上一次：

定义：设 X 为一个集合，$\mathcal{F}$ 为 X 中某些子集构成的集合族（$\mathcal{F}$ 中的元素称为 X 中开集，满足：

① $\phi \in \mathcal{F}$，$X \in \mathcal{F}$

② $\forall U, V \in \mathcal{F}$，$U \cap V \in \mathcal{F}$

③ $\forall U_\alpha \in \mathcal{F}, \alpha \in I$，$\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \in \mathcal{F}$.

此时称 $\mathcal{F}$ 在 X 上定义了一个拓扑，

拓扑空间.

以后：$f: X \longrightarrow Y$，称为连续 if $\forall U \underset{open}{\subset} Y$，

拓扑空间

$f^{-1}(U)$ 也为 X 中开集.

例：X 为一集合，$\mathcal{T}=\{U\subset X\}$ 离散拓扑.

假设 $f: X \longrightarrow Y$ 拓扑空间

$\forall U \underset{\text{open}}{\subset} Y$，$\Rightarrow$ $\underbrace{f^{-1}(U)}_{\text{为}X\text{中开集}} \subset X$

$\Rightarrow$ X 上的任意映射都是连续的.

例：X 为一个集合，$\mathcal{T}=\{\phi, X\}$，平凡拓扑.

设 Y 为一个拓扑空间，

$f: X \longrightarrow Y$ 为一个连续映射.

$f(X)$ 为 f 的像集，$f(X) \subset Y$ 子空间拓扑.

$f: X \longrightarrow \underline{f(X)}$ （验证还是连续映射）

假设 $f(X)$ 不是平凡拓扑空间，i.e. $\exists\, U \underset{U\text{开}}{\subsetneqq} f(X)$，$U\neq\phi$

$\Rightarrow f^{-1}(U) \underset{\text{open}}{\subset} X$

但是 X 中开集只有两种可能：ϕ、X.

$\Rightarrow \underline{f^{-1}(U)=\phi}$, or $f^{-1}(U)=X$

$\Rightarrow f^{-1}(U)=X$. $\Rightarrow f(X)\subset U$ 与 $f(X)$ 矛盾.

$\Rightarrow$ 若 $f: X \to Y$ 为一个连续映射，则 $f(X)$ 一定为平凡拓扑空间.

闭集：X 为拓扑空间，$F\subset X$，F 称为 X 中闭集若 $X\setminus F$ 为 X 中的开集

开集之性质：

① ϕ, X 开

② $\forall\, U, V$ 开，$U\cap V$ 开

③ $\forall\, U_\alpha$ 开，$\alpha\in I$. $\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha$ 开

$\Rightarrow$

闭集的性质：

① ϕ, X 闭

② $\forall\, F, G$ 闭，$F\cup G$ 闭

③ $\forall\, F_\alpha$ 闭，$\alpha\in I$，$\bigcap_{\alpha\in I} F_\alpha$ 闭

闭集之刻画.

例: $[0,1) \subset \mathbb{R}$.

例: $[0,1] \subset \mathbb{R}$

定义: 设 X 为一个拓扑空间, $A \subset X$, $\forall p \in X$, p 称为 A 的一个极限点 (limit point), if $\forall$ 包含 p 的开集 U,

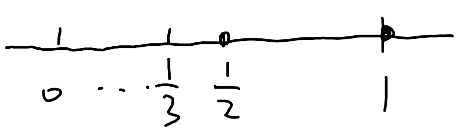
$$(U \setminus \{p\}) \cap A \neq \emptyset.$$

数学分析中还有一个等价的定义:

p 为 A 的一个极限点 $\Longleftrightarrow$ $\exists$ A 中的一列点 $\{x_n\}$, s.t. $\lim_{n \to +\infty} x_n = p$.

例. $X = \mathbb{R}$, $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$

$\Longrightarrow$ A 的极限点: $\{0\}$.

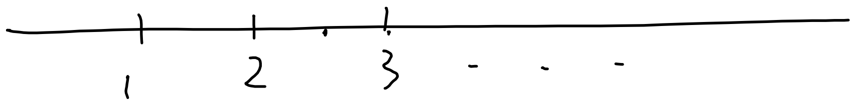


例. $X=\mathbb{R}^3$, A 为 X 中的有理点, $\{(x,y,z)\mid x,y,z\in\mathbb{Q}\}$.

