§6. 相对(奇异)同调.

设 X: top sp. $A \subset X$. 为子空间. $A \xrightarrow{i} X$, $a \longmapsto a$.

i 诱导了: $S_p(A) \longrightarrow S_p(X)$, $\forall p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

这些群同态一起给出了链复形之间的态射:

$$S_\bullet(A) \longrightarrow S_\bullet(X).$$

$$\begin{array}{ccc}
\vdots & & \vdots \\
\downarrow & & \downarrow \\
S_p(A) & \longrightarrow & S_p(X) \\
\partial\downarrow & & \downarrow\partial' \\
S_{p-1}(A) & \longrightarrow & S_{p-1}(X). \\
\downarrow & & \downarrow \\
\vdots & & \vdots
\end{array}$$

构造商链复形：$(S_\cdot(X,A),\partial_\cdot)$，其中：

$$S_p(X,A) := S_p(X)/S_p(A).$$

于是有链复形的短正合列：

$$0 \to S_\cdot(A) \to S_\cdot(X) \to S_\cdot(X,A) \to 0$$

定义：X, A 同上，$H_p(X,A) := \ker\left(S_p(X,A) \xrightarrow{\partial} S_{p-1}(X,A)\right) \Big/ \mathrm{Im}\left(S_{p+1}(X,A) \to S_p(X,A)\right).$

p-th singular homology group of X relative to A.

$H_p(X,A)$ 中元素：相对同调类.

$S_p(X,A)$ ……：相对 p-chain

$\ker(S_p(X,A) \to S_{p-1}(X,A))$ ……：相对 p-cycle.

$\mathrm{Im}(S_{p+1}(X,A) \to S_p(X,A))$ ……：相对 p-boundaries.

应用Lemma 5 于 $0 \to S.(A) \to S.(X) \to S.(X,A) \to 0$，立得：

命题8. 设 X 为 top sp.，A ：X 的子空间，则有长正合列：

$$\cdots \to H_p(A) \to H_p(X) \to H_p(X,A) \to H_{p-1}(A) \to H_{p-1}(X) \to H_{p-1}(X,A) \to \cdots$$

应用Lemma 5 于：

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \to & S_p(A) & \to & S_p(X) & \to & S_p(X,A) & \to & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \to & S_{p-1}(A) & \to & S_{p-1}(X) & \to & S_{p-1}(X,A) & \to & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \to & S_0(A) & \to & S_0(X) & \to & S_0(X,A) & \to & 0 \\
\downarrow & & \downarrow \varepsilon & & \downarrow \varepsilon & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \to & \mathbb{Z} & \xrightarrow{1_{\mathbb{Z}}} & \mathbb{Z} & \to & 0 & \to & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \to & 0 & \to & 0 & \to & 0 & \to & 0 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}$$

命题9. X, A 同上. 有长正合列:

$$\cdots \to \tilde{H}_p(A) \to \tilde{H}_p(X) \to H_p(X,A) \to \tilde{H}_{p-1}(A) \to \tilde{H}_{p-1}(X) \to H_{p-1}(X,A) \to \cdots$$

推论: 设 $x_0 \in X$. $H_p(X, x_0) \cong \tilde{H}_p(X)$.

<u>Homotopy invariance.</u>

设 $A \subset X$, $B \subset Y$, 一个从 (X,A) 到 (Y,B) 的连续映射是指一个连续映射 $f: X \to Y$, 满足 $f(A) \subset B$. (此时, 记

$$f: (X,A) \to (Y,B)).$$

设 $f: (X,A) \to (Y,B)$ 为一个连续映射, f 诱导了群同态:

$$f_\#: S_p(X) \to S_p(Y), \quad \forall p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

$$f_\#(S_p(A)) \subset S_p(B)$$

诱导 $\rightsquigarrow$ $f_\#: S_p(X,A) \to S_p(Y,B)$, $\forall p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

这些 $f_\#$ 一起构成了一个从 $S_\cdot(X,A) \to S_\cdot(Y,B)$ 的一个态射.

诱导 $\rightsquigarrow$ 群同态: $f_*: H_p(X,A) \to H_p(Y,B)$, $\forall p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

命题10. 设 $f, g: (X,A) \to (Y,B)$ 为两个连续映射, 若 $f \simeq g$.

(意指: $\exists$ 连续映射 $F: X \times [0,1] \to Y$, s.t. $F_0 = f$, $F_1 = g$, 满足:

$F(A \times [0,1]) \subset B$), 则:

$$f_* = g_*: H_p(X,A) = H_p(Y,B). \quad \forall p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

证明: 回忆上一节构造了 prism operator, $P: S_n(X) \to S_{n+1}(Y)$.

满足: $\partial \circ P + P \circ \partial = g_\# - f_\#$

(作为从 $S_n(X)$ 到 $S_n(Y)$ 的同态的等式, $\forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$).

注意 $P(S_n(A)) \subset S_{n+1}(B)$.

「 $\forall \sigma: \Delta_n \to X$.

$$P(\sigma) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i F\circ(\sigma \times 1_{[0,1]})\Big|_{\langle v_0, \cdots, v_i, w_i, \cdots, w_n \rangle}.$$

假设 $\sigma \in S_n(A)$, (i.e. $\operatorname{Im}\sigma \subset A$).

$\operatorname{Im}(\sigma \times 1_{[0,1]}) \subset A \times [0,1]$.

又 $F(A \times [0,1]) \subset B$.

$\Rightarrow P(\sigma) \in S_{n+1}(A)$. 」

于是得到一个 quotient prism operator $\overline{P}: S_n(X,A) \to S_{n+1}(Y,B)$.

显然满足: $\partial' \circ \overline{P} + \overline{P} \circ \partial = \overline{g}_\# - \overline{f}_\#$.

$\Rightarrow \overline{g}_\#$ 与 $\overline{f}_\#$ 通过同伦算子 $\overline{P}$ 同伦.

