9. 同调 (homology).

小目标：<u>解释欧拉定理</u>.

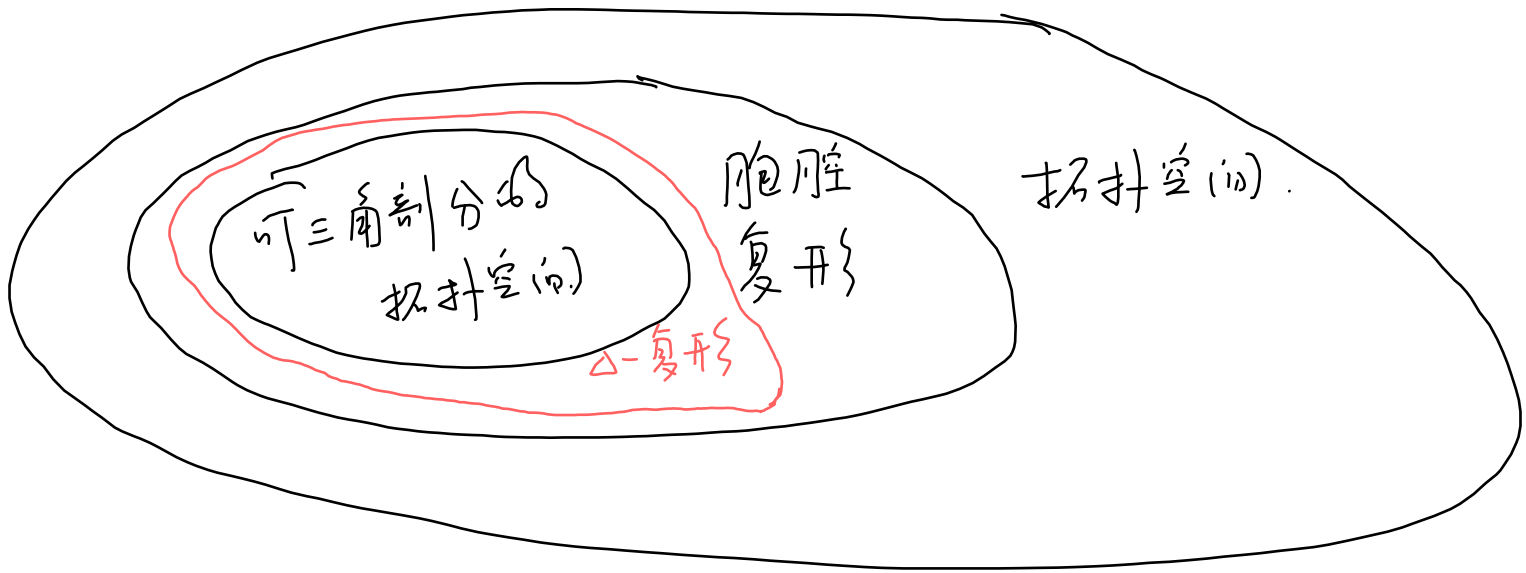
优：直观，易于计算。
缺：不方便发展理论。

单纯同调 (simplicial homology) ⇝ 可三角剖分的拓扑空间.

胞腔同调 (cellular homology) ⇝ 胞腔复形.

优：方便发展理论。
缺：抽象，不易计算。

奇异同调 (singular homology) ⇝ 拓扑空间.



单纯同调
- 动机
- 定义
- 计算实例

(Ref. Munkres. Elements of Algebraic Topology)

Armstrong. Basic Topology

奇异同调 (Ref. Hatcher. Algebraic Topology).
- 定义
- 证明基本定理，基本性质.
- for 可三角剖分的拓扑空间，其单纯同调自然地同构于奇异同调.
- 应用

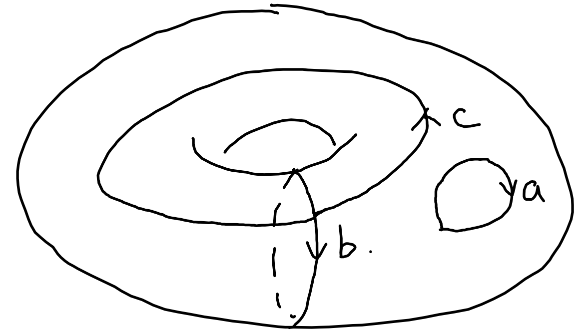
胞腔同调 (Ref. [Hatcher]).

Euler-Poincaré 公式 (解释欧拉定理).

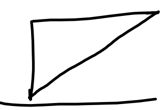
单纯同调

拓扑的关键因素：那些非平凡的闭合道路.

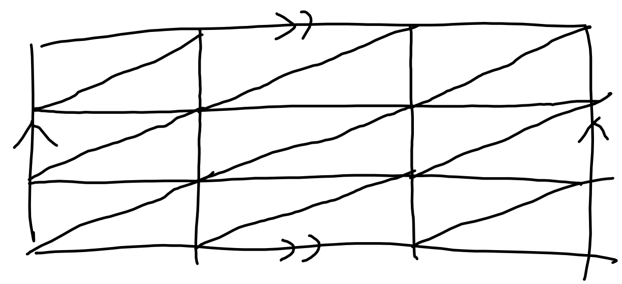
基本群：用同伦杀掉平凡的道路，
"实显"非平凡的闭合道路。



(1-阶)同调：从组合信息出发，杀掉平凡的道路，"实显"非平凡的闭道路。

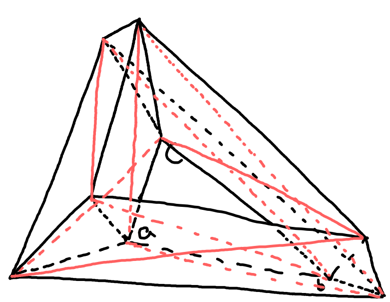
原材料。
18 × 
\+
组合信息。

例（环面）

T = 

决定

T



可三角剖分的拓扑空间。

接下来：

单形 单纯复形

① 严格地定义：原材料 + 组合信息

拓扑空间 X（可三角剖分）

② 从 $\mathbb{R}^2$ 上组合信息出发定义：

道路 ⇝ 1-chain

闭道路 ⇝ 1-cycle

平凡的闭道路 ⇝ 1-boundary

（1-阶同调群）$H_1(X)$.

$p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

p-chain，p-cycle，p-boundary

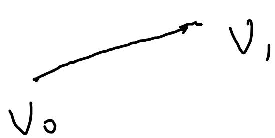
（p-阶同调群）$H_p(X)$

定义：设 N 为足够大的正整数，$v_0, \cdots, v_n \in \mathbb{R}^N$，称为是 geometrically independent，if $v_1 - v_0, \cdots, v_n - v_0$ 是线性无关。

定义：设 $v_0, \cdots, v_n \in \mathbb{R}^N$ 是 geometrically independent，称 $\left\{ x \in \mathbb{R}^N \;\middle|\; x = \sum_{i=0}^{n} t_i v_i,\ t_i \geq 0,\ \forall i,\ \sum_{i=0}^{n} t_i = 1 \right\}$ 为 $v_0, \cdots, v_n$ 张成的 n-单形 (n-simplex). $(n \geq 1)$.

