3. 连续函数 (or t.sp.)拓扑空间

定义. 设 X, Y 为 top. sp., 映射 $f: X \to Y$ 称为连续映射: if: $\forall U \underset{\text{open}}{\subset} Y$ $f^{-1}(U)$ 为 X 中开集.

命题1. 连续映射之复合连续.

Pf. $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ 连续

要证: $g \circ f: X \to Z$ 连续.

$\forall U \underset{\text{open}}{\subset} Z$, $(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(\underbrace{g^{-1}(U)}_{Y\text{中开集}})$ 为开集 #

命题2. 设 $f: X \to Y$ 连续, $A \subset X$, $f|_A: A \to Y$ 连续.

子空间拓扑.

Pf. $\forall U \underset{\text{open}}{\subset} Y$, $(f|_A)^{-1}(U) = A \cap \underbrace{f^{-1}(U)}_{\text{为}X\text{中开集}}$ 为 A 中开集 #

例1. X 为 t.sp. $\quad Id_X : X \longrightarrow X$ 连续.

$$x \longmapsto x.$$

例2. 设 X 为拓扑空间, $A \subset X$, 子空间top. 连续.

$$i_A : A \hookrightarrow X$$

$$a \longmapsto a.$$

例3. (constant map) X: t.sp. $\quad Y = \{pt\}$.

$f: X \longrightarrow Y$ 连续映射

命题3. 下列命题等价:

a). $f: X \longrightarrow Y$ 连续. ($\forall U \underset{open}{\subset} Y$, $f^{-1}(U)$ 开)

b). 设 β 为 Y 的一组拓扑基, $\forall U \in \beta$, $f^{-1}(U)$ 开

c). $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$. $\quad \forall A \subset X$

d). $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\bar{B})$, $\quad \forall B \subset Y$

e) $\forall F \underset{closed}{\subset} Y$, $f^{-1}(F)$ 闭.

$X = \mathbb{R}^n$, $A \subset X$ $\quad f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$

若 x_0 为 A 的极限点, $f(x_0) \in \overline{f(A)}$

$\Downarrow$

$\exists \{x_n\} \subset A$, $x_n \to x_0$.

$f(x_0) = f(\lim_{n\to\infty} x_n)$.

$= \lim_{n\to+\infty} \underbrace{f(x_n)}_{\in f(A)}$.

命题3. 下列命题等价:

a). $f: X \to Y$ 连续 ($\forall U \underset{open}{\subset} Y$, $f^{-1}(U)$ 开)

b). 设 β 为 Y 的一组拓扑基, $\forall U \in \beta$, $f^{-1}(U)$ 开.

c). $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$. $\forall A \subset X$

d). $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\bar{B})$, $\forall B \subset Y$

e) $\forall F \underset{closed}{\subset} Y$, $f^{-1}(F)$ 闭

Pf. a) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ c) $\Rightarrow$ d) $\Rightarrow$ e) $\Rightarrow$ a)

"a) $\Rightarrow$ b)" 显然.

"b) $\Rightarrow$ c)" $\forall y \in f(\bar{A})$ 要证 $y \in \overline{f(A)}$.

$y = f(x)$, $x \in \bar{A}$

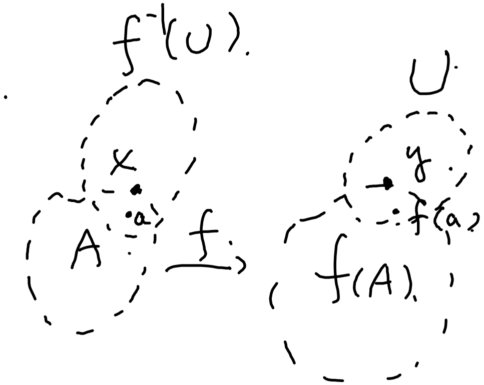
① $x \in A$, $y \in f(A) \subset \overline{f(A)}$ 不用证

② $x \notin A$, x 为 A 的一个极限点.

i) $y \in f(A)$ 不用证

ii) $f(x) = y \notin f(A)$

要证 y 为 $f(A)$ 的一个极限点.



$\forall U \underset{open}{\subset} Y$,

且 $y \in U$, $f^{-1}(U)$ 为开.

$x \in f^{-1}(U)$. $\Rightarrow \exists a \in f^{-1}(U) \cap A$.

$\Rightarrow f(a) \in U$, $f(a) \in f(A)$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow U \cap f(A) \neq \emptyset \\ y \notin f(A) \end{array}\right\} \Rightarrow y$ 为 $f(A)$ 极限点

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{c).}\ f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}.\quad \forall A\subset X \\ \text{d).}\ \overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\bar{B}).\quad \forall B\subset Y \\ \text{e)}\ \forall F \underset{\text{closed}}{\subset} Y.\ f^{-1}(F)\ \text{闭} \end{array}}$$

c) $\Rightarrow$ d). 要证 $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\bar{B})$, $\forall B\subset Y$.