$\Rightarrow g_* = f_*: H_p(X,A) \to H_p(Y,B)$. $\forall p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

($g_\#: S_n(X) \to S_n(Y)$, $g_\#(S_n(A)) \subset S_n(B)$, $\rightsquigarrow \overline{g}_\#: S_n(X,A) \to S_n(Y,B)$)

#.

定义 (X,A) 与 (Y,B) 是同伦等价的:

设 $f:(X,A)\to(Y,B)$ 为一个连续映射，f 称为一个同伦等价，iff. ∃连续映射 $g:(Y,B)\to(X,A)$, s.t.

$g\circ f\simeq 1$. （作为从 $(X,A)\to(X,A)$ 的映射同伦）.

$f\circ g\simeq 1$ （作为 $(Y,B)\to(Y,B)$ ……）.

推论：X,A,Y,B 同前，则若 (X,A) 与 (Y,B) 是同伦等价的，则 $H_p(X,A)\cong H_p(Y,B)$, $\forall p\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$.

（更强的结论）.

命题11. 设 $f:(X,A)\to(Y,B)$ 连续映射，若 $f:X\to Y$, 与 $f|_A: A\to B$, 均为同伦等价，则

$$H_p(X,A)\cong H_p(Y,B),\quad \forall p\in\mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

为证之，需要把 Lemma 5 细化：

Lemma 5'. 设有Abel群范畴中的链复形的交换图表:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L'_\cdot \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\alpha"] & L_\cdot \arrow[r, "v"] \arrow[d, "\beta"] & L''_\cdot \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M'_\cdot \arrow[r, "\tilde{u}"] & M_\cdot \arrow[r, "\tilde{v}"] & M''_\cdot \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

其中每一行均为短正合列. 则有交换图表:

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & H_p(L'_\cdot) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_*"] & H_p(L_\cdot) \arrow[r] \arrow[d, "\beta_*"] & H_p(L''_\cdot) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\gamma_*"] & H_{p-1}(L'_\cdot) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_*"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & H_p(M'_\cdot) \arrow[r] & H_p(M_\cdot) \arrow[r] & H_p(M''_\cdot) \arrow[r, "\tilde{\delta}"] & H_{p-1}(L'_\cdot) \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

其中每一行均为正合列.

证明: 唯一非平凡的是下列图表交换:

$$\begin{tikzcd} H_p(L''_\cdot) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\gamma_*"] & H_{p-1}(L'_\cdot) \arrow[d, "\alpha_*"] \\ H_p(M''_\cdot) \arrow[r, "\tilde{\delta}"] & H_{p-1}(M'_\cdot) \end{tikzcd}$$

$$x \longmapsto \delta(x)$$

$\forall\, x \in H_p(L''_\bullet)$ 设 x 是由 $a \in L''_p$ 所代表的.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L'_p \arrow[r] \arrow[dd] & L_p \arrow[r] \arrow[dd] & L''_p \arrow[r] \arrow[dd] & 0 \\
 & & y \arrow[r, mapsto] \arrow[dd, mapsto] & a & \\
0 \arrow[r] & L'_{p-1} \arrow[r] & L_{p-1} \arrow[r] & L''_{p-1} \arrow[r] & 0 \\
 & z \arrow[r, mapsto] & \partial(y) & &
\end{tikzcd}$$

$\delta(x) =$ "z 所代表的同调类"

其中 $u(z) = \partial(y)$. 对某个满足 $v(y) = a$ 的 $y \in L_p$ 成立.

$\alpha_*(\delta(x)) =$ "$\alpha(z)$ 所代表的同调类" $\in H_{p-1}(M'_\bullet)$.

$\gamma_*(x) =$ "$\gamma(a)$ 所代表的同调类" $\in H_p(M''_\bullet)$

看: $\tilde{\delta}(\gamma_*(x))$.

考虑下列交换图表:

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
0 \arrow[r] & L'_p \arrow[r] \arrow[d] \arrow[ddr] & L_p \arrow[r] \arrow[d] \arrow[ddr] & L''_p \arrow[r] \arrow[d] \arrow[ddr] & 0 & \\
0 \arrow[r] & L'_{p-1} \arrow[r] \arrow[ddr] & L_{p-1} \arrow[r] \arrow[ddr] & L''_{p-1} \arrow[r] \arrow[ddr] & 0 & \\
& 0 \arrow[r] & M'_p \arrow[r] \arrow[d] & M_p \arrow[r] \arrow[d] & M''_p \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& 0 \arrow[r] & M'_{p-1} \arrow[r] & M_{p-1} \arrow[r] & M''_{p-1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

$y \mapsto a$

$z \mapsto \partial(y)$

$\beta(y) \mapsto \gamma(a) = \tilde{\nu}(\beta(y))$.

$\alpha(z) \mapsto \beta(\partial(y)) = \partial(\beta(y))$.

由 δ 之定义， $\delta(\gamma_*(x)) =$ "$\alpha(z)$ 所代表的同调类" #.

命题11之证明： $f: (X, A) \to (Y, B)$，诱导了交换图表.