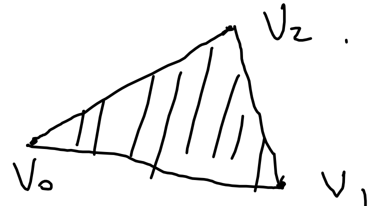
$(n=0)$. 0-simplex：单点集.

例 1. $(n=1)$.



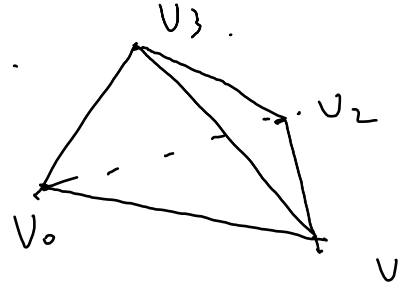
$$\left\{ t_0 v_0 + t_1 v_1 \;\middle|\; \begin{array}{l} t_0 \geq 0,\ t_1 \geq 0, \\ t_0 + t_1 = 1 \end{array} \right\}.$$

例 2. $(n=2)$.



$$\left\{ t_0 v_0 + t_1 v_1 + t_2 v_2 \;\middle|\; \begin{array}{l} t_0 \geq 0,\ t_1 \geq 0,\ t_2 \geq 0 \\ t_0 + t_1 + t_2 = 1 \end{array} \right\}$$

例3. ($n=3$).



练习：设 $v_0, \cdots, v_n \in \mathbb{R}^N$ 是 geo. independent，则 $v_0, \cdots, v_n$ 所张成的 n-simplex = 包含 $v_0, \cdots, v_n$ 的 $\mathbb{R}^N$ 的最小的凸子集.

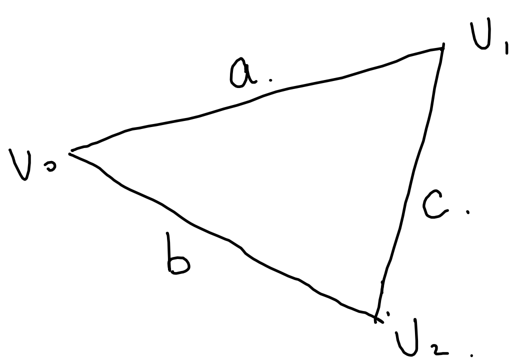
定义：设 σ 为 $v_0, \cdots, v_n \in \mathbb{R}^N$ 所张成的 n-simplex，称 $v_0, \cdots, v_n$ 为 σ 的顶点，n 称为 σ 的维数，由 $\{v_0, \cdots, v_n\}$ 的子集张成的单形称为 σ 的面 (face)，不等于 σ 的 σ 的面称为 σ 的真面 (proper face)。真面之并称为 σ 的边界 (记为 $Bd\,\sigma$)，$\sigma \setminus Bd(\sigma)$ 称为 σ 的内部 (记 $Int\,\sigma$).

定义（单纯复形 simplicial complex）. $\mathbb{R}^N$ 中的一个单纯复形是指由 $\mathbb{R}^N$ 中的一些单形构成的满足下列条件的集合 K：

(i) K 中单形之面仍在 K 中.

(ii) K 中任意两个单形之交或者为 $\emptyset$，或者同时为两个单形的面.

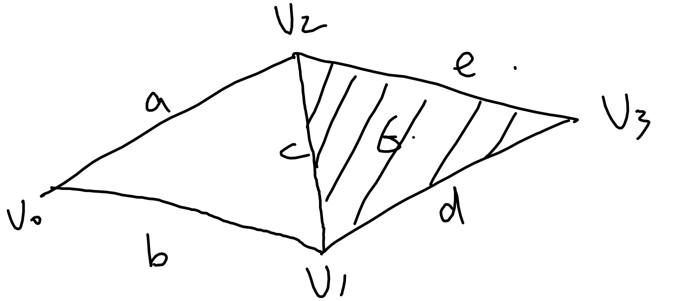
例：



$K=\{v_0, v_1, v_2, a, b, c\}$ 为单纯复形

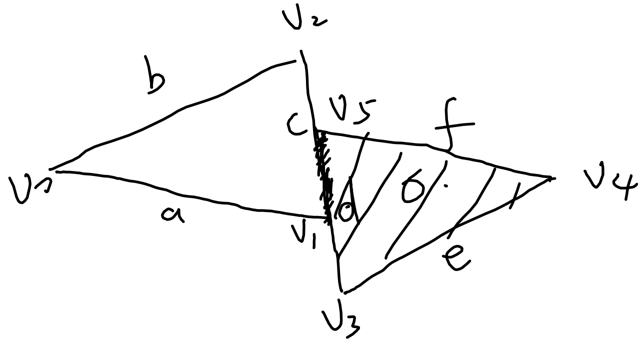
$K'=\{a, b, c\}$ 不为单纯复形.

例：



$K=\{v_0, v_1, v_2, v_3, a, b, c, d, e, \sigma\}$

例：



$K=\{$左边字母$\}$

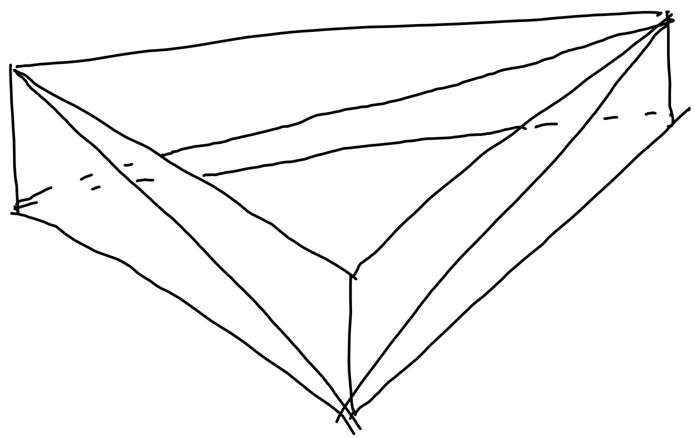
定义：若K为单纯复形，L为K的子集，若L本身也是单纯复形，则称L为K的子复形(subcomplex).

