引理. 设 $p: Y \to X$ 为一个 covering, X 道路连通, 则存在离散 top sp. I, s.t. $\forall x \in X$, $p^{-1}(x) \cong I$.

证明: 取定 $x_0 \in X$, $p^{-1}(x_0)$

$\exists$ x_0 的开邻域 U, s.t. $p^{-1}(U) = \coprod_\alpha V_\alpha$, $V_\alpha \underset{\text{open}}{\subseteq} Y$, 且

$p|_{V_\alpha}: V_\alpha \xrightarrow{\cong} U$.

记 $y_\alpha := p^{-1}(x_0) \cap V_\alpha = (p|_{V_\alpha})^{-1}(x_0)$.

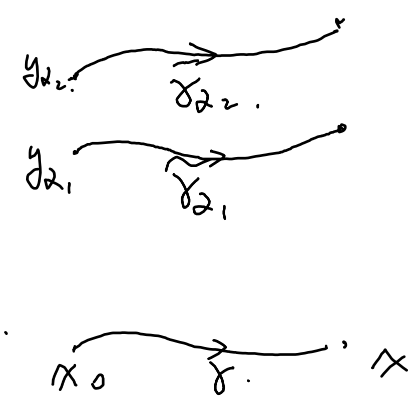
$p^{-1}(x_0) = \coprod_\alpha \{y_\alpha\}$.

$p^{-1}(x_0) \cap V_\alpha = \{y_\alpha\}$. $\Rightarrow$ $p^{-1}(x_0)$ 为离散 top sp.

令 $I = p^{-1}(x_0)$

$\forall x \in X$, 取定 $\gamma \in P(x_0, x)$, $\forall y_\alpha \in p^{-1}(x_0)$

记 $\tilde{\gamma}_\alpha$ 为 γ 的从 y_α 出发的提升.



定义: $\varphi: \underbrace{p^{-1}(x_0)}_{\text{discrete}} \to \underbrace{p^{-1}(x)}_{\text{discrete}}$

$y_\alpha \mapsto \tilde{\gamma}_\alpha(1)$.

为证 φ 为同胚，只需证 φ 为双射.

$$\varphi: p^{-1}(x_0) \to p^{-1}(x)$$
$$y_\alpha \mapsto \tilde{\gamma}_\alpha(1).$$

· 单射.

设 $\varphi(y_{\alpha_1}) = \varphi(y_{\alpha_2})$，则有 $\tilde{\gamma}_{\alpha_1}(1) = \tilde{\gamma}_{\alpha_2}(1)$.

则 $\tilde{\gamma}_{\alpha_1}^{-1}$ 与 $\tilde{\gamma}_{\alpha_2}^{-1}$ 均是从同一点出发的 γ^{-1} 之提升

$$\Rightarrow \tilde{\gamma}_{\alpha_1}^{-1} = \tilde{\gamma}_{\alpha_2}^{-1} \Rightarrow \underset{\substack{\| \\ y_{\alpha_1}}}{\tilde{\gamma}_{\alpha_1}(0)} = \underset{\substack{\| \\ y_{\alpha_2}}}{\tilde{\gamma}_{\alpha_2}(0)} \Rightarrow y_{\alpha_1} = y_{\alpha_2}.$$

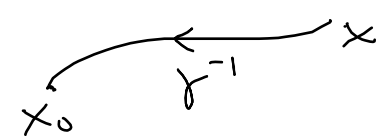
· 满射.

$\forall\, y_1 \in p^{-1}(x)$. 取 $\tilde{\alpha}$ 为 γ^{-1} 的以 y_1 为起点的提升.

则 $\tilde{\alpha}(1) \in p^{-1}(x_0)$.

不妨设 $\tilde{\alpha}(1) = y_{\alpha_1}$.

$\varphi(y_{\alpha_1}) = y_1$.



#

Rmk. 设 $p: Y \to X$ 为一个 covering. X 道路连通. 若 $\exists\, x_0 \in X$, s.t. $p^{-1}(x_0)$ 为有限集，记 $n = \# p^{-1}(x_0)$. 则 $\forall\, x \in X$, $\# p^{-1}(x) = n$. 此时,

称覆盖 $p: Y \to X$ 的 degree 为 n. 并记 $\deg p = n$.

