặt cong cho bởi phương trình  $z = z(x, y)$  thì

$$\mathbf{r}_x \wedge \mathbf{r}_y = (-z'_x, -z'_y, 1).$$

Do đó,

$$A = \iint_D \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy.$$

## 1.2 Bài toán dẫn đến tích phân mặt loại I

Cho mặt cong  $S$  trơn, cho bởi phương trình tham số

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}, \quad (u, v) \in D \subset \mathbf{R}^2$$

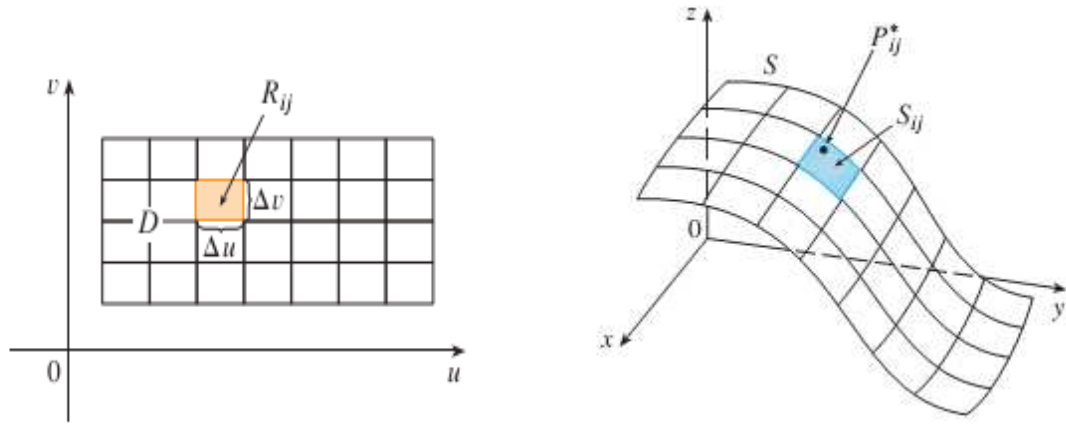
Hơn nữa, giả sử trên  $S$  có phân phối một khối lượng vật chất với mật độ (hay tỉ trọng bề mặt) tại điểm  $(x, y, z)$  là  $\rho(x, y, z)$ , trong đó  $\rho(x, y, z)$  là một hàm số liên tục trên  $S$ . Hãy tính khối lượng mặt  $S$ .

[Lời giải] Tương tự như cách tính diện tích mặt  $S$ , ta chia miền  $D$  thành các miền con bằng các đường song song với các trục tọa độ trong mặt phẳng  $Ouv$ . Khi đó mặt  $S$  được chia thành các mặt con  $S_{ij}$  và diện tích của nó được xấp xỉ bởi

$$A(S_{ij}) \approx |\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v| \Delta u \Delta v.$$

Do tính liên tục của  $\rho$ , nếu ta chia miền  $D$  thành các miền khá nhỏ thì miền  $S_{ij}$  cũng khá nhỏ và ta coi hàm  $\rho$  không đổi trên  $S_{ij}$  và bằng  $\rho(x(u_i^*, v_j^*), y(u_i^*, v_j^*), z(u_i^*, v_j^*)) = \rho(P_{ij}^*)$ . Khi đó khối lượng của  $S_{ij}$  là

$$m(S_{ij}) \approx \rho(P_{ij}^*) |\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v| \Delta u \Delta v$$



Khối lượng của toàn bộ mặt  $S$  là

$$m(S) \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \rho(P_{ij}^*) |r_u \wedge r_v| \Delta u \Delta v$$

Đây chính là tổng Riemann của tích phân kép  $\iint_D f(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) |r_u \wedge r_v| du dv$ .

Điều này dẫn đến định nghĩa sau đây.

**Định nghĩa 5.15.** Cho mặt cong  $S$  trơn, cho bởi phương trình tham số

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}, \quad (u, v) \in D \subset \mathbf{R}^2,$$

và  $f$  là một hàm số xác định trên  $S$ . Nếu tồn tại tích phân

$$\iint_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) |r_u \wedge r_v| du dv$$

thì ta gọi giá trị của tích phân này là tích phân mặt loại một của hàm  $f$  lấy trên  $S$  và kí hiệu là

$$\iint_S f(x, y, z) dS.$$

## 1.3 Các công thức tính tích phân mặt loại I

**Mặt  $S$  cho bởi phương trình tham số**

Nếu mặt  $S$  cho bởi phương trình tham số

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}, \quad (u, v) \in D \subset \mathbf{R}^2,$$

thì

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) |r_u \wedge r_v| du dv.$$

**Mặt  $S$  cho bởi phương trình  $z = z(x, y)$**

Nếu mặt  $S$  được cho bởi phương trình  $z = z(x, y), (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$ , thì đó nó có một tham số hóa tự nhiên là

$$\begin{cases} x = u, \\ y = v, \\ z = z(u, v). \end{cases}$$

Khi đó,  $\mathbf{r}_u = (1, 0, z'_u), \mathbf{r}_v = (0, 1, z'_v)$  và do đó, véc tơ pháp tuyến của mặt cong  $S$  tại  $P$  là

$$\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & z'_u \\ 0 & 1 & z'_v \end{vmatrix} = (-z'_u, -z'_v, 1) = (-z'_x, -z'_y, 1).$$

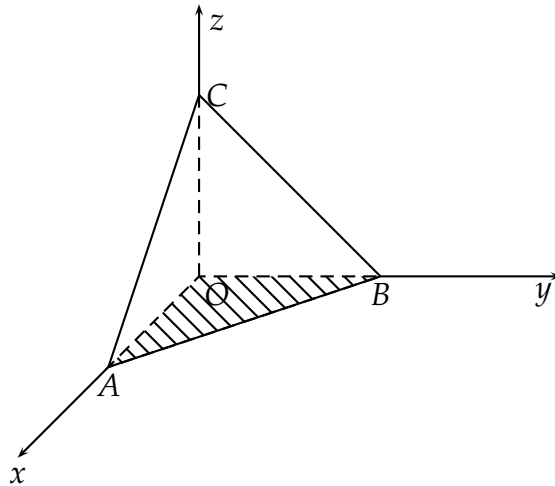
Vậy  $|\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v| = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}$ . Ngoài ra, miền xác định của  $(u, v)$  chính là hình chiếu của  $S$  lên mặt phẳng  $Oxy$ . Do đó

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy.$$

## 1.4 Bài tập

**Bài tập 5.1.** Tính  $\iint_S \left( z + 2x + \frac{4y}{3} \right) dS$  trong đó

$$S = \left\{ (x, y, z) \mid \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \right\}.$$



Hình 5.1

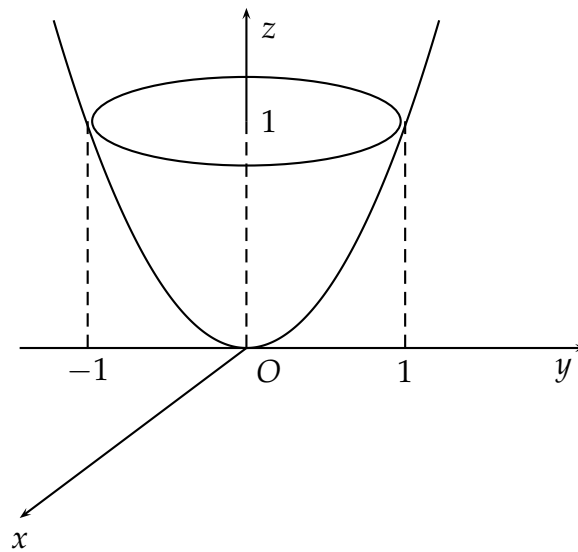
*Lời giải.* Ta có hình chiếu của mặt  $S$  lên mặt phẳng  $Oxy$  là

$$D = \left\{ (x, y) \mid \frac{x}{2} + \frac{y}{3} \leq 1, x \geq 0, y \geq 0 \right\} = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3 \left( 1 - \frac{x}{2} \right) \right\}.$$

Mặt khác  $z = 4\left(1 - \frac{x}{2} - \frac{y}{3}\right) \Rightarrow \begin{cases} p = z'_x = -2 \\ q = z'_y = \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow dS = \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx dy = \frac{\sqrt{61}}{3} dx dy$  nên

$$I = \iint_D \left[ 4\left(1 - \frac{x}{2} - \frac{y}{3}\right) + 2x + \frac{4y}{3} \right] \frac{\sqrt{61}}{3} dx dy = 4 \frac{\sqrt{61}}{3} \int_0^2 dx \int_0^{3-\frac{3x}{2}} dy = 4\sqrt{61}.$$

**Bài tập 5.2.** Tính  $\iint_S (x^2 + y^2) dS$ ,  $S = \{(x, y, z) | z = z^2 + y^2, 0 \leq z \leq 1\}$ .



Hình 5.2

*Lời giải.* Ta có hình chiếu của mặt cong lên mặt phẳng  $Oxy$  là  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ .

Mặt khác,  $z = x^2 + y^2 \Rightarrow \begin{cases} p = z'_x = 2x \\ q = z'_y = 2y \end{cases}$  nên

$$I = \iint_D (x^2 + y^2) \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dx dy,$$

$$\text{đặt } \begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1$$

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^2 \sqrt{1 + 4r^2} r dr$$

$$= \frac{\pi}{4} \int_0^1 r^2 \sqrt{1 + 4r^2} d(1 + 4r^2)$$

$$= \frac{\pi}{4} \int_1^5 \frac{t-1}{4} \sqrt{t} dt \quad (\text{đặt } t = 1 + 4r^2)$$

$$= \frac{\pi}{16} \left( \frac{20\sqrt{5}}{3} + \frac{4}{15} \right).$$

**Bài tập 5.3.** Tính tích phân mặt  $\iint_S x^2 y^2 z dS$ , trong đó  $S$  là phần mặt nón  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  ở dưới mặt phẳng  $z = 1$ .

