§11. Eilenberg-Steenrod 公理.

[E-S] Foundations of Algebraic Topology.

回顾范畴的概念:

定义. 一个范畴 $\mathcal{C}$ 是指如下数据:

① 集合 $Ob(\mathcal{C})$ ② 集合 $Mor(\mathcal{C})$.

③ 映射 (source) $s: Mor(\mathcal{C}) \to Ob(\mathcal{C})$.

$$f \mapsto s(f).$$

映射 (target) $t: Mor(\mathcal{C}) \to Ob(\mathcal{C})$

$$f \mapsto t(f).$$

($\forall f \in Mor(\mathcal{C})$, $s(f) = X$, $t(f) = Y$, 则记

$$f: X \to Y$$).

$\forall X, Y \in Ob(\mathcal{C})$, 记 $Hom_{\mathcal{C}}(X, Y) = \{f \in Mor(\mathcal{C}) \mid s(f) = X, t(f) = Y\}$

④ $\forall X, Y, Z \in Ob(\mathcal{C})$，有映射（复合映射）.

$$\circ: Hom_{\mathcal{C}}(X,Y) \times Hom_{\mathcal{C}}(Y,Z) \longrightarrow Hom_{\mathcal{C}}(X,Z).$$

$$(f, g) \longmapsto g\circ f.$$

⑤ $\forall X \in Ob(\mathcal{C})$，$\exists$元素 $1_X \in Hom_{\mathcal{C}}(X,X)$.

满足下面的条件：

(1)（结合律）. $\forall X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} W$. $(h\circ g)\circ f = h\circ(g\circ f)$

(2)（恒等态射）. $\forall f: X \to Y$. $f\circ 1_X = f$，$1_Y \circ f = f$.

定义. 设 $\mathcal{C}$ 为一个 category. $\mathcal{C}$ 的一个 subcategory $\mathcal{S}$，是指一个范畴，s.t. $Ob(\mathcal{S}) \subset Ob(\mathcal{C})$，$Mor(\mathcal{S}) \subset Mor(\mathcal{C})$，满足：① $\mathcal{C}$ 中的复合映射 "$\circ$" 在 $\mathcal{S}$ 上的限制即为 $\mathcal{S}$ 中复合映射.

（1_X 也为 $\mathcal{S}$ 中恒等态射 $\Longleftarrow$）② $\forall X \in Ob(\mathcal{S})$，$1_X$（$X$ 在 $\mathcal{C}$ 中的恒等态射）$\in Mor(\mathcal{S})$.

例. $\mathcal{T}op(2)$.

Objects: (X, A), X: top sp. $A \subset X$ 为子空间.

Morphisms: $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op(2)}((X,A),(Y,B)) = \left\{ f: X \to Y \;\middle|\; \begin{array}{l} f \text{连续} \\ f(A) \subset B \end{array} \right\}$.

$\circ$: 映射复合.

$1_{(X,A)}$: 恒等映射.

例: $\mathcal{T}$

Objects: (X, A), X: top sp. $A \subset X$ 为子空间,

(X, A) 为一个 triangulable pair.

Morphisms: $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}((X,A),(Y,B)) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op(2)}((X,A),(Y,B))$.

$\circ$: 映射复合.

$1_{(X,A)}$: 恒等映射.

例：Ab.

Objects： abel 群

Morphisms： 群同态.

$\circ$ ： 复合.

1_G ： 恒等同态..

定义. 设 $\mathcal{C}$、$\mathcal{D}$ 为两个 category. 一个从 $\mathcal{C}$ 到 $\mathcal{D}$ 的 functor

$h: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$，是指如下数据：

① $h: Ob(\mathcal{C}) \to Ob(\mathcal{D})$.（映射）.

② $\forall X, Y \in Ob(\mathcal{C})$, $h: Hom_{\mathcal{C}}(X, Y) \to Hom_{\mathcal{D}}(h(X), h(Y))$.

满足：(1) $\forall X \in Ob(\mathcal{C})$, $h(1_X) = 1_{h(X)}$.

(2) $h(f \circ g) = h(f) \circ h(g)$, $\forall X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} Z$ in $\mathcal{C}$.

例：π_1 : $Top^{\circ} \to Grp$，Π : $Top \to$ Groupoid.