只要证: $f(\overline{f^{-1}(B)}) \subset \bar{B}$.

$$\underline{f(\overline{f^{-1}(B)})}$$

$$\bigcap \ \text{c)}\ f^{-1}(B)=A$$

$$\overline{\underbrace{f(f^{-1}(B))}_{\subset B}} \subset \bar{B}$$

d) $\Rightarrow$ e). $\forall F \underset{\text{closed}}{\subset} Y$.

$$\overline{f^{-1}(F)} \subset f^{-1}(\bar{F}) = f^{-1}(F).$$

$$\Rightarrow \overline{f^{-1}(F)} = f^{-1}(F) \Rightarrow f^{-1}(F)\ \text{闭}.$$

e) $\Rightarrow$ a). $\forall U \underset{\text{open}}{\subset} Y$. $f^{-1}(U) \sqcup \underbrace{f^{-1}(Y\setminus U)}_{\text{闭}} = X$

$$\Rightarrow f^{-1}(U) = X \setminus \underbrace{f^{-1}(Y\setminus U)}_{\text{闭}}\ \text{开}. \Rightarrow f\ \text{连续}. \qquad \#$$

定义：X: top sp. $\{x_n\}\subset X$, $x\in X$ 称为 $\{x_n\}$ 的极限 ($\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$), if $\forall$ 开集 $U\subset X$, $x\in U$, $\exists N$ $\forall n>N$, $x_n\in U$.

Rmk. $X=\mathbb{R}^n$. 则该定义与数分中点列极限的 ε-N 定义吻合.

Rmk. 在此定义下极限不唯一.

例: $X=\{0,1\}$. $\mathcal{J}=\{\{0\},\{0,1\},\phi\}$

$x_n=0$, $n=1,2,\cdots$. $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$ OK!

$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$. if 开集 $U\ni 1$. $\Rightarrow U=\{0,1\}$

定义. 设 X 为一个 top. sp. X 称为一个 Hausdorff 空间, 若 $\forall x_1, x_2 \in X$ $(x_1\neq x_2)$, $\exists$ 开集 U_1, U_2, s.t. $x_1\in U_1$, $x_2\in U_2$, 且 $U_1\cap U_2=\phi$.

命题：设 X 为一个 Hausdorff 空间，$\{x_n\} \subset X$，则若 $\lim x_n$ 存在，则 $\lim x_n$ 唯一。

Pf. $\lim x_n = y_1 \quad (y_1 \neq y_2)$.

$\qquad\qquad = y_2$

$\Rightarrow \exists N_1$ s.t. $\forall n > N_1$, $x_n \in U_1$

$\quad N_2 \qquad n > N_2$, $x_n \in U_2$.

$N = \max\{N_1, N_2\}$, $\Rightarrow \forall n > N$, $x_n \in U_1 \cap U_2 = \emptyset$ 矛盾 #

例：$X = \{0, 1\}$，$\mathcal{T} = \{\{0\}, \{0,1\}, \emptyset\}$ 不是 Hausdorff.

$y_1 = 0$, $\quad y_2 = 1 \qquad \underset{\text{open}}{U} \ni y_2 \Rightarrow U = \{0, 1\}$

$U \cap \{y_1\} = \emptyset$.

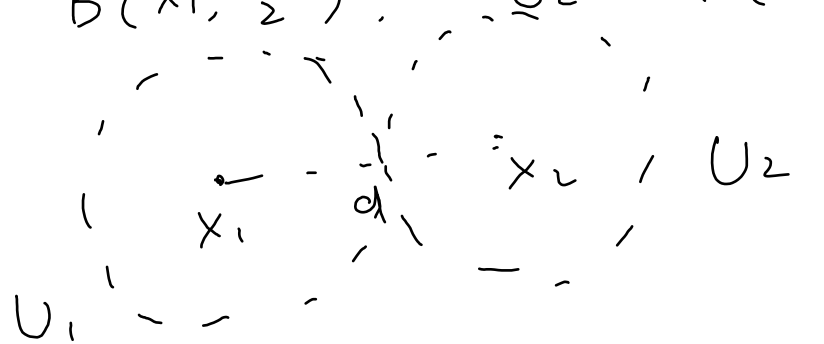
例 (度量空间都是 Hausdorff 空间).

(X, d) 为度量空间.

$x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$

设 $d = d(x_1, x_2) > 0$

$U_1 = B(x_1; \frac{d}{2})$, $U_2 = B(x_2; \frac{d}{2})$.



$U_1 \cap U_2 = \phi$ 之证明:

$\forall x \in U_1 \cap U_2$, $d(x_1, x_2) \le d(x_1, x) + d(x, x_2)$

$< \frac{d}{2} + \frac{d}{2} = d$ 矛盾!

命题: 设 $f: X \underset{\text{Hausdorff}}{\longrightarrow} Y$ 连续, $\{x_n\} \subset X$, $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = y_0$, 则 $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) \in Y$

Pf. 只要证：$\forall\, U \underset{\text{open}}{\subset} Y$, $f(\lim\limits_{n\to\infty} x_n) \in U$, 则 $\exists N$, $\forall n > N$, $f(x_n) \in U$.

$\lim f(x_n) = f(\lim x_n)$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n \in f^{-1}(U) \underset{\text{open}}{\subset} X$.

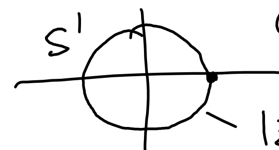
$\Rightarrow \exists N$, s.t. $\forall n > N$, $x_n \in f^{-1}(U) \Rightarrow f(x_n) \in U$. #

定义.(同胚. homeomorphism). X, Y t.sp. $f: X \to Y$, 称为一个同胚, if ① f 双射
② f 连续
③ f^{-1} 连续.

