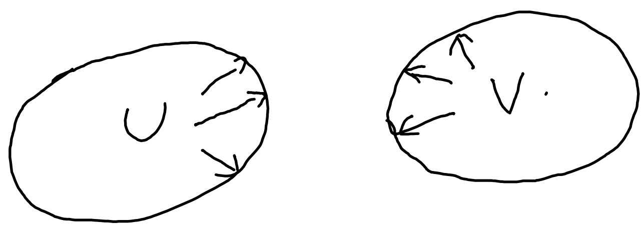
5. 连通性 (connectedness).

定义: X: top space. X 称为是不连通的 (disconnected).

if: $X = U \sqcup V$, $U \underset{\text{open}}{\subset} X$, $V \underset{\text{open}}{\subset} X$, $U, V \neq \phi$.

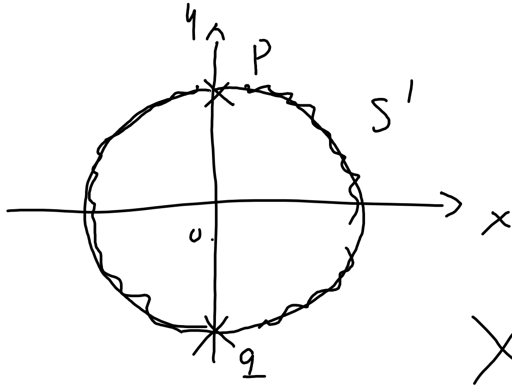
闭集



例: $X = \underbrace{[0, 2]}_{\text{后面证: 连通}}$, $\quad \underbrace{[0, 1)}_{\text{不是闭集}} \sqcup [1, 2]$.

例: $X = \underline{[0, 1)} \cup \underline{(1, 2]}$. $X = \underline{((-1, 1) \cap X)} \sqcup \underline{((1, 3) \cap X)}$

例：



$X = S^1 \setminus \{p, q\}$

$X = \underline{\{x<0\}\cap X} \sqcup \underline{\{x>0\}\cap X}$

定义：设 X: top. space，称 X 是连通，if

若 $X = U \sqcup V$，U, V 开，则 U, V 中至少有一个为空集.

命题：设 X: top space，则下列等价.

a) X 连通

b) X 中既开又闭集只能为 ϕ，X.

c). 不存在一个连续的满射 $f: X \longrightarrow Y$，且 Y 中元素大于等于 2

discrete topology.

Pf. (a) $\Rightarrow$ (b)，若 $U \underset{\substack{\text{open}\\ \text{closed}}}{\subseteq} X$，$X \setminus U \underset{\substack{\text{open}\\ \text{closed}}}{\subseteq} X$，$\Rightarrow X = U \sqcup (X \setminus U)$

(b) $\Rightarrow$ (c)，假设存在连续满射

$$f: X \longrightarrow Y. \qquad |Y| \geq 2 \text{ discr. top.}$$

任取 $\underbrace{y}_{\text{开集, 闭集}} \in Y. \Rightarrow \underbrace{\boxed{f^{-1}(y)}}_{\text{既开又闭}} \neq X.$

$\Rightarrow f^{-1}(y) = \phi$. 与 f 为满射矛盾.

(c) $\Rightarrow$ (a). 假设 $X = U \amalg V$， $U, V \underset{\text{open}}{\subset} X$， $U, V \neq \phi$.

令 $f: X \longrightarrow \underbrace{\{0, 1\}}$. $\longrightarrow$ discrete top.

$$x \longmapsto f(x) = \begin{cases} 1, & x \in U. \\ 0, & x \in V. \end{cases}$$

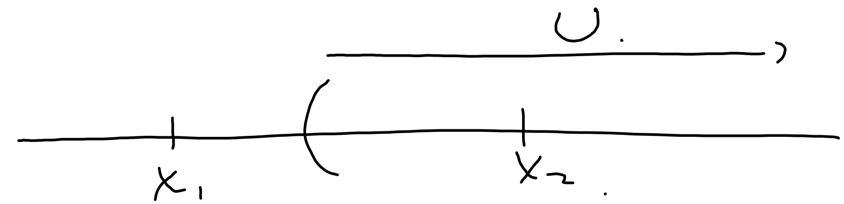
$f^{-1}(1) = U$, $\quad f^{-1}(0) = V$

$\Rightarrow f$ 为一个连续满射. 矛盾. #

命题：$\mathbb{R}$（欧氏拓扑）是连通的.

Pf. 假设 $\mathbb{R}$ 不连通，i.e. $\exists U \underset{\substack{\text{open}\\ \text{closed}}}{\subset} \mathbb{R}$，$U \neq \phi$，$U \neq \mathbb{R}$.

$\Rightarrow \exists x_1 \in \mathbb{R} \setminus U$，$\exists x_2 \in U$.（不妨设 $x_1 < x_2$）



考虑 $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{l} x \geq x_1 \\ [x_1, x] \subset \mathbb{R} \setminus U \end{array} \right\}$.

$S \neq \phi$.（$x_1 \in S$）.

S 上有界，（$x_2 \in U$. $[x_1, x_2] \not\subset \mathbb{R} \setminus U$. $\forall y > x_2$，$[x_1, y] \not\subset \mathbb{R} \setminus U \Rightarrow x_2$ 为 S 上界）

$\Rightarrow S$ 有上确界，$s = \sup S$.