<u>Rmk</u>. 设 Y, X 为 compact Riemann surface. $M(Y)$, $M(X)$ 为相应的函数域. 设 $p: Y \to X$ 为一个 (branched) covering.

$$p^*: M(X) \longrightarrow M(Y) \quad \text{为一个单同态.}$$
$$f \longmapsto f \circ p.$$

$M(Y)$ 可视为 $M(X)$ 的一个域扩张. 则:

① $\deg(p) = [M(Y) : M(X)]$.

② p 为一个 Galois covering $\Longleftrightarrow$ $M(Y)/M(X)$ 为一个 Galois 扩张.

[Szamuely] Galois groups and fundamental groups.

§2. 万有覆盖 (universal covering).

设 X 为 path conn., locally path conn. 的 top sp.

定义：X: top sp.，X 称为 locally path connected, if $\forall x \in X$, $\forall x$ 的开邻域 U，总存在 x 的道路连通的开邻域 W, s.t. $W \subset U$.

定义：设 $p: Y \to X$ 为一个 covering，p 称为 X 上的一个 universal covering，if：Y 单连通.

下面：考虑 univ. covering 的存在性.

若 $p: Y \to X$ 为一个 universal covering，$\forall x \in X$，$\exists x$ 的开邻域 U，s.t. $p^{-1}(U) = \coprod_{\alpha} V_\alpha$，$V_\alpha \underset{\text{open}}{\subseteq} Y$，且 $p|_{V_\alpha}: V_\alpha \cong U$.

则 $\forall U$ 中的一条 loop γ，$(p|_{V_\alpha})^{-1} \circ \gamma$ 为 γ 的一个提升. 也为 V_α 中的 loop.

$$(p|_{V_\alpha})^{-1} \circ \gamma \simeq C_{(p|_{V_\alpha})^{-1} \circ \gamma(0)} \text{ rel } \{0,1\}$$

$$\Rightarrow \gamma \simeq C_{\gamma(0)}, \text{ rel } \{0,1\}$$

定义：设 X: top space，称 X 为 semilocally simply connected，若 $\forall x \in X$，$\exists x$ 的开邻域 U，s.t. $\forall$ loop γ in U，γ 在 X 中相对 $\{0,1\}$ 同伦于常道路.

Rmk. 设 X: top sp. 称 X 为 locally simply connected，若 $\forall x \in X$，$\forall x$ 的开邻域 U，总存在 x 的单连通的开邻域 W，s.t. $W \subset U$.（所有的流形都是 loc. simply. conn.）

Rmk. 设 X 为 semilocally simply connected，则 $\forall x \in X$，$\forall x$ 的开邻域 U，总存在 x 的开邻域 W，s.t. $\forall$ loop γ in W，γ 在 X 中相对 $\{0,1\}$ 同伦于常道路，且 $W \subset U$.

「$\forall x$ 的开邻域 U，由 semilocally simply conn. 之定义，$\exists x$ 的开邻域 V，满足定义条件，$U \cap V$ 为 x 的一个开邻域，令 $W = U \cap V$ 即可.」

命题：若 X 有 univ. covering，则 X 必 semilocally simply connected.

Rmk. 设 X locally path conn. 且 semilocally simply conn，则 $\forall x \in X$，$\forall$ x 的开邻域 U，总存在 x 的开邻域 W，W 满足 ① 道路连通的. ② $\forall$ loop γ in W，γ 在 X 中相对 $\{0,1\}$ 同伦于常道路. 且 $W \subset U$.

「由上面 Rmk. $\exists$ x 的开邻域 W' 满足②，使 $W' \subset U$.

由 loc. path conn. $\exists$ x 的道路连通的开邻域 W，s.t. $W \subset W'$. W 满足② 显然!」

称呼：设 X locally path conn. 且 semilocally simply conn.，称 $W \underset{\text{open}}{\subset} X$ 为 good 的，若 W 满 ①、②

Rmk. 设定同上，记 $\mathcal{B} = \{W \underset{\text{good}}{\subset} X\}$，则 $\mathcal{B}$ 为 X 的拓扑基.