定义：若K为单纯复形，记 $|K|=\bigcup\limits_{\sigma\in K}\sigma$. 规定"$F\subset|K|$ 为闭集"$\iff$"$F\cap\sigma$ 为闭集(指在欧氏拓扑下)，$\forall\sigma\in K$". 由此得到的拓扑空间(记为$|K|$)称为K的底空间(underlying topological space)

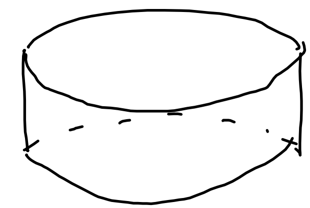
Rmk. 若 K 为有限集，则 $|K| = \bigcup_{\sigma \in K} \sigma \ (\subset \mathbb{R}^N)$

取 $\mathbb{R}^N$ 的子空间拓扑

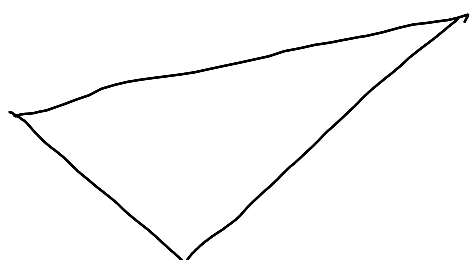
例：K：



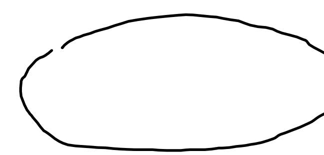
$|K| \cong$



L：



$|L| \cong$

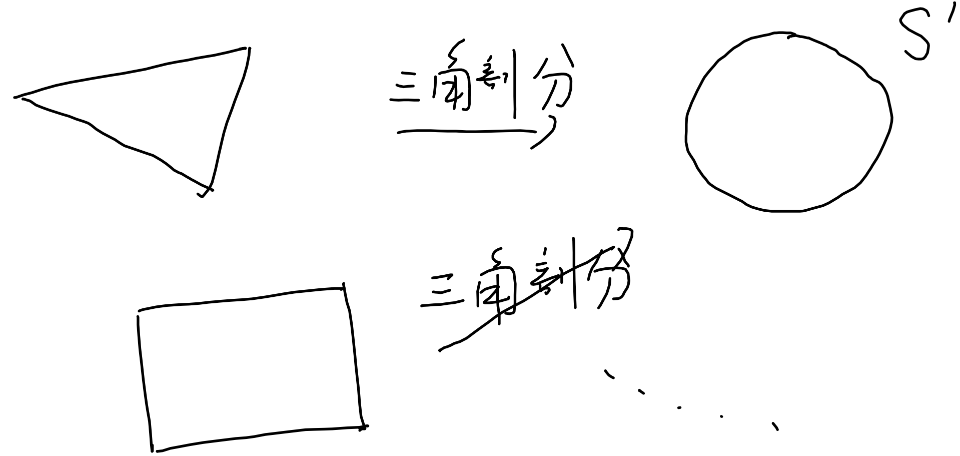


(triangulable)

定义：设 X 为 top. sp.，称 X 是可三角剖分的，若存在单纯复形 K，以及同胚 $h: |K| \xrightarrow{\cong} X$．称 (K, h) 为 X 的一个三角剖分．

Rmk. 同一个拓扑空间可有不同的三角剖分.

例:



Rmk. 所有的流形 (manifold) 均可三角剖分.

(cf. Whitney, Geometric Integration Theory).

下面: 用此组合信息来构造 triangulable space 的拓扑不变量 $H_p(X)$, $p \geq 0$, $p \in \mathbb{Z}$.

定义：设 σ 为由 $v_0,\cdots,v_n \in \mathbb{R}^N$ 所张成的 n-单形 ($n\geq 1$).

令 $\mathcal{A} = \{ v_0,\cdots,v_n$ 的排列全体$\}$

$$= \{ (v_{\varphi(0)},\cdots,v_{\varphi(n)}) \mid \varphi \in S_{n+1} \}$$

在 $\mathcal{A}$ 上定义"~"：

设 $(v_{i_0},\cdots,v_{i_n})$, $(v_{j_0},\cdots,v_{j_n}) \in \mathcal{A}$, 定义：

"$(v_{i_0},\cdots,v_{i_n}) \sim (v_{j_0},\cdots,v_{j_n})$" $\Longleftrightarrow$ "$(i_0,\cdots,i_n)$ 与 $(j_0,\cdots,j_n)$ 差一个偶置换"

$\mathcal{A}/\sim$ 只有两个元素，$\mathcal{A}/\sim$ 中元素称为 σ 的定向(orientation)

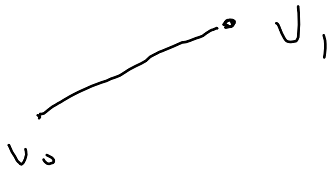
指定了定向的 n-单形称为<u>定向 n-单形</u> (oriented n-simplex).

Rmk. 设 $v_0,\cdots,v_n\in\mathbb{R}^N$ geo. independent，设 $(v_{i_0},\cdots,v_{i_n})$ 为其一个排列，用 $(v_{i_0},\cdots,v_{i_n})$ 记这么一个定向 n-单形：

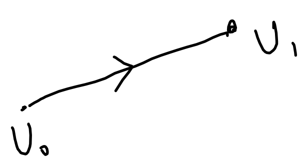
- 单形：由 $v_0,\cdots,v_n$ 张成
- 定向：$(v_{i_0},\cdots,v_{i_n})$ 所代表的等价类.

特别地，0-单形规定它只有一个定向.

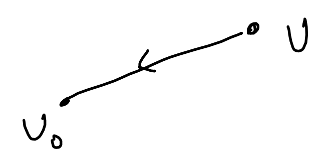
例（1-simplex）



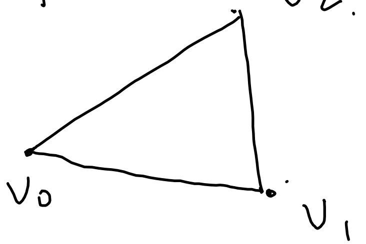
(v_0,v_1)



(v_1,v_0)



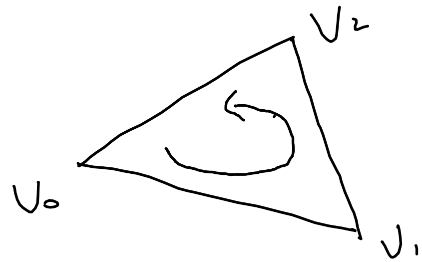
例：(2-simplex).



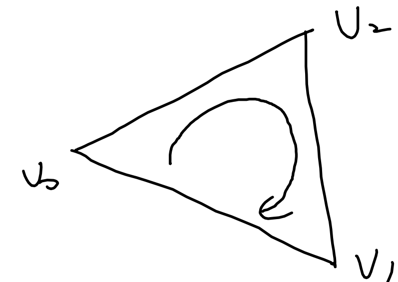
$(v_0, v_1, v_2) = (v_1, v_2, v_0) = (v_2, v_0, v_1)$

$(v_0, v_2, v_1) = (v_2, v_1, v_0) = (v_1, v_0, v_2)$.

(v_0, v_1, v_2).



(v_0, v_2, v_1)



记号：设 σ 为一个定向 p-单形 $(p \geq 1)$，记 $-\sigma$ 为取另外一个定向得到的定向 p-单形.（称 $-\sigma$ 为 σ 的相反定向的定向 p-单形）

（σ 与 $-\sigma$ 的单形是同一个）

group of p-chains.