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & S.(A) \arrow[r] \arrow[d, "f_\#"'] & S.(X) \arrow[r] \arrow[d, "f_\#"'] & S.(X, A) \arrow[r] \arrow[d, "f_\#"] & 0 \\
0 \arrow[r] & S.(B) \arrow[r] & S.(Y) \arrow[r] & S.(Y, B) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

由 Lemma 5'，立得：

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_p(A) \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & H_p(X) \arrow[r] \arrow[d, "f_2"] & H_p(X,A) \arrow[r] \arrow[d, "f_3"] & H_{p-1}(A) \arrow[r] \arrow[d, "f_4"] & H_{p-1}(X) \arrow[r] \arrow[d, "f_5"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_p(B) \arrow[r] & H_p(Y) \arrow[r] & H_p(Y,B) \arrow[r] & H_{p-1}(B) \arrow[r] & H_{p-1}(Y) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

由 five lemma, $\Rightarrow f_3$ 为群同构.

$$\Rightarrow H_p(X,A) \cong H_p(Y,B), \quad \forall p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}. \quad \#$$

例16. $i: (B^n, S^{n-1}) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$

$$\left(i: \begin{array}{ccc} B^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ x & \longmapsto & x \end{array} \right).$$

$$\Rightarrow H_p(B^n, S^{n-1}) \cong H_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}). \quad \forall p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

Rmk. 对于三元组 (X, A, B), 其中 $B \subset A \subset X$, 对于列短正合列:

$$0 \longrightarrow S_\bullet(A)/S_\bullet(B) \longrightarrow S_\bullet(X)/S_\bullet(B) \longrightarrow S_\bullet(X)/S_\bullet(A) \longrightarrow 0$$

利用 Lemma 5, 立得:

$$\cdots \to H_p(A,B) \to H_p(X,B) \to H_p(X,A) \to H_{p-1}(A,B) \to H_{p-1}(X,B) \to H_{p-1}(X,A) \to \cdots$$

7. 切除定理 (excision theorem).

定理3. 设 X: top sp. $Z \subset A \subset X$ 为子空间，且 $Z \subset \mathrm{int}(A)$，

则包含映射 $(X\setminus Z, A\setminus Z) \to (X,A)$ 诱导了同构：

$$H_n(X\setminus Z, A\setminus Z) \xrightarrow{\cong} H_n(X,A), \quad \forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

Rmk. (定理3的等价叙述).

定理3'. 设 X: top sp., $A, B \subset X$ 子空间, $\mathrm{int}(A) \cup \mathrm{int}(B) = X$,

则包含映射 $(X\cap B, A\cap B) \to (X,A)$ 诱导了同构：

$$H_n(B, A\cap B) \xrightarrow{\cong} H_n(X,A), \quad \forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

($3' \Rightarrow 3$, 令 $B = X\setminus Z$. $3 \Rightarrow 3'$, 令 $Z = X\setminus B$.)

记号：

设 $\mathcal{U}=\{U_j\}_j$ 为 X 的一个覆盖，满足 $\bigcup_j \mathrm{int}(U_j)=X$.

记 $S_n^{\mathcal{U}}(X)=\left\{\sum_i n_i \sigma_i \in S_n(X) \,\middle|\, \forall i,\ \mathrm{Im}\,\sigma_i \subset U_j \text{ for some } j\right\}$.

则 $S_n^{\mathcal{U}}(X) < S_n(X)$. (the subgroup of $\mathcal{U}$-small chains).

注意边界算子 $\partial: S_{n+1}(X) \to S_n(X)$，满足：

$$\partial\left(S_{n+1}^{\mathcal{U}}(X)\right) \subset S_n^{\mathcal{U}}(X).$$

故 $(S_\cdot^{\mathcal{U}}(X), \partial_\cdot)$ 为 $(S_\cdot(X), \partial_\cdot)$ 的一个子复形.

记 $\iota: S_\cdot^{\mathcal{U}}(X) \longrightarrow S_\cdot(X)$

命题12. $\iota: S_\cdot^{\mathcal{U}}(X) \longrightarrow S_\cdot(X)$ 为一个同伦等价.

$(\Rightarrow H_n^{\mathcal{U}}(X) \xrightarrow{\cong} H_n(X),\ \forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，其中 $H_n^{\mathcal{U}}(X)$ 为 $S_\cdot^{\mathcal{U}}(X)$ 的第 n 个同调群).

Sketch of proof.

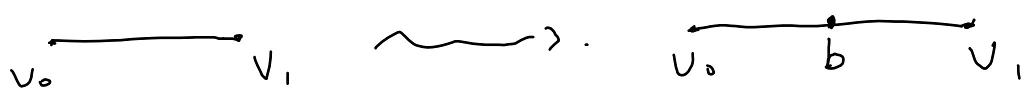
Step 1. 重心重分 (barycentric subdivision).

设 $\langle v_0, \cdots, v_n \rangle$ 为 $v_0, \cdots, v_n$ 张成的 n-单形,

$\langle v_0, \cdots, v_n \rangle$ 的重心 $b := \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} v_i$.

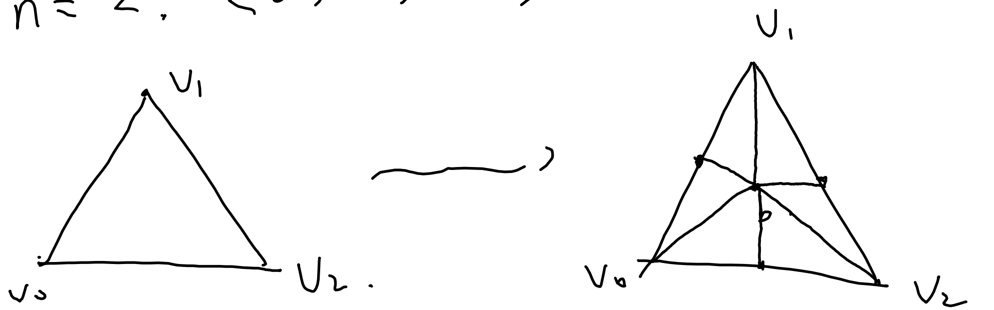
「例: $n=0$, $\langle v_0 \rangle$ 的重心重分为 $\langle v_0 \rangle$ 而已.