[Đáp số]  $I = \frac{\pi\sqrt{2}}{28}$ .

**Bài tập 5.1.** [Cuối kì, K62] Tính tích phân mặt  $\iint_S \frac{dS}{(2 + x + y + z)^2}$ , ở đó  $S$  là biên của tứ diện  $x + y + z \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ .

Lời giải. Ta có

$$I = \iint_{S_1} f(x, y, z) dS + 3 \iint_D f(x, y, z) dS,$$

ở đó

$$S_1 : \begin{cases} x + y + z = 1, \\ x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \end{cases} \quad \text{và } D : \begin{cases} x + y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

$$\text{i) } \iint_{S_1} f(x, y, z) dS = \iint_D \frac{\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}}{9} dx dy = \frac{\sqrt{3}}{9} \iint_D dx dy = \frac{\sqrt{3}}{9} S(D) = \frac{\sqrt{3}}{18}.$$

$$\text{ii) } \iint_D f(x, y, z) dS = \iint_D \frac{dxdy}{(2+x+y)^2} = -\frac{1}{2} + \ln 3. \quad \blacksquare$$

**Kết luận:**  $I = \frac{\sqrt{3}}{18} - 1 + 3 \ln \frac{3}{2}$ .

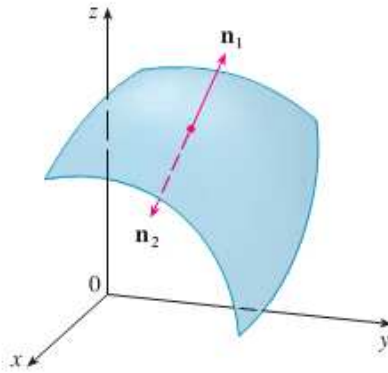


## §2. TÍCH PHÂN MẶT LOẠI II

### 2.1 Định hướng mặt cong

Cho mặt cong  $S$  trơn, cho bởi phương trình tham số

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}, \quad (u, v) \in D \subset \mathbf{R}^2.$$

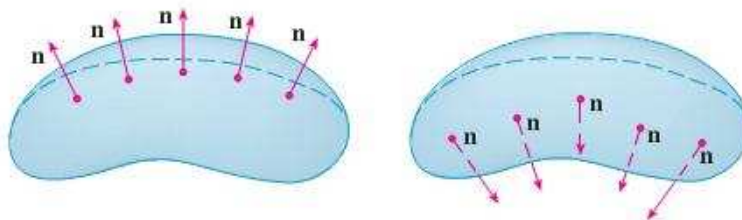


Như đã biết, véc tơ pháp tuyến đơn vị của  $S$  tại điểm  $P$  chính quy là  $\mathbf{n}_1 = \frac{\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v}{\|\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v\|}$ , ở đó

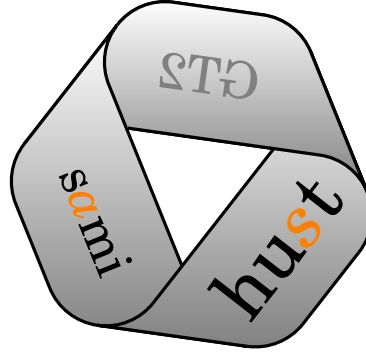
$$\mathbf{r}_u = \frac{\partial x}{\partial u}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\mathbf{k}, \quad \mathbf{r}_v = \frac{\partial x}{\partial v}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\mathbf{k}.$$

Tại mỗi điểm  $P$  chính quy của mặt cong  $S$  có hai vectơ pháp tuyến đơn vị là  $\mathbf{n}_1$  và  $\mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}_1$ . Giả sử  $P_0 \in S$  và  $L$  là một đường cong kín nằm trên  $S$  và đi qua  $P_0$ . Chọn  $\mathbf{n}(P_0)$  là một vectơ pháp tuyến đơn vị của mặt  $S$  tại  $P_0$ . Khi  $P$  di chuyển dọc theo đường cong kín  $L$  từ  $P_0$  và quay trở về  $P_0$  thì vectơ  $\mathbf{n}(P)$  cũng biến thiên liên tục, và khi  $P$  trở về  $P_0$  thì  $\mathbf{n}(P)$  trở thành  $\mathbf{n}'(P_0)$ . Có hai khả năng xảy ra

- $\mathbf{n}'(P_0) = \mathbf{n}(P_0)$ , tức là, pháp tuyến trở lại như cũ. Khi đó ta nói mặt  $S$  định hướng được (hay còn gọi là mặt hai phía).



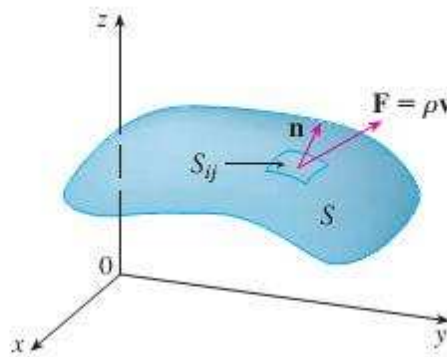
- Ngược lại,  $\mathbf{n}'(P_0) = -\mathbf{n}(P_0)$ , tức là, pháp tuyến trở về vị trí cũ thì đổi hướng. Khi đó ta nói mặt  $S$  gọi là không định hướng được (hay còn gọi là mặt một phía). Ví dụ như lá Mobius sau đây (được mang tên nhà toán học người Đức August Ferdinand Möbius).



Nếu mặt  $S$  định hướng được thì ta chọn một hướng làm hướng dương và hướng còn lại được gọi là hướng âm.

## 2.2 Bài toán dẫn đến tích phân mặt loại II

Giả sử có một mặt cong hai phía được nhúng vào một môi trường chất lỏng đang chảy với mật độ  $\rho(x, y, z)$  và tốc độ  $\mathbf{v}(x, y, z) = (v_1(x, y, z), v_2(x, y, z), v_3(x, y, z))$ . Hãy tính lượng chất lỏng chảy qua  $S$  trong một đơn vị thời gian.



Ta chia mặt  $S$  thành các thành phần nhỏ  $S_{ij}$  như hình vẽ trên. Nếu chia mặt cong đủ nhỏ thì ta coi  $S_{ij}$  như mặt phẳng và khối lượng chất lỏng trên một đơn vị diện tích là  $\mathbf{F} = \rho \mathbf{v}$  coi như hằng số trên  $S_{ij}$ . Do đó, ta có thể xấp xỉ khối lượng của chất lỏng chảy qua  $S_{ij}$  theo hướng véc tơ pháp tuyến đơn vị  $\mathbf{n}$  trên một đơn vị thời gian bởi

$$(\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})A(S_{ij}).$$

Lượng chất lỏng chảy qua  $S$  trên một đơn vị thời gian là

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) A(S_{ij}).$$

Nếu chia mặt cong  $S$  càng nhỏ thì tổng trên chính là tổng Riemann của tích phân mặt loại I sau

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS,$$

ở đó  $\mathbf{F} = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$  và  $\mathbf{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ .

**Định nghĩa 5.16.** Cho mặt cong  $S$  trơn, định hướng được, cho bởi phương trình tham số

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}, \quad (u, v) \in D \subset \mathbf{R}^2$$

và  $\mathbf{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$  là véc tơ pháp tuyến đơn vị tại  $M(x, y, z)$  theo hướng dương đã chọn của  $S$ . Giả sử

$$\mathbf{F} = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)), \quad (x, y, z) \in S$$

là một hàm véc tơ xác định trên  $S$ . Nếu tồn tại tích phân mặt loại I

$$\iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS$$

thì giá trị đó được gọi là tích phân mặt loại II của hàm véc tơ  $\mathbf{F}$  lấy theo hướng đã chọn của mặt  $S$  và kí hiệu là

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \text{ hay là } \iint_S P dydz + Q dzdx + R dx dy.$$

## 2.3 Các công thức tính tích phân mặt loại II

**Mặt cong cho bởi phương trình tham số**

Nếu mặt cong  $S$  trơn, cho bởi phương trình tham số

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}, \quad (u, v) \in D \subset \mathbf{R}^2.$$

thì một véc tơ pháp tuyến của  $S$  tại điểm  $P$  chính quy là  $\mathbf{N} = \mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v = (A, B, C)$ .

- Nếu véc tơ này cùng phương cùng hướng với  $\mathbf{n}$ , tức là, hướng theo phía đã chọn của mặt thì

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \\ \cos \beta &= \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \\ \cos \gamma &= \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \\ dS &= \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} du dv\end{aligned}$$

nên ta đi đến công thức tính tích phân mặt loại II sau

$$\iint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \iint_D (AP + BQ + CR) du dv.$$

- Nếu véc tơ  $\mathbf{N} = \mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v = (A, B, C)$  cùng phương, ngược hướng với  $\mathbf{n}$ , tức là, ngược hướng với phía đã chọn của  $S$  thì

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= -\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \\ \cos \beta &= -\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \\ \cos \gamma &= -\frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.\end{aligned}$$

Do đó,

$$\iint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy = - \iint_D (AP + BQ + CR) du dv.$$

**Mặt cong cho bởi phương trình  $f(x, y, z) = 0$**

Giả sử

$$I = \underbrace{\iint_S P dy dz}_{I_1} + \underbrace{\iint_S Q dz dx}_{I_2} + \underbrace{\iint_S R dx dy}_{I_3}.$$

Người ta tính tích phân mặt loại II bằng cách đưa về tích phân kép. Chẳng hạn xét tích phân  $I_3$ . Giả sử mặt  $S$  có phương trình  $z = z(x, y)$ ,  $z(x, y)$  cùng với các đạo hàm riêng của chúng liên tục trên miền  $D$  là hình chiếu của  $S$  lên mặt phẳng  $Oxy$ . Khi đó, véc tơ  $\mathbf{N} = \mathbf{r}_x \wedge \mathbf{r}_y = (-z'_x, -z'_y, 1)$ . Véc tơ  $\mathbf{N}$  này luôn lập với  $Oz$  một góc nhọn (Tại sao?<sup>(1)</sup>) Do đó, để thuận lợi cho việc xác định xem  $\mathbf{N}$  cùng hướng hay ngược hướng với  $\mathbf{n}$ , người ta xét góc giữa  $\mathbf{n}$  và  $Oz$ .