① $s \in U$，$\xRightarrow{U\text{开}} \exists \delta > 0$，$(s-\delta, s+\delta) \subset U$.

$\Rightarrow s - \frac{\delta}{2} \in U$. $\Rightarrow s - \frac{\delta}{2}$ 为 S 一个上界，矛盾

② $s \notin U$，$\xRightarrow{U\text{闭}} \mathbb{R} \setminus U$ 开，$\exists \delta > 0$，s.t. $(s-\delta, s+\delta) \subset \mathbb{R} \setminus U$.

$\Rightarrow \exists s_1 \in S$，$s - \delta < s_1 \leq s$，$\Rightarrow [x_1, s_1] \subset \mathbb{R} \setminus U$.

$\Rightarrow [x_1, s + \frac{\delta}{2}] \subset \mathbb{R} \setminus U$ 矛盾 #

命题：$X\subset\mathbb{R}$ 是连通的 $\Longleftrightarrow$ X 为一个区间.

「定义. X top sp. $Y\subset X$, 称 Y 是连通的, 若 Y 在子空间拓扑下连通。」

Pf. "$\Leftarrow$" 与刚才证明一样.

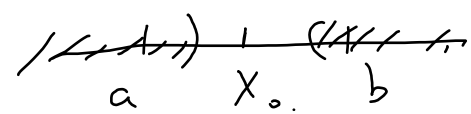
"$\Rightarrow$" 若 X 不是区间.

$\Rightarrow \exists\, a, b\in X\ (a<b)$, s.t. $\exists\, x_0\in\mathbb{R}$, $a<x_0<b$,

且 $x_0\notin X$

令 $U=(-\infty, x_0)\cap X$

$V=(x_0, +\infty)\cap X$.



$\Rightarrow X = U\sqcup V$. $U, V \underset{\text{open}}{\subset} X$,

$a\in U \Rightarrow U\neq\varnothing$

$b\in V \Rightarrow V\neq\varnothing$.

#

连通性为拓扑不变性

已知一个拓扑不变性：紧性.

命题：X、Y：top sp，$f: X \to Y$ 连续，X 连通，$f(X)$ 也是连通.

Pf

$f: X \to Y$ 连续

$\Rightarrow f: X \to f(X)$ 连续满射.（$f(X)$ 子空间拓扑.）

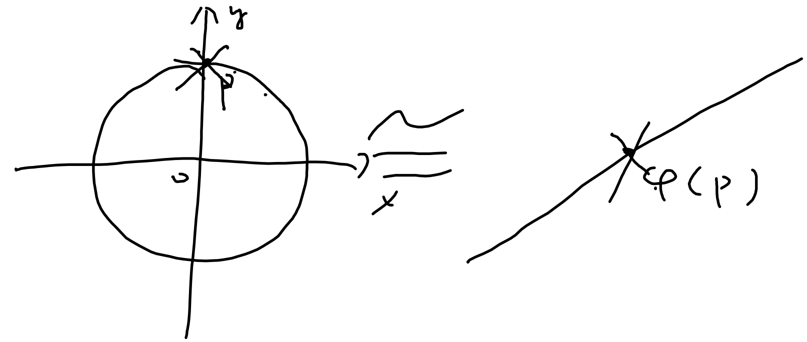
$\forall\, U \subset f(X)$ 既开又闭，且非空，

$f^{-1}(U)$ 既开又闭，$f^{-1}(U)$ 非空 $\Rightarrow f^{-1}(U) = X$.

$\Rightarrow \underline{U = f(X)}$. $\Rightarrow f(X)$ 连通的 #.

推论：若 $X \cong Y$（同胚），则 X 连通 $\Leftrightarrow$ Y 连通.

例：证明：$S^1 \not\cong \mathbb{R}$.

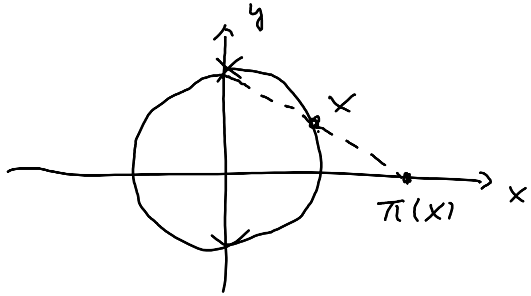


Pf 1. S^1 紧，$\mathbb{R}$ 不是紧.

$\Rightarrow S^1 \not\cong \mathbb{R}$ #.

Pf 2. 假设 $\varphi: S^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ 同胚

取 $p=(0,1)$. $\varphi|_{S^1\setminus\{p\}}: \underbrace{S^1\setminus\{p\}}_{\text{连通}} \longrightarrow \underbrace{\mathbb{R}\setminus\{\varphi(p)\}}_{\text{不连通}}$ 为同胚.