定义 (p-chain). 设 K 为 simplicial complex，K 的 p-链群 ($C_p(K)$) 定义为由 K 中 p-单形取定向后所得定向 p-单形在关系：

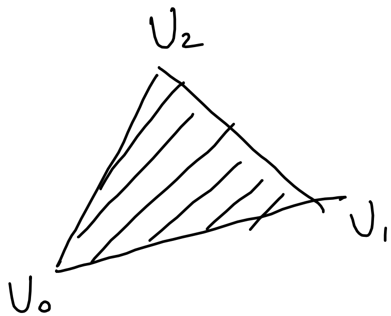
"$\sigma + (-\sigma) = 0$, $\forall$ K中p-单形取定向而得的定向p-单形σ"

下生成的Abel群(必为自由Abel群) $\}$ $C_p(K)$中元素称为K中的p-chain. $(p \geq 1)$.

K中的定向p-单形

($C_0(K)$ = K中定向0-单形生成的自由Abel群)

例: K:



$C_0(K) = \mathbb{Z}v_0 \oplus \mathbb{Z}v_1 \oplus \mathbb{Z}v_2$.

1-chain: (K中1-单形取定向后得到的定向1-simplex: $(v_0, v_1), (v_1, v_0), (v_1, v_2), (v_2, v_1), (v_0, v_2), (v_2, v_0)$)

$$\lambda_0 (v_0, v_1) + \lambda_0' (v_1, v_0) + \lambda_1 (v_1, v_2) + \lambda_1' (v_2, v_1) + \lambda_2 (v_2, v_0) + \lambda_2' (v_0, v_2)$$

$$= (\lambda_0 - \lambda_0')(v_0, v_1) + (\lambda_1 - \lambda_1')(v_1, v_2) + (\lambda_2 - \lambda_2')(v_0, v_2).$$

$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$

$\cong$

$$C_1(K) = \{ n_1 (v_0, v_1) + n_2 (v_1, v_2) + n_3 (v_0, v_2) \mid n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z} \}$$

2-chain: $\lambda(v_0,v_1,v_2)+\mu\underbrace{(v_0,v_2,v_1)}_{=-(v_0,v_1,v_2)}$

$$=\underbrace{(\lambda-\mu)}_{\in\mathbb{Z}}(v_0,v_1,v_2).$$

$$C_2(K)=\{n(v_0,v_1,v_2)\mid n\in\mathbb{Z}\}\cong\mathbb{Z}.$$

Rmk. 设 K 为 simplicial complex, 设 $\{\sigma_i\mid i\in I\}$ 为 K 的 p-simplex 全体 ($p\geq 1$). 对 $\forall i\in I$, 赋予 σ_i 一个定向, 仍记所得定向 p-simplex 为 σ_i, 则

$$C_p(K)=\{\underset{\substack{\uparrow\\ \text{定向 }p\text{-单形}}}{\sigma_i}\mid i\in I\}\text{ 生成的自由 Abel 群}.$$

定义 (边界算子 boundary operator). $\forall p\geq 0$, $p\in\mathbb{Z}$, 定义群同态: $\partial_p: C_p(K)\longrightarrow C_{p-1}(K)$, by: "$\partial_p((v_0,\cdots,v_p)) = \sum_{i=0}^{p}(-1)^i(v_0,\cdots,\underset{\text{挖掉}}{\hat{v_i}},\cdots,v_p) \in C_{p-1}(K)$

$\forall$定向p-单形$(v_0,\cdots,v_p)\in K$". (*).

① 规则(*)是良好定义 (的确 $\forall$定向p-单形$\sigma\in K$, 指定了一个$\partial_p(\sigma)\in C_{p-1}(K)$)

i.e. $\boxed{\begin{array}{l}\forall \text{偶置换 } \varphi\in S_{p+1},\\ \partial_p(v_{\varphi(0)},\cdots,v_{\varphi(p)}) \underset{\text{in } C_{p-1}(K)}{=} \partial_p(v_0,\cdots,v_p).\end{array}}$ (1).

由自由Abel群的universal property $\Longrightarrow$ 群同态!

$$\underset{\sigma\text{取遍}K\text{中定向}p\text{-单形}}{\bigoplus}\mathbb{Z}\sigma \xrightarrow{\partial_p} C_{p-1}(K)$$

② $\ker \bar{\partial}_p \supset \{ \sigma + (-\sigma) \mid \forall K$中的定向$p$-单形$\sigma \}$.

$\left(\Rightarrow \bar{\partial}_p \text{ 诱导 } \partial_p : C_p(K) \to C_{p-1}(K) \right)$

等价于证

$\boxed{\begin{gathered} \forall \text{定向 } p\text{-单形 } (v_0, \cdots, v_n) \in K, \ \forall \text{奇置换 } \varphi \in S_{p+1}, \\ \partial_p (v_{\varphi(0)}, \cdots, v_{\varphi(n)}) = -\partial_p (v_0, \cdots, v_n) . \end{gathered}}$ (2).

$(1)(2) \Longleftrightarrow \forall i, \quad \partial_p (v_0, \cdots, v_i, v_{i+1}, \cdots, v_n) \overset{C_{p-1}(K)}{=} -\partial_p (v_0, \cdots, v_{i+1}, v_i, \cdots, v_n)$

Proof. $\partial_p (v_0, \cdots, v_i, v_{i+1}, \cdots, v_n) = \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j (v_0, \cdots, \hat{v}_j, \cdots, v_i, v_{i+1}, \cdots, v_n)$

$(-1)^i (v_0, \cdots, v_{i-1}, v_{i+1}, \cdots, v_n) + (-1)^{i+1} (v_0, \cdots, v_i, \hat{v}_{i+1}, \cdots, v_n)$.

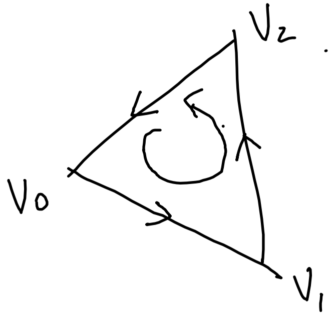
$+ \sum_{j=i+2}^{n} (-1)^j (v_0, \cdots, v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, \cdots, \hat{v}_j, \cdots, v_n)$

$$\partial_p(v_0,\dots,v_{i+1},v_i,\dots,v_n) = \sum_{j=0}^{i-1}(-1)^j(v_0,\dots,\hat{v_j},\dots,v_{i-1},v_{i+1},v_i,\dots,v_n)$$
$$+(-1)^i(v_0,\dots,v_{i-1},v_i,v_{i+2},\dots,v_n).$$
$$+(-1)^{i+1}(v_0,\dots,v_{i-1},v_{i+1},\dots,v_n).$$
$$+\sum_{j=i+2}^{n}(-1)^j(v_0,\dots,v_{i+1},v_i,v_{i+2},\dots,\hat{v_j},\dots,v_n).$$

$$\partial_p(v_0,\dots,v_i,v_{i+1},\dots,v_n) = \sum_{j=0}^{i-1}(-1)^j(v_0,\dots,\hat{v_j},\dots,v_i,v_{i+1},\dots,v_n)$$
$$(-1)^i(v_0,\dots,v_{i-1},v_{i+1},\dots,v_n)+(-1)^{i+1}(v_0,\dots,v_i,\hat{v_{i+1}},\dots,v_n)$$
$$+\sum_{j=i+2}^{n}(-1)^j(v_0,\dots,v_i,v_{i+1},v_{i+2},\dots,\hat{v_j},\dots,v_n)$$

$$\Rightarrow \partial_p(v_0,\dots,v_{i+1},v_i,\dots,v_n) = -\partial_p(v_0,\dots,v_i,v_{i+1},\dots,v_n). \quad \#$$