$n=1$, $\langle v_0, v_1 \rangle$



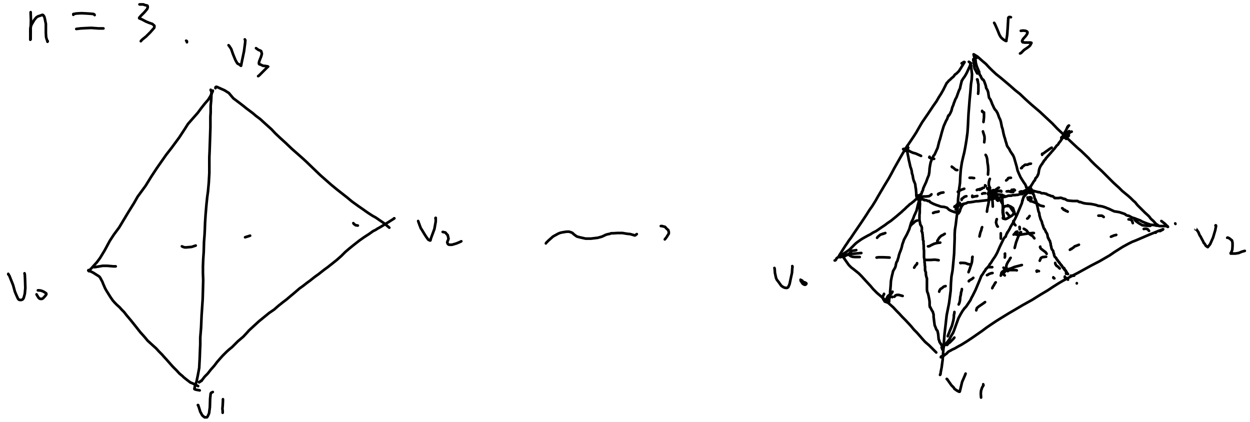
分成了2个1-单形.

$n=2$, $\langle v_0, v_1, v_2 \rangle$



2×3 个

$n=3$.



$2\times3\times4$ 个 ⌋

归纳地，对于 n 单形 $\langle v_0,\cdots,v_n\rangle$ 定义其重心重分为：

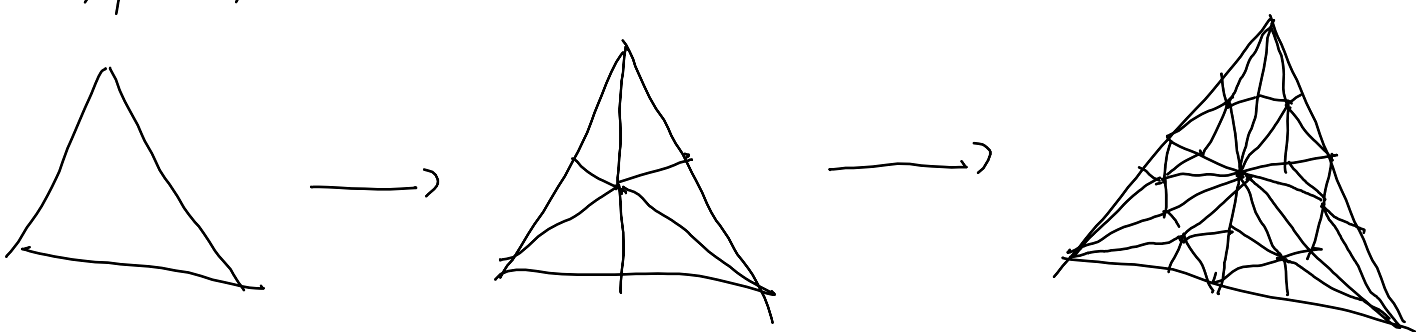
$$\left\{\langle b,w_1,\cdots,w_n\rangle \;\middle|\; \text{其中} \langle w_1,\cdots,w_n\rangle \text{取遍} \langle v_0,\cdots,v_n\rangle \text{的} (n+1) \text{个} (n-1)\text{-维面经重心重分所得的} (n-1)\text{-单形}\right\}.$$

可证：(see [Hatcher]).

$$\operatorname{diam}(\langle b,w_1,\cdots,w_n\rangle)\le\frac{n}{n+1}\operatorname{diam}(\langle v_0,\cdots,v_n\rangle).$$

($\Rightarrow$ 不断地重心重分可使 n-单形的直径足够小 (*))

「例：



⌋

Step 2. 目标：定义 $\rho: S_\cdot(X) \to S^{\mathcal{U}}_\cdot(X)$，使 ρ 为 ι 的同伦逆.

分几小步进行：

(subdivison)

① 一次重心重分.

定义：$S: S_n(X) \to S_n(X)$， by：

$\forall\, \sigma: \Delta_n \to X$，记 $\{\Delta_n^i\}_{i=1}^k$ 为 Δ_n 做一次重心重分所得的 n-单形全体. 规定.

$$S(\sigma) = \sum_{i=1}^{k} (\pm 1) \cdot \sigma|_{\Delta_n^i}$$

适当地选取正负号 (see [Hatcher, Page 121-122])

事实：(1) S 给出了 $S_\cdot(X) \to S_\cdot(X)$ 的态射.

(2) $S \simeq 1$ (恒等态射)，i.e.

$\exists\, T: S_n(X) \to S_{n+1}(X)$，s.t.

$\partial \circ T + T \circ \partial = 1 - S$，且 $T(S_n^{\mathcal{U}}(X)) \subset S_{n+1}^{\mathcal{U}}(X)$.

② 多次重心重分.

$\forall$ 正整数 m, $S^m \simeq 1$ 链同伦算子: $D_m = T\circ\sum_{i=0}^{m-1} S^i$.

$\ulcorner$ $1-S^m = (1-S)+(S-S^2)+(S^2-S^3)+\cdots\cdots+(S^{m-1}-S^m)$.

$= (1-S)+S(1-S)+S^2(1-S)+\cdots+S^{m-1}(1-S)$.

$= (1-S)\cdot(1+S+\cdots+S^{m-1})$.

$= (\partial\circ T+T\circ\partial)\sum_{i=0}^{m-1} S^i$.