<sup>(1)</sup>vì  $\mathbf{N} \cdot \mathbf{k} = (-z'_x, -z'_y, 1) \cdot (0, 0, 1) = 1 = |\mathbf{N}| |\mathbf{k}| \cos(\mathbf{N}, \mathbf{k}) \Rightarrow \cos(\mathbf{N}, \mathbf{k}) > 0 \Rightarrow (\mathbf{N}, \mathbf{k}) < \frac{\pi}{2}$

- Nếu vectơ pháp tuyến đơn vị theo hướng dương  $\mathbf{n}$  tạo với  $Oz$  một góc nhọn thì

$$\iint_S R dx dy = \iint_S (AP + BQ + CR) dx dy = \iint_D R(x, y, z(x, y)) dx dy. \quad (5.1)$$

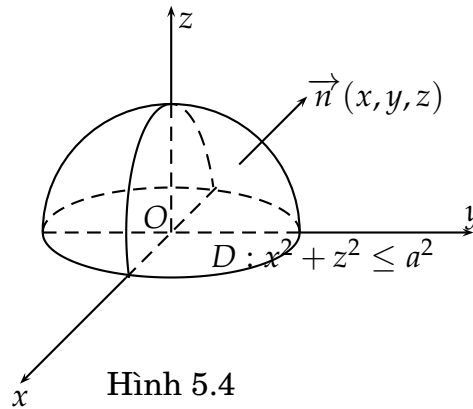
- Nếu vectơ pháp tuyến đơn vị theo hướng dương  $\mathbf{n}$  tạo với  $Oz$  một góc tù thì

$$\iint_S R dx dy = - \iint_D R(x, y, z(x, y)) dx dy. \quad (5.2)$$

Tích phân  $I_1, I_2$  được đưa về tích phân kép một cách tương tự.

### Bài tập

**Bài tập 5.4.** Tính  $\iint_S z(x^2 + y^2) dx dy$ , trong đó  $S$  là nửa mặt cầu  $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$ , hướng của  $S$  là phía ngoài mặt cầu.



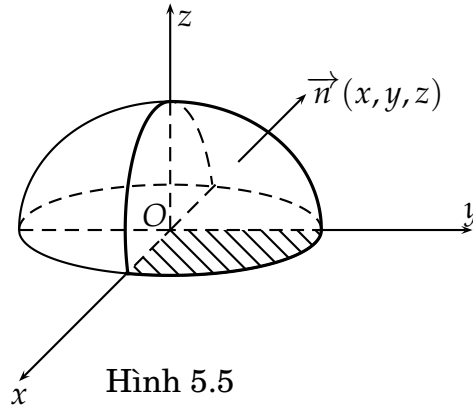
Hình 5.4

*Lời giải.* Ta có mặt  $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ , hình chiếu của  $S$  lên mặt phẳng  $Oxy$  là miền  $D : x^2 + y^2 \leq 1$ , hơn nữa  $\vec{n}$  tạo với  $Oz$  một góc nhọn nên:

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2} (x^2 + y^2) dx dy \\ &\text{đặt } \begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1 \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1 - r^2} r^3 dr \\ &= \frac{4\pi}{15}. \end{aligned}$$

■

**Bài tập 5.5.** Tính  $\iint_S y dx dz + z^2 dx dy$  trong đó  $S$  là phía ngoài mặt  $x^2 + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ .



Lời giải. Tính  $I_1 = \iint_S y dx dz$ .

- Mặt  $S : y = 2\sqrt{1 - x^2 - z^2}$
- Hình chiếu của  $S$  lên  $Oxz$  là  $\frac{1}{4}$  hình tròn,  $D_1 : x^2 + z^2 \leq 1, x \geq 0, z \geq 0$ .
- $\beta = (\vec{n}, Oy)$  là góc nhọn.

Do đó

$$\begin{aligned}
 I &= \iint_{D_1} 2\sqrt{1 - x^2 - z^2} dx dz \\
 &\text{đặt } \begin{cases} x = r \cos \varphi \\ z = r \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 1 \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 2\sqrt{1 - r^2} r dr \\
 &= \frac{\pi}{3}
 \end{aligned}$$

Tính  $I_2 = \iint_S z^2 dx dy$ .

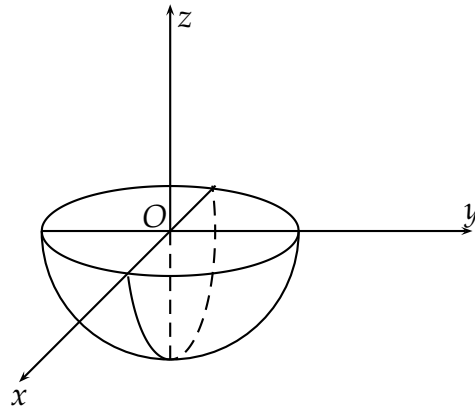
- Mặt  $S : z^2 = 1 - x^2 - \frac{y^2}{4}$
- Hình chiếu của  $S$  lên  $Oxz$  là  $\frac{1}{4}$  elip,  $D_2 : x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$ .
- $\gamma = (\vec{n}, Oz)$  là góc nhọn.

Do đó

$$\begin{aligned}
 I &= \iint_{D_2} 1 - x^2 - \frac{y^2}{4} dx dy \\
 &\text{đặt } \begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = 2r \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 1, J = -2r \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 (1 - r^2) 2r dr \\
 &= \frac{\pi}{4}.
 \end{aligned}$$

Vậy  $I = \frac{7\pi}{12}$ . ■

**Bài tập 5.6.** Tính  $\iint_S x^2 y^2 z dx dy$  trong đó  $S$  là mặt trên của nửa mặt cầu  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \leq 0$ .



Hình 5.6

*Lời giải.* Ta có:

- Mặt  $S : z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$
- Hình chiếu của  $S$  lên  $Oxy$  là hình tròn,  $D : x^2 + y^2 \leq R^2$ .
- $\beta = (\vec{n}, Oz)$  là góc nhọn.

Do đó

$$\begin{aligned}
 I &= - \iint_D x^2 y^2 \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy \\
 &\text{đặt } \begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq R, J = -r \\
 I &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \sqrt{R^2 - r^2} \cdot r^5 dr \\
 &= -\frac{2R^7}{105}.
 \end{aligned}$$

## 2.4 Công thức Ostrogradsky

Giả sử  $P, Q, R$  là các hàm khả vi, liên tục trên miền bị chặn, đo được trong  $V \subset \mathbb{R}^3$ .  $V$  giới hạn bởi mặt cong kín  $S$  trơn hay trơn từng mảnh, khi đó:

$$\iint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \iiint_V \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz^{(2)},$$

trong đó tích phân ở vế trái lấy theo hướng pháp tuyến ngoài.

**Chú ý:**

- Nếu tích phân ở vế trái lấy theo hướng pháp tuyến trong thì

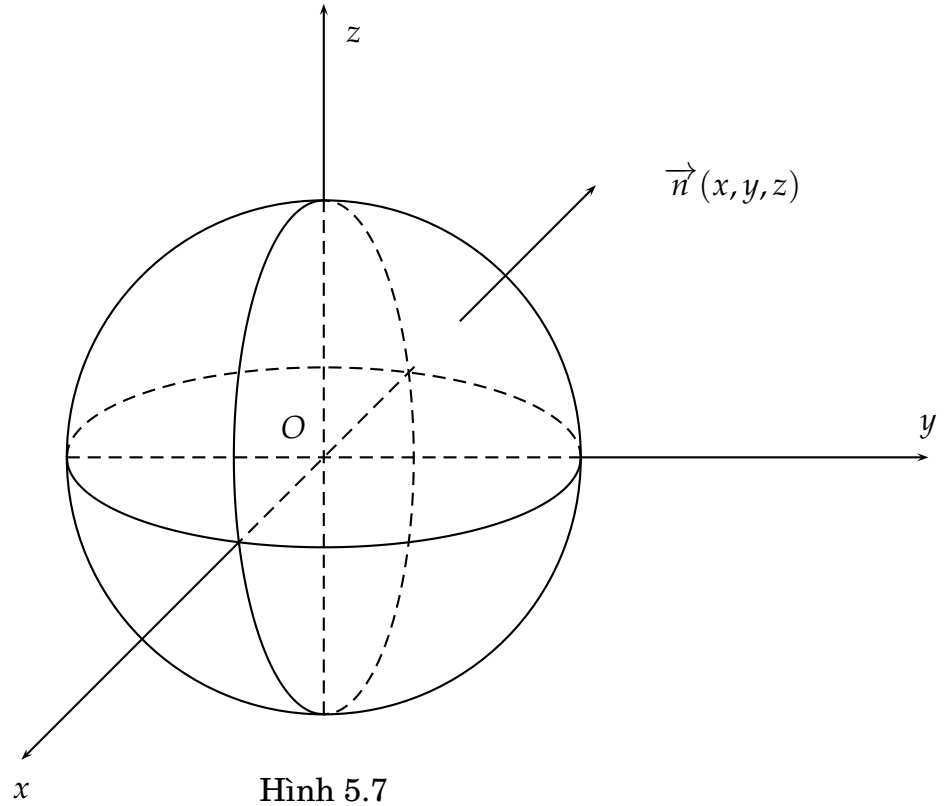
$$\iint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy = - \iiint_V \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz.$$

- Nếu mặt cong  $S$  không kín, có thể bổ sung thành mặt cong  $S'$  kín để áp dụng công thức Ostrogradsky, rồi trừ đi phần bổ sung.

**Bài tập 5.7.** Tính  $\iint_S x dy dz + y dz dx + z dx dy$  trong đó  $S$  là phía ngoài của mặt cầu  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ .

<sup>(2)</sup>Trong các tài liệu tiếng Anh, công thức Ostrogradsky thường được gọi là *the Divergence Theorem*, và thường được phát biểu dưới dạng  $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{F} dV$ , ở đó  $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy$ ,  $\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$  và  $dV = dx dy dz$





Hình 5.7

*Lời giải.* Áp dụng công thức Ostrogradsky ta có

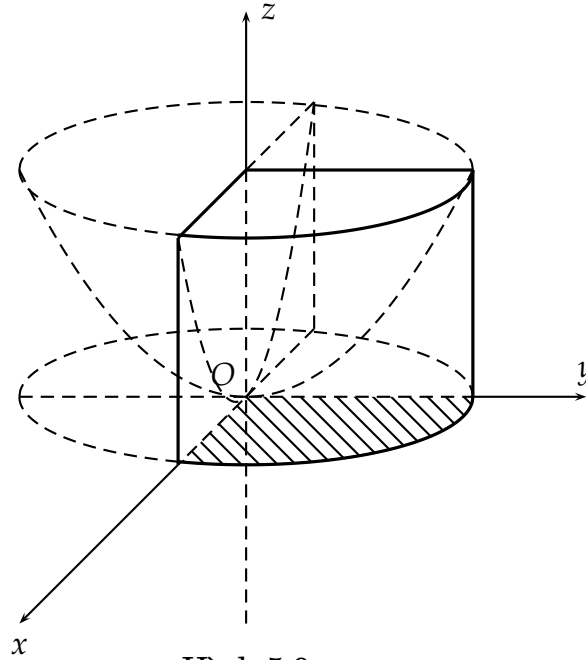
$$\iint_S xdydz + ydzdx + zxdy = \iiint_V 3dxdydz = 3V = 4\pi a^2.$$

**Bài tập 5.8.** Tính  $\iint_S x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy$  trong đó  $S$  là phía ngoài của mặt cầu  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ .

*Lời giải.* Xem hình vẽ 5.7, áp dụng công thức Ostrogradsky ta có:

$$\begin{aligned}
 I &= \iiint_V 3(x^2 + y^2 + z^2) dxdydz \\
 \text{đặt } \begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq r \leq R \end{cases}, J = -r^2 \sin \theta \\
 I &= 3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \int_0^R r^4 \sin \theta dr \\
 &= \frac{12\pi R^5}{5}.
 \end{aligned}$$

**Bài tập 5.9.** Tính  $\iint_S y^2 z dx dy + x z dy dz + x^2 y dx dz$  trong đó  $S$  là phía ngoài của miền  $x \leq 0, y \leq 0, x^2 + y^2 \leq 1, z \leq x^2 + y^2$ .



Hình 5.9

*Lời giải.* Áp dụng công thức Ostrogradsky ta có:

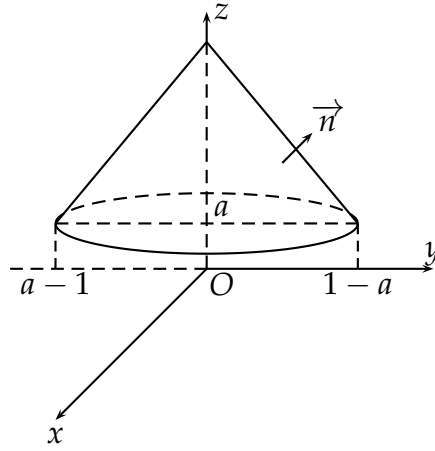
$$I = \iiint_V (y^2 + z + x^2) dx dy dz$$

$$\text{đặt } \begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq z \leq r^2 \end{cases}, J = -r$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 dr \int_0^{r^2} (r^2 + z) r dz$$

$$= \frac{\pi}{8}.$$

**Bài tập 5.10.** Tính  $\iint_S x dy dz + y dz dx + z dx dy$  trong đó  $S$  là phía ngoài của miền  $(z - 1)^2 \leq x^2 + y^2, a \leq z \leq 1, a > 0$ .



Hình 5.10

*Lời giải.* Áp dụng công thức Ostrogradsky ta có:

$$I = \iiint_V 3dxdydz = 3V = 3 \cdot \frac{1}{3} Bh = \pi (1-a)^3.$$

## 2.5 Dạng vectơ của công thức Green

Xét trường vectơ  $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ . Tích phân đường của trường vectơ này dọc theo đường cong kín  $C$  là

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C Pdx + Qdy.$$

Coi  $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$ , ta định nghĩa vectơ xoáy của trường vectơ  $\mathbf{F}$  như sau:

$$^{(3)} \text{curl } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k}.$$

Do đó,

$$(\text{curl } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} = \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right).$$

Công thức Green có thể được viết lại dưới dạng vectơ như sau:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds = \iint_D (\text{curl } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} dxdy. \quad (5.3)$$

Công thức này nói rằng tích phân đường của thành phần tiếp tuyến của trường vectơ  $\mathbf{F}$  dọc theo đường cong kín  $C$  bằng với tích phân kép của thành phần thứ ba (ứng với vectơ

<sup>(3)</sup>Vectơ xoáy của trường vectơ  $\mathbf{F}$  còn được kí hiệu là  $\vec{\text{rot}} \mathbf{F}$

k) của véctơ xoáy của nó,  $\text{curl } \mathbf{F}$ , trên miền  $D$  được bao bởi  $C$ . Tiếp theo, chúng ta biến đổi một chút để thu được một công thức khác, có chứa thành phần pháp tuyến của  $\mathbf{F}$ . Giả sử  $C$  cho bởi phương trình

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}, \quad a \leq t \leq b,$$

khi đó, véctơ tiếp tuyến đơn vị là

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{x'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}\mathbf{i} + \frac{y'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}\mathbf{j}.$$

Véctơ pháp tuyến ngoài, đơn vị của  $C$  sẽ là

$$\mathbf{n}(t) = \frac{y'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}\mathbf{i} - \frac{x'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}\mathbf{j}.$$

Ta có

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds &= \int_a^b (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) |\mathbf{r}'(t)| dt \\ &= \int_a^b \left[ \frac{P(x(t), y(t))y'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} - \frac{Q(x(t), y(t))x'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} |\mathbf{r}'(t)| \right] dt \\ &= \int_a^b [P(x(t), y(t))y'(t) - Q(x(t), y(t))x'(t)] dt \\ &= \int_C Pdy - Qdx \\ &= \iint_D \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dxdy \quad (\text{công thức Green}). \end{aligned} \tag{5.4}$$

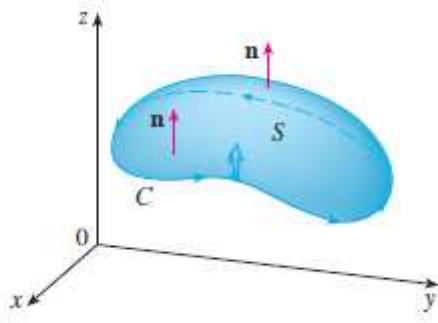
Nói cách khác,

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds = \iint_D \text{div } \mathbf{F} dxdy.$$

Công thức này nói rằng tích phân đường của thành phần pháp tuyến của trường véctơ  $\mathbf{F}$  dọc theo đường cong kín  $C$  bằng với tích phân kép của divergence của nó,  $\text{div } \mathbf{F}$ , trên miền  $D$  được bao bởi  $C$ .

## 2.6 Công thức Stokes

Giả sử  $S$  là mặt hai phía, đơn và trơn có biên giới là đường cong kín  $L$ . Giả sử  $\mathbf{n}$  là hướng dương của pháp tuyến của  $S$ . Khi đó, ta xác định hướng dương trên biên giới  $L$  của mặt  $S$  là hướng sao cho, một người đứng thẳng theo hướng pháp tuyến  $\mathbf{n}$ , đi theo hướng đó thì thấy phần của mặt ở gần người đó nhất nằm ở phía tay trái. Ngoài ra, hướng của  $S$  và  $L$  có thể được xác định theo quy tắc bàn tay phải.



**Định lý 5.20 (Định lý Stokes).** Giả sử  $S$  là một mặt cong trơn, có biên  $C$  là một đường cong trơn. Giả thiết  $P, Q, R$  là các hàm số liên tục và có đạo hàm riêng liên tục trong một tập mở nào đó chứa  $S$ . Khi đó

$$\int_C Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dzdx + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy,$$

trong đó tích phân đường ở vế trái lấy theo hướng dương của  $C$  phù hợp với hướng dương của mặt  $S$ .

**Chú ý 5.14.** Trong các tài liệu tiếng Anh, công thức Stokes thường được phát biểu dưới dạng ngắn gọn

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{curl } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S},$$

ở đó

- i)  $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C Pdx + Qdy + Rdz$  là tích phân đường loại II (trong không gian) của trường vectơ  $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ ,
- ii)  $^{(4)} \text{curl } \mathbf{F} = \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k}$  là vectơ xoáy của trường vectơ  $\mathbf{F}$ ,
- iii)  $\iint_S \text{curl } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dzdx + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$  là tích phân mặt loại II của trường vectơ  $\text{curl } \mathbf{F}$ .

Theo dạng vectơ của công thức Green (5.3), công thức Stokes chính là một dạng mở rộng của công thức Green sang trong không gian ba chiều, ở đó

- i) công thức Green liên hệ tích phân kép trên miền  $D$  với tích phân đường trên biên của  $D$  (trong mặt phẳng), trong khi đó,
- ii) công thức Stokes liên hệ tích phân mặt trên mặt cong  $S$  với tích phân đường trên biên của  $S$  (trong không gian).