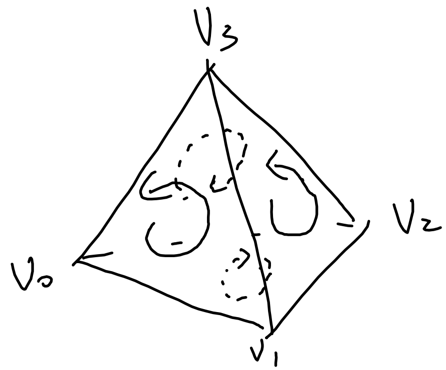
例: K:



$$\partial_2\underbrace{(v_0, v_1, v_2)}_{\in C_2(K)} = \overbrace{(v_1, v_2) - (v_0, v_2) + (v_0, v_1)}^{\in C_1(K)}.$$

$$= (v_1, v_2) + (v_2, v_0) + (v_0, v_1).$$

例: K:



$$\partial_3(v_0, v_1, v_2, v_3) = \overbrace{(v_1, v_2, v_3) - (v_0, v_2, v_3) + (v_0, v_1, v_3) - (v_0, v_1, v_2)}^{\in C_2(K)}.$$

$$= (v_1, v_2, v_3) + (v_0, v_3, v_2) + (v_0, v_1, v_3) + (v_0, v_2, v_1).$$

一串群同态:

$$\cdots\cdots \longrightarrow C_{p+1}(K) \xrightarrow{\partial_{p+1}} C_p(K) \xrightarrow{\partial_p} C_{p-1}(K) \longrightarrow \cdots\cdots \longrightarrow C_0(K)$$

Lemma 1. $\partial^2 = 0$ $(\partial_p \circ \partial_{p+1} = 0, \forall p)$.

Pf. $\forall (v_0, \cdots, v_p) \in C_p(K)$ 验证 $\partial_{p-1} \circ \partial_p (v_0, \cdots, v_p) = 0$ 即可.

$$\partial_{p-1} \circ \partial_p (v_0, \cdots, v_p) = \partial_{p-1}\left(\sum_{i=0}^{p} (-1)^i (v_0, \cdots, \hat{v}_i, \cdots, v_p) \right)$$

$$= \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \partial_{p-1} (v_0, \cdots, \hat{v}_i, \cdots, v_p)$$

$$= \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \left[\sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j (v_0, \cdots, \hat{v}_j, \cdots, \hat{v}_i, \cdots, v_p) + \sum_{j=i+1}^{p} (-1)^{j+1} (v_0, \cdots, \hat{v}_i, \cdots, \hat{v}_j, \cdots, v_p) \right]$$

$$= \sum_{j<i} (-1)^{i+j} (v_0, \cdots, \hat{v}_j, \cdots, \hat{v}_i, \cdots, v_p)$$

$$+ \sum_{\underset{i}{\cancel{j}} > \underset{j}{\cancel{i}}} (-1)^{i+j+1} (v_0, \cdots, \underset{j}{\hat{v}_{\cancel{i}}}, \cdots, \underset{i}{\hat{v}_{\cancel{j}}}, \cdots, v_p) = 0$$

#

定义. 设 K 为单纯复形, 定义

$$Z_p(K) = \mathrm{Ker}\left(C_p(K) \xrightarrow{\partial_p} C_{p-1}(K)\right) \quad p\text{-cycles}.$$

$$B_p(K) = \mathrm{Im}\left(C_{p+1}(K) \xrightarrow{\partial_{p+1}} C_p(K)\right) \quad p\text{-boundaries}.$$

Lemma 1 $\Rightarrow$ $B_p(K) < Z_p(K)$. $(p \geq 1)$

$p=0$ 时, 额外定义 $Z_0(K) = C_0(K)$.

天然地, $B_0(K) < Z_0(K)$

定义 $H_p(K) = Z_p(K) / B_p(K)$ 称为 K 的 p-阶单纯同调群.

说法: $H_p(K)$ 中的元素称为同调类 (homology class).

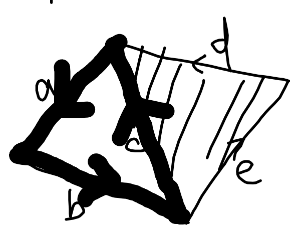
$\forall c \in Z_p(K)$. 用 $[c]$ 来记 c 所代表的同调类.

$\forall c_1, c_2 \in C_p(K)$, 称 c_1 与 c_2 是同调的 (homologous), 若 $\exists\, d \in C_{p+1}(K)$, s.t. $\partial d = c_2 - c_1$. 因此,

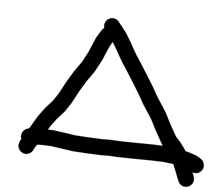
$\forall c_1, c_2 \in Z_p(K)$. $[c_1] = [c_2] \Longleftrightarrow c_1$ 与 c_2 是同调的

说法: 设 K 为 simplicial complex, L 为 subcomplex of K, 设 $c \in C_p(K)$, 称 c 被 L 承载的, 若在 c 的 $\mathbb{Z}$-线性展开式, 那些不在 L 中的定向 p-单形前的系数为零.

K:



L:

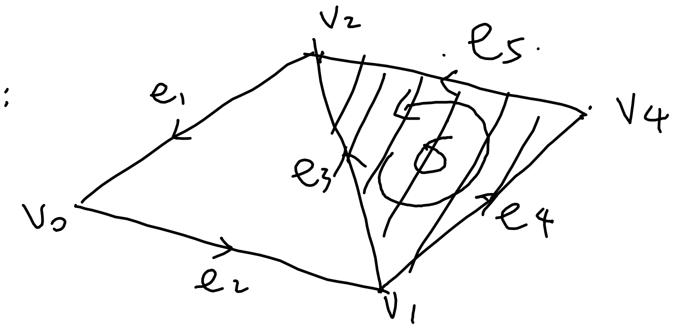


$\forall \sigma \in C_1(K)$.

$\sigma = n_1 a + n_2 b + n_3 c + n_4 d + n_5 e$.

$n_4 = n_5 = 0 \rightsquigarrow \sigma$ 被 L 承载.