「 $\forall U \underset{\text{open}}{\subset} X$. $\forall x \in U$, 必存在 $W_x \in \mathcal{B}$, s.t.

$$x \in W_x \subset U.$$

$$\bigcup_{x \in U} W_x = U.$$

」

命题 3. 设 X: conn., locally path conn, semilocally simply conn. 的 top space, 则 X 的 universal covering 是存在的.

(Ref: [Fulton] Algebraic topology).

([Dieck] Algebraic topology.)

证明: (记号: $\forall L, M \subset X$, $P(L, M) = \{ \gamma : [0,1] \to X \mid$ 连续, $\gamma(0) \in L$, $\gamma(1) \in M \}$. 约定: "同伦" = "相对于 $\{0,1\}$ 同伦")

取定 $x_0 \in X$. 令 $\tilde{X} = \{ \langle \gamma \rangle \mid \gamma \in P(x_0, X) \}$, 定义:

$p: \tilde{X} \to X$, $\langle \gamma \rangle \longmapsto \gamma(1)$. 显然为满射 (由 X path conn.).

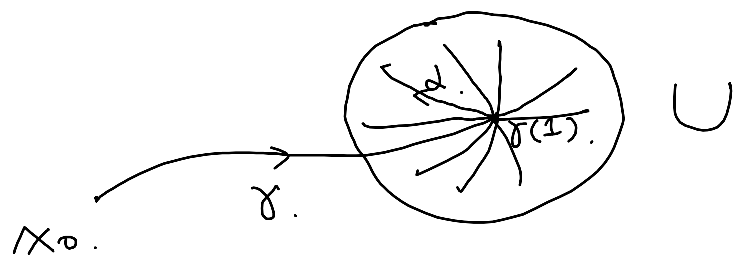
下面：① 赋予 $\tilde{X}$ 的拓扑.

② $p: \tilde{X} \to X$ 为 covering.

③ $\tilde{X}$ simply connected.

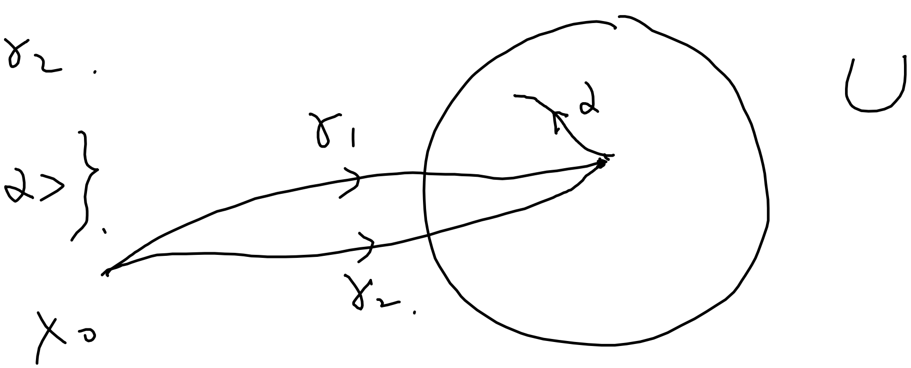
①. $\forall\, U \underset{\text{good}}{\subset} X$，的及 $\gamma \in P(x_0, U)$. 定义 $\tilde{X}$ 的子集：

$$U_\gamma := \{ \langle \gamma \cdot \alpha \rangle \mid \alpha \in P(\gamma(1), U),\ \operatorname{Im}\alpha \subset U \}.$$



(由定义，设 $\gamma_1, \gamma_2 \in P(x_0, U)$. $\gamma_1 \simeq \gamma_2$ rel $\{0,1\}$，则

$$\begin{array}{ccc} U_{\gamma_1} & = & U_{\gamma_2}. \\ \| & & \| \\ \{\langle \gamma_1 \cdot \alpha \rangle\} & & \{\langle \gamma_2 \cdot \alpha \rangle\}. \end{array}$$



)

记 $\mathcal{B} = \{ U_\gamma \mid U \underset{\text{good}}{\subset} X,\ \gamma \in P(x_0, U) \}$.

Claim: $\mathcal{B}$ 为 $\tilde{X}$ 上某个拓扑的拓扑基.

