§12. CW 复形

拓扑和（无交并）. 设 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$，为一族拓扑空间，$\coprod_{\alpha\in I} X_\alpha$，规定

$$U \subset \coprod_{\alpha\in I} X_\alpha \text{ 为开集} \iff U\cap X_\alpha \text{ 为 } X_\alpha \text{ 中开集}, \forall \alpha\in I.$$

所得拓扑空间称为 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 的无交并，记为 $\coprod_{\alpha\in I} X_\alpha$.

定义1. 设 X 为 top. sp.，称 X 为一个 CW 复形（胞腔复形），若 X 可由如下步骤构造而得：

(1) 从一个离散点集 X^0 （X^0: 0-skeleton）.

(2) 归纳地，假设已构造 $(n-1)$-skeleton X^{n-1}，则 X^n 是在 X^{n-1} 的基础上粘一些 n-维闭球 B_α^n，$\alpha\in I_n$，而得，粘的方式是将 ∂B_α^n 粘到 X^{n-1} 上去. 更准确地说，$\forall \alpha\in I_n$，$\exists \varphi_\alpha^n: \partial B_\alpha^n \to X^{n-1}$，连续，使

$$X^n = X^{n-1} \cup_{\varphi_\alpha^n, \alpha\in I_n} B_\alpha^n = X^{n-1} \coprod_{\alpha\in I_n} B_\alpha^n \Big/ \sim.$$

分两种情况：

①. (2) 中归纳步骤在有限步终止，i.e.，$X \cong X^n$. for some n. （有限维 CW-复形）

②. (2) 中 ……… 不在 ………，$X \cong$ 按(2)所得的极限空间.

$\bigcup_{n=0}^{+\infty} X^n$ (Hatcher, etc) 如何定义？

「回顾集合论：若 $Y^0 \subset Y^1 \subset \cdots \subset Y^n \subset Y^{n+1} \subset \cdots$ 为一列递增的集合列，

$$\lim_{n\to+\infty} Y^n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} Y^n .$$
」.

「(2) 中所得极限空间之定义：（用 direct limit）.

$X^{n-1} \xrightarrow{i_{n-1}} X^n$ （i_{n-1} 为商映射 $X^{n-1} \amalg_{\alpha\in I_n} B^n_\alpha \to X^n$ 在 X^{n-1} 上的限制）.

$\forall\, n<m$，定义 $i_{nm}: X^n \to X^m$ 为复合 $i_{m-1}\circ i_{m-2}\circ\cdots\circ i_n$.

对于 $\forall n$，定义 $i_{nn}: X^n \to X^n$ 为恒等映射，

则 $\{X^n, i_{nm} \mid n\leq m\}$ 为一个 direct system.

$\varinjlim X^n = \coprod_{n\geq 0} X^n \big/ \sim$. 其中 "$\sim$" 定义为：$\forall\, x\in X^n,\ y\in Y^m$，规定：

$x\sim y \iff \exists\, k,\ k\geq n, k\geq m$, s.t. $i_{nk}(x) = i_{mk}(x)$.

注意有典则映射 $\varphi_n: X^n \to \varinjlim X^n$，$\forall\, n\geq 0$.

规定：$U \subset \varinjlim X^n$ 为一个开集 $\iff \varphi_n^{-1}(U)$ 为 X^n 中开集，$\forall\, n\geq 0$.

(weak topology).」

定义2. 设 X 为一个 top. sp., X 称为一个 CW 复形, 若 X 中存在一列子空间 $\{X^n \mid n=0,1,2,\dots,k\}$ ($\{X^n \mid n=0,1,2,\dots\}$), 满足 $X^n\subset X^{n+1}$, 且 $\bigcup_n X^n = X$ (X^n 称为 X 的 n-skeleton), 满足下列条件:

(1) X 上的拓扑为 weak topology ($U\subset X$ 为开集(闭) $\Leftrightarrow$ $U\cap X^n$ 为 X^n 中开集(闭), $\forall n$)

(2) X^0 为离散点集(在子空间拓扑下).