$\Rightarrow$ X 就是 A 的极限点集.

例. $X=\mathbb{R}$, $A=\mathbb{Z}$.

$\Rightarrow$ A 的极限点集为 $\varnothing$.



例. $X=\{0,1\}$, $\mathcal{T}=\{\{0\},\{0,1\},\varnothing\}$.

(i) $A=\{0\}$, 看 A 的极限点.

0: $\forall$ 包含 $\{0\}$ 的开集 U, $(U\setminus\{0\})\cap A=\varnothing$.

1: $\forall$ 包含 $\{1\}$ 的开集 $U=\{0,1\}$, $(U\setminus\{1\})\cap A=\{0\}\neq\varnothing$

$\Rightarrow$ 1 为 A 的极限点.

(ii) $A=\{1\}$, 看 A 的极限点.

0: 取 $U=\{0\}$ 为包含 $\{0\}$ 的开集, $(U\setminus\{0\})\cap A=\varnothing$, $\Rightarrow$ 0 不是极限点

1: $\forall$ 包含 $\{1\}$ 的开集 $U=\{0,1\}$, $(U\setminus\{1\})\cap A=\varnothing$. $\Rightarrow$ 1 也不是

命题：设 X 为拓扑空间，$A \subset X$，则

$$A \text{ 闭} \Longleftrightarrow \bar{A} = A.$$

（$\bar{A} = A \cup \{A \text{ 的极限点}\}$，称为 A 的闭包，

$A = \bar{A}$："$A \subset \bar{A}$" 显然

"$\bar{A} \subset A$" $\Longleftrightarrow$ $\forall$ A 的极限点，都含在 A 中）

证. "$\Rightarrow$" 设 A 闭，要证 $A = \bar{A}$.

即证：$\bar{A} \subset A$，即证：$X \setminus A \subset X \setminus \bar{A}$.

即证：$\forall p \notin A$，p 不是 A 的极限点.

A 闭 $\Rightarrow$ $X \setminus A$ 开集，$\Rightarrow$ $\exists$ 开集 $U \subset X \setminus A$，$p \in U$.

$\Rightarrow$ $(U \setminus \{p\}) \cap A = \phi$ $\Rightarrow$ p 不是 A 之极限点.

"$\Leftarrow$" 设 $\bar{A} = A$，要证 A 闭.

只要证：$X \setminus A$ 开.

$\forall p \in X \setminus A$，要证 $\exists$ 开集 U，满足 $p \in U \subset X \setminus A$

$p \notin A \Rightarrow p \notin \bar{A} \Rightarrow p$ 不为 A 极限点.

$\Rightarrow \exists$ 开集 $U \subset X$, $p \in U$ s.t. $(U \setminus \{p\}) \cap A = \phi$

$\Updownarrow$

$U \cap A = \phi$.

$\Rightarrow p \in U \subset X \setminus A$. #.

推论: $\bar{A}$ 为一个闭集. $\left(\Rightarrow \bar{A} = \bar{\bar{A}} \right)$

证明: 只要证 $X \setminus \bar{A}$ 为开集,

$\forall p \in X \setminus \bar{A}$, p 不为 A 的极限点.

$\Rightarrow \exists$ 开集 $U \subset X$, 满足 $p \in U$, 且 $(U \setminus \{p\}) \cap A = \phi$.

$\Downarrow$

$U \cap A = \phi$.

$\Rightarrow p \in U \subset X \setminus A$

$\Rightarrow \forall q \in U$, U 为包含 q 的开集, 又 $U \cap A = \phi$, $\Rightarrow q$ 不là极限点. $\Rightarrow q \notin \bar{A} \Rightarrow U \subset X \setminus \bar{A}$.

$\Rightarrow X \setminus \bar{A}$ 为开集 #.

推论：$\overline{A} = \bigcap_{\substack{F \supset A \\ \text{closed}}} F$.（$\Longrightarrow$ $\overline{A}$ 为包含 A 的最小的闭集）

Pf. "$\supset$" $\overline{A} \supset A$，$\overline{A}$ closed.

$\Rightarrow \bigcap_{\substack{F \supset A \\ \text{closed}}} F \subset \overline{A}$

$\underline{X \setminus F \subset X \setminus \overline{A}}$

$\Updownarrow$

"$\subset$" 只要证 $\forall$ 包含 A 的闭集 F，$\underline{F \supset \overline{A}}$.