<sup>(4)</sup>Vectơ xoáy của trường vectơ  $\mathbf{F}$  còn được kí hiệu là  $\vec{\text{rot}} \mathbf{F}$

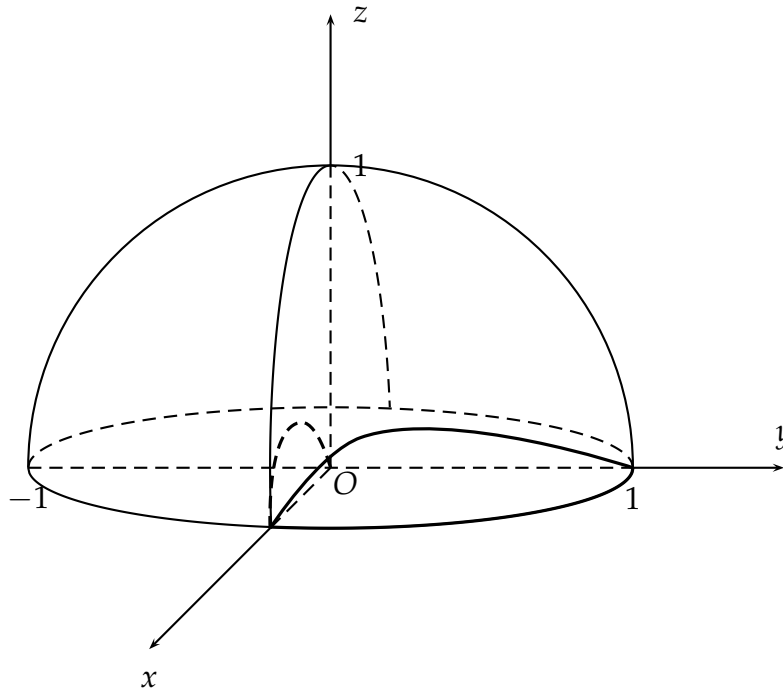
## 2.7 Công thức liên hệ giữa tích phân mặt loại I và loại II

$$\begin{aligned} & \iint_S [P(x, y, z) \cos \alpha + Q(x, y, z) \cos \beta + R(x, y, z) \cos \gamma] dS \\ &= \iint_S P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dzdx + R(x, y, z) dxdy, \end{aligned} \quad (5.5)$$

trong đó  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  là cosin chỉ phương của vectơ pháp tuyến đơn vị của mặt  $S$ .

**Bài tập 5.11.** Gọi  $S$  là phần mặt cầu  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  nằm trong mặt trụ  $x^2 + x + z^2 = 0, y \geq 0$ , hướng  $S$  phía ngoài. Chứng minh rằng

$$\iint_S (x - y) dxdy + (y - z) dydz + (z - x) dxdz = 0.$$



Hình 5.11

*Lời giải.* Ta có  $y = \sqrt{1 - x^2 - z^2}$  nên vectơ pháp tuyến của  $S$  là  $\vec{n} = \pm(-y'_x, 1, -y'_z)$ . Vì  $(\vec{n}, Oy) < \frac{\pi}{2}$  nên

$$\vec{n} = (-y'_x, 1, -y'_z) = \left( \frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - z^2}}, 1, \frac{z}{\sqrt{1 - x^2 - z^2}} \right).$$

Do đó  $|\vec{n}| = \sqrt{\frac{x^2}{1-x^2-z^2} + 1 + \frac{z^2}{1-x^2-z^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-z^2}}$ . Vậy

$$\begin{cases} \cos \alpha = \cos(\vec{n}, Ox) = \frac{n_1}{|\vec{n}|} = x \\ \cos \beta = \cos(\vec{n}, Oy) = \frac{n_2}{|\vec{n}|} = y \\ \cos \gamma = \cos(\vec{n}, Oz) = \frac{n_3}{|\vec{n}|} = z \end{cases} \quad \blacksquare$$

Áp dụng công thức liên hệ giữa tích phân mặt loại I và II 5.5 ta có

$$\begin{aligned} I &= \iint_S [(x-y) \cos \gamma + (y-z) \cos \beta + (z-x) \cos \alpha] dS \\ &= \iint_S (x-y)z + (y-z)x + (z-x)y dS \\ &= 0. \end{aligned}$$

**Bài tập 5.12.** Tính tích phân mặt loại II

$$I = \iint_S x dy dz + y dz dx + z dx dy,$$

trong đó  $S$  là phía ngoài mặt cầu  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ .

[Đáp số]  $I = 4\pi a^3$ .

**Bài tập 5.13.** Tính tích phân mặt  $\iint_S y dz dx$ , trong đó  $S$  là phía ngoài của mặt paraboloid

$z = x^2 + y^2$  ( $0 \leq z \leq 2$ ).

[Đáp số]  $I = 2\pi$ .





# CHƯƠNG 6

## LÝ THUYẾT TRƯỜNG

### §1. TRƯỜNG VÔ HƯỚNG

#### 1.1 Định nghĩa

**Định nghĩa 6.17.** Cho  $\Omega$  là một tập con mở của  $\mathbb{R}^3$  (hoặc  $\mathbb{R}^2$ ). Một hàm số

$$\begin{aligned} u : \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\mapsto u = u(x, y, z) \end{aligned}$$

được gọi là một trường vô hướng xác định trên  $\Omega$ .

Cho  $c \in \mathbb{R}$ , khi đó mặt  $S = \{(x, y, z) \in \Omega \mid u(x, y, z) = c\}$  được gọi là mặt mức ứng với giá trị  $c$  (đẳng trị).

#### 1.2 Đạo hàm theo hướng

**Định nghĩa 6.18.** Cho  $u = u(x, y, z)$  là một trường vô hướng xác định trên  $\Omega$  và  $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$ . Giả thiết  $\vec{l} = (a, b, c)$  là một vectơ đơn vị bất kì trong  $\mathbb{R}^3$ . Giới hạn (nếu có) của tỉ số

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(M_0 + t\vec{l})}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + ta, y_0 + tb, z_0 + tc) - u(x_0, y_0, z_0)}{t} \quad (6.1)$$

được gọi là đạo hàm theo hướng  $\vec{l}$  tại  $M_0$  của trường vô hướng  $u$  và được kí hiệu là  $\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}(M_0)$ .

**Chú ý:**

- Nếu  $\vec{l}$  không phải là véc tơ đơn vị thì giới hạn trong công thức 6.1 có thể được thay bằng

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \cos \beta, z_0 + t \cos \gamma) - u(x_0, y_0, z_0)}{t},$$

trong đó  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  là các cosin chỉ phương của  $\vec{l}$ .

- Nếu  $\vec{l} \uparrow \uparrow Ox$  thì  $\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}(M_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(M_0)$ .
- Đạo hàm theo hướng  $\vec{l}$  tại điểm  $M_0$  của trường vô hướng  $u$  thể hiện tốc độ biến thiên của trường vô hướng  $u$  tại  $M_0$  theo hướng  $\vec{l}$ .

**Định lý 6.21.** Nếu  $u = u(x, y, z)$  khả vi tại  $M(x_0, y_0, z_0)$  thì nó có đạo hàm theo mọi hướng  $\vec{l} \neq 0$  tại  $M_0$  và

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}(M_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(M_0) \cdot \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y}(M_0) \cdot \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z}(M_0) \cdot \cos \gamma, \quad (6.2)$$

trong đó  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  là các cosin chỉ phương của  $\vec{l}$ .

*Lời giải.* Giả sử  $\cos \alpha = a, \cos \beta = b, \cos \gamma = c$ . Xét hàm số một biến số

$$g(t) = u(x_0 + ta, y_0 + tb, z_0 + tc).$$

Khi đó, theo định nghĩa,

$$g'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + ta, y_0 + tb, z_0 + tc) - u(x_0, y_0, z_0)}{t} = \frac{\partial u}{\partial \vec{l}}(M_0).$$

Mặt khác,  $g(t)$  có thể viết dưới dạng  $g(t) = u(x, y, z)$ , ở đó  $x = x_0 + ta, y = y_0 + tb, z = z_0 + tc$ . Vì vậy, theo công thức đạo hàm của hàm hợp,

$$g'(h) = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial h} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial h} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial h} = u_x(x, y, z) \cdot a + u_y(x, y, z) \cdot b + u_z(x, y, z) \cdot c$$

Thay  $t = 0$  vào phương trình trên, ta có  $x = x_0, y = y_0, z = z_0$ , và

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}(M_0) = u_x(M_0) \cdot a + u_y(M_0) \cdot b + u_z(M_0) \cdot c. \quad \blacksquare$$

### 1.3 Gradient

**Định nghĩa 6.19.** Cho  $u(x, y, z)$  là trường vô hướng có các đạo hàm riêng tại  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ . Người ta gọi gradient của  $u$  tại  $M_0$  là véc tơ

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x}(M_0), \frac{\partial u}{\partial y}(M_0), \frac{\partial u}{\partial z}(M_0) \right)$$

và được kí hiệu là  $^{(1)}\overrightarrow{\text{grad}}u(M_0)$ .

<sup>(1)</sup>Trong các tài liệu tiếng Anh, véc tơ gradient  $\overrightarrow{\text{grad}}u$  của trường vô hướng  $u$  thường được kí hiệu là  $\nabla u$

**Định lý 6.22.** Nếu trường vô hướng  $u(x, y, z)$  khả vi tại  $M_0$  và  $\vec{l}$  là một vectơ đơn vị thì

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}(M_0) = \overrightarrow{\text{grad} u} \cdot \vec{l}$$

**Chú ý:**  $\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}(M_0)$  thể hiện tốc độ biến thiên của trường vô hướng  $u$  tại  $M_0$  theo hướng  $\vec{l}$ .