(3) X^n 同胚于在 X^{n-1} 上粘一些 n-维闭球 B^n_α, $\alpha\in I_n$, (把 B^n_α 的 ∂B^n_α 粘上去), 所得空间, 更准确地, $\exists\ \varphi^n_\alpha: \partial B^n_\alpha \to X^{n-1}$ 为连续映射, $\alpha\in I_n$, $n\geq 1$.
使 $X^n \underset{\psi_n}{\cong} X^{n-1}\cup_{\varphi^n_\alpha,\alpha\in I} B^n_\alpha$, 且下面图表交换:

$$\begin{tikzcd}
X^{n-1}\cup_{\varphi^n_\alpha,\alpha\in I} B^n_\alpha \arrow[r, "\psi_n"] & X^n \\
X^{n-1} \arrow[u, "典则"] \arrow[ur, "包含映射"'] &
\end{tikzcd}$$

练习: 验证定义1等价于定义2.

记号: 记商映射 $X^{n-1}\sqcup_{\alpha\in I_n} B^n_\alpha \to X^n$ 为 π_n.

$\mathring{B}^n_\alpha$ 为 B^n_α 的内部.

Rmk1. 记号同定义2，则 X^n 为 X 的闭子集.

proof. 只要证：$X^n\cap X^m$ 为 X^m 中闭集，$\forall m\geq 0$.

只要证：$X^n\cap X^m$ 为 X^m 中闭集，$\forall m\geq n$.

$m=n$ 时，显然对.

归纳地，设已证 $\overset{X^n}{\overset{\parallel}{X^n\cap X^{m-1}}}$ 为 X^{m-1} 中闭集 $(m-1\geq n)$，要证 $\overset{X^n}{\overset{\parallel}{X^n\cap X^m}}$ 为 X^m 中闭集

注意 $X^m = X^{m-1}\sqcup_{\alpha\in I_m} B_\alpha^m/\sim$.　$\pi_m: X^{m-1}\sqcup_{\alpha\in I_m} B_\alpha^m \to X^m \supset X^n$.