例：$K: \mathcal{T}op(2) \longrightarrow \mathcal{T}op(2)$.

$K: Ob(\mathcal{T}op(2)) \longrightarrow Ob(\mathcal{T}op(2))$

$(X, A) \longmapsto (A, \phi)$.

$K: Hom_{\mathcal{T}op(2)}((X,A),(Y,B)) \longrightarrow Hom_{\mathcal{T}op(2)}(\underset{(A,\phi)}{\underset{\|}{K(X,A)}}, \underset{(B,\phi)}{\underset{\|}{K(Y,B)}})$.

"$f: (X,A) \to (Y,B)$" $\longmapsto$ "$f|_A : (A,\phi) \to (B,\phi)$"

定义（自然变换）设 $F, G: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 为两个函子，从 F 到 G 的 natural transformation.

一个自然变换（$\tau: F \to G$），是指数据：

$$\{\tau_X : F(X) \to G(X) \mid X \in Ob(\mathcal{C})\}$$

满足：$\forall X \xrightarrow{f} Y$ in $\mathcal{C}$，有交换图表：

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\tau_X"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(Y) \arrow[r, "\tau_Y"] & G(Y) \end{tikzcd}$$

Eilenberg-Steenrod 公理

一个定义在拓扑空间对上的同调理论是指如下数据：

① $\{$函子 $h_n : \mathcal{T}op(2) \to Ab \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

② $\{$自然变换 $\partial_n : h_n \to h_{n-1} \circ k \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

满足下列公理：

(1) (同伦公理) 若 $f, g : (X, A) \to (Y, B)$ 同伦，则 $h_n(f) = h_n(g)$, $\forall n$.

(2) (正合公理) $\forall (X, A) \in Ob(\mathcal{T}op(2))$, 同态列：

$$\to h_{n+1}(X, A) \xrightarrow{\partial_{n+1}} h_n(A, \phi) \to h_n(X, \phi) \to h_n(X, A) \to \cdots$$

是正合的. $\left(\partial_{n+1} : h_{n+1}(X, A) \to h_n \circ k(X, A) = h_n(A, \phi)\right)$

(3) (切除公理) $\forall (X, A) \in Ob(\mathcal{T}op(2))$, 设 $U \subset A$, $\mathrm{int}(A) \supset \overline{U}$,

则 $h_n(X \setminus U, A \setminus U) \to h_n(X, A)$ 为同构.

(4) (维数公理) 若 p 为一个点，则 $h_n(p, \phi) \cong 0$, if $n \neq 0$.

Rmk. $\forall$ top. sp. X, 记 $h_n(X) = h_n(X, \phi)$.

$\forall f: (X, A) \to (Y, B)$, 记 $f_* = h_n(f)$.

h_n 函子: ① $\forall (X, A) \xrightarrow{f} (Y, B) \xrightarrow{g} (Z, C)$.

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*.$$

② 对于 $1: (X, A) \to (X, A)$. $1_* = Id$.

∂_n 为自然变换: $\partial_n: h_n \to h_{n-1} \circ K$.

$\forall (X, A) \in Ob(\mathcal{T}op(2))$

$\partial_n: h_n(X, A) \to h_{n-1} \circ K(X, A) = h_{n-1}(A, \phi) = h_{n-1}(A)$.

$\forall (X, A) \xrightarrow{f} (Y, B)$,

$$\begin{tikzcd} h_n(X, A) \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "f_*"'] & h_{n-1}(A) \arrow[d, "(f|_A)_*"] \\ h_n(Y, B) \arrow[r, "\partial_n"] & h_{n-1}(B) \end{tikzcd}$$

例30. 定义 $H_n: \mathcal{T}op(2) \to Ab$.

$$H_n: Ob(\mathcal{T}op(2)) \longrightarrow Ob(Ab)$$
$$(X, A) \longmapsto H_n(X, A).$$

$$H_n: Mor(\mathcal{T}op(2)) \longrightarrow Mor(Ab)$$
$$\text{“}(X,A) \xrightarrow{f} (Y,B)\text{''} \longmapsto \text{“} f_*: H_n(X,A) \to H_n(Y,B)\text{''}$$

$$\left.\begin{aligned} (f\circ g)_* &= f_* \circ g_* \\ (Id_X)_* &= Id \end{aligned}\right\} \Rightarrow H_n \text{ 为一个函子}, \forall n \in \mathbb{Z}.$$

定义: $\partial_n: H_n \longrightarrow H_{n-1} \circ K$.