Từ công thức  $\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}(M_0) = \overrightarrow{\text{grad} u} \cdot \vec{l} = |\overrightarrow{\text{grad} u}| |\vec{l}| \cdot \cos(\overrightarrow{\text{grad} u}, \vec{l})$  ta có  $\left| \frac{\partial u}{\partial \vec{l}}(M_0) \right|$  đạt giá trị lớn nhất bằng  $|\overrightarrow{\text{grad} u}| |\vec{l}|$  nếu  $\vec{l}$  có cùng phương với  $\overrightarrow{\text{grad} u}$ . Cụ thể

- Theo hướng  $\vec{l}$ , trường vô hướng  $u$  tăng nhanh nhất tại  $M_0$  nếu  $\vec{l}$  có cùng phương, cùng hướng với  $\overrightarrow{\text{grad} u}$ .
- Theo hướng  $\vec{l}$ , trường vô hướng  $u$  giảm nhanh nhất tại  $M_0$  nếu  $\vec{l}$  có cùng phương, ngược hướng với  $\overrightarrow{\text{grad} u}$ .

## 1.4 Bài tập

**Bài tập 6.1.** Tính đạo hàm theo hướng  $\vec{l}$  của  $u = x^3 + 2y^3 - 3z^3$  tại  $A(2, 0, 1)$ ,  $\vec{l} = \overrightarrow{AB}$ ,  $B(1, 2, -1)$ .

*Lời giải.* Ta có  $\overrightarrow{AB} = (-1, 2, -2)$  nên

$$\cos \alpha = \frac{-1}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{-1}{3},$$

$$\cos \beta = \frac{2}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{2}{3},$$

$$\cos \gamma = \frac{-2}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{-2}{3},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}(A) = 12$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 6y^2 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y}(A) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -9z^2 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial z}(A) = -9$$

Áp dụng công thức 6.2 ta có

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}(A) = 12 \cdot \frac{-1}{3} + 0 \cdot \frac{2}{3} + (-9) \cdot \frac{-2}{3} = 2$$

**Bài tập 6.2.** Tính môđun của  $\overrightarrow{\text{grad} u}$  với  $u = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$  tại  $A(2, 1, 1)$ . Khi nào thì  $\overrightarrow{\text{grad} u} \perp Oz$ , khi nào  $\overrightarrow{\text{grad} u} = 0$ .

*Lời giải.* Ta có

$$\overrightarrow{\text{grad} u} = \left( \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right) = (3x^2 - 3yz, 3y^2 - 3zx, 3z^2 - 3xy)$$

nên  $\overrightarrow{\text{grad} u} = (9, -3, -3)$  và  $|\overrightarrow{\text{grad} u}| = \sqrt{9^2 + 3^2 + 3^2} = 3\sqrt{11}$ .

$$\bullet \overrightarrow{\text{grad}u} \perp Oz \Leftrightarrow \langle \overrightarrow{\text{grad}u}, \vec{k} \rangle = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow z^2 = xy$$

$$\bullet \overrightarrow{\text{grad}u} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = yz \\ y^2 = zx \\ z^2 = xy \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z \quad \blacksquare$$

**Bài tập 6.3.** Tính  $\overrightarrow{\text{grad}u}$  với  $u = r^2 + \frac{1}{r} + \ln r$  và  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

**Bài tập 6.4.** Theo hướng nào thì sự biến thiên của hàm số  $u = x \sin z - y \cos z$  từ gốc toạ độ  $O(0,0)$  là lớn nhất?

*Lời giải.* Từ công thức  $\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}(O) = \overrightarrow{\text{grad}u} \cdot \vec{l} = |\overrightarrow{\text{grad}u}| |\vec{l}| \cdot \cos(\overrightarrow{\text{grad}u}, \vec{l})$  ta có  $\left| \frac{\partial u}{\partial \vec{l}}(O) \right|$  đạt giá trị lớn nhất bằng  $|\overrightarrow{\text{grad}u}| |\vec{l}|$  nếu  $\vec{l}$  có cùng phương với  $\overrightarrow{\text{grad}u}(O) = (0, -1, 0)$ .  $\blacksquare$

**Bài tập 6.5.** Tính góc giữa hai vectơ  $\overrightarrow{\text{grad}z}$  của các hàm  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $z = x - 3y + \sqrt{3xy}$  tại  $M(3,4)$ .

*Lời giải.* Ta có

$$\bullet \overrightarrow{\text{grad}z_1} = \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \text{ nên } \overrightarrow{\text{grad}z_1}(M) = \left( \frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right).$$

$$\bullet \overrightarrow{\text{grad}z_2} = \left( 1 + \frac{\sqrt{3y}}{2\sqrt{x}}, -3 + \frac{\sqrt{3x}}{2\sqrt{y}} \right) \text{ nên } \overrightarrow{\text{grad}z_2}(M) = \left( 2, -\frac{9}{4} \right). \text{ Vậy } \quad \blacksquare$$

$$\cos \alpha = \frac{\langle \overrightarrow{\text{grad}z_1}, \overrightarrow{\text{grad}z_2} \rangle}{|\overrightarrow{\text{grad}z_1}| \cdot |\overrightarrow{\text{grad}z_2}|} = \frac{-12}{5\sqrt{145}}$$

## §2. TRƯỜNG VÉCTƠ

### 2.1 Định nghĩa

Cho  $\Omega$  là một miền mở trong  $\mathbb{R}^3$ . Một hàm vectơ

$$\begin{aligned} \mathbf{F} : \Omega &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ M &\mapsto \mathbf{F} = \mathbf{F}(M), \end{aligned}$$

trong đó

$$\mathbf{F} = P(M)\mathbf{i} + Q(M)\mathbf{j} + R(M)\mathbf{k}.$$

### 2.2 Thông lượng, trường ống

a) Thông lượng: Cho  $S$  là một mặt định hướng và  $\mathbf{F}$  là một trường vectơ. Đại lượng

$$\phi = \iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdx dy \quad (6.3)$$

được gọi là thông lượng của  $\mathbf{F}$  đi qua mặt cong  $S$ .

**Ví dụ 2.1 (Cuối kì, K62).** Cho trường vectơ  $\vec{F} = (xy^2 + z)\vec{i} + (x^2y + z)\vec{j}$ . Tính thông lượng của  $\vec{F}$  qua mặt paraboloid  $z = x^2 + y^2$  với  $z \leq 1$  hướng lên trên.

*Lời giải.* Thông lượng  $\phi = \iint_S (xy^2 + z)dydz + (x^2y + z)dx dz$ . Bổ sung mặt  $D : \begin{cases} z = 1, \\ x^2 + y^2 \leq 1 \end{cases}$  và áp dụng công thức Ostrogradski với véc tơ pháp tuyến trong ta có

$$I = \iint_S + \iint_D = - \iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = z \end{cases} \Rightarrow I = - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr \int_{r^2}^1 r^3 dz = -\frac{\pi}{6}. \text{ Ngoài ra, } \iint_D = 0 \text{ nên}$$

$$\phi = -\frac{\pi}{6}.$$

b) Trường vectơ  $\mathbf{F}$  xác định trên  $\Omega$  được gọi là một trường ống nếu  $\text{div } \mathbf{F}(M) = 0$  với mọi  $M \in \Omega$ .

**Tính chất:** Nếu  $\mathbf{F}$  là một trường ống thì thông lượng đi vào bằng thông lượng đi ra.

## 2.3 Hoàn lưu, véctơ xoáy

a) Toán tử vi phân "del" được định nghĩa như sau:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}.$$

b) Dive: Cho  $\mathbf{F}$  là một trường véctơ có thành phần  $P, Q, R$  là các hàm số có đạo hàm riêng cấp một thì tổng  $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$  được gọi là dive của trường véctơ  $\mathbf{F}$  và kí hiệu là  $\operatorname{div} \mathbf{F}$ . Nói cách khác,

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}.$$

c) Véctơ xoáy: Véctơ

$$^{(2)}\vec{\operatorname{rot}} \mathbf{F} := \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{pmatrix} = \nabla \wedge \mathbf{F}.$$

được gọi là véctơ xoáy (hay véctơ rota) của trường véctơ  $\mathbf{F}$ .

d) Hoàn lưu (hay lưu số): Cho  $\mathcal{C}$  là một đường cong (có thể kín hoặc không kín) trong không gian. Đại lượng

$$\int_{\mathcal{C}} Pdx + Qdy + Rdz \quad (6.4)$$

được gọi là hoàn lưu của  $\mathbf{F}$  dọc theo đường cong  $\mathcal{C}$ .

**Ví dụ 2.2 (Cuối kì, K62).** Tính lưu số của trường vectơ  $\vec{F} = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$  dọc theo đường xoắn ốc  $x = \cos t, y = \sin t, z = t$  đi từ  $A(1, 0, 0)$  đến  $B(0, 1, \frac{\pi}{2})$ .

*Lời giải.* Lưu số  $\phi = \int_L (ydx + zdy + xdz) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t(-\sin t) + t \cos t + \cos t) dt = \frac{\pi}{4}$ . ■

e) Toán tử Laplace. Cho  $f(x, y, z)$  là một hàm số ba biến số. Khi đó

$$\operatorname{div}(\nabla f) = (\nabla \cdot \nabla)f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Toán tử này được viết gọn thành

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla,$$

và được gọi là toán tử Laplace, bởi vì nó có liên hệ với phương trình Laplace sau

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0.$$

---

<sup>(2)</sup>Trong các tài liệu tiếng Anh, véctơ xoáy  $\vec{\operatorname{rot}} \mathbf{F}$  của trường véctơ  $\mathbf{F}$  thường được kí hiệu là  $\operatorname{curl} \mathbf{F}$

**Bài tập 6.6.** Cho  $f(x, y, z)$  là một hàm số ba biến số có các đạo hàm riêng liên tục đến cấp hai. Chứng minh rằng

$$^{(3)} \operatorname{curl}(\nabla f) = 0.$$

**Bài tập 6.7.** Cho  $F = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$  là một trường vectơ trong  $\mathbf{R}^3$ , ở đó  $P, Q, R$  có các đạo hàm riêng liên tục đến cấp hai. Chứng minh rằng

$$^{(4)} \operatorname{div} \operatorname{curl} F = 0.$$

## 2.4 Trường thế - hàm thế vị

Trường vectơ  $F$  được gọi là trường thế <sup>(5)</sup> (trên  $\Omega$ ) nếu tồn tại trường vô hướng  $u$  sao cho  $\operatorname{grad} u = F$  (trên  $\Omega$ ). Khi đó hàm  $u$  được gọi là hàm thế vị.