只要证 $\underline{\forall\, x \notin F,\ x \text{ 不为 } A \text{ 的极限点}}$.

$F = \overline{F} \Longrightarrow x \notin \overline{F} \Longrightarrow x$ 不为 $\underset{(\supset A)}{F}$ 的极限点.

$\Rightarrow x$ 不为 A 的极限点.

\#.

例：$S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$，$S^n = \{(x_1, \cdots, x_{n+1}) \mid (x_1)^2 + \cdots + (x_{n+1})^2 = 1\}$.

$S^n = \overline{B(0;1)} \setminus B(0,1)$.

$= \underline{\overline{B(0;1)}} \cup \underline{(\mathbb{R}^{n+1} \setminus B(0,1))}$ 闭.

性质：① $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$ ② $\overline{A\cap B}\subset\overline{A}\cap\overline{B}$.

例：$A=[0,1)$，$B=(1,2]$ $\subset\mathbb{R}$

$\overline{A\cap B}=\phi$，$\neq$ $\overline{A}\cap\overline{B}=\{1\}$.

例：$X=\{0,1\}$，$\mathcal{F}=\{\{0\},\{0,1\},\phi\}$.

闭：$\{1\},\phi,\{0,1\}$

$A=\{0\}$，不闭.

$\overline{A}=X$.

定义. 设 X 为一个拓扑空间. $A\subset X$ 称为在 X 中稠密，

若 $\overline{A}=X$，

例：$\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$ $\overline{\mathbb{Q}}=\mathbb{R}$.

问题：X：拓扑空间，$F\subset X$，稠密，$U\subset X$，

问：$F\cap U$ 是否在 U 中稠密？

反例：$U=X\setminus F$

例：X：拓扑空间，$F \subset X$ 稠密，$U \subset X$ open.

则：$\underbrace{F \cap U \text{ 在 } U \text{ 中稠密}}$。 子空间拓扑

「记号：X 为拓扑空间，$Y \subset X$ 子空间，$Z \subset Y$.

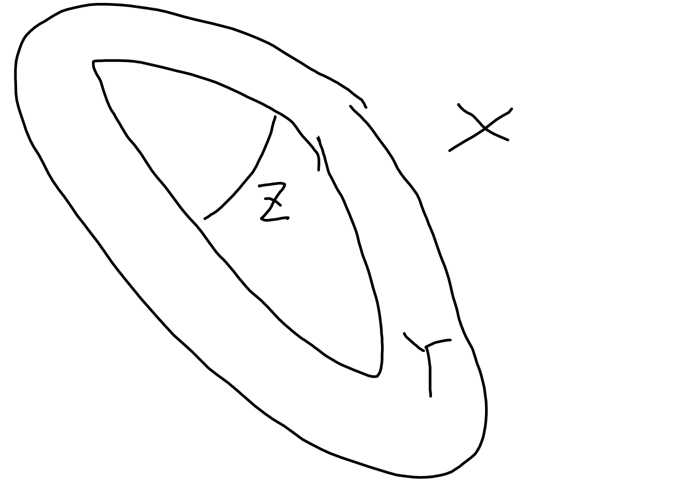
$\overline{Z}_Y$：Z 在 Y 中闭包.

$\overline{Z}_X$：Z 在 X . . . . .

「例：$X = \mathbb{R}$，$Y = (0, 2)$，$Z = (0, 1)$.

$\overline{Z}_X = [0, 1]$，$\overline{Z}_Y = (0, 1]$ 」」

Fact. $\overline{Z}_Y = \overline{Z}_X \cap Y$.



pf. LHS $\subset$ RHS

要证: $\forall x \in \overline{Z}_Y$，有 $x \in \overline{Z}_X \cap Y$

前提: $x \in Y$.

Case 1. $x \in Z$. $\Longrightarrow$ 显然 $x \in$ RHS

Case 2. $x \notin Z$ ($\Rightarrow x$ 为 Z 在 Y 中极限点).

只要证 $x \in \overline{Z}_X$，即证 x 为 Z 在 X 中极限点.

即证: $\forall x$ 在 X 中的开邻域 V，$(V \setminus \{x\}) \cap Z \neq \phi$.