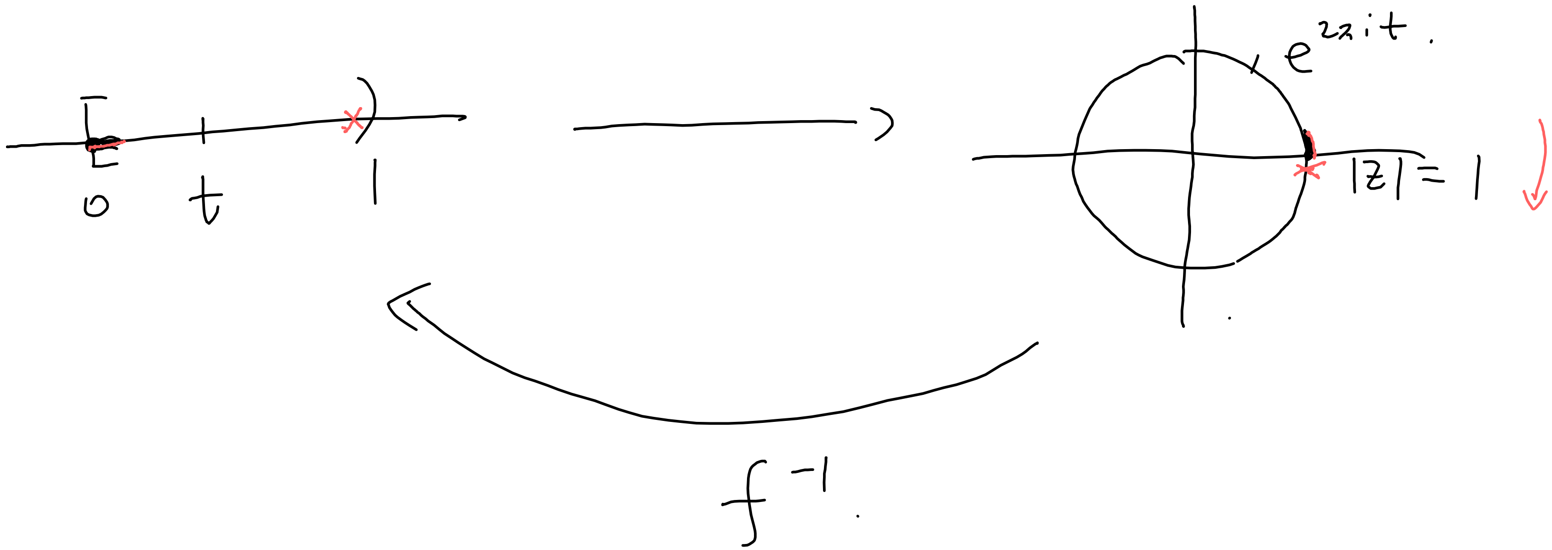
一个连续双射, 但 f^{-1} 不连续的例子

f^{-1} 不连续.

$$f: [0,1) \longrightarrow S^1 \subset \mathbb{C}$$
$$t \longmapsto e^{2\pi i t}.$$



$|z|=1$

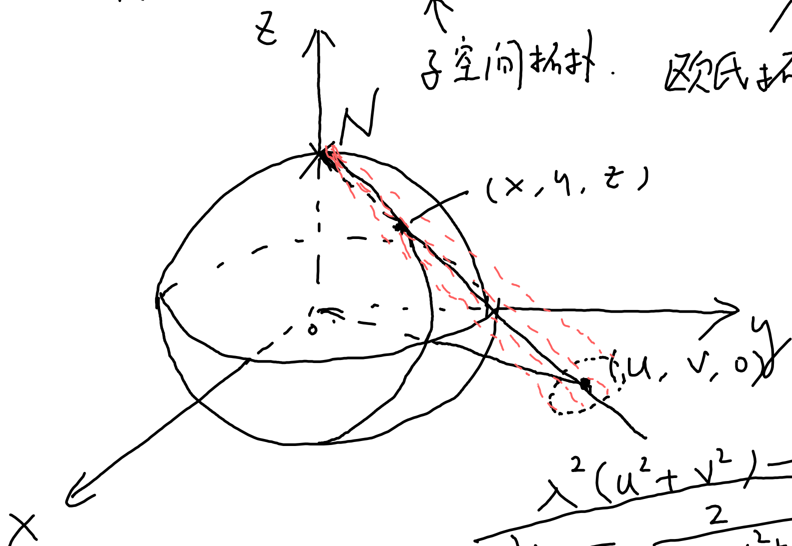


例 (球极投影).

$S^2=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2=1\}$. $p=(0,0,1)$.

$h: S^2\setminus p \longrightarrow \mathbb{R}^2$. $(x,y,z)\longmapsto(u,v)$.

子空间拓扑. 欧氏拓扑. h 双射显然.



h 连续

$\boxed{h^{-1}\text{ 连续}}$.

$(u,v,0)-(0,0,1)$ 与 $(x,y,z)-(0,0,1)$ 共线

$\Rightarrow \exists\lambda, (x,y,z-1)=\lambda(u,v,-1)$

$x=\lambda u,\ y=\lambda v,\ z=1-\lambda.$

$x^2+y^2+z^2=1$

$\Leftarrow \lambda^2u^2+\lambda^2v^2+(1-\lambda)^2=1$

$\lambda^2(u^2+v^2)-2\lambda+\lambda^2=0$

$\Rightarrow \boxed{\lambda=\frac{2}{u^2+v^2+1}}$

$x=\lambda u,\ y=\lambda v,\ z=1-\lambda \qquad \lambda=\dfrac{2}{u^2+v^2+1}$

$$x=\frac{2u}{u^2+v^2+1},\quad y=\frac{2v}{u^2+v^2+1},\quad z=\frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1}.$$

$$h^{-1}:\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow S^2\setminus\{P\}$$
$$(u,v)\longmapsto\left(\frac{2u}{u^2+v^2+1},\ \frac{2v}{u^2+v^2+1},\ \frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1}\right)$$

$$f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^3\quad (u,v)\longmapsto\left(\frac{2u}{u^2+v^2+1},\ \frac{2v}{u^2+v^2+1},\ \frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1}\right).$$

$\Rightarrow f$ 为一个连续映射.