例10. K:



$Z_1(K)$: $\qquad \underline{e_1+e_2+e_3} \in Z_1(K)$.

$$\partial(e_1+e_2+e_3) = \cancel{v_0}-\cancel{v_2}+\cancel{v_1}-\cancel{v_0}+\cancel{v_2}-\cancel{v_1} = 0.$$

$$\partial(e_4+e_5-e_3) = 0 \Rightarrow \underline{e_4+e_5-e_3} \in Z_1(K).$$

$\forall\, c \in C_1(K)$

$$c = \sum_{i=1}^{5} n_i e_i.$$

$c \in Z_1(K) \iff \partial c = 0.$

($\partial c = 0 \Rightarrow \begin{cases} n_1 = n_2 = n \\ n_4 = n_5 = m \end{cases} \Rightarrow c$ 必写成 $n(e_1+e_2)+n_3e_3+m(e_4+e_5)$

$\Rightarrow \partial c$ 中 $\begin{cases} v_1 \text{ 前系数} = 0 \\ v_2 \text{ 前系数} = 0 \end{cases}$ i.e. $\begin{cases} n-n_3-m=0 \\ -n+n_3+m=0 \end{cases}$

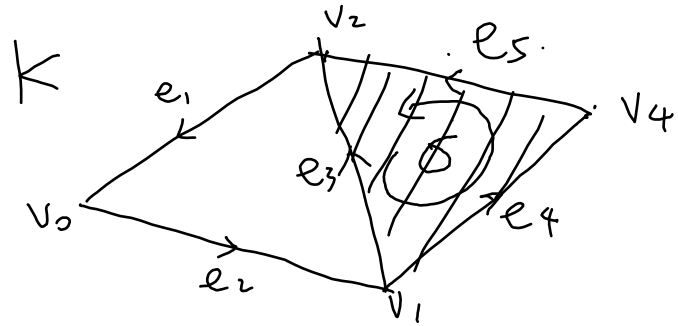
因此, $\partial c = 0 \iff n-n_3-m=0$. i.e. $n = m+n_3$.

$$c = (m+n_3)(e_1+e_2)+n_3e_3+m(e_4+e_5) = (m+n_3)(e_1+e_2+e_3) + m(e_4+e_5-e_3)$$)

因而 $Z_1(K) = \mathbb{Z}(e_1+e_2+e_3) + \mathbb{Z}(e_4+e_5-e_3)$.

$B_1(K) = \mathrm{Im}\left(C_2(K) \xrightarrow{\partial} C_1(K)\right)$.

K



$C_2(K) = \mathbb{Z}\sigma$.

$B_1(K) = \mathbb{Z}(\partial\sigma)$

$= \mathbb{Z}(e_4+e_5-e_3)$.

$|K| \cong S^1$.

$H_1(K) = Z_1(K)/B_1(K) \cong \mathbb{Z}$.

$H_2(K) = Z_2(K)/B_2(K) = Z_2(K) = 0$.

$H_0(K) = ?$ $(\cong \mathbb{Z})$.

命题：设 K 为一个 simplicial complex，$H_0(K)$ 为一个自由 Abel 群，且其秩恰为 $|K|$ 的连通分支的个数.

"Pf" 若 v 与 w 为 K 的两个 0-simplex，且落在 $|K|$ 的同一个连通分支内，

Claim：存在 K 中的一列顶点 $v = a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n = w$，s.t.

$\forall i$，(a_i, a_{i+1}) 为 K 中的 1-simplex.

(Ref. [Munkres] Elements of A.T.)

令 $c = (a_0, a_1) + (a_1, a_2) + \cdots + (a_{n-1}, a_n) \in C_1(K)$.

$\partial c = a_1 - a_0 + a_2 - a_1 + \cdots + a_n - a_{n-1} = v - w$.

$\Rightarrow$ 落在 $|K|$ 中同一连通分支的任意两个 0-simplex 都是同调的.

设 $\{C_\alpha \mid \alpha \in I\}$ 为 $|K|$ 的连通分支全体，$\forall \alpha \in I$，取定 0-simplex $v_\alpha \in C_\alpha$.

则有满同态

$$\bigoplus_{\alpha \in I} \mathbb{Z} v_\alpha \longrightarrow H_0(K)$$

$$v_\alpha \longmapsto [v_\alpha].$$

$\bigoplus_{\alpha \in I} \mathbb{Z} v_\alpha < Z_0(K)$.

$$H_0(K) = C_0(K) / B_0(K) = \bigoplus_{\alpha \in I} \mathbb{Z} v_\alpha \Big/ \bigoplus_{\alpha \in I} \mathbb{Z} v_\alpha \cap B_0(K)$$

Claim: $\bigoplus_{\alpha\in I} \mathbb{Z} v_\alpha \cap B_0(K) = 0$.

$\ulcorner$ $\forall c \in \bigoplus_{\alpha\in I} \mathbb{Z} v_\alpha \cap B_0(K)$.

$c = \sum_\alpha n_\alpha v_\alpha$, 其中 n_α 中只有有限个非零.

$\exists d \in C_1(K)$, s.t. $c = \partial d$.

$d = \sum_\alpha m_\alpha d_\alpha$, 其中 $d_\alpha \subset C_\alpha$.

$$c = \partial d \iff \sum_\alpha n_\alpha v_\alpha = \sum_\alpha m_\alpha \partial d_\alpha .$$

$$\iff \forall \alpha \in I,\quad n_\alpha v_\alpha = \underbrace{m_\alpha \partial d_\alpha}_{= m_\alpha (w_{\alpha 1} - w_{\alpha 2})} .$$

$$\Downarrow$$

$$n_\alpha = 0 .\ \forall \alpha .$$

$$\Downarrow$$

$$c = 0 .$$

$\lrcorner$

$\Rightarrow H_0(K) \cong \bigoplus_{\alpha\in I} \mathbb{Z} v_\alpha$.

#

定义：设 X 为可三角剖分的空间，(K,h) 为 X 的一个三角剖分，定义，定义 X 的单纯同调群为

$$H_p(X) = H_p(K), \quad p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

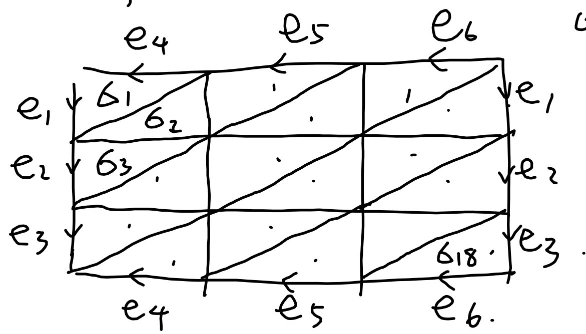
定理1. $H_p(X)$ 是良好定义的，$\forall p$. 即：若 (K',h') 为 X 的另一个三角剖分，则 $H_p(K) \cong H_p(K')$，$\forall p$.

证明：略。通过证明单纯同调 $\cong$ 奇异同调来证. #

例11.（环面的同调群）

粘对边

T:

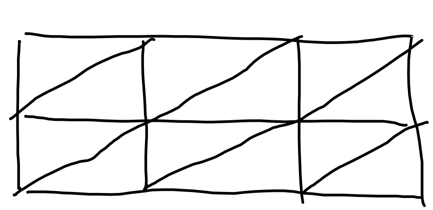


σ_i:

$H_0(T) \cong \mathbb{Z}$

下面计算 $H_1(T)$.