① $\bigcup\limits_{U_\gamma \in \mathcal{B}} U_\gamma = \tilde{X}$

② $\forall U_\alpha, V_\beta \in \tilde{X}$, 若 $\underline{\langle \gamma \rangle \in U_\alpha \cap V_\beta}$. 要证 $\exists\, W_\delta \in \mathcal{B}$,

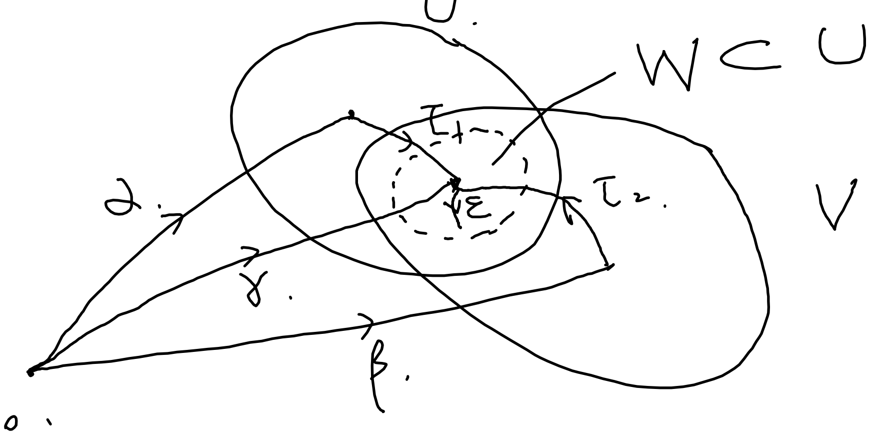
s.t. $\langle \gamma \rangle \in W_\delta \subset U_\alpha \cap V_\beta$.

$\langle \gamma \rangle = \langle \alpha \cdot \tau_1 \rangle = \langle \beta \cdot \tau_2 \rangle$, 其中 $\tau_1 \in P(\gamma(1), U)$, $\mathrm{Im}\,\tau_1 \subset U$

$\tau_2 \in P(\gamma(1), V)$, $\mathrm{Im}\,\tau_2 \subset V$.

$\Rightarrow \gamma(1) = \tau_1(1) = \tau_2(1) \in U \cap V$.

$W \subset U \cap V$, W good.



Claim:
$W_\gamma \subset U_\alpha \cap V_\beta$
$\| $
$\{ \langle \gamma \cdot \varepsilon \rangle \}$ (显然)

$\exists\, \gamma(1)$ 的 good 的开邻域 W, s.t. $W \subset U \cap V$.

赋予 $\tilde{X}$ 由 $\mathcal{B}$ 所生成的拓扑.

i.e. $\forall\, W \subset \tilde{X}$, W open $\Longleftrightarrow$ $\forall\, \langle\gamma\rangle \in W$, $\exists$某个 $U_\alpha \in \mathcal{B}$, s.t. $\langle\gamma\rangle \in U_\alpha \subset W$.

$\Longleftrightarrow$ W 为某些 U_γ 的并.

② : 验证 : $p: \tilde{X} \to X$ 为 covering.

$\forall\, x \in X$, 取 x 的一个 good 的开邻域 U,

$$p^{-1}(U) = \{\langle\gamma\rangle \in \tilde{X} \mid p(\langle\gamma\rangle) = \gamma(1) \in U\}$$

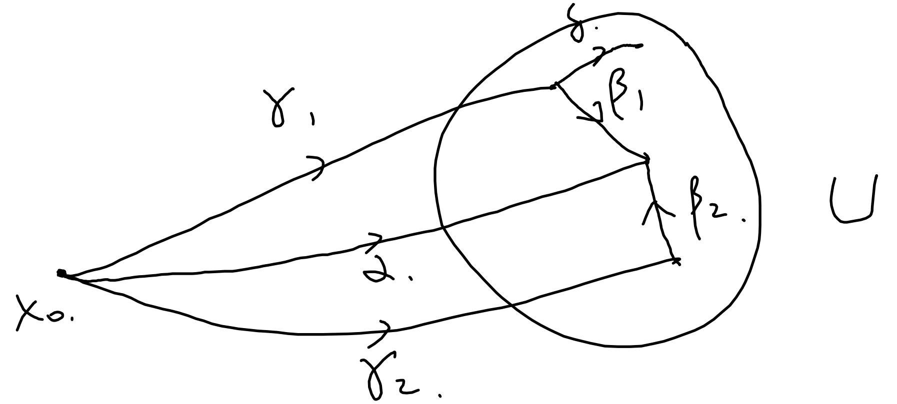
$$= \bigcup_{\gamma \in P(x_0, U)} U_\gamma .$$

$\Rightarrow$ p 连续.