∂_n 为自然变换.

$\forall (X, A)$, $\partial_n: H_n(X,A) \to H_{n-1}\circ K(X,A) = H_{n-1}(A)$

为连接同态.

显然 $\forall (X,A) \xrightarrow{f} (Y,B)$, 有交换图表:

$$\begin{tikzcd} H_n(X,A) \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "f_*"] & H_{n-1}(A) \arrow[d, "(f|_A)_*"] \\ H_n(Y,B) \arrow[r, "\partial_n"] & H_{n-1}(B) \end{tikzcd}$$

① 同伦公理，已证（prism operator）.

② 正合公理，已证（短正合列诱导长正合列）.

③ 切除公理，已证（$\mathcal{U}$-small chain complex）.

④ 维数公理，已算（直接计算）.

例. 设 G 为一个 Abel 群，$\forall (X,A) \in Ob(\mathcal{T}op(2))$，定义：

$H_n(X,A;G)$ 为：

$$\cdots \to S_{n+1}(X,A)\otimes_{\mathbb{Z}} G \xrightarrow{\partial_{n+1}\otimes 1_G} S_n(X,A)\otimes_{\mathbb{Z}} G \xrightarrow{\partial_n \otimes 1_G} S_{n-1}(X,A)\otimes_{\mathbb{Z}} G \to \cdots$$

的第 n 个同调群.（G-系数的第 n 个 (X,A) 的奇异同调群）

$\forall f:(X,A)\to(Y,B)$.

$f_\#: S_\cdot(X,A)\longrightarrow S_\cdot(Y,B)$

$f_\#\otimes 1_G: S_\cdot(X,A)\otimes_{\mathbb{Z}} G \longrightarrow S_\cdot(Y,B)\otimes_{\mathbb{Z}} G$.

$\rightsquigarrow f_*: H_n(X,A;G)\longrightarrow H_n(Y,B;G)$

① $(f\circ g)_* = f_*\circ g_*$

② $\forall 1_{(X,A)}:(X,A)\to(X,A)$,
$(1_{(X,A)})_* = Id$.

$\Rightarrow$ 定义 $H_n: \mathrm{Top}(2) \to \mathrm{Ab}$.

$$\mathrm{Ob}(\mathrm{Top}(2)) \to \mathrm{Ob}(\mathrm{Ab}).$$
$$(X, A) \longmapsto H_n(X, A; G)$$
$$\mathrm{Mor}(\mathrm{Top}(2)) \to \mathrm{Mor}(\mathrm{Ab})$$
$$f \longmapsto f_*$$

则 H_n 为函子, $\forall n$.

$\underline{\forall (X, A)} \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Top}(2))$, 有短正合列:

$$0 \to S_\cdot(A) \to S_\cdot(X) \to S_\cdot(X, A) \to 0$$

分裂 (i.e. $\forall n$, $0 \to S_n(A) \to S_n(X) \to S_n(X, A) \to 0$ 分裂)

$S_n(X, A)$: 自由Abel群.

$\Rightarrow 0 \to S_\cdot(A) \otimes_{\mathbb{Z}} G \to S_\cdot(X) \otimes_{\mathbb{Z}} G \to S_\cdot(X, A) \otimes_{\mathbb{Z}} G \to 0$ 正合.

$\rightsquigarrow$ 长正合列:

$$\to H_n(A, \phi; G) \to H_n(X, \phi; G) \to H_n(X, A; G) \xrightarrow{\partial_n} \underset{\substack{\| \\ H_{n-1} \circ K(X, A)}}{H_{n-1}(A, \phi; G)}.$$

Lemma 5' $\Longrightarrow$ $\{\partial_n : H_n(X,A) \to H_{n-1}(A,\phi) \mid (X,A) \in Ob(\mathcal{T}op(2))\}$

定义了自然变换 $\partial_n : H_n \to H_{n-1} \circ K$，$\forall n \in \mathbb{Z}$.

Claim: $\{H_n, \partial_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ 满足 E-S 公理.