Lemma: $f: X\longrightarrow Y$ 连续, 则 $f: X\longrightarrow \underbrace{f(X)}_{\text{子空间拓扑}}$ 也是连续映射.

pf. $\forall\ f(X)$ 中开集, 长成 $U\cap f(X)$, $U\underset{\text{open}}{\subseteq} Y$.

$f^{-1}(U\cap f(X)) = f^{-1}(U)\underset{\text{open}}{\subseteq} X$. #

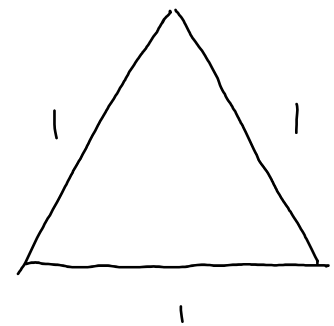
$\Rightarrow h^{-1}: \mathbb{R}^2\longrightarrow S^2\setminus\{P\}$ 连续.

例7.（Peano曲线）.

（$f: [0,1] \longrightarrow X$ 连续映射，称之为曲线）

$X = \triangle$

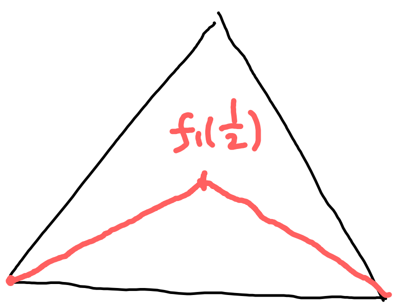
$\triangle$:



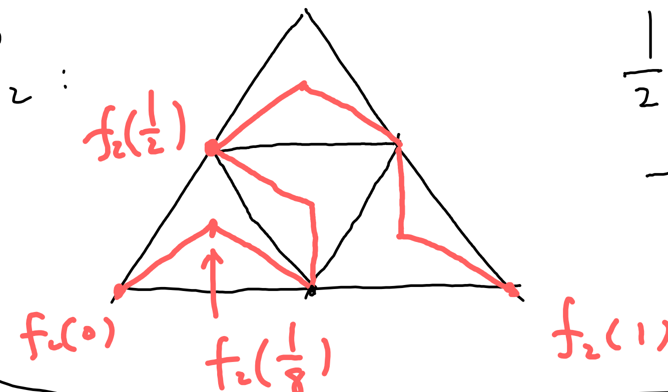
取$\mathbb{R}^2$的子空间拓扑.

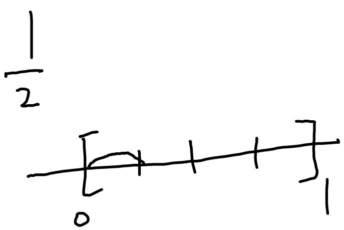
$f_n: [0,1] \longrightarrow X$

f_1:

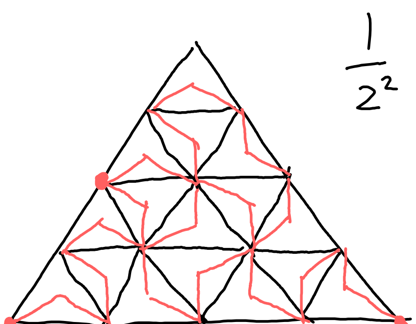


f_2:





f_3:

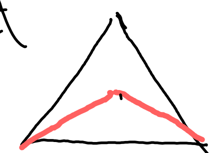
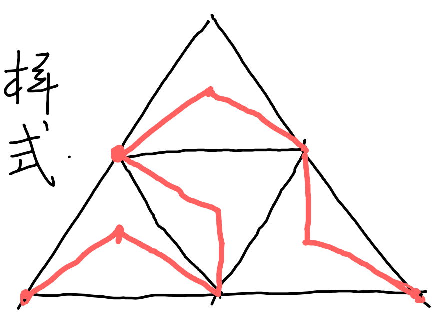


匀速率：

$\downarrow$

f_n 的样式中小三角形的边长 $\frac{1}{2^{n-1}}$

规则：

样式  替换成 样式 

① $f_n : [0,1] \longrightarrow \triangle$

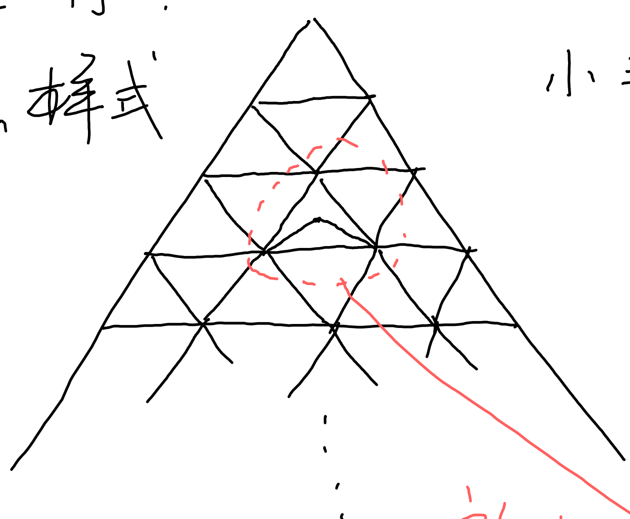
$f_n \rightrightarrows f : [0,1] \longrightarrow \triangle$ （Peano 曲线）