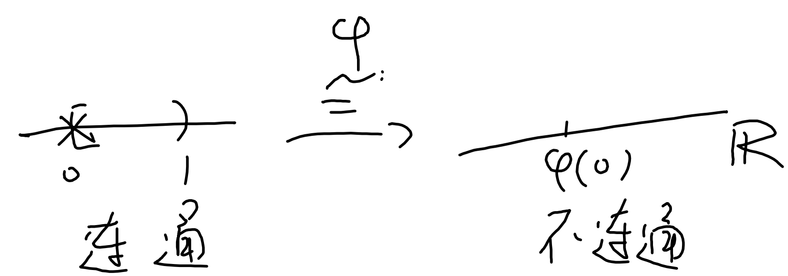


$S^1\setminus\{p\} \xrightarrow[\cong]{\pi} \mathbb{R}$

$\uparrow$ 连通

$\Rightarrow$ 矛盾. #

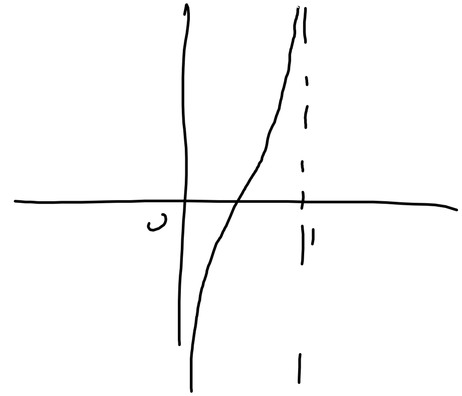
例：证明：$[0,1) \not\cong \mathbb{R}$. Pf.



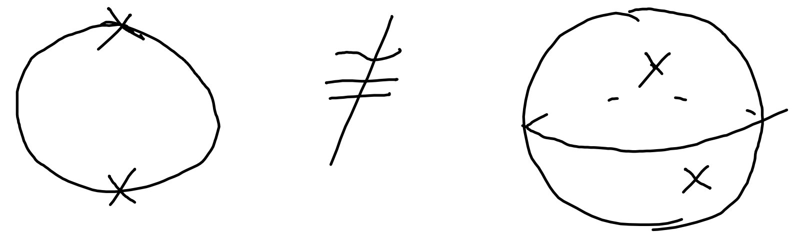
#

例：$(0,1) \cong \mathbb{R}$.

$x \longmapsto \tan(\pi(x-\frac{1}{2}))$.



例：$S^1 \not\cong S^2$



不连通

$\boxed{\text{只要证：} S^2 \setminus \{p_1, p_2\} \text{ 连通}}$.

$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$\cong$

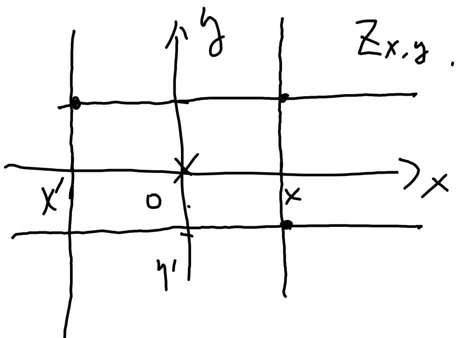
只要证 $\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$ 连通

$S^2 \setminus \{p_1\} \cong \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow S^2 \setminus \{p_1, p_2\} \cong \mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$.

$\xRightarrow{\text{命题}} Z_{x,y}$ 连通.

$Z_{x,y} = (\{x\} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \{y\})$



$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} = \bigcup_{x \neq 0, y \neq 0} Z_{x,y}$.

$Z_{x,y} \cap Z_{x',y'}$

$(x',y), (x,y')$

$\xRightarrow{\text{命题}} \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 连通.

命题：X : top. sp. $\{F_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 为 X 的一族连通子集，且两两相交非空，且 $X=\bigcup\limits_{\alpha\in I}F_\alpha$，则 X 连通

Pf. $\forall\, U \underset{\substack{\text{open}\\ \text{closed}}}{\subset} X$，$U\neq\phi$，只要证 $U=X$.

假设 $U\neq X$，$X\setminus U\neq\emptyset$.

$$\boxed{X=\bigcup_{\alpha\in I}F_\alpha} \overset{①}{\Longrightarrow} U=\bigcup_{\alpha\in I}(F_\alpha\cap U)$$

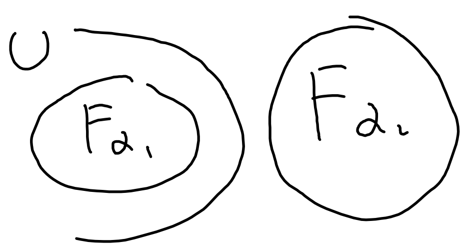
$\phi\neq U$

$\Longrightarrow \exists\,\alpha_1\in I$, s.t. $F_{\alpha_1}\cap U\neq\phi \xRightarrow{F_{\alpha_1}\text{连通}} F_{\alpha_1}\cap U=F_{\alpha_1}$

F_{α_1} 的 $\left\{\begin{array}{l}\text{开集}\\ \text{闭集}\end{array}\right.$

$\Longrightarrow U\supset F_{\alpha_1}$

②. $(X\setminus U)=\bigcup\limits_{\alpha\in I}F_\alpha\cap(X\setminus U) \Longrightarrow \exists\,\alpha_2$, s.t. $F_{\alpha_2}\subset X\setminus U$



$\Longrightarrow F_{\alpha_1}\cap F_{\alpha_2}=\phi$.

$\Longrightarrow$ 矛盾 $\Longrightarrow U=X$ #

命题：X, Y connected top spaces.

则 $X \times Y$ connected.