要证：$(\pi_m)^{-1}(X^n)$ 为 $X^{m-1}\sqcup_{\alpha\in I_m} B_\alpha^m$ 中闭集

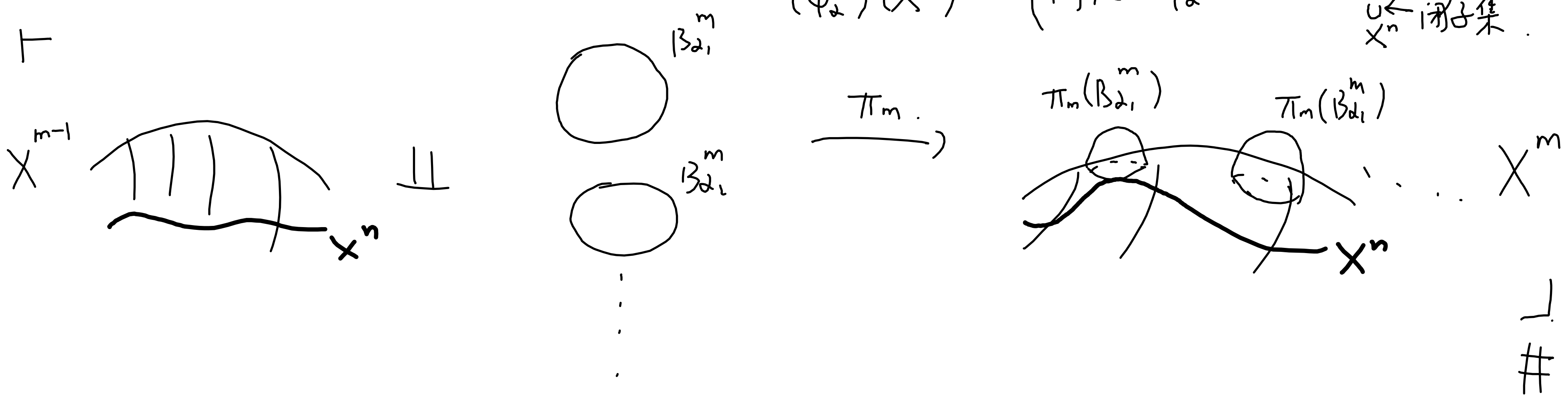
只要证：

① $\underbrace{(\pi_m)^{-1}(X^n)\cap X^{m-1}}_{=X^n}$ 为 X^{m-1} 中闭集（由归纳假设成立）.

② $\underbrace{(\pi_m)^{-1}(X^n)\cap B_\alpha^m}_{}$ 为 B_α^m 中闭集（由归纳假设及连续映射定义之得）

$=(\varphi_\alpha^m)^{-1}(X^n)$　（回忆：$\varphi_\alpha^m:\partial B_\alpha^m\to X^{m-1}\supset X^n$ ← 闭子集）.

⊢



⊣

#

Rmk2. X 中任意点均为闭点 ($p\in X$ 为闭点 $\Leftrightarrow$ $\{p\}$ 为 X 中闭集 $\Leftrightarrow \overline{\{p\}}=\{p\}$)

proof. $\forall\ p\in X$. 要证 $\{p\}\cap X^n$ 为闭集 $\forall\ n\geq 0$.

$n=0$ 显然成立,

归纳地, 若已证 $\{p\}\cap X^{n-1}$ 为 (X^{n-1} 中) 闭集, 要证 $\{p\}\cap X^n$ 为 X^n 中闭集.

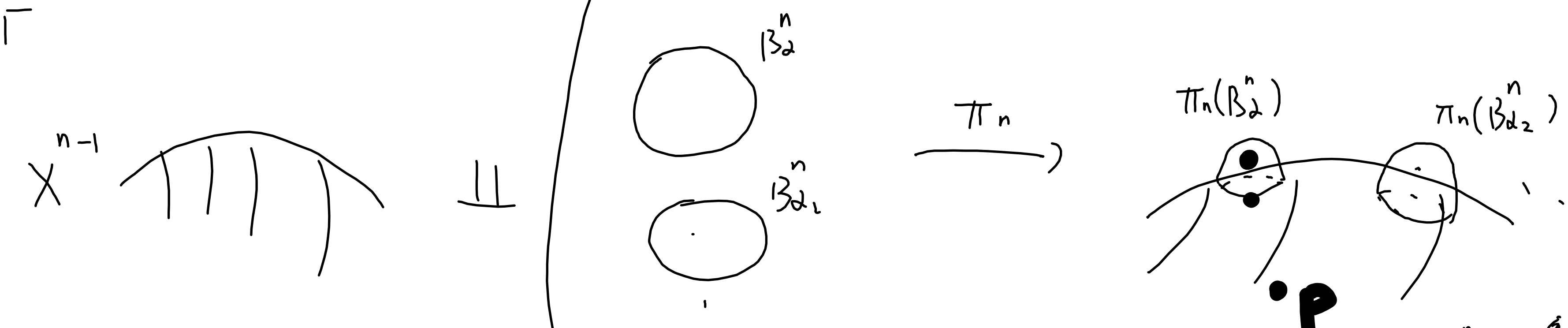
$$\pi_n:\ X^{n-1}\coprod_{\alpha\in I_n} B^n_\alpha \longrightarrow X^n$$

$$X^n \supset \{p\}\cap X^n = \begin{cases}\phi \\ \text{单点集}\end{cases}.$$

假设 $p\in X^n$; 只要证:

$(\pi_n)^{-1}(p)$ 为 $X^{n-1}\coprod_{\alpha\in I_n} B^n_\alpha$ 中闭集.