$= \partial\circ(T\circ\sum_{i=1}^{m-1} S^i)+T\circ\partial\circ\sum_{i=1}^{m-1} S^i$

$= \partial\circ(T\circ\sum_{i=1}^{m-1} S^i)+(T\circ\sum_{i=1}^{m-1} S^i)\circ\partial$. $\lrcorner$

$\forall\, \sigma:\Delta_n\to X$, $\mathcal{U}=\{U_i\}_i$, $\bigcup_i \mathrm{int}(U_i)=X$.

$\bigcup_i \sigma^{-1}(\mathrm{int}(U_i))=\Delta_n$.

应用Lebesgue引理,以及重心重分可使直径足够小,可取一个满足如下条件的最小的非负整数 m:

对 Δ_n 做 m 次重心重分后，所得每一个小 n-单形均被 σ 映到某个 $\mathrm{int}(U_i)$ 中.

记该最小非负整数为 $m(\sigma)$.

定义 $D: S_n(X) \to S_{n+1}(X)$ by.

$\forall \sigma: \Delta_n \to X$，规定 $D(\sigma) = D_{m(\sigma)}(\sigma)$.（规定 $D_0 = 0$）

由 $\partial \circ D_{m(\sigma)}(\sigma) + D_{m(\sigma)} \circ \partial(\sigma) = \sigma - S^{m(\sigma)}(\sigma)$，得：

$$\begin{aligned}\partial \circ D(\sigma) + D \circ \partial(\sigma) &= \sigma - S^{m(\sigma)}(\sigma) + D \circ \partial(\sigma) - D_{m(\sigma)} \circ \partial(\sigma) \\ &= \sigma - \underbrace{\left[S^{m(\sigma)}(\sigma) + D_{m(\sigma)}(\partial(\sigma)) - D(\partial(\sigma))\right]}_{=\rho(\sigma)}.\end{aligned}$$

定义 $\rho: S_n(X) \to S_n(X)$ by.

$$\rho(\sigma) = [\qquad\qquad]$$

则：$\partial \circ D(\sigma) + D \circ \partial(\sigma) = \sigma - \rho(\sigma)$.

注意：$\rho(S_n(X)) \subset S_n^{\mathcal{U}}(X)$.

「$\forall \sigma: \Delta_n \to X$.

$$\boxed{\rho(\sigma) = S^{m(\sigma)}(\sigma) + D_{m(\sigma)}(\partial(\sigma)) - D(\partial(\sigma))}$$

$S^{m(\sigma)}(\sigma) \in S_n^{\mathcal{U}}(X)$.

$\Delta_n = \langle p_0, \cdots, p_n \rangle$

$\partial(\sigma) = \sum_j (-1)^j \underbrace{\sigma\big|_{\langle p_0, \cdots, \hat{p}_j, \cdots, p_n \rangle}}_{\sigma_j}$.

$D_m = T \circ \sum_{i=0}^{m-1} S^i$.

看 $D_{m(\sigma)}(\sigma_j) - D(\sigma_j)$

$= D_{m(\sigma)}(\sigma_j) - D_{m(\sigma_j)}(\sigma_j)$. $m(\sigma_j) \leq m(\sigma)$.

$= T \circ \sum_{i \geq m(\sigma_j)} S^i(\sigma_j) \in S_n^{\mathcal{U}}(X)$ 」

因而 ρ 可视为~~群~~同态 $\rho: S_n(X) \to S_n^{\mathcal{U}}(X)$, $\forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

这些同态一起给出了态射 $\rho: S_\bullet(X) \to S_\bullet^{\mathcal{U}}(X)$

「由 $\partial \circ D + D \circ \partial = 1 - \rho$. $(\rho(\sigma) = \sigma - \partial(D(\sigma)) - D(\partial(\sigma)))$.

$\partial \circ (\rho(\sigma)) = \partial\sigma - \partial(D(\partial(\sigma)))$.

$$\rho \circ \partial(\sigma) = \partial\sigma - \partial(D(\partial(\sigma))).$$

$$(\partial \circ D(\partial\sigma) + D \circ \partial(\partial\sigma) = \partial\sigma - \rho(\partial(\sigma)))$$

$$\Rightarrow \partial \circ \rho = \rho \circ \partial.$$

$\lrcorner$

$\iota: S^{\mathcal{U}}_{\cdot}(X) \longrightarrow S_{\cdot}(X)$ $\qquad \partial \circ D + D \circ \partial = 1 - \rho.$

$\rho: S_{\cdot}(X) \longrightarrow S^{\mathcal{U}}_{\cdot}(X).$ $\quad \rho(\sigma) = S^{m(\sigma)}(\sigma) + D_{m(\sigma)}(\partial(\sigma)) - D(\partial(\sigma))$

Claim: $\rho \circ \iota = 1,\ \iota \circ \rho \simeq 1.$

$\ulcorner$ $\forall \sigma \in S^{\mathcal{U}}_n(X).$ $\quad \rho \circ \iota(\sigma) = \rho(\sigma) = \sigma.$

$\sigma: \Delta_n \longrightarrow X$

$(m(\sigma) = 0)$

而 $\partial \circ D + D \circ \partial = 1 - \rho$ as $S_{\cdot}(X) \to S_{\cdot}(X).$

$$1 - \iota \circ \rho = 1 - \rho = \partial \circ D + D \circ \partial.$$

$\lrcorner$

#

小结: $\iota: S^{\mathcal{U}}_{\cdot}(X) \longrightarrow S_{\cdot}(X)$ 为同伦等价.

定理3′之证明：

（定理3′. 设 X：top sp.，$A, B \subset X$ 子空间，$\mathrm{int}(A) \cup \mathrm{int}(B) = X$，
则包含映射 $(X \cap B, A \cap B) \longrightarrow (X, A)$ 诱导了同构：
$$H_n(B, A\cap B) \xrightarrow{\cong} H_n(X, A), \quad \forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$）

设 $X = A \cup B$，记 $\mathcal{U} = \{A, B\}$. $\mathrm{int}(A) \cup \mathrm{int}(B) = X$.

