6. 商空间 (quotient space)

<u>商集</u> (quotient set)

定义. X: set, X上的一个关系 R (relation), 是指 $R \subset X \times X$.

例1: $X = \{$张三, 李四, 王五$\}$.　　例1. $xRy \Rightarrow yRx$.

$R = \{($张三, 李四$), ($张三, 王五$)\}$.

R ↑ 好朋友关系.　x与y是好朋友 $\Leftrightarrow (x, y) \in R$

$xRy,\ yRz \Rightarrow xRz$.

xRx

$\Rightarrow$ 李四和王五不是好朋友.　例2: $xRy \Rightarrow yRx$

例2: $X = \{$人$\}$.　$R = \{(x, y) \mid x, y \in X, x$与$y$同性别$\}$.

$(x, y) \in R \Leftrightarrow x$与$y$同性别.　　$xRy \Leftrightarrow x$与y同性别

Rmk. 设 R 为 X 上关系. 若 $(x, y) \in R$, 记 xRy.

定义：设 R 为 X 上一个关系，R 称为 X 上的等价关系 if：

① $\forall x \in X$，xRx （反身性）

② $\forall x, y \in X$，$xRy \Rightarrow yRx$ （对称性）

③ $\forall x, y, z \in X$，xRy，$yRz \Rightarrow xRz$ （传递性）

Rmk. 等价关系一般记为"$\sim$"（$xRy \rightsquigarrow \underbrace{x \sim y}_{\text{等价于}}$）

例3. $X = \{\text{日期}\}$，$\underset{\text{等价关系}}{R} \subset X \times X$，$R = \{(x, y) \mid x \text{ 与 } y \text{ 同星期}\}$

例4. 设 $f: X \longrightarrow Y$ 为映射，定义 $\sim_f$ 如下：

X上

称为由f诱导的等价关系

$$\forall\ x_1, x_2 \in X,\quad x_1 \sim_f x_2 \overset{\text{定义}}{\Longleftrightarrow} f(x_1) = f(x_2)$$

显然为等价关系。

Rmk. 例2，例3 其实本质上是例4。

例2. $X=\{人\}$, R: 同性别;

$$f: X \longrightarrow \{男, 女\}$$

$$x \longmapsto f(x)=\begin{cases} 男, & x 为男 \\ 女, & x 为女 \end{cases}$$

$\sim_f$: $\forall x_1, x_2 \in X$, $x_1 \sim_f x_2 \Leftrightarrow f(x_1)=f(x_2)$

$\Leftrightarrow x_1$ 与 x_2 同性别.

$$\sim_f = R.$$

例3: $X=\{日期\}$, R: 同星期数.

$$f: X \longrightarrow \{周一, 周二, \ldots, 周七\},$$

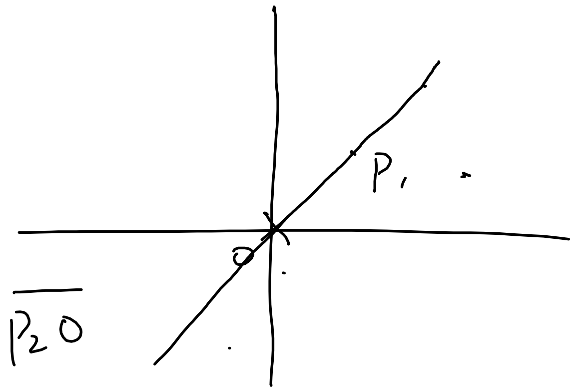
$$x \longmapsto f(x)= x 的星期数.$$

$\sim_f$: $\forall x_1, x_2 \in X$, $x_1 \sim_f x_2 \Leftrightarrow f(x_1)=f(x_2)$;

$\Leftrightarrow x_1$ 与 x_2 有相同星期数.

例5. $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, 定义"$\sim$"

$\forall p_1, p_2 \in X$.



定义: "$p_1 \sim p_2$" $\Longleftrightarrow$ 直线 $\overline{p_1 O}$ 与直线 $\overline{p_2 O}$ 同一条直线.

定义: 设 X 为集合, $\sim$ 为 X 上的等价关系, $\forall a \in X$,

集合 $\bar{a} = \{ b \in X \mid b \sim a \} (\subset X)$, 称为 a 所在的等价类.

bar.

例5. 刚刚: $\forall p_1 \in X$, $p \in X$, $p \sim p_1 \Longleftrightarrow p$ 落在 $\overline{Op_1} \setminus \{(0,0)\}$.

$\forall p_1 \in X$, $\bar{p}_1 = \overline{Op_1} \setminus \{(0,0)\}$.

例6. $X = \{$日期$\}$, R: 同星期数.