Pf. $Z_{x,y} = (\underbrace{\{x\} \times Y}_{\cong\, Y}) \cup (\underbrace{X \times \{y\}}_{\cong\, X}) \Rightarrow Z_{x,y}$ 连通.

$$X \times Y = \bigcup_{(x,y) \in X \times Y} Z_{x,y} \qquad \phi \neq Z_{x,y} \cap Z_{x',y'} \ni (x', y)$$

上一命题 $\Rightarrow X \times Y$ 连通. #

例：$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2, \Rightarrow \cdots \Rightarrow \mathbb{R}^n$ 连通

例：$B(0;1) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1 \}$ 连通

$$B(0;1) \cong \mathbb{R}^n. \qquad x \longmapsto \frac{x}{1 - \|x\|}.$$

$$y = \frac{x}{1 - \|x\|} \Rightarrow \|y\| = \frac{\|x\|}{1 - \|x\|} \Rightarrow \|x\| = \frac{\|y\|}{1 + \|y\|}.$$

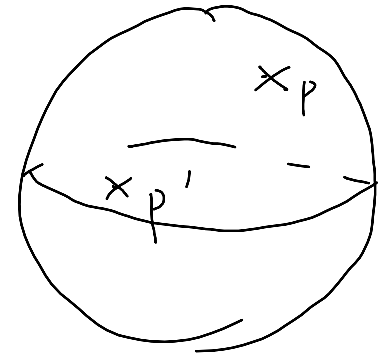
$$\Rightarrow x = \frac{y}{1 + \|y\|}$$

例：S^2 连通.

(方法一). $S^2\setminus\{p\} \cong \mathbb{R}^2$ 连通.

$$S^2 = (S^2\setminus\{p\}) \cup (S^2\setminus\{p'\})$$

$(p\neq p')$



上上一命题 $\Rightarrow$ S^2 是连通的.

(方法二). 观察：$S^2 = \overline{\underbrace{S^2\setminus\{p\}}_{\text{连通}}}$

若记：

命题：X: top, $Y\subset X$ 连通, 则 $\overline{Y}$ 连通.

则 $\Rightarrow$ S^2 连通. #

命题之证明：设 $\overline{Y} = U \sqcup V$, $U, V \underset{\text{open}}{\subset} \overline{Y}$, $U,V\neq\emptyset$.

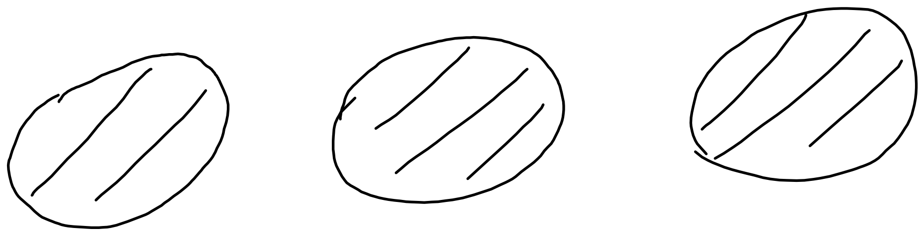
$$\Rightarrow Y = \underline{(Y\cap U)} \sqcup \underline{(Y\cap V)} \Rightarrow Y\cap U = Y \text{ or } Y\cap V = Y.$$

不妨设 $Y\cap U = Y$.

$\Rightarrow Y \subset U$.

注意 U 为 X 中闭集

$\Rightarrow \overline{Y} \subset U. \Rightarrow \overline{Y} = U. \Rightarrow V = \emptyset$ 矛盾 #.



Connected component

定义: X: top space, 称 $Y \subset X$ 为 X 的一个连通分支,

iff. ① Y 连通

② $\forall Y' \subset X$, 连通, 且 $Y' \supset Y$, 则 $Y = Y'$.

命题: (连通分支存在性). 设 X: top sp. 则 X 可表为若干个连通分支之无交并.

Pf. 固定 $x_0 \in X$, $\zeta = \{F \subset X \mid F \text{ 连通}, x_0 \in F\}$

$\mathcal{S} \neq \emptyset$.

令 $X_{x_0} = \bigcup\limits_{F\in \mathcal{S}} F \Rightarrow X_{x_0}$ 连通

$\forall\, Y \subset X$ 为包含 X_{x_0} 的连通集.

$Y \supset X_{x_0} \ni x_0 \Rightarrow Y \in \mathcal{S}$.

$\Rightarrow Y = X_{x_0} \Rightarrow X_{x_0}$ 为 X 中的一个连通分支.

$X = \bigcup\limits_{x_0\in X} X_{x_0}$

剔除重复的连通分支后,
设 $\{X_{x_i} \mid i\in I\}$ 为互不相交的连通分支 则

$X = \coprod\limits_{i\in I} X_{x_i}$.

#

「观察: 连通分支之间关系:

X_{x_1}, X_{x_2}.

① $X_{x_1}\cap X_{x_2}=\emptyset$

② $X_{x_1}\cap X_{x_2}\neq\emptyset \Rightarrow X_{x_1}=X_{x_2}$.

($X_{x_1}\cup X_{x_2}$ 连通)

$X_{x_1} \subset X_{x_1}\cup X_{x_2} \supset X_{x_2}$.

Rmk. 在分解 $X = \coprod_{i \in I} X_{x_i}$ 中，$\{X_{x_i} \mid i \in I\}$ 已经是 X 的全部连通分支。

刚才错误的反例：$\mathbb{R} = \coprod_{x \in \mathbb{R}} \{x\}$

$\forall\, Y \subset X$ 为 X 的连通分支，

$$Y = \underline{\coprod_{i \in I} \underline{(Y \cap X_{x_i})}\ Y\text{中闭集}}.$$

「注意：由连通分支的定义，连通分支必为闭集。

Pf. 设 $F \subset X$ 为连通分支。

$\overline{F}$ 连通，$\overline{F} \supset F \Rightarrow \overline{F} = F \Rightarrow F$ 闭」

设 $y_0 \in Y \subset X \Rightarrow \exists\, i_0$, s.t. $y_0 \in X_{i_0}$.