$((V \setminus \{x\}) \cap Z) \cap Y \neq \phi$

$\|$

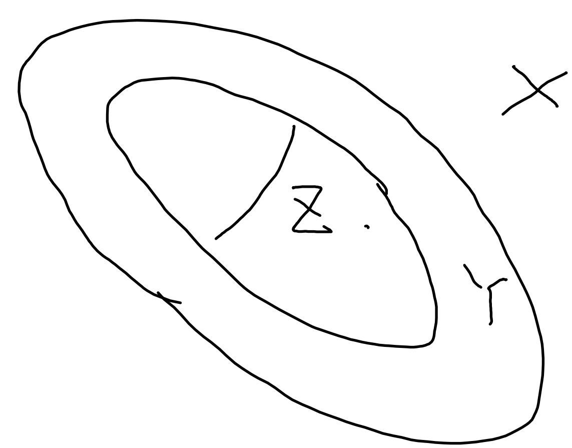
$((V \cap Y) \setminus \{x\}) \cap Z \neq \phi$

x 在 Y 中的开心邻域

RHS $\subset$ LHS.

$\overline{Z}_X \cap Y \subset \overline{Z}_Y$.

要证 $\forall\, x \in \overline{Z}_X \cap Y$ 有 $x \in \overline{Z}_Y$.



$x \in Y$

Case 1. $x \in Z$，显然 $x \in$ RHS.

Case 2. $x \notin Z$ ($\Rightarrow x$ 为 Z 在 X 中的极限点).

要证：$x \in \overline{Z}_Y$. 即证 x 为 Z 在 Y 中的极限点.

即证：$\forall$ Y 中的包含 x 的开集，不妨设为 $V \cap Y$，

其中 $V \underset{\text{open}}{\subset} X$，$(x \in V)$. 有：$(V \cap Y \setminus \{x\}) \cap Z \neq \emptyset$

$$V \setminus \{x\} \cap Z \neq \emptyset \Rightarrow \underline{(V \cap Y \setminus \{x\}) \cap Z} = V \setminus \{x\} \cap Z \cap Y$$

#.

小结：$\overline{Z}_Y = \overline{Z}_X \cap Y$

例: X: 拓扑空间, $F \subset X$, 稠密, $U \underset{\text{open}}{\subset} X$.

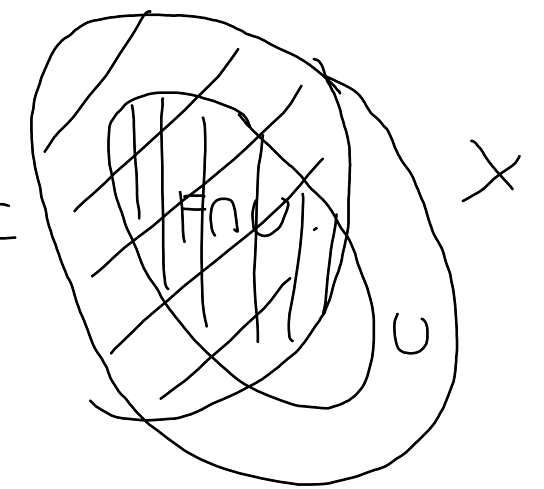
子空间拓扑

则: $F \cap U$ 在 U 中稠密。

Pf. 要证 $\overline{(F\cap U)}_U = U$

$$\overline{(F\cap U)}_U = \overline{(F\cap U)}_X \cap U.$$

只要证: $U \subset \overline{(F\cap U)}_X$



$\forall x \in U$. 要证 $x \in \overline{(F\cap U)}_X$

Case 1. $x \in F\cap U$. 显然.

Case 2. $x \notin F\cap U$, 要证 x 为 $F\cap U$ 在 X 中极限点.

即证: $\forall V \underset{\text{open}}{\subset} X\ (x\in V)$, $(V\setminus\{x\})\cap(F\cap U) \neq \emptyset$

$$\underbrace{(V\setminus\{x\})\cap(F\cap U)}_{} = ((\underbrace{V\cap U}_{\text{开集}})\setminus\{x\})\cap F \neq \emptyset$$

$\because$ F 稠密, $x \notin F$

$\Rightarrow x$ 为 F 极限点 #

定义：设 X 为一个拓扑空间，$A\subset X$，定义：

$\mathrm{int}(A):=\{p\in A \mid \exists X$ 中的开集 V，$(p\in V)$，$V\subset A\}$（内点集）

$\mathrm{ext}(A):=\{p\notin A \mid \exists X$ 中的开集 V，$(p\in V)$，$V\subset X\setminus A\}$（外点集）

$\triangleq \mathrm{int}(X\setminus A)$.