**Định lý 6.23.** Điều kiện cần và đủ để trường vectơ  $F = F(M)$  là một trường thế (trên  $\Omega$ ) là  $\operatorname{rot} F(M) = 0$  với mọi  $M \in \Omega$ .

**Chú ý:** Nếu  $F$  là trường thế thì hàm thế vị  $u$  được tính theo công thức

$$u = \int_{x_0}^x P(t, y_0, z_0) dt + \int_{y_0}^y Q(x, t, z_0) dt + \int_{z_0}^z R(x, y, t) dt + C. \quad (6.5)$$

## 2.5 Tích phân đường (trong không gian) không phụ thuộc đường đi

Cho  $D \subset \mathbf{R}^3$  là miền đơn liên, liên thông,  $F = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$  là một trường vectơ thỏa mãn  $P, Q, R$  cùng với các đạo hàm riêng cấp một của chúng liên tục trên  $\overline{D}$ . Khi đó bốn mệnh đề sau là tương đương:

- 1)  $\operatorname{rot} F(M) = 0$  với mọi  $M \in D$ .
- 2)  $\int_L Pdx + Qdy + Rdz = 0$  với mọi đường cong đóng kín  $L$  nằm trong  $D$ .
- 3)  $\int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz$  không phụ thuộc vào đường đi từ  $A$  đến  $B$ , với mọi đường cong  $AB$  nằm trong  $D$ .

<sup>(3)</sup>Theo kí hiệu của môn Giải tích 2 này thì đẳng thức này được viết là  $\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = 0$

<sup>(4)</sup>Theo kí hiệu của môn Giải tích 2 này thì đẳng thức này được viết là  $\operatorname{div} \operatorname{rot} F = 0$

<sup>(5)</sup>Như đã thảo luận ở mục 2.9, thuật ngữ trường vectơ bảo toàn cũng được sử dụng, và có lẽ là hợp lý hơn để ám chỉ tính chất bảo toàn năng lượng (động năng + thế năng = hằng số) của trường vectơ đó

- 4)  $F$  là một trường thế, nghĩa là có hàm số  $u(x, y, z)$  sao cho  $\overrightarrow{\text{grad}}u = F$ . Hàm thế vị  $u$  có thể được tìm theo công thức:

$$u = \int_{x_0}^x P(t, y_0, z_0)dt + \int_{y_0}^y Q(x, t, z_0)dt + \int_{z_0}^z R(x, y, t)dt + C. \quad (6.6)$$

## 2.6 Bài tập

**Bài tập 6.8.** Trong các trường sau, trường nào là trường thế?

a.  $\mathbf{a} = 5(x^2 - 4xy)\mathbf{i} + (3x^2 - 2y)\mathbf{j} + \mathbf{k}$ .

b.  $\mathbf{b} = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$ .

c.  $\mathbf{c} = (x + y)\mathbf{i} + (x + z)\mathbf{j} + (z + x)\mathbf{k}$ .

*Lời giải.* a. Ta có

$$\overrightarrow{\text{rot}}\mathbf{a} = \left( \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Q & R \end{array} \right|, \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} \\ R & P \end{array} \right|, \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{array} \right| \right) = (0, 0, 26x) \neq 0$$

nên trường đã cho không phải là trường thế.

- b. Ngoài cách tính  $\overrightarrow{\text{rot}}\mathbf{b}$ , sinh viên có thể dễ dàng nhận thấy tồn tại hàm thế vị  $u = xyz + C$  nên  $\mathbf{b}$  là trường thế.

c. Ta có

$$\overrightarrow{\text{rot}}\mathbf{c} = \left( \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Q & R \end{array} \right|, \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} \\ R & P \end{array} \right|, \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{array} \right| \right) = (0, 0, 0)$$

nên  $\mathbf{c}$  là trường thế. Hàm thế vị được tính theo công thức 6.5:

$$\begin{aligned} u &= \int_{x_0}^x F_x(t, y_0, z_0)dt + \int_{y_0}^y F_y(x, t, z_0)dt + \int_{z_0}^z F_z(x, y, t)dt + C \\ &= \int_0^x tdt + \int_0^y (x + 0)dt + \int_0^z (t + y)dt + C \\ &= \frac{x^2}{2} + xy + \frac{z^2}{2} + yz + C. \end{aligned}$$

**Bài tập 6.9.** Cho  $F = xz^2\mathbf{i} + yx^2\mathbf{j} + zy^2\mathbf{k}$ . Tính thông lượng của  $F$  qua mặt cầu  $S : x^2 + y^2 + z^2 = 1$  hướng ra ngoài.



*Lời giải.* Theo công thức tính thông lượng 6.3 ta có

$$\phi = \iint_S xz^2 dydz + yx^2 dx dz + zy^2 dx dy.$$

Áp dụng công thức Ostrogradsky ta có

$$\phi = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$$

Thực hiện phép đổi biến trong toạ độ cầu

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}, \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq r \leq 1 \end{cases}, J = -r^2 \sin \theta$$

ta có

$$\phi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \int_0^1 r^2 \cdot r^2 \sin \theta dr = \frac{4\pi}{5}.$$

**Bài tập 6.10.** Cho  $\mathbf{F} = x(y+z)\mathbf{i} + y(z+x)\mathbf{j} + z(x+y)\mathbf{k}$  và  $L$  là giao tuyến của mặt trụ  $x^2 + y^2 + y = 0$  và nửa mặt cầu  $x^2 + y^2 + z^2 = 2, z \geq 0$ . Chứng minh rằng lưu số của  $\mathbf{F}$  dọc theo  $L$  bằng 0.

*Lời giải.* Theo công thức tính lưu số 6.4

$$I = \oint_L x(y+z)dx + y(z+x)dy + z(x+y)dz$$

Áp dụng công thức Stokes ta có

$$\begin{aligned} I &= \iint_S \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Q & R \end{array} \right| dydz + \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} \\ R & P \end{array} \right| dzdx + \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{array} \right| dxdy \\ &= \iint_S (z-y)dydz + (x-z)dzdx + (y-x)dxdy \\ &= 0 \text{ (theo bài tập 5.11).} \end{aligned}$$

■



---

# MỘT VÀI CHÚ THÍCH VỀ MẶT KÍ HIỆU VÀ THUẬT NGỮ

---

Để tránh hiểu nhầm và giúp độc giả thuận lợi khi đọc sách tham khảo (đặc biệt là sách tiếng Anh, theo sự hiểu biết của tác giả), cũng như là thống nhất kí hiệu với các đại lượng trong Vật lý, các kí hiệu sau đây được dùng đồng thời.

- 1) Vectơ  $i, j, k$ , theo như kí hiệu của môn Giải tích II này là  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ , tức là có thêm dấu vectơ vào các đại lượng đó. Trong Bài giảng này, các đại lượng có hướng (vectơ) được viết in đậm, chẳng hạn như  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{r}, \mathbf{F}$  hay là  $\mathbf{a}$ , để phân biệt với các đại lượng vô hướng như  $a, b, c$ .
- 2) Tích có hướng giữa hai vectơ  $\mathbf{a}$  và  $\mathbf{b}$ , theo kí hiệu trong môn Giải tích II này là  $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ , các tài liệu tham khảo khác thường kí hiệu là  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ . Tích vô hướng thì có sự thống nhất, được kí hiệu là  $\mathbf{a} \mathbf{b}$  hay là  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  (có dấu chấm ở giữa). Lý do là trong tiếng Anh, tích có hướng giữa hai vectơ gọi là *the cross product* và tích vô hướng được gọi là *the dot product*.
- 3) Tích phân đường loại I, theo như cách gọi của môn Giải tích II này, trong các tài liệu tham khảo khác có thể được gọi là tích phân đường của trường vô hướng.
- 4) Tích phân đường loại II, theo như cách gọi của môn Giải tích II này, trong các tài liệu tham khảo khác có thể được gọi là tích phân đường của trường vectơ.
- 5) Tích phân mặt loại I, theo như cách gọi của môn Giải tích II này, trong các tài liệu tham khảo khác có thể được gọi là tích phân mặt của trường vô hướng.
- 6) Tích phân mặt loại II, theo như cách gọi của môn Giải tích II này, trong các tài liệu tham khảo khác có thể được gọi là tích phân mặt của trường vectơ.
- 7) Tích phân đường loại II của trường vectơ  $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ , theo cách kí hiệu trong môn Giải tích II này là  $\int_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ , trong các tài liệu khác có thể được kí hiệu

là  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ .

- 8) Tích phân mặt loại II của trường vectơ  $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ , theo cách kí hiệu trong môn Giải tích II này là  $\iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdx dy$ , trong các tài liệu tham khảo khác có thể được kí hiệu là  $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ , chú ý rằng chữ  $\mathbf{S}$  được viết in đậm và có dấu chấm ở giữa  $\mathbf{F}$  và  $d\mathbf{S}$ , để nhằm phân biệt với tích phân mặt loại một  $\iint_S f(x, y, z)dS$ .

- 9) Các cách kí hiệu  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ ,  $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}dS$  và  $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$  này có những thuận lợi nhất định. Chẳng hạn như,

i) công thức Stokes

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{curl } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S},$$

và công thức Green

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D (\text{curl } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} dx dy.$$

nếu viết dưới dạng vectơ như trên thì bạn đọc sẽ hình dung ra công thức Stokes là một phiên bản của công thức Green trong không gian ba chiều. Tương tự như vậy là mối liên hệ giữa công thức Ostrogradsky

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}dS = \iiint_V \text{div } \mathbf{F} dx dy dz$$

và một dạng vectơ khác của công thức Green

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}ds = \iint_D \text{div } \mathbf{F} dx dy.$$

Cũng chú ý thêm là công thức Ostrogradsky còn được gọi là công thức Gauss hay Ostrogradsky - Gauss trong các tài liệu khác.