$\Rightarrow \underset{X_{i_0}}{\underbrace{Y}}$ 为包含 y_0 的连通分支

$\Rightarrow \underset{Y}{\underbrace{Y \cup \underset{X_{i_0}}{\underbrace{X_{i_0}}}}}$ 连通 $\Rightarrow Y = X_{i_0}$.

Cor. 设 $\{X_i \mid i \in I\}$ 为 X 的全部连通分支，则

$$X = \coprod_{i \in I} X_i .$$

Rmk. ~~原文：若 $X = \coprod_{i \in I} F_i$，$F_i$ 闭，连通，则 F_i 必等于某连通分支~~

$$\mathbb{R} = \coprod_{x \in \mathbb{R}} \{x\}$$

改：若 $\exists$ X 的有限个非空的连通闭集 F_i，$i = 1, \dots, n$，则 F_i 必等于某连通分支，i.e. $X = \coprod_{i=1}^{n} F_i$ 中的 $\{F_i \mid i = 1, \dots, n\}$ 为 X 的全部连通分支.

Pf. 设 $\{X_i \mid i \in I\}$ 为 X 的连通分支集，

$$X = \coprod_{i \in I} X_i , \quad X = \coprod_{i=1}^{n} F_i$$

$$\Rightarrow X_i = \coprod_{j=1}^{n} F_j \cap X_i . \Rightarrow \exists j, \text{ s.t. } X_i = F_j \cap X_i$$

$$\Rightarrow X_i \subset F_j , \Rightarrow X_i = F_j .$$

$\Rightarrow \{X_i \mid i \in I\} \subset \{F_i \mid i = 1, \cdots, n\}$.

假设 $F_i \neq X_j \quad j \in I$.

$$X = \coprod_{j \in I} X_j = \coprod_{k} F_{i_k}.$$

$$\Rightarrow F_i \cap \underbrace{\left(\coprod_k F_{i_k}\right)}_{X} = \phi \Rightarrow F_i = \phi.$$

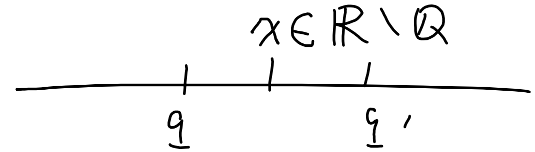
$\Rightarrow$ 矛盾.

$\Rightarrow \{F_i \mid i = 1, \cdots, n\}$ 就是 X 的全部连通分支. #

例: $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. $\quad \mathbb{Q} = \coprod_{q \in \mathbb{Q}} \underbrace{\{q\}}$ 就是 $\mathbb{Q}$ 的连通分支.

只要证: $\forall X \subset \mathbb{Q}$, $X \neq \{q\}$, 则 X 不连通.

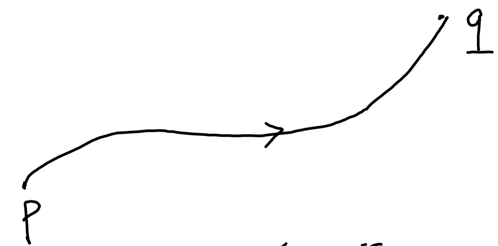
$\Rightarrow \exists q' \in X, \ q' \neq q$



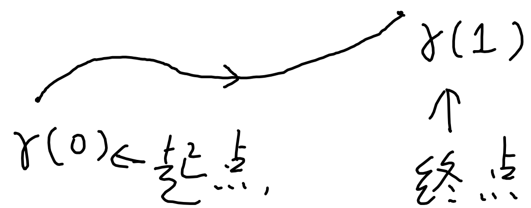
$$\Rightarrow X = \underbrace{\left((-\infty, x) \cap X\right)}_{\ni q} \coprod \underbrace{\left((x, +\infty) \cap X\right)}_{\ni q'} \Rightarrow X \text{ 不连通}$$

#

道路连通性 (path connectedness)



定义：设 X: top. sp.，X 中的一条道路 (path) 是指一个连续映射 $\gamma: [0,1] \to X$.

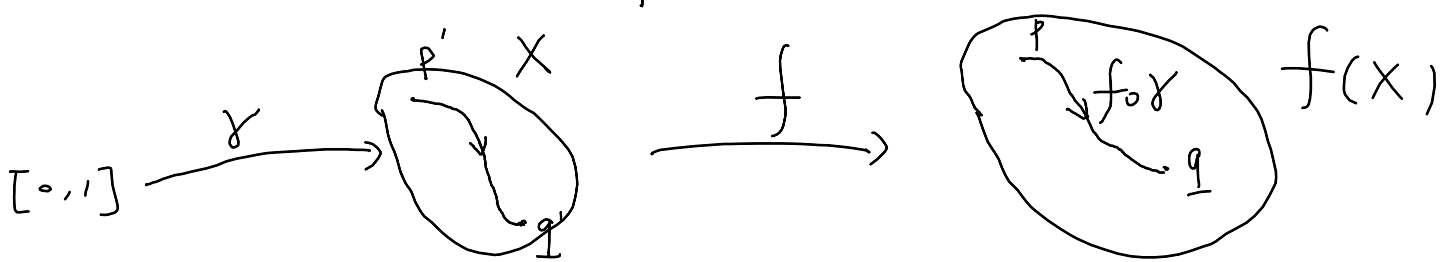


定义：设 X: top sp.，X 称为是道路连通的 (path connected)，if $\forall p, q \in X$，$\exists$ 道路 $\gamma: [0,1] \to X$，s.t. $\gamma(0) = p$，$\gamma(1) = q$.