「观察 : $\forall\, \gamma_1, \gamma_2 \in P(x_0, U)$, $U_{\gamma_1} \cap U_{\gamma_2} \neq \phi$. Claim : $U_{\gamma_1} = U_{\gamma_2}$.

选 $\langle\alpha\rangle \in U_{\gamma_1} \cap U_{\gamma_2}$. $\langle\alpha\rangle = \langle\gamma_1 \cdot \beta_1\rangle = \langle\gamma_2 \cdot \beta_2\rangle$.

$\Rightarrow \alpha(1) = \beta_1(1) = \beta_2(1) \in U$



$$\Rightarrow \quad \begin{array}{ccc} U_{\gamma_1\cdot\beta_1} & = & U_{\gamma_1} \\ \| & & \| \\ U_{\gamma_2\cdot\beta_2} & = & U_{\gamma_2} \end{array}$$

$\lrcorner$

$\exists\ \gamma_i \in P(x_0, U),\ i\in I$, s.t. $\bigcup_{\gamma\in P(x_0,U)} U_\gamma = \coprod_{i\in I} U_{\gamma_i}$

$$\bigcup_{\gamma\in P(x_0,U)} U_\gamma = p^{-1}(U) = \coprod_{i\in I} U_{\gamma_i}$$

要证 p 为 covering, 只要证: $p|_{U_{\gamma_i}} : U_{\gamma_i} \xrightarrow{\simeq} U$, $\forall i\in I$.

⌜Fact. $\forall\, U \underset{\text{good}}{\subseteq} X$, $\gamma\in P(x_0, U)$, $p|_{U_\gamma} : U_\gamma \xrightarrow{\simeq} U$.

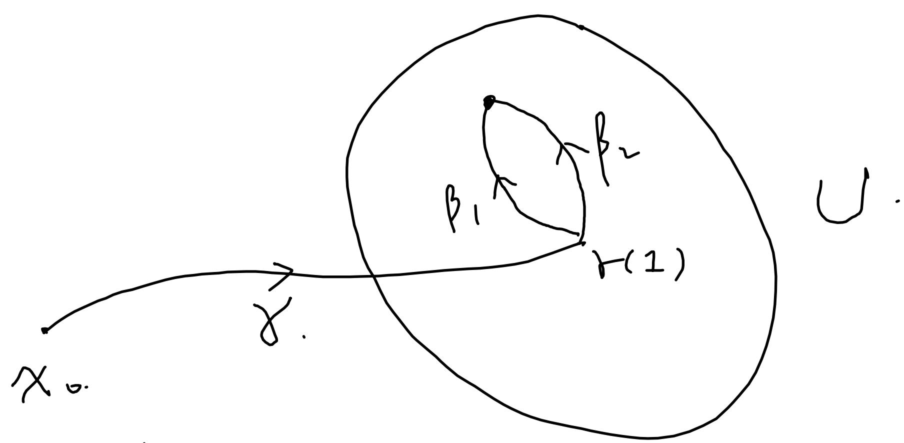
pf of Fact. ① $p|_{U_\gamma}$ 为双射 ($\Rightarrow$ ② $p|_{U_\gamma}$ 为同胚).

只要证：$p|_{U_\gamma}: U_\gamma \to U$ 为双射.