$\Rightarrow f$ 连续

② $f([0,1]) = \triangle$ 充满空间的曲线

①之证明：

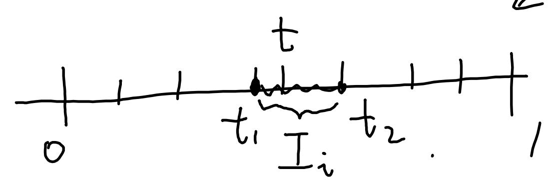
f_n 样式



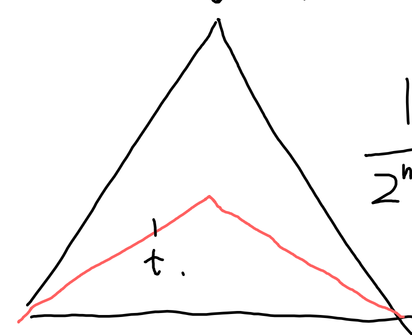
小三角形边长为 $\frac{1}{2^{n-1}}$

f_n 匀速率

n 等分.



$\downarrow f_n$.



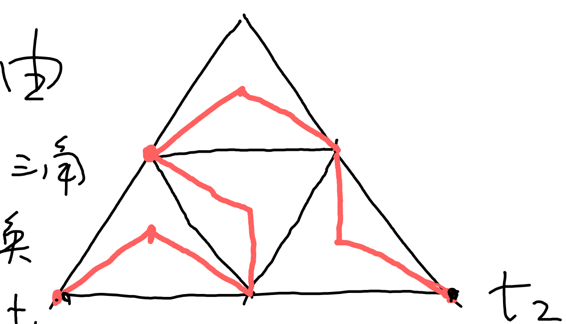
$\frac{1}{2^{n-1}}$

$$\boxed{|f_{n+1}(t) - f_n(t)| \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}}$$

$\forall t$

放大.

f_{n+1} 由 f_n 的每个小三角形之样式做替换而得



$$\boxed{\forall m \geqslant n+1 \quad |f_m(t) - f_n(t)| \leqslant \frac{1}{2^{n-1}} \quad \forall t}$$

$\forall m \geq n+1$

$|f_m(t) - f_n(t)| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$

$\forall t$

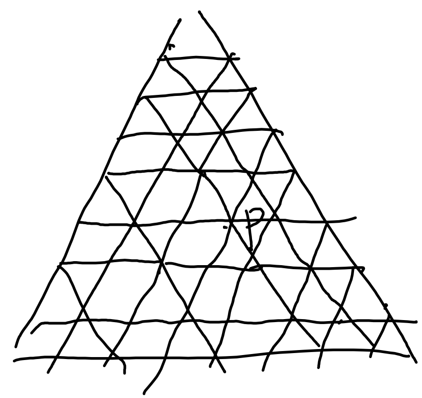
$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n, m > N, |f_m(t) - f_n(t)| < \varepsilon, \forall t \in [0,1].$

Cauchy $\Rightarrow$ $\{f_n(t)\}$ 一致收敛,

记 $f(t) = \lim_{n \to +\infty} f_n(t) \Rightarrow f: [0,1] \to \triangle$ 为一个连续映射.

② $\forall p \in \triangle$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, 通过对 $\triangle$ 的边长 2^{n-1} 等分.

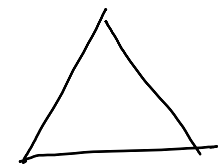


$\rightsquigarrow$ 边长为 $\frac{1}{2^{n-1}}$ 小三角形

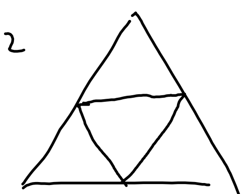
p必落在一个这样的小三角形中.

对于 f_n, 必 $\exists t_n$, $|f_n(t_n) - p| < \frac{1}{2^{n-1}}$

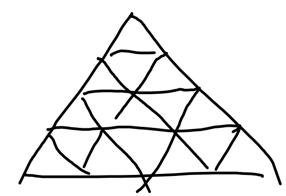
$n=1$



$n=2$



$n=3$



4等分 $= 2^{3-1}$

$$|f_m(t) - f_n(t)| \le \frac{1}{2^{n-1}} \quad \forall\, m \ge n+1.$$

$$\lim_{m\to+\infty} \quad |f(t) - f_n(t)| \le \frac{1}{2^{n-1}} \quad \forall\, t.$$

$$|f_n(t_n) - p| \le \frac{1}{2^{n-1}}.$$

$$\Rightarrow |f(t_n) - p| \le |f(t_n) - f_n(t_n)| + |f_n(t_n) - p|$$

$$\le \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-2}}.$$

$f([0,1])$

$$\{f(t_n)\} \longrightarrow p \quad \text{as} \quad n \to +\infty$$

$\Rightarrow$ p 为 $f([0,1])$ 极限点.