例：$I \subset \mathbb{R}$ 为区间，$\forall p, q \in I$，$\gamma(t) = t \cdot p + (1-t) \cdot q$.

命题：$f: X \to Y$ 连续，X path conn. $\Longrightarrow$ $f(X)$ path conn.

证：



#

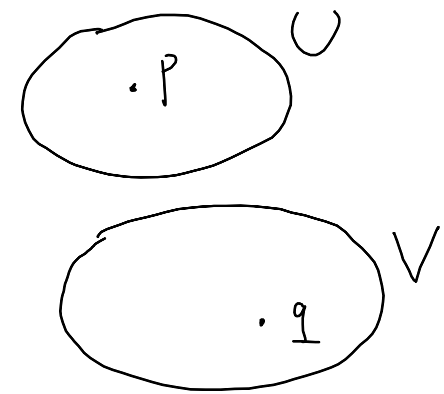
Cor. 若 $X \cong Y$，则 X path conn. $\Longleftrightarrow$ Y path conn.

path conn. $\underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow}$ conn.

命题：设 X : path conn.，则 X 是连通的.

Pf. 若 $X = U \sqcup V$，其中 $U, V \underset{\text{open}}{\subseteq} X$，$U \neq \phi$，$V \neq \phi$.

取 $p \in U$，$q \in V$，



假设 $\gamma : [0,1] \to X$ 为道路，

$\gamma(0) = p$，$\gamma(1) = q$.

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{连通}}}{[0,1]} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{开，非空}}}{\gamma^{-1}(U)} \sqcup \underset{\substack{\uparrow \\ \text{开，非空}}}{\gamma^{-1}(V)}$$

矛盾

#.

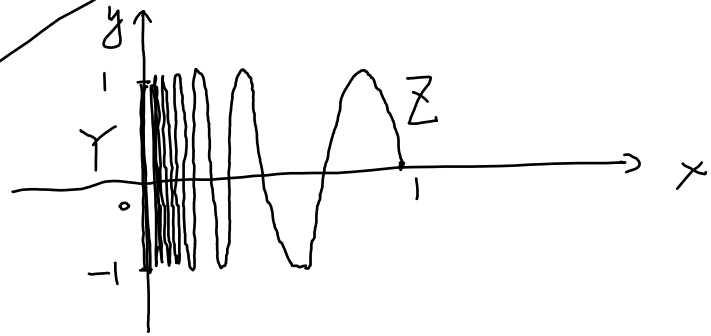
连通但不道路连通的例子：

$X \subset \mathbb{R}^2$, $X := Y \sqcup Z$.

$Y = \{(0,y) \mid -1 \le y \le 1\}$

$Z = \{(x, \sin\frac{\pi}{x}) \mid 0 < x \le 1\}$

赋予子空间拓扑.



① X 连通.

「 $X = \overline{Z}$, 又 Z 连通 $\left(Z = \mathrm{Im}\left(\begin{array}{l} (0,1] \to \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto (t, \sin\frac{\pi}{t}) \end{array} \right) \right)$ 」

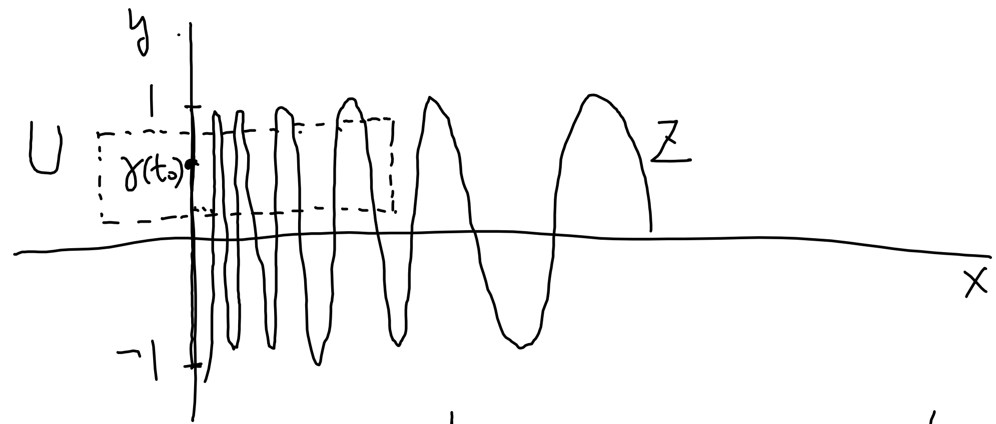
② X 不道路连通.

「 反证：假设 $\exists \gamma: [0,1] \to X$, s.t. $\gamma(0) \in Y$, $\gamma(1) \in Z$.