$\forall x \in X$. $\bar{x} = \{ y \in X \mid yRx \} = \{ y \in X \mid y$与$x$同星期$\}$

$\{$与x同星期数的日期$\}$

$//$

引理 1. X: set, "$\sim$" X上等价关系, $\forall a, b \in X$,

$\bar{a}$, $\bar{b}$ 只有两种情况:

① $\bar{a} \cap \bar{b} = \phi$

② $\bar{a} = \bar{b}$

Pf. 只要证: 若 $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \phi$, 则 $\bar{a} = \bar{b}$.

$\forall c \in \bar{a} \cap \bar{b}$, $\Rightarrow c \sim a$, $c \sim b \Rightarrow \underline{a \sim b}$.

$\Rightarrow \forall d \in X$, $d \sim a \Longleftrightarrow d \sim b$.

$\Rightarrow \bar{a} = \bar{b}$. #

$(X, \sim)$ 设定同上.

$X = \bigcup_{a \in X} \bar{a}$. $\underset{\text{去掉重复}}{\longrightarrow}$ 设$\{a\}$去除重复后所得的互不相同的等价类全体为

$\{\bar{a_i} \mid i \in I\}$

$\Rightarrow X = \coprod_{i \in I} \bar{a_i} \longrightarrow$ $\underline{X\text{的按等价类的分割}}$.

例5: $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\} = \coprod\limits_{\substack{l\text{为经过}\\(0,0)\text{直线}}} l\setminus\{(0,0)\}$

例7. $f: X \longrightarrow Y$, $\sim_f$: f 所诱导的等价关系.

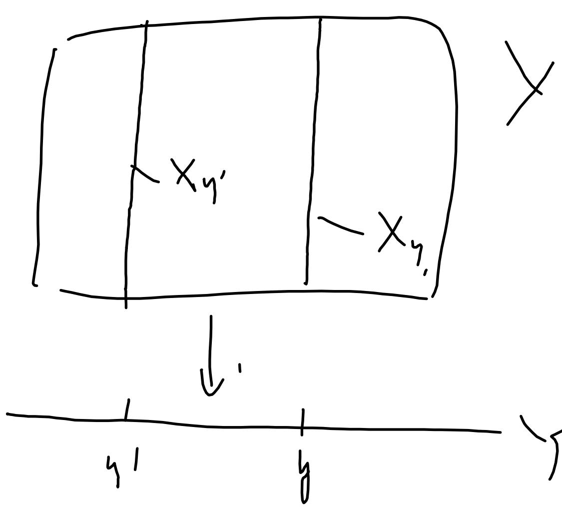
$\forall x_1, x_2 \in X$, $x_1 \sim_f x_2 \iff f(x_1) = f(x_2)$.

$\forall x \in X$, $\bar{x} = \{y \in Y \mid y \sim_f x\}$

$= \{y \in Y \mid f(y) = f(x)\}$.

$= f^{-1}(f(x)) = X_{f(x)}$.

记号: $\forall y \in Y$, 则 $X_y = f^{-1}(y)$ 称为 f 在 y 上的纤维 (fiber)



「分析: $\forall x_1, x_2 \in X$, $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$.

$\iff X_{f(x_1)} = X_{f(x_2)}$.

$\iff f(x_1) = f(x_2)$ 」

互不相同的等价类 $= \{X_y \mid y \in \mathrm{Im} f\}$.

$$X = \coprod_{y \in \mathrm{Im} f} X_y .$$

小结：等价关系 $\rightsquigarrow$ 分割.

反过来.

命题：设 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 为 X 的一个分割，($X = \coprod_{\alpha\in I} X_\alpha$)，则存在 X 上的一个等价关系 "$\sim$"，s.t. $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 就是 X 在 "$\sim$" 下的等价类全体，即 $X = \coprod_{\alpha\in I} X_\alpha$ 就是 X 按此等价关系下的等价类分解.

证. $\forall x_1, x_2 \in X$ 定义 $x_1 \sim x_2 \Longleftrightarrow \exists \alpha \in I$, s.t. $x_1, x_2 \in X_\alpha$.

$(x_2 \sim x_3 \Rightarrow \exists \beta \in I$, s.t. $x_2, x_3 \in X_\beta)$.

显然 "$\sim$" 为一个等价关系.

$\forall x \in X$, $\Rightarrow \exists!\, \alpha \in I$, s.t. $x \in X_\alpha$, $\Rightarrow \bar{x} = X_\alpha$. #

小结：等价关系 $\longrightarrow$ 分割.

定义：设"$\sim$"为 X 上等价关系，定义 X 的商集：

$$X/\sim = \overline{X} := \{\bar{a} \mid a \in X\}.$$

例：$X = \{日期\}$，"$\sim$"星期数等价.