事实: $\underline{f([0,1])\text{ 为闭集}}$.

$$\Rightarrow \underline{p} \in \underline{f([0,1])} \Rightarrow f([0,1]) = \triangle. \quad \#$$

3. 紧性 Compactness

回忆数学分析：

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ 连续

① f 有界

② f 可取到最值

$f: [0,1) \to \mathbb{R}$

$\frac{1}{x-1}$

$K \subset \mathbb{R}^n$ 有界闭集，$f: K \to \mathbb{R}$ 连续

① f 有界

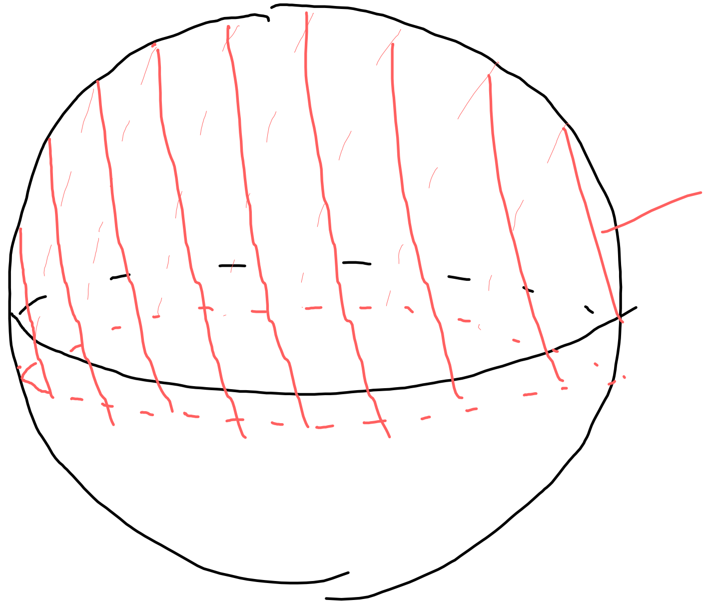
② f 可取到最值

有有限子覆盖性质

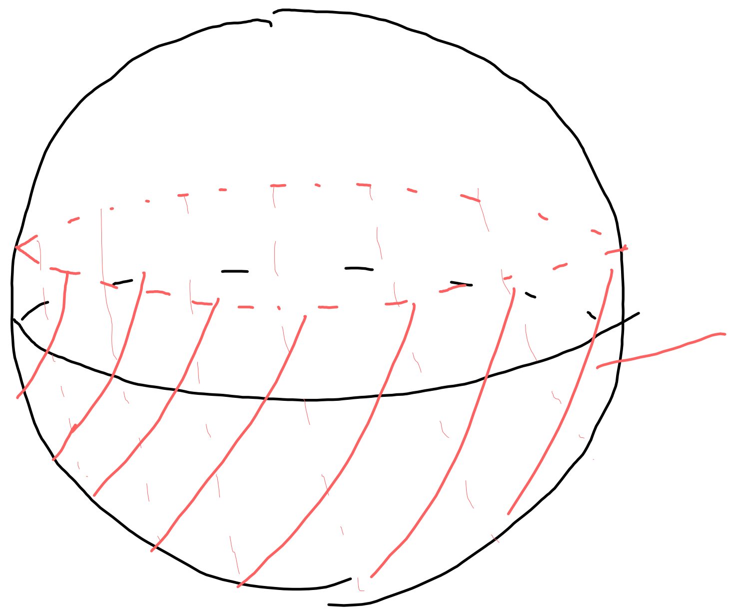
机理：紧性.

定义1. X: top. sp. 对于一族 X 中开子集 $\{U_i\}_{i\in I}$，$\{U_i\}_{i\in I}$ 称为 X 的一个开覆盖，若：$\bigcup_{i\in I} U_i = X$.

例：



$$S^2 = U_1 \cup U_2$$



若开覆盖 $\{U_i\}_{i\in I}$ 中可取出一部分开集，记为：
$\{U_j\}_{j\in J}$，$J\subset I$，且满足 $\bigcup_{j\in J} U_j = X$，则称
$\{U_j\}_{j\in J}$ 为原先开覆盖的一个子覆盖。若特别地，
$|J|<+\infty$，则称为原先开覆盖的一个有限子覆盖。

<u>定义2</u>. 设 X 为一个 t.sp. X 称为紧的，若
$\forall X$ 的开覆盖有有限子覆盖。

<u>紧性的好处</u>.

(好处一) 便于操作(简单).

例：$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ 连续 $\Rightarrow$ 有界

Pf. f 连续 $\Rightarrow$ f 局部有界 $\Rightarrow$ $\forall x\in[a,b]$，$\exists x$ 的邻域 U_x，s.t. $f|_{U_x\cap[a,b]}$ 有界.

$\bigcup_{x\in[a,b]} U_x \supset [a,b] \Rightarrow \exists x_1,\dots,x_n$，s.t. $\bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}\supset[a,b]$. #

(好处二) 可以高枕无忧地做积分.

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 连续 $\int_a^b f(x)\,dx$

$[a,b] \rightsquigarrow \left.\begin{array}{l}[a,b)\\(a,b)\\(a,+\infty)\end{array}\right\} \rightsquigarrow$ 广义积分 (收敛性的问题) $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$

积分 $\xrightarrow{\text{定义}}$ 拓扑不变量.

回忆微分: (有限覆盖定理). $[a,b]\subset\mathbb{R}$, 则 $\forall$ $\mathbb{R}$ 中开集族 $\{U_i\}_{i\in I}$ s.t. $\bigcup_{i\in I} U_i \supset [a,b]$, 则可从 $\{U_i\}_{i\in I}$ 找到有限个 $U_{i_1},\cdots,U_{i_n}$ s.t. $\bigcup_{j=1}^{n} U_{i_j}\supset[a,b]$.

定义2. 设 X 为一个 t.sp. X 称为是紧的, 若 $\forall$ X 的开覆盖有有限子覆盖.

定义3. 设 X 为一个 top. sp. $Y \subset X$，称 Y 为 X 的一个紧子集，if Y 在子空间拓扑下是紧的.