已证：$S^{\mathcal{U}}_{\bullet}(X) \underset{\rho}{\overset{\iota}{\rightleftarrows}} S_{\bullet}(X)$，$\partial \circ D + D \circ \partial = 1 - \iota \circ \rho$
$\rho \circ \iota = 1$.

注意：$\partial(S_{n+1}(A)) \subset S_n(A)$ $\quad \iota(S_n(A)) \subset S_n(A)$.
$D(S_n(A)) \subset S_{n+1}(A)$
$\rho(S_n(A)) \subset S_n(A)$.

所以：ρ 诱导：$S_{\bullet}(X)/S_{\bullet}(A) \longrightarrow S^{\mathcal{U}}_{\bullet}(X)/S_{\bullet}(A)$.
ι ……：$S^{\mathcal{U}}_{\bullet}(X)/S_{\bullet}(A) \longrightarrow S_{\bullet}(X)/S_{\bullet}(A)$.
D ……：$S_n(X)/S_n(A) \longrightarrow S_{n+1}(X)/S_{n+1}(A)$.

$\Rightarrow \quad i: S^{\mathcal{U}}_{\cdot}(X)/S_{\cdot}(A) \longrightarrow S_{\cdot}(X)/S_{\cdot}(A)$ 为同伦等价.

另一方面，有自然的态射：

$$S_{\cdot}(B)/S_{\cdot}(A\cap B) \longrightarrow S^{\mathcal{U}}_{\cdot}(X)/S_{\cdot}(A).$$

「 $S_{\cdot}(B) \longrightarrow S^{\mathcal{U}}_{\cdot}(X) \longrightarrow S^{\mathcal{U}}_{\cdot}(X)/S_{\cdot}(A)$ 」

注意： $S_n(B)/S_n(A\cap B)$ 为由 B 中的不落在 A 中的奇异 n-单形生成的自由 Abel 群

$S^{\mathcal{U}}_n(X)/S_n(A)$ 为由 B 中的 ‥‥‥‥‥‥

$$\Rightarrow \quad H_n(B, A\cap B) \xrightarrow{\cong} H_n(X, A) \qquad \forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}. \qquad \#$$

命题13. 设 X: top sp., 闭 $A\subset X$ 为闭集. 且 A 为某个 A 在 X 内的邻域的形变收缩核. (此时, (X,A) 称为一个 good pair).

则商映射 $q:(X,A)\to(X/A,A/A)$ 诱导了同构:

$$q_*: H_n(X,A)\xrightarrow{\cong}H_n(X/A,A/A)\cong\tilde{H}_n(X/A).$$

pf. 设 V 为满足命题13条件的 A 的邻域. 则有交换图表:

$$\begin{tikzcd}
H_n(X,A) \arrow[r, "\cong", "\text{命题11}"'] \arrow[d, "q_*"] & H_n(X,V) \arrow[d, "q_*"] & H_n(X\setminus A,V\setminus A) \arrow[l, "\cong", "\text{切除}"'] \arrow[d, "q_*", "\text{②}\,\wr"'] \\
H_n(X/A,A/A) \arrow[r, "\cong", "\text{命题11}"'] & H_n(X/A,V/A) & H_n((X/A)\setminus(A/A),(V/A)\setminus(A/A)) \arrow[l, "\cong\ \text{切除}", "\text{①}"']
\end{tikzcd}$$

「①之理由

$\mathrm{int}(V)/A\subset V/A$ $\quad q^{-1}(\mathrm{int}(V)/A)=\mathrm{int}(V)$.

$\Rightarrow \mathrm{int}(V)/A$ 为 X/A 中开集, $\Rightarrow \mathrm{int}(V)/A\subset\mathrm{int}(V/A)$

又 $q^{-1}(A/A)=A$ 闭 $\Rightarrow A/A$ 为 X/A 中闭点. 」

「②: $X\setminus A\cong(X/A)\setminus(A/A)$, $(V/A)\setminus(A/A)$ 」 #

命题14. 设 (X,A) 为一个 good pair. 则有长正合列:

$$\cdots \to \tilde{H}_p(A) \to \tilde{H}_p(X) \to \tilde{H}_p(X/A) \to \tilde{H}_{p-1}(A) \to \tilde{H}_{p-1}(X) \to \tilde{H}_{p-1}(X/A) \to \cdots$$

推论: $\tilde{H}_k(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{if } k=n \\ 0, & \text{if } k\neq n. \end{cases}$

证明: 对 (B^n, S^{n-1}) (为一个 good pair) 使用命题14:

$$\cdots \to \tilde{H}_p(S^{n-1}) \to \underset{0}{\tilde{H}_p(B^n)} \to \tilde{H}_p(S^n) \to \tilde{H}_{p-1}(S^{n-1}) \to \underset{0}{\tilde{H}_{p-1}(B^n)}$$

$$\to \tilde{H}_{p-1}(S^n) \to \cdots$$

$$\Rightarrow \tilde{H}_p(S^n) \cong \tilde{H}_{p-1}(S^{n-1})$$

若 $p=n$, $\tilde{H}_n(S^n) \cong \cdots \cong \tilde{H}_0(S^0) \cong \mathbb{Z}$

若 $p\neq n$，$\tilde{H}_p(S^n)\cong\cdots\cong\begin{cases}\tilde{H}_0(S^k)\cong 0, & p<n.\\ \tilde{H}_k(S^0)\cong 0, & p>n.\end{cases}$

其中 $k=|p-n|$.

$$\tilde{H}_k(S^0) = \tilde{H}_k(\{pt_1, pt_2\}).$$

要证：$\tilde{H}_k(S^0)\cong 0$

(方法一). 依照 $\{pt\}$ 情形之计算.