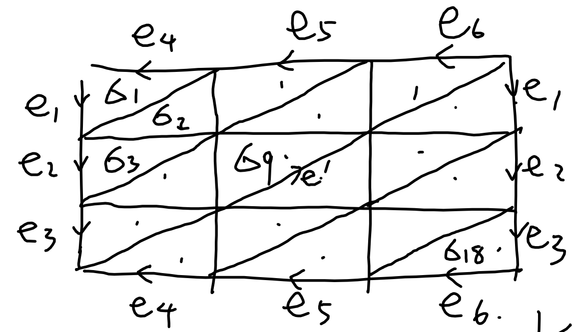
（思考：



粘对边

为何不是 T 的一个三角剖分？）

$H_1(T) \cong H_1(K) = Z_1(K)/B_1(K)$.



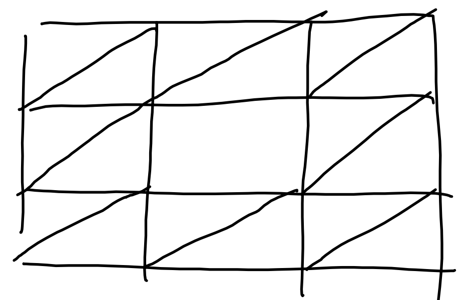
K

$\forall c \in Z_1(K)$.

不妨设 $c = n'e' + \cdots$

$c - \partial(n'\sigma_9)$ 中 e' 的系数为零.

$c - \partial(n'\sigma_9)$ 承载于

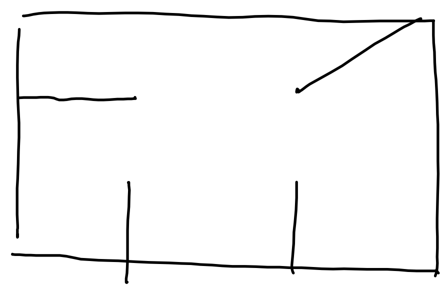

K'.

换言之,

$\forall c \in Z_1(K)$. c 同调于一个承载于 K' 的 1-cycle.

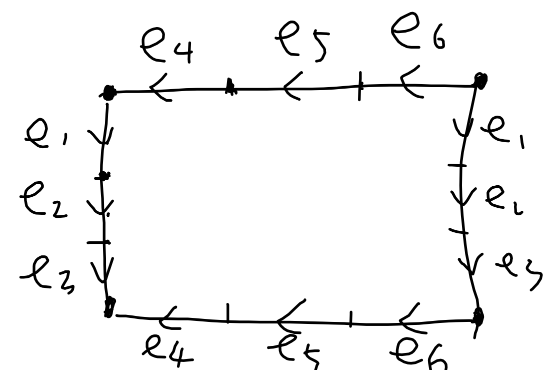
重复该步骤 =>

c 必同调于一个承载于


L 的 1-cycle.

$\partial e_1, \partial e_2$

但这样的 1-cycle 又必承载于



小结：$\forall\, c \in Z_1(K)$, c 必同调于 $\sum_{i=1}^{6} n_i e_i = c'$.

$$\partial c = 0 \Rightarrow \partial c' = 0.$$

$$\Rightarrow \underbrace{c' = n(e_1+e_2+e_3) + m(e_4+e_5+e_6)}_{\Downarrow \ (\partial c' = 0)}.$$

$\Rightarrow \forall\, c \in Z_1(K)$, c 必同调于某个 $n(e_1+e_2+e_3)+m(e_4+e_5+e_6)$

则 $n(e_1+e_2+e_3)+m(e_4+e_5+e_6)$ 必为 1-cycle.

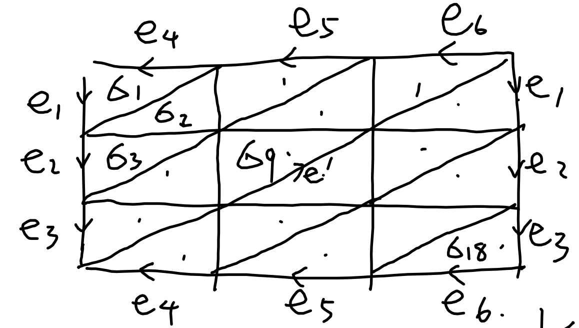
$$\Rightarrow \mathbb{Z}(e_1+e_2+e_3)+\mathbb{Z}(e_4+e_5+e_6) \longrightarrow H_1(K).$$

$$n(e_1+e_2+e_3)+m(e_4+e_5+e_6) \longmapsto n(e_1+e_2+e_3)+m(e_4+e_5+e_6)$$

为一个满同态.

$$\Rightarrow H_1(K) = \mathbb{Z}(e_1+e_2+e_3)+\mathbb{Z}(e_4+e_5+e_6) \Big/ \big(\mathbb{Z}(e_1+e_2+e_3)+\mathbb{Z}(e_4+e_5+e_6)\big) \cap B_1(K).$$

Claim: $\mathbb{Z}(e_1+e_2+e_3)+\mathbb{Z}(e_4+e_5+e_6)\bigcap B_1(K)=0$

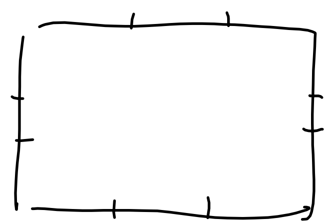


K

⌈ $\forall \sigma \in$ intersection

$$\sigma=\partial\left(\sum_{i=1}^{18} n_i\sigma_i\right).$$

又 σ 承载于


L.

$$\Rightarrow \quad n_1=n_2=\cdots=n_{18}=n.$$

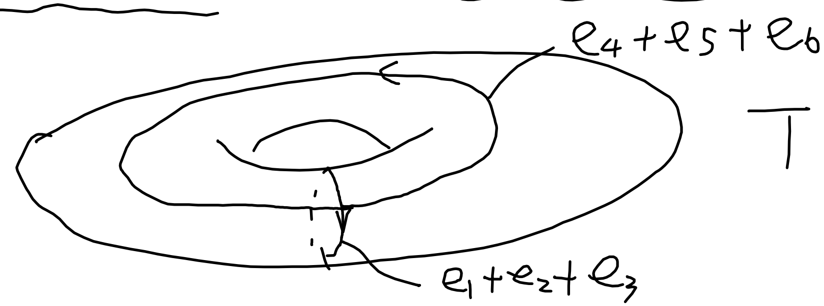
$$\sigma=n\,\underline{\partial\left(\sum_{i=1}^{18}\sigma_i\right)}=n\left(e_1+e_2+e_3-e_4-e_5-e_6-e_1-e_2-e_3+e_4+e_5+e_6\right)$$

$$=0.$$ ⌋

$$H_1(K)=\mathbb{Z}(\underbrace{e_1+e_2+e_3})+\mathbb{Z}(\underbrace{e_4+e_5+e_6})\cong\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}.$$

$\cong$

$H_1(T)$.