只要证: $\begin{cases} ①\ \underbrace{(\pi_n)^{-1}(p)\cap X^{n-1}}_{=\{p\}\cap X^{n-1}} \text{ 为 } X^{n-1} \text{ 中闭集 (由归纳假设成立)} \\ ②\ (\pi_n)^{-1}(p)\cap B^n_\alpha \text{ 为 } B^n_\alpha \text{ 中闭集} \end{cases}$



$$= \begin{cases} (\varphi^n_\alpha)^{-1}(p), & p\in X^{n-1} \text{ (为 } B^n_\alpha \text{ 闭子集 (由归纳假设及连续映射性质))} \\ \text{单点集或空集}, & p\in X^n\setminus X^{n-1} \text{ (为 } B^n_\alpha \text{ 闭子集)} \end{cases}$$ #

更强的结论：CW复形必为Hausdorff空间（cf. Hatcher的附录）.

解释"胞腔"：

定义：$\forall n \geq 1$，$\alpha \in I_n$，定义 $\Phi_\alpha^n : B_\alpha^n \to X$ 为如下映射的复合（characteristic map），为定义2中CW复形.

$$B_\alpha^n \xrightarrow[\text{包含映射}]{} X^{n-1} \coprod_{\alpha \in I_n} B_\alpha^n \xrightarrow[\text{商映射}]{\pi_n} X^n \xhookrightarrow[\text{包含映射}]{} X .$$

$$\boxed{\begin{array}{l} X^n = X^{n-1} \coprod_{\alpha \in I_n} e_\alpha^n = X^0 \coprod_{\substack{1 \leq k \leq n \\ \alpha \in I_k}} e_\alpha^k . \\ \text{规定 } X^0 = \{ e_\alpha^0 \mid \alpha \in I_0 \},\ X^n = \coprod_{\substack{0 \leq k \leq n \\ \alpha \in I_k}} e_\alpha^k . \\ X = \coprod_{n,\, \alpha \in I_n} e_\alpha^n \ (\text{胞腔分解}). \end{array}}$$

记 $e_\alpha^n = \Phi_\alpha^n(\mathring{B}_\alpha^n)$.

Claim：e_α^n 为 n-维开胞腔.

「 $\Phi_\alpha^n|_{\mathring{B}_\alpha^n} : \mathring{B}_\alpha^n \to e_\alpha^n$ 为连续双射

只要证 $\Phi_\alpha^n|_{\mathring{B}_\alpha^n}$ 为闭映射. 注意：$\begin{cases} \Phi_\alpha^n(\partial B_\alpha^n) \subset X^{n-1} . \\ e_\alpha^n \subset X^n \setminus X^{n-1} \end{cases}$ $\quad X^n \subset X$.

$\forall$ 闭子集 $F \subset \mathring{B}_\alpha^n$，取 $\bar{F}$ 为 F 在 B_α^n 中闭包，则 $\bar{F}$ 紧 $\Rightarrow$ $\Phi_\alpha^n(\bar{F})$ 紧 $\overset{\text{Hausdorff}}{\Longrightarrow}$ $\Phi_\alpha^n(\bar{F})$ 闭.

$\Phi_\alpha^n(\bar{F}) \cap e_\alpha^n = \Phi_\alpha^n|_{\mathring{B}_\alpha^n}(F)$.

$\Rightarrow$ $\Phi_\alpha^n|_{\mathring{B}_\alpha^n}(F)$ 为 e_α^n 的闭子集

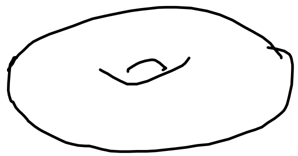
$\Rightarrow$ $(\Phi_\alpha^n|_{\mathring{B}_\alpha^n})^{-1}$ 为连续映射 $\Rightarrow$ $e_\alpha^n \cong \mathring{B}_\alpha^n$ 」

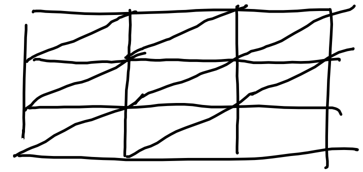
例：可三角剖分的拓扑空间均为CW复形.