$\partial(A):=\{p\in X \mid \forall p$ 的开邻域 V，$V\cap A\neq\phi$，$V\cap(X\setminus A)\neq\phi\}$（边界点集）

$$X=\underset{\text{无交并}}{\mathrm{int}(A)\amalg \mathrm{ext}(A)\amalg \partial(A)}$$

例：$A=[0,1)\subset\mathbb{R}$.

$\partial A=\{0,1\}$，$\mathrm{int}A=(0,1)$. $\mathrm{ext}A=(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$.

例：$A=(0,1)\subset \underline{[0,1)}$

$\partial A=\{0\}$

$\mathrm{int}(A)=(0,1)$

$\mathrm{ext}(A)=\phi$.

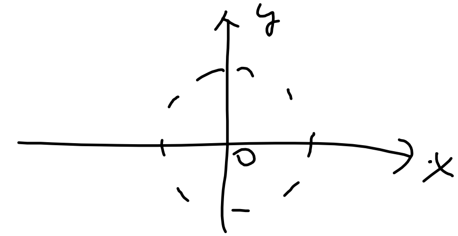
$A=(0,1)\subset\mathbb{R}$

$\partial A=\{0,1\}$

$\mathrm{int}(A)=(0,1)$

$\mathrm{ext}(A)=(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$

例: $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<1\}$



$\partial D = S^1 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$

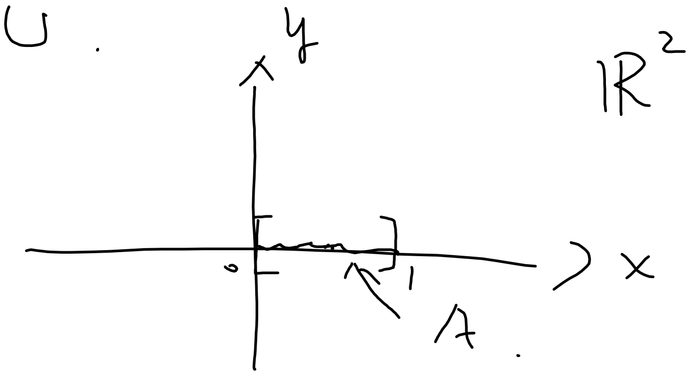
$\mathrm{int}(D) = D.$

$\mathrm{ext}(D) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2>1\}.$

小结: 开集的内点集为本身.

$U \underset{\text{open}}{\subseteq} X. \quad \mathrm{int}(U) = U.$

例: $A = [0,1]. \quad X = \mathbb{R}^2.$



$\mathrm{int}(A) = \emptyset$

$\mathrm{ext}(A) = X\setminus A$

$\partial A = A.$

拓扑基 topological basis.

回顾：$\mathbb{R}^n$ 欧氏拓扑.

$U \subset \mathbb{R}^n$ 开集 $\Leftrightarrow \forall p \in U$, $\exists \delta_p > 0$, s.t. $B(p;\delta_p) \subset U$.

$$U = \bigcup_{p \in U} B(p;\delta_p).$$

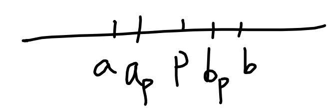
定义(拓扑基). 设 X: 拓扑空间, $\mathcal{B}$ 一个由一些 X 中开集构成的集族, 称 $\mathcal{B}$ 构成了 X 的一个拓扑基, 若 $\forall$ X 中开集 U, U 均可表为 $\mathcal{B}$ 中一些元素之并.

例: $\mathbb{R}^1$ 欧氏拓扑.

在回顾中, $\mathcal{B} = \{(a,b) \mid a<b\}$ 为 $\mathbb{R}^1$ 的一个拓扑基.

令 $\mathcal{B}' = \{(a,b) \mid a<b,\ a,b \in \mathbb{Q}\}$, 则 $\mathcal{B}'$ 也为 $\mathbb{R}^1$ 的一个拓扑基.