单射，$\forall \langle\gamma\cdot\beta_1\rangle, \langle\gamma\cdot\beta_2\rangle \in U_\gamma$. $\beta_1 \in P(\gamma(1), U)$, $\mathrm{Im}\beta_i \subset U$.
$\beta_2 \in P(\gamma(1), U)$

设 $p(\langle\gamma\cdot\beta_1\rangle) = p(\langle\gamma\cdot\beta_2\rangle)$

$$\underset{\beta_1(1)}{\parallel} \qquad\qquad \underset{\beta_2(1).}{\parallel}$$

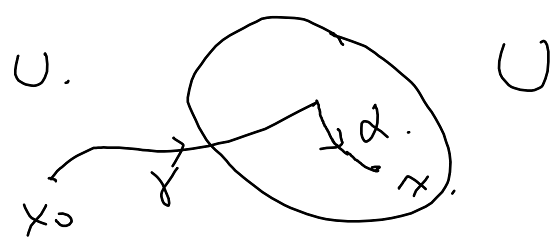


U good $\Rightarrow \beta_1\cdot\beta_2^{-1} \simeq C_{\gamma(1)}$ rel $\{0,1\}$

$\Rightarrow \beta_1 \simeq \beta_2$ rel $\{0,1\}$.

$\Rightarrow \gamma\cdot\beta_1 \simeq \gamma\cdot\beta_2$ rel $\{0,1\} \Rightarrow \langle\gamma\cdot\beta_1\rangle = \langle\gamma\cdot\beta_2\rangle$.

满射：$\forall x \in U$. U good $\Rightarrow \exists \alpha: [0,1] \to U$.



$\alpha(0) = \gamma(1)$, $\alpha(1) = x$.

$\langle\gamma\cdot\alpha\rangle \in U_\gamma$, $p(\langle\gamma\cdot\alpha\rangle) = x$.

③ $\tilde{X}$ 是单连通的.

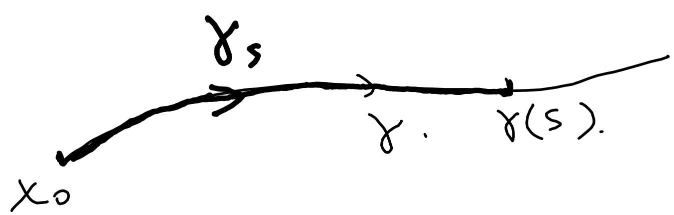
· $\tilde{X}$ 是道路连通的.

固定 $\langle c_{x_0} \rangle \in \tilde{X}$. 要证 $\forall \langle \gamma \rangle \in \tilde{X}$. 存在道路 $\Gamma : [0,1] \longrightarrow \tilde{X}$, s.t. $\Gamma(0) = \langle c_{x_0} \rangle$, $\Gamma(1) = \langle \gamma \rangle$.

定义: $\Gamma : [0,1] \longrightarrow \tilde{X}$.

$s \longmapsto \langle \gamma_s \rangle$. 其中 $\gamma_s : [0,1] \longrightarrow X$