Rmk. CW-复形所需"原材料"更少.

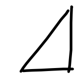
例：

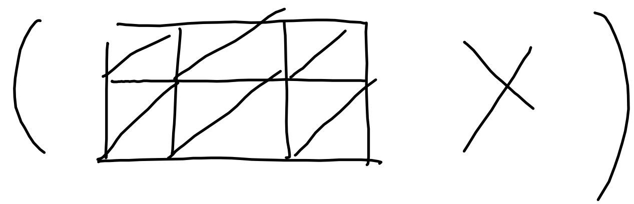
T

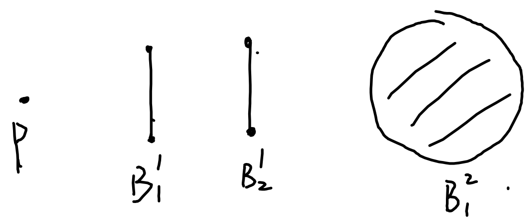


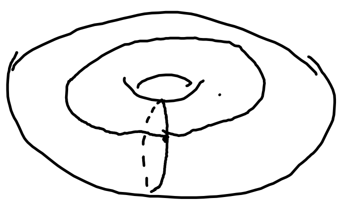


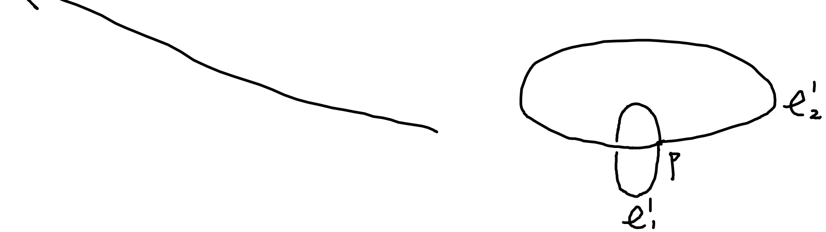
18个 Δ











$H_0(T) \cong \mathbb{Z}$

$H_1(T) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$

$H_2(T) \cong \mathbb{Z}$.

CW复形（胞腔复形）

C: closure-finiteness.

W: weak topology

胞腔: 胞腔分解.

closure-finiteness:

设 X 为定义2中的CW复形，$X = \coprod_{\substack{n \geq 0 \\ \alpha \in I_n}} e_\alpha^n$.

$\forall X$ 的开胞腔 e_α^n，$e_\alpha^n \subset X^n \setminus X^{n-1}$.（$e_\alpha^n = \Phi_\alpha^n(\mathring{B}_\alpha^n)$）

$\overline{e_\alpha^n} \subset X^n$，$\overline{e_\alpha^n} = \overline{e_\alpha^n} \cap X^n = \overline{e_\alpha^n} \cap \left((X^n \setminus X^{n-1}) \coprod X^{n-1} \right)$

$= e_\alpha^n \coprod \left(\overline{e_\alpha^n} \cap \underbrace{X^{n-1}}_{= \coprod_{\substack{0 \leq k \leq n-1 \\ \alpha \in I_k}} e_\alpha^k} \right)$

$\left(\overline{e_\alpha^n} \cap X^{n-1} \right) = \coprod_{\substack{0 \leq k \leq n-1 \\ \alpha \in I_k}} \left(\overline{e_\alpha^n} \cap e_\alpha^k \right)$

$\overline{e_\alpha^n}$ 与低于 n 维的开胞腔的交.