($\forall\, U \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^1$, $\forall p \in U$, 必存在 $a<p<b$, 使 $(a,b) \subset U$,



$\Rightarrow \exists (a_p, b_p) \in \mathcal{B}'$, s.t. $p \in (a_p, b_p) \subset U$, $\Rightarrow U = \bigcup_{p \in U} (a_p, b_p)$)

设 X：拓扑空间，$\mathcal{B}$ 为 X 的一个拓扑基。

由 $\mathcal{B}$ 生成的拓扑。

$\Longrightarrow \begin{cases} ① & \bigcup_{U\in\mathcal{B}} U = X. \\ ② & \forall U_1, U_2 \in \mathcal{B},\ U_1\cap U_2 \text{ 可表为 } \mathcal{B} \text{ 中一些元素之并}. \end{cases}$

命题：设 X 为一个集合，$\mathcal{B}$ 为 X 的一个由一些子集构成的集族，若 $\mathcal{B}$ 满足 ①、②，则 $\mathcal{B}$ 必为 X 上某个拓扑 $\mathcal{T}$ 的拓扑基。

Proof. 定义 $\mathcal{T} = \{\phi\} \cup \{\mathcal{B}\text{ 中若干元素之并}\} = \{\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha \mid U_\alpha \in \mathcal{B}\} \cup \{\phi\}$

要证：① $\mathcal{T}$ 为 X 上一个拓扑.

② $\mathcal{B}$ 为此拓扑的一个拓扑基.

② 不用证.

① 之证明：

(1) $\begin{cases} \phi \in \mathcal{T} & \text{OK!} \\ X \in \mathcal{T} & \text{由 ① 保证}. \end{cases}$

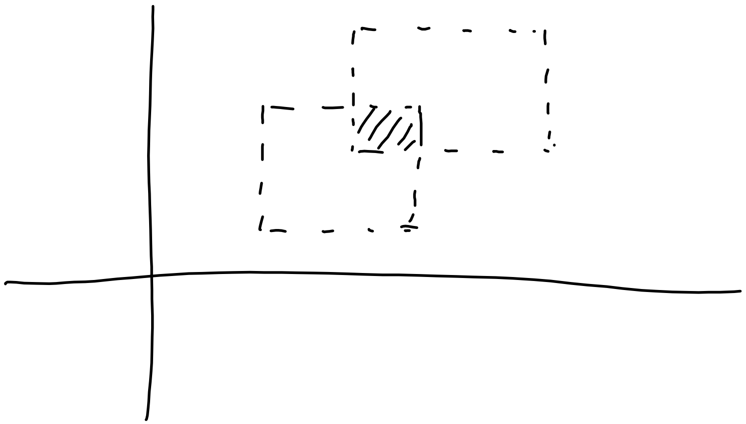
(2) $\mathcal{T}$ 对任意并封闭是显然的.

(3) $\forall \bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha,\ \bigcup_{\beta\in J} V_\beta \in \mathcal{T}$，其中 $U_\alpha, V_\beta \in \mathcal{B}$，$\forall \alpha\in I, \beta\in J$.

$$\left(\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha\right) \cap \left(\bigcup_{\beta\in J} V_\beta\right) = \bigcup_{\alpha,\beta} (U_\alpha \cap V_\beta) \in \mathcal{T}.$$

#

例：$\mathbb{R}^2$. $\mathcal{B}'=\{(a,b)\times(c,d)\mid a<b,\ c<d\}\cup\{\phi\}$

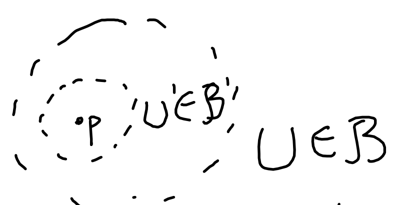


$\Rightarrow$ $\mathcal{B}'$ 为 $\mathbb{R}^2$ 上某拓扑的拓扑基.

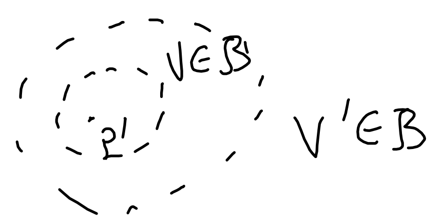
之前：$\mathcal{B}=\{$开圆盘$\}$，为 $\mathbb{R}^2$ 上欧氏拓扑的拓扑基.