<u>Rmk</u>. Y 紧 $\Longleftrightarrow$ ① $\boxed{\forall\, Y \text{ 的开覆盖，不妨记为 } \{U_i \cap Y\}_{i \in I}，\text{其中 } U_i \underset{\text{open}}{\subset} X，\text{总可以找到 } U_{i_1} \cap Y, \cdots, U_{i_n} \cap Y,\ \text{s.t.}\ \bigcup_{j=1}^{n} U_{i_j} \cap Y = Y}$

② $\Longleftrightarrow$ $\boxed{\forall\, X \underset{(\mathbb{R})}{} \text{ 中的覆盖 } Y \underset{([a,b])}{} \text{ 的开集族 } \{U_i\}_{i \in I}，\text{可找到 } U_{i_1}, \cdots, U_{i_n},\ \text{s.t.}\ \bigcup_{j=1}^{n} U_{i_j} \supset Y.}$

① $\Rightarrow$ ②. $\forall$ X 中的覆盖 Y 的开集族 $\{U_i\}_{i \in I}$，

$\bigcup_{i \in I} U_i \supset Y \Longrightarrow \bigcup_{i \in I} (U_i \cap Y) = Y$.

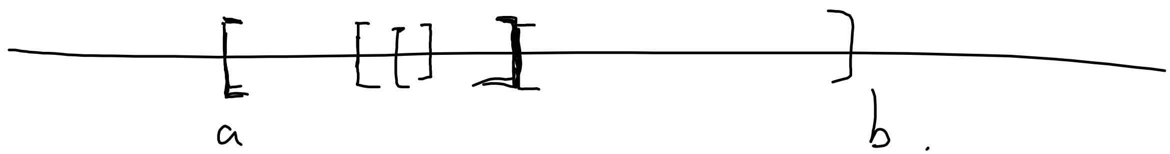
$\Longrightarrow$ 找 $U_{i_1} \cap Y, \cdots, U_{i_n} \cap Y$，$\bigcup_{j=1}^{n} U_{i_j} \cap Y = Y$

$\Downarrow$

$\bigcup_{j=1}^{n} U_{i_j} \supset Y$. #

定理：$[a,b] \subset \underset{\text{欧氏拓扑}}{\mathbb{R}}$ 是紧子集

Pf：



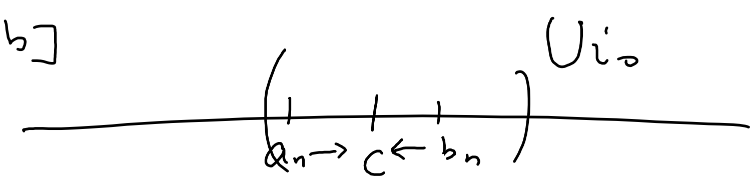
$\forall$ $\mathbb{R}$ 中的一族覆盖 $[a,b]$ 的开集族 $\{U_i\}_{i\in I}$，

假设不存在有限子覆盖.

$\rightsquigarrow$ $[a_n, b_n] \subset [a,b]$，$|b_n - a_n| = \frac{1}{2^{n-1}} \to 0$.

$\underline{且}$ $\underline{[a_n, b_n] \text{ 不能被 } \{U_i\}_{i\in I} \text{ 中有限个开集覆盖}}$.

$\Longrightarrow$ $\exists\, c \in [a_n, b_n] \subset [a,b]$，$\forall n$.



$\Longrightarrow$ $c \in U_{i_0}$.

$\Longrightarrow$ $\exists N$, s.t. $[a_N, b_N] \subset U_{i_0}$ 矛盾 #.

$(0,1]$ 不是紧，$\bigcup_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n},2\right)\cap(0,1]=(0,1]$

错觉：紧的 $\Rightarrow$ 闭的.

反例：紧 $\not\Rightarrow$ 闭.

$X=\{0,1\}$, $\mathcal{T}=\{\{0\},\{0,1\},\phi\}$.

$Y=\{0\}$, $\Rightarrow$ Y 紧，但 Y 不闭 ($X\setminus Y=\{1\}$ 不开)

代数几何，基本上紧 $\not\Rightarrow$ 闭.

(仿射开子集)

加条件：Hausdorff.

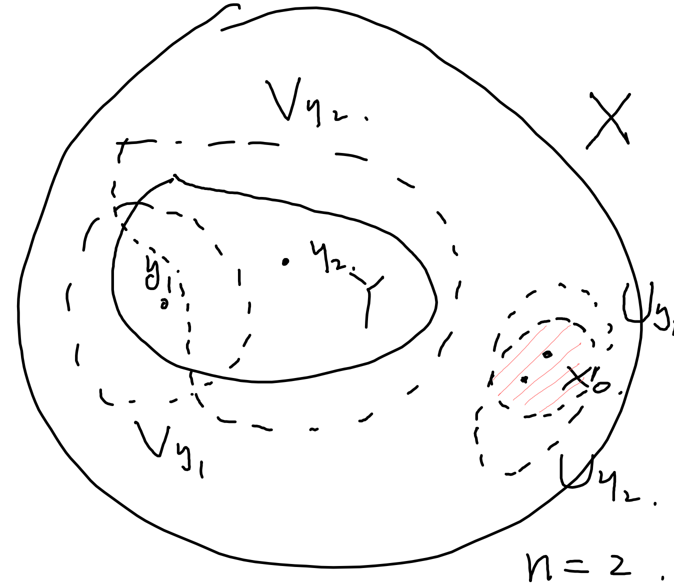
命题：$Y\subset X$ (top. sp.)，Y 紧，X Hausdorff，$\Rightarrow$ Y 闭.

Pf.