closure-finiteness: $\overline{e_\alpha^n}$ 仅与有限个低于 n 维的开胞腔相交.

proof. 注意 $\overline{e_\alpha^n}$ 紧.（$\overline{e_\alpha^n} = \Phi_\alpha^n(B_\alpha^n)$）（$\overline{e_\alpha^n} = \overline{\Phi_\alpha^n(\mathring{B}_\alpha^n)} \overset{?}{=} \Phi_\alpha^n(B_\alpha^n)$））

只要证：$\forall$ 紧子集 $K \subset X$，K 只与有限个 e_α^n，$n \geq 0$，$\alpha \in I_n$ 相交

反证：反之，则可找到 K 中互不相同的点 x_n，$n = 1, 2, \cdots$，且 $\{x_n\}$ 中点属于不

同伦开胞腔，令 $S=\{x_n \mid n=1,2,\cdots\}$.

待证：① S 离散.
② $\underbrace{S\text{ 闭}}$ $\Rightarrow$ S 紧. } $\Rightarrow$ S 有限，矛盾.

先证 S 是闭的，只要证 $S\cap X^n$ 为 X^n 中闭集，$\forall n$.

用归纳法证之：

$n=0$，显然.

归纳地，假设 $S\cap X^{n-1}$ 为 X^{n-1} 中闭集，要证 $S\cap X^n$ 为 X^n 中闭集.

$$\pi_n:\ X^{n-1}\sqcup_{\alpha\in I_n} B_\alpha^n \to X^n \supset S\cap X^n.$$

要证 ① $\underbrace{(\pi_n)^{-1}(S\cap X^n)\cap X^{n-1}}_{=S\cap X^{n-1}}$ 为 X^{n-1} 中闭集（由假设立得）.

② $(\pi_n)^{-1}(S\cap X^n)\cap B_\alpha^n$ 为 B_α^n 中闭集，$\forall \alpha\in I_n$.

$$= (\pi_n|_{B_\alpha^n})^{-1}(S\cap X^n) = \big((\varphi_\alpha^n)^{-1}(S\cap X^{n-1})\big)\cup\big((\pi_n|_{B_\alpha^n})^{-1}(S\cap X^n)\big).$$

$(\varphi_\alpha^n)^{-1}(S\cap X^{n-1})$：闭集（由归纳假设，以及 φ_α^n 连续）

$S\cap X^n$ → $S\cap e_\alpha^n$ 为空集 or 单点集.

$\pi_n|_{\partial B_\alpha^n}$ 为复合：$\partial B_\alpha^n \xrightarrow{\varphi_\alpha^n} X^{n-1} \hookrightarrow X^n \supset S\cap X^n$.

由此证明，$\forall S'\subset S$，S' 也是闭集 $\Rightarrow$ S 为离散的. #

Corollary: $\forall X$的紧子集K, $K \subset X^n$, for some n.

更强的结论: $\forall X$的紧子集K, K必落在一个有限子复形中.

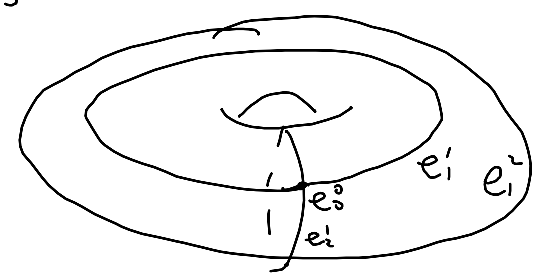
定义: 设X为有限维CW复形, 且开胞腔全体$\{e_\alpha^n\}$, $n \geq 0$, 为一个有限集, 则称X为有限CW复形.