- ii) Kí hiệu  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}ds$  thường được dùng trong vật lý, vì nó thể hiện bản chất của tích phân đường này chính là công của lực biến đổi  $\mathbf{F}$  dọc theo đường cong  $C$ .

iii) Ngoài ra, kí hiệu  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  dùng để chỉ tích phân đường mà không cần phân biệt

đây là tích phân đường trong mặt phẳng  $\int_C Pdx + Qdy$  hay trong không gian

$$\int_C Pdx + Qdy + Rdz.$$

- 10) Vectơ gradient của trường vô hướng  $f$ , theo kí hiệu trong môn Giải tích II này là  $\vec{\text{grad}} f$ , các tài liệu tham khảo khác thường kí hiệu là  $\nabla f$  để thể hiện mối liên hệ với toán tử vi phân "del"

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}$$

và toán tử Laplace

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

- 11) Vectơ xoáy của trường vectơ  $\mathbf{F}$ , theo kí hiệu trong môn Giải tích II này là  $\vec{\text{rot}} \mathbf{F}$ , các tài liệu tham khảo khác thường kí hiệu là  $\text{curl } \mathbf{F}$ . Bởi vì trong tiếng Anh, curl nghĩa là xoắn hay là xoáy.
- 12) Trường thế, theo như cách gọi của môn Giải tích II này, trong các tài liệu tham khảo khác có thể được gọi là trường bảo toàn (conservative vector fields), để chỉ rõ tính chất bảo toàn (động năng + thế năng = hằng số) của trường vectơ đó.
- 13) Về định nghĩa của tích phân kép, nhiều tài liệu trình bày theo cách sau.

**Định nghĩa 6.20.** Cho hàm số  $f(x, y)$  xác định trong một miền đóng, bị chặn  $D$ . Chia miền  $D$  một cách tùy ý thành  $n$  mảnh nhỏ. Gọi các mảnh đó và diện tích của chúng là  $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$ . Trong mỗi mảnh  $\Delta S_i$  lấy một điểm tùy ý  $M(x_i, y_i)$  và thành lập tổng tích phân  $I_n = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta S_i$ . Nếu khi  $n \rightarrow \infty$  sao cho  $\max \{\Delta S_i \rightarrow 0\}$  mà  $I_n$  tiến tới một giá trị hữu hạn  $I$ , không phụ thuộc vào cách chia miền  $D$  và cách chọn điểm  $M(x_i, y_i)$  thì giới hạn ấy được gọi là tích phân kép của hàm số  $f(x, y)$  trong miền  $D$ , kí hiệu là

$$\iint_D f(x, y) dx dy.$$

Trong Bài giảng này, tác giả trình bày cách tiếp cận khác, đó là đầu tiên đi định nghĩa tích phân kép trên miền hình chữ nhật, sau đó mở rộng nó ra cho miền  $D$  bị chặn bất kì.

- 14) Một cách tương tự, về định nghĩa của tích phân bội ba, nhiều tài liệu trình bày theo cách sau.

**Định nghĩa 6.21.** Cho hàm số  $f(x, y, z)$  xác định trong một miền đóng, bị chặn  $V$  của  $\mathbb{R}^3$ . Chia miền  $V$  một cách tùy ý thành  $n$  miền nhỏ. Gọi các miền đó và thể tích của chúng là  $\Delta V_1, \Delta V_2, \dots, \Delta V_n$ . Trong mỗi miền  $\Delta_i$  lấy một điểm tùy ý  $M(x_i, y_i, z_i)$  và thành lập tổng tích phân  $I_n = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i$ . Nếu khi  $n \rightarrow +\infty$  sao cho  $\max \{\Delta V_i \rightarrow 0\}$  mà  $I_n$  tiến tới một giá trị hữu hạn  $I$ , không phụ thuộc vào cách chia miền  $V$  và cách chọn điểm  $M(x_i, y_i, z_i)$  thì giới hạn ấy được gọi là tích phân bội ba của hàm số  $f(x, y, z)$  trong miền  $V$ , kí hiệu là  $\iiint_V f(x, y, z) dV$  hay  $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$ .

Trong Bài giảng này, tác giả trình bày cách tiếp cận khác, đó là đầu tiên đi định nghĩa tích phân bội ba trên miền hình hộp chữ nhật, sau đó mở rộng nó ra cho miền  $V$  bị chặn bất kì.

- 15) Về định nghĩa của tích phân đường loại I, nhiều tài liệu trình bày theo cách sau.

**Định nghĩa 6.22.** Cho hàm số  $f(x, y)$  xác định trên một cung phẳng  $\widehat{AB}$ . Chia cung  $\widehat{AB}$  thành  $n$  cung nhỏ, gọi tên và độ dài của chúng lần lượt là  $\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_n$ . Trên mỗi cung  $\Delta s_i$  lấy một điểm  $M_i$  bất kì. Giới hạn, nếu có, của  $\sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta s_i$  khi  $n \rightarrow \infty$  sao cho  $\max \Delta s_i \rightarrow 0$  không phụ thuộc vào cách chia cung  $\widehat{AB}$  và cách chọn các điểm  $M_i$  được gọi là tích phân đường loại một của hàm số  $f(x, y)$  dọc theo cung  $\widehat{AB}$ , kí hiệu là  $\int_{\widehat{AB}} f(x, y) ds$ .

Trong Bài giảng này, tác giả trình bày cách tiếp cận xuất phát từ bài toán thực tế là tính khối lượng của một đường cong  $C$  cho bởi phương trình vectơ

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), a \leq t \leq b.$$

Khi đó ta chủ động chia  $[a, b]$  thành  $n$  đoạn bằng nhau và định nghĩa tích phân đường giống như cách đã làm với tích phân xác định  $\int_a^b f(x) dx$ .

- 16) Về định nghĩa của tích phân đường loại II, nhiều tài liệu trình bày theo cách sau.

**Định nghĩa 6.23.** Chia cung  $\widehat{AB}$  thành  $n$  cung nhỏ  $\Delta s_i$  bởi các điểm chia  $A_0 = A, A_1, A_2, \dots, A_n = B$ . Gọi tọa độ của vectơ  $\overrightarrow{A_{i-1}A_i} = (\Delta x_i, \Delta y_i)$  và lấy điểm  $M_i$  bất kì trên mỗi cung  $\Delta s_i$ . Giới hạn, nếu có, của tổng  $\sum_{i=1}^n [P(M_i) \Delta x_i + Q(M_i) \Delta y_i]$  sao cho  $\max \Delta x_i \rightarrow 0$ , không phụ thuộc vào cách chia cung  $\widehat{AB}$  và cách chọn các điểm  $M_i$  được gọi là tích phân đường loại hai của các hàm số  $P(x, y), Q(x, y)$  dọc theo cung  $\widehat{AB}$ , kí hiệu là  $\int_{\widehat{AB}} P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ .

Trong Bài giảng này, tác giả trình bày cách tiếp cận xuất phát từ bài toán trong Vật lý là tính công của một lực biến đổi và định nghĩa tích phân đường loại II thông qua mối liên hệ với tích phân đường loại I.

17) Về định nghĩa của tích phân mặt loại I, nhiều tài liệu trình bày theo cách sau.

**Định nghĩa 6.24.** Cho hàm số  $f(x, y, z)$  xác định trên mặt cong  $S$ . Chia mặt cong  $S$  thành  $n$  mặt nhỏ  $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$ . Trên mỗi  $\Delta S_i$  lấy một điểm  $M_i$  bất kì. Giới hạn, nếu có, của  $\sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta S_i$  khi  $n \rightarrow \infty$  và  $\max_{1 \leq i \leq n} d(\Delta S_i) \rightarrow 0$  không phụ thuộc vào cách chia mặt cong  $S$  và cách chọn các điểm  $M_i$  được gọi là tích phân mặt loại I của hàm số  $f(M)$  trên mặt cong  $S$ , kí hiệu là

$$\iint_S f(x, y, z) dS.$$

Trong Bài giảng này, tác giả trình bày cách tiếp cận xuất phát từ bài toán tính khối lượng của mặt cong  $S$  và định nghĩa tích phân mặt loại I thông qua tích phân kép và công thức tính diện tích mặt.

18) Về định nghĩa của tích phân mặt loại II, nhiều tài liệu trình bày theo cách sau.

**Định nghĩa 6.25.** Cho một mặt cong định hướng  $S$  trong miền  $V \subset \mathbb{R}^3$  và  $n = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$  là vectơ pháp tuyến đơn vị theo hướng dương đã chọn của  $S$  tại điểm  $M(x, y, z)$ . Giả trường vectơ  $\vec{F}(M) = (P(M), Q(M), R(M))$  biến thiên liên tục trên  $V$ , nghĩa là các tọa độ  $P(M), Q(M), R(M)$  của nó là những hàm số liên tục trên  $V$ . Chia mặt  $S$  thành  $n$  mặt cong nhỏ, gọi tên và cả diện tích của chúng lần lượt là  $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$ . Trên mỗi  $\Delta S_i$  lấy một điểm  $M_i$  bất kì và gọi vectơ pháp tuyến đơn vị theo hướng dương đã chọn của nó là  $n_i = (\cos \alpha_i, \cos \beta_i, \cos \gamma_i)$ .

Giới hạn, nếu có, của tổng  $\sum_{i=1}^n [P(M_i) \cos \alpha_i + Q(M_i) \cos \beta_i + R(M_i) \cos \gamma_i] \Delta S_i$  được gọi là tích phân mặt loại II của các hàm số  $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$  trên mặt  $S$ , và được kí hiệu là:

$$\iint_S P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dzdx + R(x, y, z) dxdy.$$

Trong Bài giảng này, tác giả trình bày cách tiếp cận dựa trên bài toán tính khối lượng chất lỏng chảy qua mặt  $S$  trên một đơn vị thời gian và định nghĩa tích phân mặt loại II thông qua tích phân mặt loại I.