$t \longmapsto \gamma(st)$,

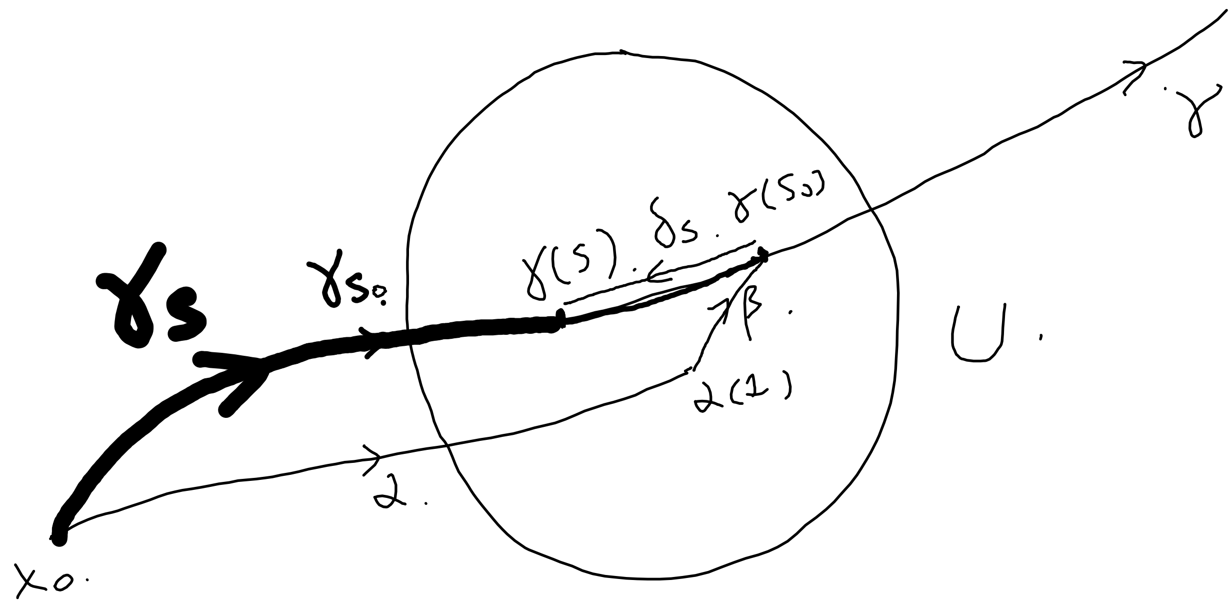


需证: Γ 为一个连续映射.

只要证: $\forall\, U \underset{\text{good}}{\subset} X$, $\alpha \in P(x_0, U)$, $\Gamma^{-1}(U_\alpha)$ 为 $[0,1]$ 中一个开集.

任取 $s_0 \in \Gamma^{-1}(U_\alpha)$. i.e. $\Gamma(s_0) = \langle \gamma_{s_0} \rangle \in U_\alpha$

i.e. $\exists \beta \in P(\alpha(1), U)$
$\operatorname{Im}\beta \subset U$, s.t.
$\langle \gamma_{s_0} \rangle = \langle \alpha \cdot \beta \rangle$.
$\Rightarrow \gamma(s_0) = \beta(1) \in U$



$s_0 \in \gamma^{-1}(U) \underset{\text{open}}{\subset} [0,1]$

Claim: $s_0 \in \underline{\gamma^{-1}(U) \subset \Gamma^{-1}(U_\alpha)}$.

pf of claim: $\forall\, s \in \gamma^{-1}(U)$, 只要证 $\underset{\langle \gamma_s \rangle}{\underset{\shortparallel}{\Gamma(s)}} \in U_\alpha$.

已知: $\langle \gamma_{s_0} \rangle = \langle \alpha \cdot \beta \rangle$.

$\langle \gamma_s \rangle = \langle \gamma_{s_0} \cdot \delta_s \rangle = \langle \alpha (\beta \cdot \delta_s) \rangle \in U_\alpha$.

• $\forall \Gamma \in L(\tilde{X}, \langle c_{x_0} \rangle)$，有 $\Gamma \simeq c_{\langle c_{x_0} \rangle}$ rel $\{0,1\}$.

$\Gamma: [0,1] \longrightarrow \tilde{X}$ 连续.

$\Gamma(0) = \langle c_{x_0} \rangle$，$\Gamma(1) = \langle c_{x_0} \rangle$.

$p \circ \Gamma: [0,1] \longrightarrow X$，$p \circ \Gamma \overset{记}{=} \gamma \in L(X, x_0)$.

Γ 为 γ 的从 $\langle c_{x_0} \rangle$ 出发的提升.

定义：$\Gamma': [0,1] \longrightarrow \tilde{X}$，

$s \longmapsto \langle \gamma_s \rangle$　　其中 $\gamma_s: [0,1] \longrightarrow X$
$t \longmapsto \gamma(st)$.

已证：Γ' 连续

又 $p \circ \Gamma'(s) = \gamma_s(1) = \gamma(s)$. $\therefore$ Γ' 也为 γ 从 $\langle c_{x_0} \rangle$ 出发的提升.

由提升唯一性引理. $\Gamma' = \Gamma$.

$\Rightarrow \Gamma(1) = \Gamma'(1) = \langle \gamma \rangle$. $\Rightarrow \gamma \simeq c_{x_0}$ rel $\{0,1\}$ in X.

$\Gamma(1) = \langle c_{x_0} \rangle$

由同伦提升引理. $\Gamma \underset{\text{in } \tilde{X}}{\simeq} c_{\langle c_{x_0} \rangle}$ rel $\{0,1\}$ #