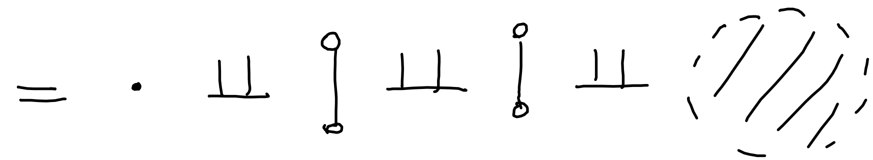
定义: 设X为CW复形, $X = \coprod_{\substack{n \geq 0 \\ \alpha \in I_n}} e_\alpha^n$为胞腔分解, $F \subset X$, 称为一个子复形, 若:

(i) F为若干个开胞腔之并.

(ii) F闭.

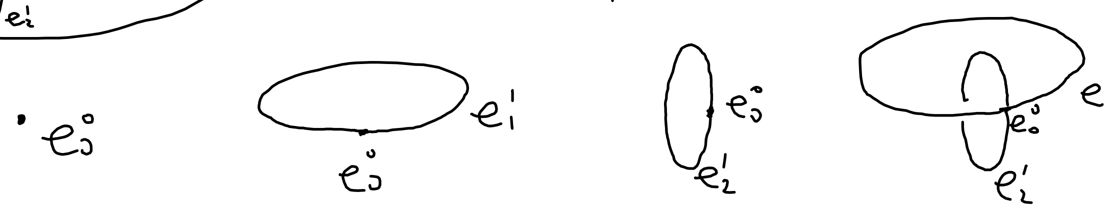
例: T:





$= e_0^0 \sqcup e_1^1 \sqcup e_2^1 \sqcup e_1^2$

T的子复形:



例: X为CW复形, X^k为子复形.

Rmk. 子复形的 $\begin{cases}\text{任意交} \\ \text{有限并}\end{cases}$ 为子复形.

Rmk.(子复形为 CW 复形). 设 $F \subset X$ 为子复形, F 取子空间拓扑, 则 F 为 CW 复形, 且其 n-skeleton $F^n = X^n \cap F$.

「 $C \subset F$ 闭 $\iff C \subset X$ 闭.

$\iff \underbrace{C \cap X^n}$ 闭 $\forall n$.

$= (C \cap F) \cap X^n$

$= C \cap F^n$.

$\iff C \cap F^n$ 闭, $\forall n$.

$F^n = X^n \cap F = \left(\coprod_{\substack{k \leq n \\ \alpha \in I_k}} e_\alpha^k\right) \cap F =$ F 中的维数 $\leq n$ 的开胞腔的无交并.

落在

$\Rightarrow F^{n+1}$ 是在 F^n 的基础上粘上 $(n+1)$-胞腔而得.

」

命题: 设 X 为 CW 复形, $K \subset X$ 为 X 的一个紧子集, 则 K 必含于一个有限子复形.

proof. 已证: $K \subset$ 有限个开胞腔之并, 只要证: X 中的任一开胞腔包含于一个有限子复形中即可.

① 0-胞腔（平凡）（已证单点集为闭集）.

② 设CW-复形中每个维数小于k的开胞腔均包含在一个有限子复形中.

任取X的一个k-维开胞腔 e_α^k.

回忆：$\overline{e_\alpha^k} = e_\alpha^k \sqcup \underbrace{(\overline{e_\alpha^k} \cap X^{k-1})}$

包含在 X^{k-1} 的有限个维数小于k的开胞腔中.

由假设包含在一个有限子复形中. 记为F（F的维数小于等于k-1）.

$$\Rightarrow \overline{e_\alpha^k} \subset \underbrace{F \cup e_\alpha^k}_{= F \cup \overline{e_\alpha^k}}$$

#

其他性质：

① CW 是 Hausdorff.

② CW 是 locally contractible $\Rightarrow$ CW locally path conn. $\Rightarrow$ "path. conn. $\Updownarrow$ conn."

③ CW pair is good pair. (X, A) is a good pair. (A: subcomplex)

$H_n(X, A) \cong \tilde{H}_n(X/A)$.

see ~~Hatcher's~~ Appendix.