(方法二)：证明下述引理. #

引理：设 X：top sp. $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 为 X 的连通分支全体，则：

$$H_k\left(\coprod_{\alpha\in I}X_\alpha\right)\cong\bigoplus_{\alpha\in I}H_k(X_\alpha),\quad \forall k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

证明：留做习题 #

注意：$S^n = B^n/S^{n-1}$.

推论：$H_k(B^n,\partial B^n)\cong\begin{cases}\mathbb{Z}, & \text{if } k=n\\ 0, & \text{else}.\end{cases}$

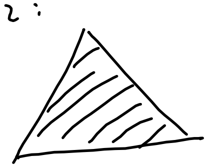
下面：给出 $H_n(B^n,\partial B^n)$ 的一个生成元.

取 B^n 的一个三角剖分：$h: \Delta_n \xrightarrow{\cong} B^n$. $h(\partial\Delta_n)=\partial B^n$.

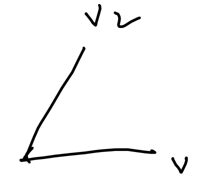
则 $H_n(B^n,\partial B^n)\cong H_n(\Delta_n,\partial\Delta_n)$.

令 $\Lambda = \Delta_n$ 中 n 个 $(n-1)$维面之并

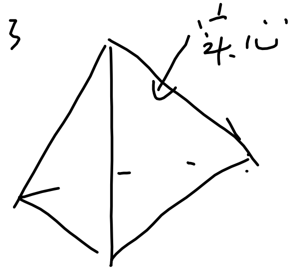
「例：$n=2$：Δ_2：



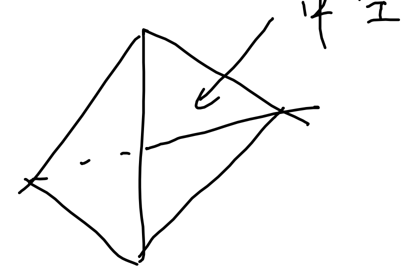
Λ：



$n=3$：Δ_3



Λ：



」.

考虑三元组 $(\Delta_n,\partial\Delta_n,\Lambda)$ 的长正合列：

$$\to H_n(\partial\Delta_n,\Lambda)\to \underbrace{H_n(\Delta_n,\Lambda)}_{0}\to H_n(\Delta_n,\partial\Delta_n)\xrightarrow{\cong} H_{n-1}(\partial\Delta_n,\Lambda)$$

$$\to \underbrace{H_{n-1}(\Delta_n,\Lambda)}_{0}\to\cdots$$

「 考虑 $(\Lambda, \Lambda) \hookrightarrow (\Delta_n, \Lambda)$ 」

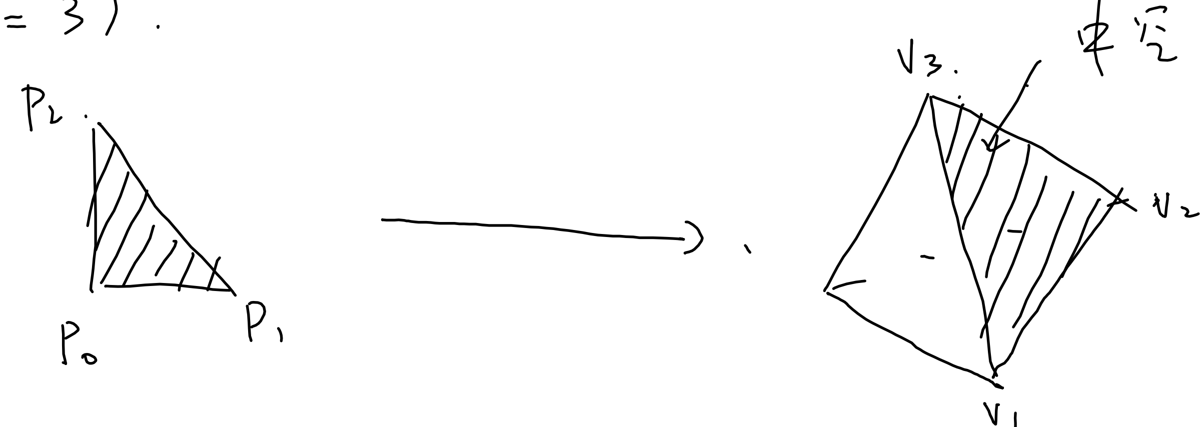
$\Rightarrow H_n(\Delta_n, \partial\Delta_n) \xrightarrow[\delta]{\cong} H_{n-1}(\partial\Delta_n, \Lambda)$.

记 Λ 中不包含在 Λ 中的 Δ_n 的 $(n-1)$-维面为 $\langle v_1, \cdots, v_n \rangle$.

记 $\Delta_{n-1} \longrightarrow \partial\Delta_n$ 为嵌入: $\sum_{i=0}^{n-1} t_i P_i \longmapsto t_0 v_1 + \cdots + t_{n-1} v_n$ (✻).

它诱导了: $(\Delta_{n-1}, \partial\Delta_{n-1}) \longrightarrow (\partial\Delta_n, \Lambda)$

「例: $(n=3)$.



」

$\rightsquigarrow H_{n-1}(\Delta_{n-1}, \partial\Delta_{n-1}) \xrightarrow{\beta} H_{n-1}(\partial\Delta_n, \Lambda)$.

这是一个同构.