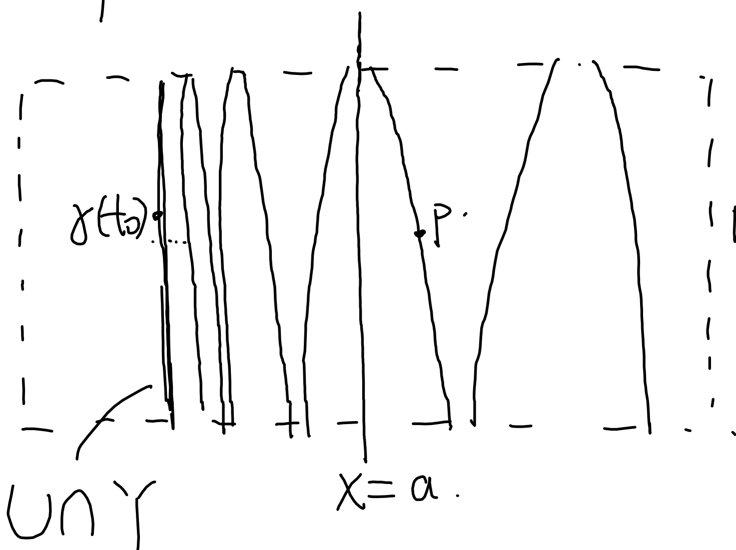
Y 闭 $\Rightarrow \gamma^{-1}(Y) \underset{\text{closed}}{\subset} [0,1]$, 只要证 $\gamma^{-1}(Y)$ 开. 下证之：

只要证：$\forall t_0 \in \gamma^{-1}(Y)$, $\exists \delta > 0$, s.t. $(t_0-\delta, t_0+\delta) \cap [0,1] \subset \gamma^{-1}(Y)$

$\gamma(t_0) \in Y$ 取一个足够小的 $\gamma(t_0)$ 的开的矩形邻域 U.



$U \cap X$:



Claim: $U\cap Y$ 为 $U\cap X$ 的一个连通分支.

「$\forall\, U\cap Y \subsetneq F \subset U\cap X$.
取 $p \in F$, 且 $p \in U\cap Z$.
$F = (\{x \le a\}\cap F) \sqcup (\{x \geq a\}\cap F)$ 」

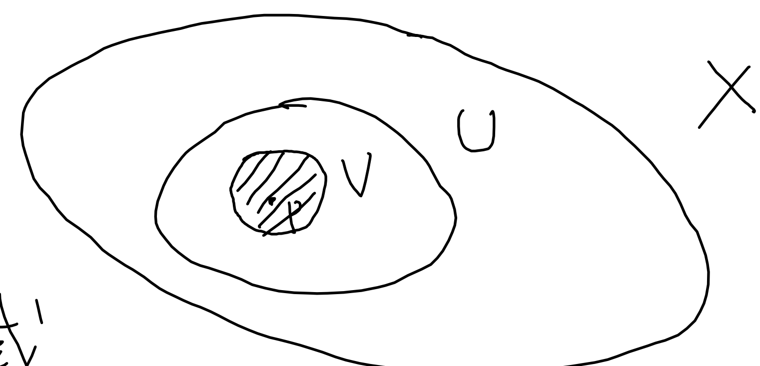
$\gamma^{-1}(U)$ 为包含 t_0 的一个开邻域 $\Rightarrow \exists\, \delta > 0$, s.t. $\underbrace{(t_0-\delta, t_0+\delta)\cap[0,1]}_{I\ (\text{区间})} \subset \gamma^{-1}(U)$.

$\left.\begin{array}{l} \gamma(I) \text{ 连通} \\ \gamma(I) \ni \gamma(t_0) \Rightarrow \gamma(I) \cap (U\cap Y) \neq \phi \\ U\cap Y \text{ 为 } U\cap X \text{ 的一个连通分支} \end{array}\right\} \Rightarrow \gamma(I) \subset U\cap Y.$

\#

连通性	道路连通
$Y \subset X$ conn. $\Rightarrow \overline{Y}$ conn.	$Y \subset X$ path conn. $\not\Rightarrow \overline{Y}$ path conn.
连通分支均为闭集.	道路连通分支不必为闭集.

定义：设 X: top. sp.，称 X 是局部道路连通的 (locally path connected)，if：$\forall p \in X$，$\forall p$ 的开邻域 U，总存在 p 的道路连通的<u>且</u>含于 U 的开邻域 V.



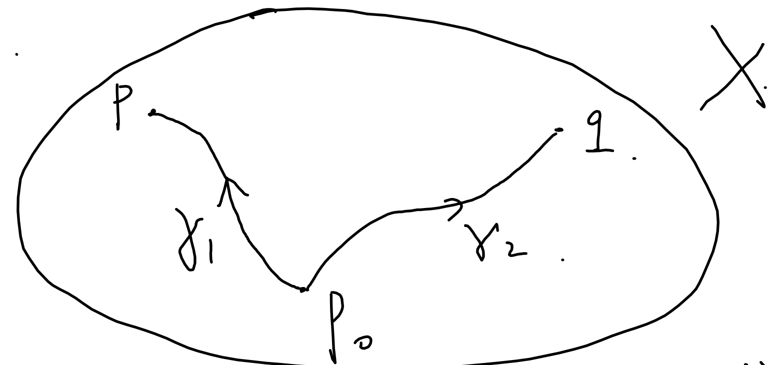
Rmk. 若 X locally path conn.，则 <u>$\forall p \in X$，$\exists p$ 的道路连通的开邻域</u>.

命题：conn. + locally path conn. $\Rightarrow$ path conn.

Pf：设 X：conn. & locally path conn.，要证：X path conn.