定义：设 $\mathcal{B}$，$\mathcal{B}'$ 满足①、②，称 $\mathcal{B}$ 与 $\mathcal{B}'$ 是等价的，若

$\forall U\in\mathcal{B}$，$p\in U$，都 $\exists U'\in\mathcal{B}'$，s.t. $p\in U'\subset U$.



$\forall V'\in\mathcal{B}'$，$p'\in V'$，都 $\exists V\in\mathcal{B}$，s.t. $p\in V\subset V'$

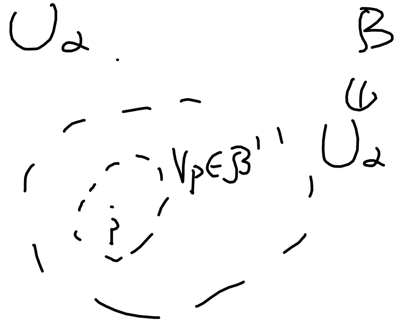


你	我
中	中
有	有
我	你

命题：设 $\mathcal{B}$ 与 $\mathcal{B}'$ 满足①、②，且 $\mathcal{B}$ 与 $\mathcal{B}'$ 等价，且 $\mathcal{B}$ 生成的拓扑 $\mathcal{T}$ 与 $\mathcal{B}'$ 生成的拓扑 $\mathcal{T}'$ 相同。

Proof. $\forall\, U \in \mathcal{T}$. $\Rightarrow U = \underline{\underline{\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha}}$, $U_\alpha \in \mathcal{B}$.

$\forall\, U_\alpha$, $\forall\, p \in U_\alpha$, $\Rightarrow \exists\, V_p \in \mathcal{B}'$, s.t. $p \in V_p \subset U_\alpha$.

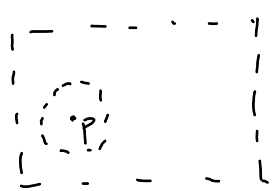


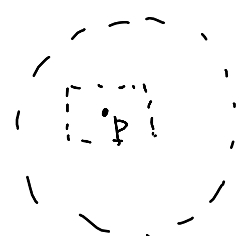
$\Rightarrow U_\alpha = \bigcup_{p\in U_\alpha} V_p \in \mathcal{T}'$.

$\Rightarrow U = \bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha \in \mathcal{T}' \Rightarrow \mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$

同理，$\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$，因此 $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$ #.

例：$\mathbb{R}^2$，$\mathcal{B}' = \{$开矩形$\}$，$\mathcal{B} = \{$开圆盘$\}$.





$\mathcal{B}$ 与 $\mathcal{B}'$ 显然等价.

$\Rightarrow \mathcal{B}$ 与 $\mathcal{B}'$ 生成相同的拓扑.

② $\forall U_1, U_2 \in \mathcal{B}$，$U_1 \cap U_2$ 可表为 $\mathcal{B}$ 中一些元素之并

$\Longleftrightarrow$ ②' $\forall U_1, U_2 \in \mathcal{B}$，$\forall p \in U_1 \cap U_2$，$\exists\ U_p \in \mathcal{B}$，s.t. $p \in U_p \subset U_1 \cap U_2$.

②' $\Longrightarrow$ ②

$$U_1 \cap U_2 = \bigcup_{p \in U_1 \cap U_2} U_p$$

例：A：交换环，$\mathfrak{a} \subset A$ 理想.

$$\mathfrak{a} \supset \mathfrak{a}^2 \supset \mathfrak{a}^3 \supset \cdots$$

$\mathcal{B} = \{x + \mathfrak{a}^n \mid x \in A,\ n \geq 1\}$. 满足①、②'

只验证②'：$\forall\ x + \mathfrak{a}^n,\ y + \mathfrak{a}^m \in \mathcal{B}$，$(n > m)$，

$\forall z \in (x + \mathfrak{a}^n) \cap (y + \mathfrak{a}^m)$，

Claim: $z \in z + \mathfrak{a}^n \subset (x + \mathfrak{a}^n) \cap (y + \mathfrak{a}^m)$. (显然).

$\Rightarrow \mathcal{B}$ 生成了 A 上一个拓扑，称为 $\mathfrak{a}$-topology.

例：$A = \mathbb{Z}$，$\mathfrak{a} = \langle p \rangle$，$p$ 素数. $\rightsquigarrow$ p-adic topology.