「由

$$\begin{tikzcd} H_{n-1}(\Delta_{n-1}, \partial\Delta_{n-1}) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & H_{n-1}(\partial\Delta_n, \Lambda) \arrow[d, "\cong"] \\ H_{n-1}(\Delta_{n-1}/\partial\Delta_{n-1}, \partial\Delta_{n-1}/\partial\Delta_{n-1}) \arrow[r, phantom, "\cong"] & H_{n-1}(\partial\Delta_n/\Lambda, \Lambda/\Lambda) \end{tikzcd}$$

之得 」

考虑复合：

$$\underbrace{H_n(\Delta_n, \partial\Delta_n)} \xrightarrow{\delta} H_{n-1}(\partial\Delta_n, \Lambda) \xrightarrow{\beta^{-1}} \underbrace{H_{n-1}(\Delta_{n-1}, \partial\Delta_{n-1})}.$$

记 $i_n : \Delta_n \to \Delta_n$ 为恒等映射．可视 $i_n \in S_n(\Delta_n)$

($\partial i_n = \sum (-1)^j i_n|_{\langle p_0, \cdots, \hat{p}_j, \cdots, p_n\rangle} \in S_{n-1}(\partial\Delta_n)$，因而

i_n 为一个 relative n-cycle)．

记 i_n 所代表的相对同调类为 $[i_n] \in H_n(\Delta_n, \partial\Delta_n)$．

Claim: $[i_n]$ 为 $H_n(\Delta_n, \partial\Delta_n)$ 的一个生成元．

proof of claim:

先看 $\delta([i_n])$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & S_n(\partial\Delta_n,\Sigma) \arrow[r] \arrow[d] & S_n(\Delta_n,\Sigma) \arrow[r] \arrow[d] & S_n(\Delta_n,\partial\Delta_n) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & S_{n-1}(\partial\Delta_n,\Sigma) \arrow[r] & S_{n-1}(\Delta_n,\Sigma) \arrow[r] & S_{n-1}(\Delta_n,\partial\Delta_n) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$i_n \mapsto i_n$

$\partial i_n \mapsto \partial i_n$.

由连接同态 δ 之定义,

$$\delta([i_n]) = [\partial i_n].$$

再看 $\beta^{-1}([\partial i_n])$

$\Lambda = \partial\Delta_n$ 中除了 $\langle v_1,\cdots,v_n\rangle$ 以外的 $(n-1)$ 维面之并.

$$\beta: H_{n-1}(\Delta_{n-1},\partial\Delta_{n-1}) \xrightarrow{\cong} H_{n-1}(\partial\Delta_n,\Lambda) \ni [\partial i_n].$$

希望: $\beta([i_{n-1}]) = [\partial i_n]$

回忆: β 由 $\Delta_{n-1} \xrightarrow{k} \partial\Delta_n$, $\sum_{i=0}^{n-1} t_i p_i \mapsto t_0 v_1 + \cdots + t_{n-1} v_n$ 诱导.

$\beta([i_{n-1}]) =$ 由 $k\circ i_{n-1}: \Delta_{n-1} \to \partial\Delta_n$ 所代表的同调类

$$\sum_{i=0}^{n-1} t_i p_i \mapsto t_0 v_1 + \cdots + t_{n-1} v_n.$$

$$\partial i_n = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j i_n\Big|_{\langle p_0,\cdots,\hat{p}_j,\cdots,p_n\rangle}.$$

不妨设 $\langle p_1,\cdots,p_n\rangle = \langle v_1,\cdots,v_n\rangle$.

则 $[\partial i_n]$ 是由 $i_n|_{\langle p_1,\cdots,p_n\rangle}$ 所代表的同调类.

i.e.: $\Delta_{n-1} \longrightarrow \langle p_1,\cdots,p_n\rangle \xrightarrow{i_n} \partial\Delta_n$.

$\sum_{i=0}^{n-1} t_i p_i \longmapsto t_0p_1+\cdots+t_{n-1}p_n \longmapsto t_0p_1+\cdots+t_{n-1}p_n$.

所代表的同调类.

把之前定义 β 的嵌入 $\Delta_{n-1} \longrightarrow \partial\Delta_n$ 进一步规定为 $\sum_{i=0}^{n-1} t_ip_i \longmapsto t_0p_1+\cdots+t_{n-1}p_n$, 则

$$\beta([i_{n-1}]) = [\partial i_n].$$

因此 $\beta^{-1}([\partial i_n]) = [i_{n-1}]$.

$\therefore$ 在复合同构 $H_n(\Delta_n,\partial\Delta_n) \xrightarrow[\cong]{\beta^{-1}\circ\delta} H_{n-1}(\Delta_{n-1},\partial\Delta_{n-1})$ 下,

$$[i_n] \longmapsto [i_{n-1}].$$

由归纳法, 只需证:

$$\begin{tikzcd}
{[i_1] \in H_1(\Delta_1, \partial\Delta_1)} \arrow[d, mapsto] \arrow[d, "\delta", "\cong"'] \\
{[\partial i_1] \in H_0(\partial\Delta_1, \Lambda)},
\end{tikzcd}$$

为一个生成元.

记 $\partial\Delta_1 = \{x_0, x_1\}$, $\Lambda = \{x_0\}$.

$$\partial i_1 = i_1|_{x_1} - i_1|_{x_0}.$$

∂i_1 视为 $(\partial\Delta_1, \Lambda)$ 的 relative chain 等于 $i_1|_{x_1}: \Delta_0 \longrightarrow \{x_0, x_1\}$
$$pt \longmapsto x_1.$$

但 $(\partial\Delta_1, \Lambda)$ 的 relative 0-chain 均等于 $n \cdot i_1|_{x_1}$ 对某 $n \in \mathbb{Z}$.

$\Rightarrow$ $i_1|_{x_1}$ 所代表的同调类(即为 $[\partial i_1]$)是 $H_0(\partial\Delta_1, \Lambda)$ 的一个生成元. #

总结: 取 $h: \Delta_n \xrightarrow{\cong} B^n$, s.t. $h(\partial\Delta_n) = \partial B^n$, 则

$[i_n]$ 在同构 $H_n(\Delta_n, \partial\Delta_n) \cong H_n(B^n, \partial B^n)$ 下的像生成了 $H_n(B^n, \partial B^n)$