T.

再算 $H_2(T)$ $(\cong H_2(K))$.

$$H_2(K) = Z_2(K)/B_2(K) = Z_2(K).$$

$\forall\, c \in Z_2(K)$, $c = \sum_{i=1}^{18} n_i \sigma_i$. $\partial c = 0$.

$\Rightarrow n_1 = n_2 = \cdots = n_{18} \Rightarrow c = n \sum_{i=1}^{18} \sigma_i$.

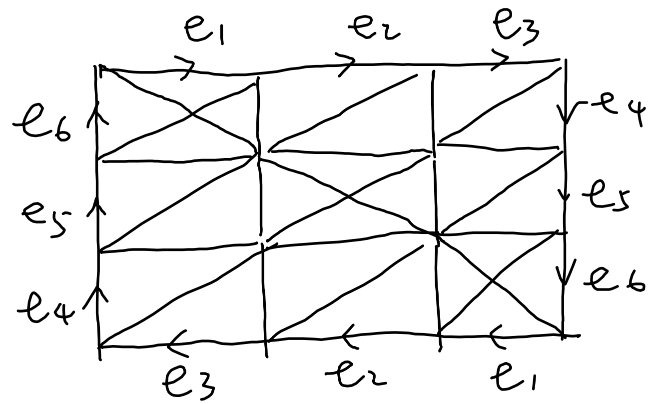
$\Rightarrow Z_2(K) = \mathbb{Z}\left(\sum_{i=1}^{18} \sigma_i\right) \cong \mathbb{Z}$.

$\Rightarrow H_2(T) \cong \mathbb{Z}$.

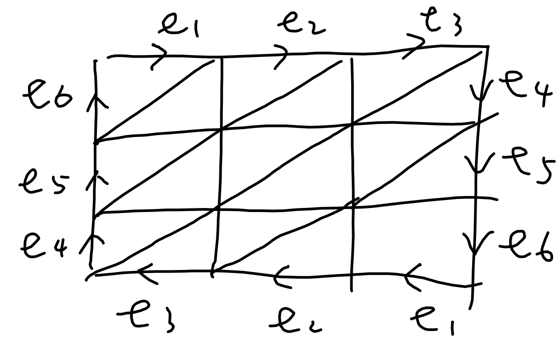
因此:
$$H_i(T) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & i = 0 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & i = 1 \\ \mathbb{Z}, & i = 2 \\ 0, & i \geq 3 \end{cases}$$

例12 $(\mathbb{R}P^2)$.

K



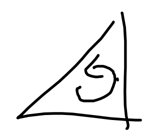
思考：



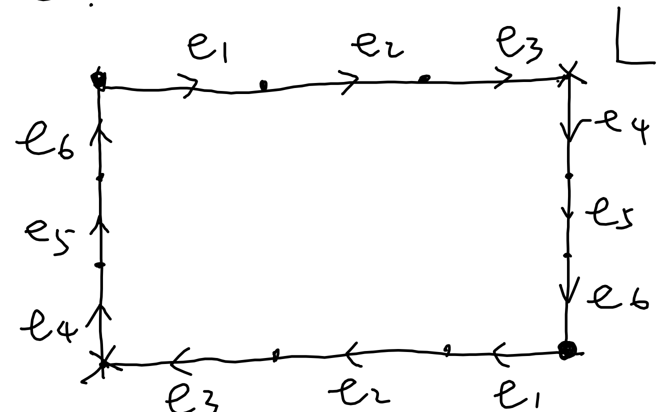
不是 $\mathbb{RP}^2$ 的一个三角剖分)

上

记图中 2-simplex 为 σ_i，$i=1,\cdots,24$. 定向取向上的方向.



$\forall$ K中的1-cycle c.



L. push to the boundary.

$\forall$ K中的1-cycle c，c 同调于 $\sum_{i=1}^{6} n_i e_i = c'$.

$\Rightarrow n_1 = \cdots = n_6 \xlongequal{\text{记为}} n$. $\Rightarrow$ c 同调于 $n\left(\sum_{i=1}^{6} e_i\right)$.

同态： $\mathbb{Z}(e_1+\cdots+e_6) \longrightarrow H_1(K)$.

$$n(e_1+\cdots+e_6) \longmapsto n(e_1+\cdots+e_6).$$

为一个满同态．

$$H_1(K) \cong \mathbb{Z}(e_1+\cdots+e_6) \Big/ \mathbb{Z}(e_1+\cdots+e_6) \cap B_1(K).$$

$\mathbb{Z}(e_1+\cdots+e_6) \cap B_1(K)$:

$\forall\, \sigma \in$ intersection.

$\sigma = \partial\left(\sum_{i=1}^{24} n_i \sigma_i\right)$，又 σ 承载于 L．$\therefore\ n_1 = \cdots = n_{24} \overset{\text{记}}{=} n$.

$$\sigma = n\,\partial\left(\sum_{i=1}^{24} \sigma_i\right) = n\cdot(-2)(e_1+e_2+\cdots+e_6)$$

$$\mathbb{Z}(e_1+\cdots+e_6) \cap B_1(K) = 2\mathbb{Z}(e_1+e_2+\cdots+e_6).$$

$$\therefore\ H_1(K) \cong \mathbb{Z}(e_1+\cdots+e_6) \Big/ 2\mathbb{Z}(e_1+\cdots+e_6) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

$$H_2(K) = Z_2(K)/B_2(K) = Z_2(K).$$

$\forall \sigma \in Z_2(K)$

$$\sigma = \sum_{i=1}^{24} n_i \sigma_i \quad , \quad \partial \sigma = 0 \;. \Rightarrow n_1 = \cdots = n_{24} \overset{\text{记}}{=} n \;.$$

$$\Rightarrow \sigma = n(\sigma_1 + \cdots + \sigma_{24}) \;.$$

因此，$\forall \sigma \in C_2(K)$. $\partial \sigma = 0 \Leftrightarrow \sigma = 0$.

$\therefore Z_2(K) = 0$.

$\therefore H_2(K) \cong 0$.

$H_0(K) \cong \mathbb{Z}$.

$$H_i(\mathbb{RP}^2) = \begin{cases} \mathbb{Z} & , \quad i = 0 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & , \quad i = 1 \\ 0 & , \quad i = 2 \\ 0 . & , \quad i \geq 3 \end{cases}$$

Rmk. 回忆：

$$\pi_1(H(g))^{ab} \cong \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}^{2g\text{个}}$$

$$\pi_1(M(g))^{ab} \cong \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_{g-1\text{个}} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

∴ 刚刚的计算：

$$\pi_1(T)^{ab} \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \cong H_1(T)$$

$$\pi_1(\mathbb{R}P^2)^{ab} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong H_1(\mathbb{R}P^2).$$ 可移去.

今后将证明：∀道路连通的(可三角剖分的)拓扑空间 X，

有：$H_1(X) \cong \pi_1(X)^{ab}$.