(Ref. [Munkres]. Elements of Algebraic Topology)

系数群.

定义：设 $\{h_n, \partial_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ 为一个同调理论，定义 $h_0(\{pt\}, \phi)$ 为该同调理论的系数群.

reduced 同调群.

定义：$\forall$ top sp. X，定义 $\widetilde{h}_n(X) := \mathrm{Ker}\left(h_n(\pi) : h_n(X) \to h_n(\{pt\})\right)$，其中 $\pi : X \to \{pt\}$ 为唯一的映射. 称 $\widehat{h}_n(X)$ 为 X 的第 n 个 reduced 同调群.

命题16. 设 $(X,A)\in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}op(2))$，则有长正合列：

$$\cdots \longrightarrow \tilde{h}_n(A) \longrightarrow \tilde{h}_n(X) \longrightarrow h_n(X,A) \longrightarrow \tilde{h}_{n-1}(A) \longrightarrow \cdots$$

证明：由正合公理，有长正合列：

对 (X,A)：

$$\longrightarrow h_n(A) \longrightarrow h_n(X) \longrightarrow h_n(X,A) \longrightarrow h_{n-1}(A) \longrightarrow \cdots$$

对 $(\{pt\},\{pt\})$：

$$\longrightarrow h_n(\{pt\}) \xrightarrow{\cong} h_n(\{pt\}) \longrightarrow h_n(\{pt\},\{pt\}) \longrightarrow h_{n-1}(\{pt\}) \xrightarrow{\cong} h_{n-1}(\{pt\}) \longrightarrow \cdots$$

$h_n(\{pt\},\{pt\}) = 0.$

$\Rightarrow h_n(\{pt\},\{pt\}) \cong 0,\ \forall n\in\mathbb{Z}.$

又由 h_n 是函子，+ ∂_n 为自然变换，有交换图表

$$\begin{tikzcd}
\arrow[r] & h_n(A) \arrow[r] \arrow[d, "\pi_*"'] & h_n(X) \arrow[r] \arrow[d, "\pi_*"'] & h_n(X,A) \arrow[r] \arrow[d, "\pi_*"] & h_{n-1}(A) \arrow[r] \arrow[d, "\pi_*"] & \cdots \\
\arrow[r] & h_n(\{pt\}) \arrow[r] & h_n(\{pt\}) \arrow[r] & 0 \arrow[r] & h_{n-1}(\{pt\}) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

取 $\ker\pi_*$，即得所需长正合列。 #

更多的命题 from E-S 公理，见：

Eilenberg Steenrod : Foundations of Algebraic Topology.

问题：Eilenberg-Steenrod 公理多大程度上决定了同调理论？

定理 9.（唯一性定理）设 $\{h_n, \partial_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$，$\{h'_n, \partial'_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ 为两个同调理论，系数群分别为 G，G'，设有同态 $\phi_0 : G \to G'$.

则：$\forall q \in \mathbb{Z}$，$(X, A) \in Ob(\mathcal{T}(2))$，存在唯一的同态：

$$\phi_{q,X,A} : h_n(X, A) \to h'_n(X, A),$$

s.t. (1) $\phi_{0,\{pt\},\emptyset} = \phi_0$.

(2) $\{\phi_{q,X,A} \mid (X, A) \in Ob(\mathcal{T}(2))\}$ 给出了从 $h_n|_{\mathcal{T}(2)} : \mathcal{T}(2) \to Ab$ 到 $h'_n|_{\mathcal{T}(2)} : \mathcal{T}(2) \to Ab$ 自然变换.

(3) $\forall (X,A) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}(2))$, 有交换图表:

$$
\begin{tikzcd}
h_q(X,A) \arrow[r, "\phi_{q,X,A}"] \arrow[d, "\partial_q"'] & h'_q(X,A) \arrow[d, "\partial'_q"] \\
h_{q-1}(A,\phi) \arrow[r, "\phi_{q-1,A,\phi}"] & h'_{q-1}(A,\phi)
\end{tikzcd}
$$

进一步,

若 $\phi_0: G \to G'$ 为同构, 则 $\phi_{q,X,A}: h_q(X,A) \to h'_q(X,A)$ 为同构, $\forall (X,A) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}(2))$, $\forall q \in \mathbb{Z}$.