取 $p_0 \in X$，$S = \{ p \in X \mid \exists$ 道路 γ, s.t. $\gamma(0) = p_0, \gamma(1) = p \}$，

只要证：$S = X$ 即可.



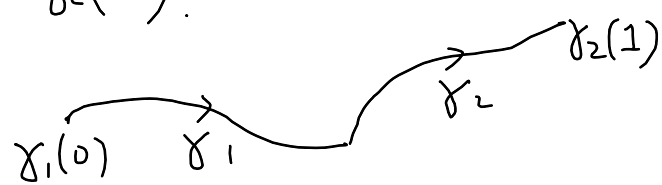
「"只要证"之说明：

① 道路反过来走，$\gamma : [0,1] \to X$.

定义 $\gamma^{-1} : [0,1] \to X$，$t \longmapsto \gamma(1-t)$

② 道路接起来：

设 $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to X$ 为道路，$\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$.



定义 $\gamma \,(\overset{记}{=} \gamma_1 \cdot \gamma_2) : [0,1] \longrightarrow X$

$$t \longmapsto \begin{cases} \gamma_1(2t), & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \gamma_2(2t-1), & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

需说明：γ 连续.

Lemma (Glueing lemma). 设 $X = Y \cup Z$, $f: Y \to W$, $g: Z \to W$ 均连续, $f|_{Y\cap Z} = g|_{Y\cap Z}$, 设 Y, Z 均闭, 定义:

$$f \cup g: X \longrightarrow W, \quad p \longmapsto \begin{cases} f(p), & \text{if } p \in Y \\ g(p), & \text{if } p \in Z \end{cases}.$$

则 $f \cup g$ 连续.

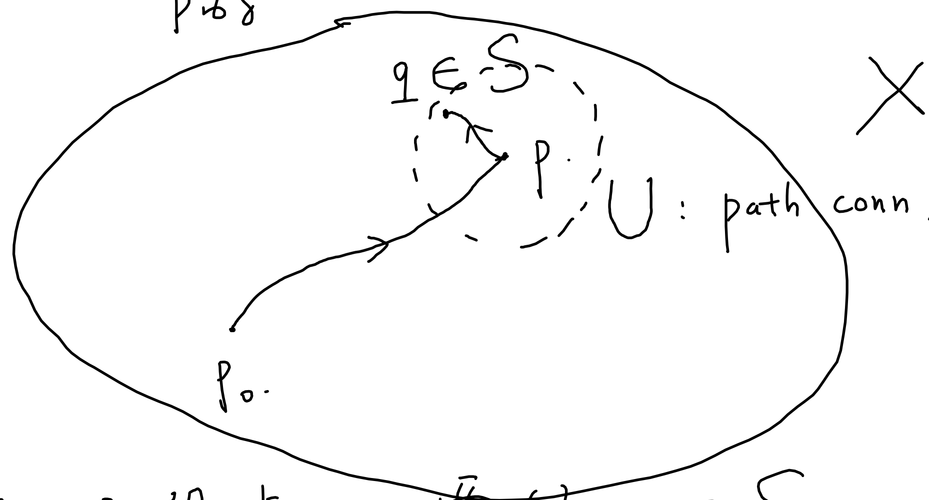
Pf. $\forall F \underset{\text{closed}}{\subset} W$, $(f\cup g)^{-1}(F) = \underbrace{f^{-1}(F)}_{\text{为}Y\text{中闭集}} \cup \underbrace{g^{-1}(F)}_{\text{为}Z\text{中闭集}} \underset{\text{closed}}{\subset} X$.

为 X 中闭集

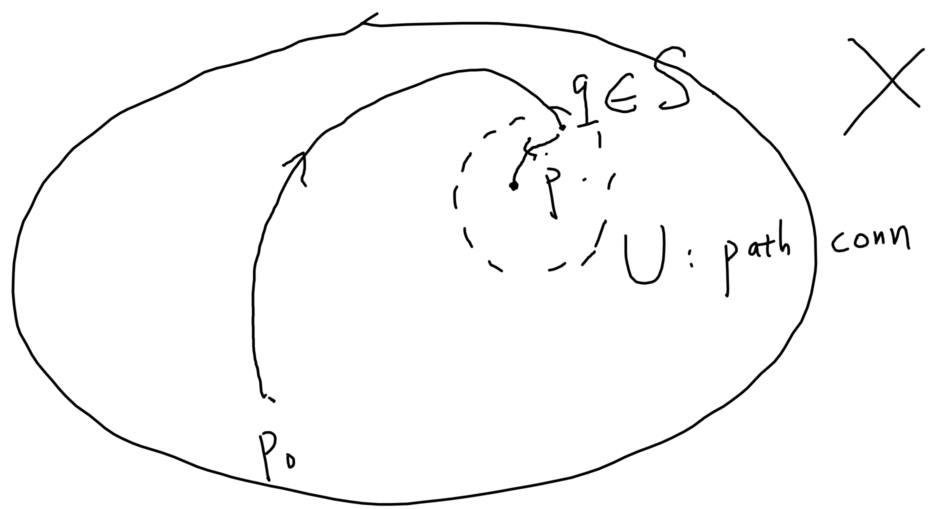
#.

(2). 要证: S 既开又闭.

S 开：$\forall p \in S$，$\exists$ p的开邻域 U，使 $U \subset S$.



S 闭：$\forall S$ 的极限点 p，要证 $p \in S$.



#