命题：$Y \subset X$，Y 紧，X Hausdorff $\Rightarrow Y$ 闭。

X top. sp.

Pf. 要证：$\forall x_0 \in X \setminus Y$（固定），要找一个 X 中开集 U，s.t. $x_0 \in U \subset X \setminus Y$。



$\forall y \in Y$，$y \neq x_0$

Hausdorff $\Rightarrow \exists\, U_y, V_y \subset X$，s.t. $y \in V_y$，$x_0 \in U_y$，$V_y \cap U_y = \phi$

$\bigcup_{y \in Y} V_y \supset Y \Rightarrow \exists\, y_1, \cdots, y_n$，$\bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i} \supset Y$

令 $U = \bigcap_{j=1}^{n} U_{y_j}$，则 $U \cap V_{y_i}$，$\forall i$

$= \left(\bigcap_{j=1}^{n} U_{y_j}\right) \cap V_{y_i} = \phi$

$\Rightarrow U \subset X \setminus \underbrace{\left(\bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i}\right)}_{\supset Y}$

$\Rightarrow U \subset X \setminus Y$。

#

推论：$\mathbb{R}^n$ 中的紧子集必为有界闭集.

Pf. 设 $X \subset \mathbb{R}^n$, compact

$$X \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} B(0;n),$$

$\Rightarrow \exists\, n_1, \cdots, n_k$, $X \subset \underbrace{\bigcup_{j=1}^{\infty} B(0, n_j)}_{= B(0,n_k)}$,

(不妨设 $n_1 < \cdots < n_k$)

$\Rightarrow X$ 有界. #

反过来对不对？

$X \subset \mathbb{R}^n$ 有界闭集, 问：X 紧吗？

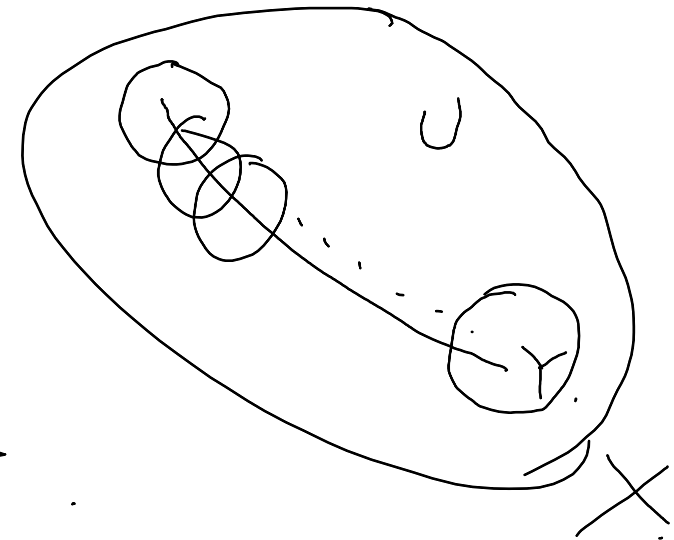
$$\Rightarrow \begin{cases} X \subset [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \\ X \text{ 闭} \end{cases}$$

要证 X 紧, 只要证：

① $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ 紧.

② 紧集闭子集紧.

命题: X top. sp. X紧，$Y \subset X$ 闭子集，则Y紧.



Pf. $\boxed{\text{取}X\text{中的一族覆盖}Y\text{的开集族}\{U_i\}_{i \in I}}$.

i.e. $\bigcup_{i \in I} U_i \supset Y$.

Y闭，令 $U = X \setminus Y$. U开.

$\Rightarrow \underbrace{\left(\bigcup_{i \in I} U_i\right) \cup U} = X$.

X紧 $\Rightarrow \exists\, i_1, \dots, i_n$ s.t. $\left(\bigcup_{j=1}^{n} U_{i_j}\right) \cup U = X$.

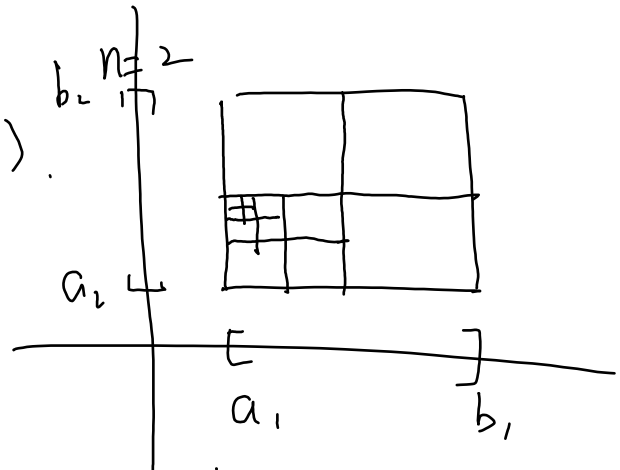
$\Rightarrow Y = Y \cap \left(\left(\bigcup_{j=1}^{n} U_{i_j}\right) \cup U\right)$

$= \left(\bigcup_{j=1}^{n} (U_{i_j} \cap Y)\right) \cup \underbrace{(Y \cap U)}_{=\phi}$

$= \bigcup_{j=1}^{n} (U_{i_j} \cap Y) \Rightarrow \boxed{Y \subset \bigcup_{j=1}^{n} U_{i_j}}$ #.

① 之证明：

（方法一）.



$[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$

定理：$X \subset \mathbb{R}^n$ 紧 $\Longleftrightarrow$ X 为有界闭集.

下一次：将从另一个角度证明①.

$[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ 紧 $\Longleftarrow$

（X 紧，Y 紧 $\Longrightarrow$ $X \times Y$ 紧）.