等价类全体 $\{星期一的天, \cdots\cdots, 星期七的天\}$

$$= X/\sim$$

例：$f: X \longrightarrow Y$，"$\sim_f$"：

$\forall x \in X$，$\bar{x} = X_{f(x)}$.

$$X/\sim_f = \{X_y \mid y \in \mathrm{Im} f\} \xleftrightarrow{1:1} \mathrm{Im} f.$$

$$X_y \longmapsto y$$

商集与原集合之关系

X : set　　"$\sim$" 为 X 上等价关系

模掉

$$\pi : X \longrightarrow X/\sim$$

$$x \longmapsto \bar{x}$$

自然投射

$x_1 \neq x_2$

$$x_1 \sim x_2 \longmapsto \pi(x_1) = \pi(x_2)$$

$$\pi : X \longrightarrow X/\sim$$ 满射

$$x \longmapsto \bar{x}$$

惊奇的结果：其实满射都是自然投射.

命题：设 $X \xrightarrow{f} Y$ 为满射，考虑商集 $X/\sim_f$.
令 $\pi: X \to X/\sim_f$ 为自然投射，则存在唯一的双射 $\varphi: Y \to X/\sim_f$，使下列图表交换：

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & Y \arrow[d, dashed, "\exists!\varphi"] \\
& X/\sim_f
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, mapsto] \arrow[dr, mapsto] & y = f(x) \arrow[d, mapsto] \\
& \pi(x) = \varphi(y)
\end{tikzcd}$$

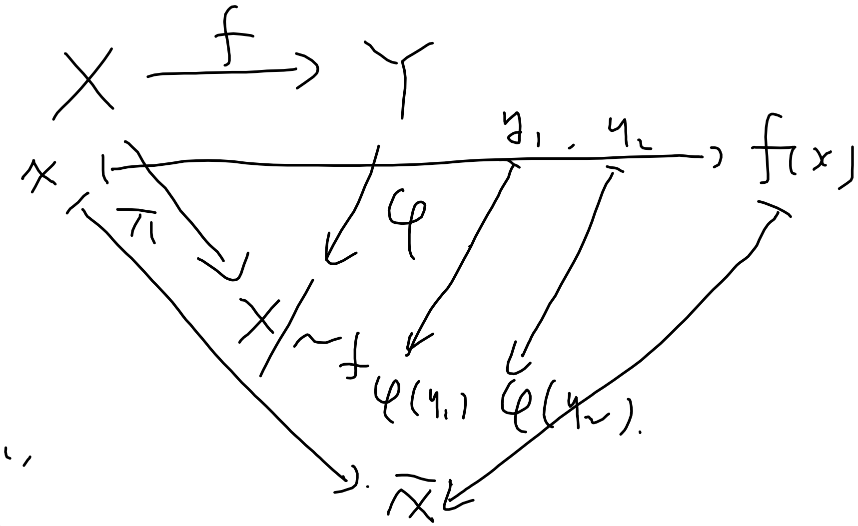
$$\begin{array}{ccc}
y & & y \\
\| & & \| \\
f(x) & = & f(x') \\
& \Updownarrow & \\
x & \sim_f & x' \\
& \Updownarrow & \\
\overline{x'} & = & \overline{x} \\
\| & & \| \\
\pi(x') & = & \pi(x)
\end{array}$$

Pf：定义 $\varphi: Y \to X/\sim_f$ 如下：$\forall y \in Y$，取 $x \in X$，s.t. $f(x) = y$，

定义 $\varphi(y) = \pi(x)$

良好定义：若 $\exists x' \in X$，s.t. $f(x') = y$，则要证 $\pi(x') = \pi(x)$

下证 φ 为双射.



单射: $\forall\, y_1, y_2 \in Y$,

设 $\varphi(y_1) = \varphi(y_2)$

取 $x_1 \in X$, $x_2 \in X$, s.t. $f(x_1) = y_1$,
$f(x_2) = y_2$.

$\varphi(y_1) = \pi(x_1) \qquad \varphi(y_2) = \pi(x_2)$.

$\Rightarrow \pi(x_1) = \pi(x_2) \Leftrightarrow \bar{x}_1 = \bar{x}_2 \Leftrightarrow \overset{y_1}{\overset{\parallel}{f(x_1)}} = \overset{y_2}{\overset{\parallel}{f(x_2)}}$.

满射: $\forall\, \bar{x} \in X/\sim_f$. $\qquad \pi(x) = \bar{x}$.

$\Rightarrow \varphi(f(x)) = \bar{x}$, $\Rightarrow \varphi$ 满 $\qquad$ #

$$
\begin{tikzcd}
\text{等价关系} \arrow[rr, bend left, "\text{等价类}"] \arrow[dr, bend left, "\text{商映射}"] & & \text{分割} \arrow[ll, bend left] \arrow[dl, bend left] \\
& \text{满射} \arrow[ul, bend left] \arrow[ur, "\text{fiber}"] &
\end{tikzcd}
$$

$\sim_f \longleftarrow\!\shortmid f$

$X = \coprod_{\alpha \in I} X_\alpha$

$(X_\alpha \neq \phi)$

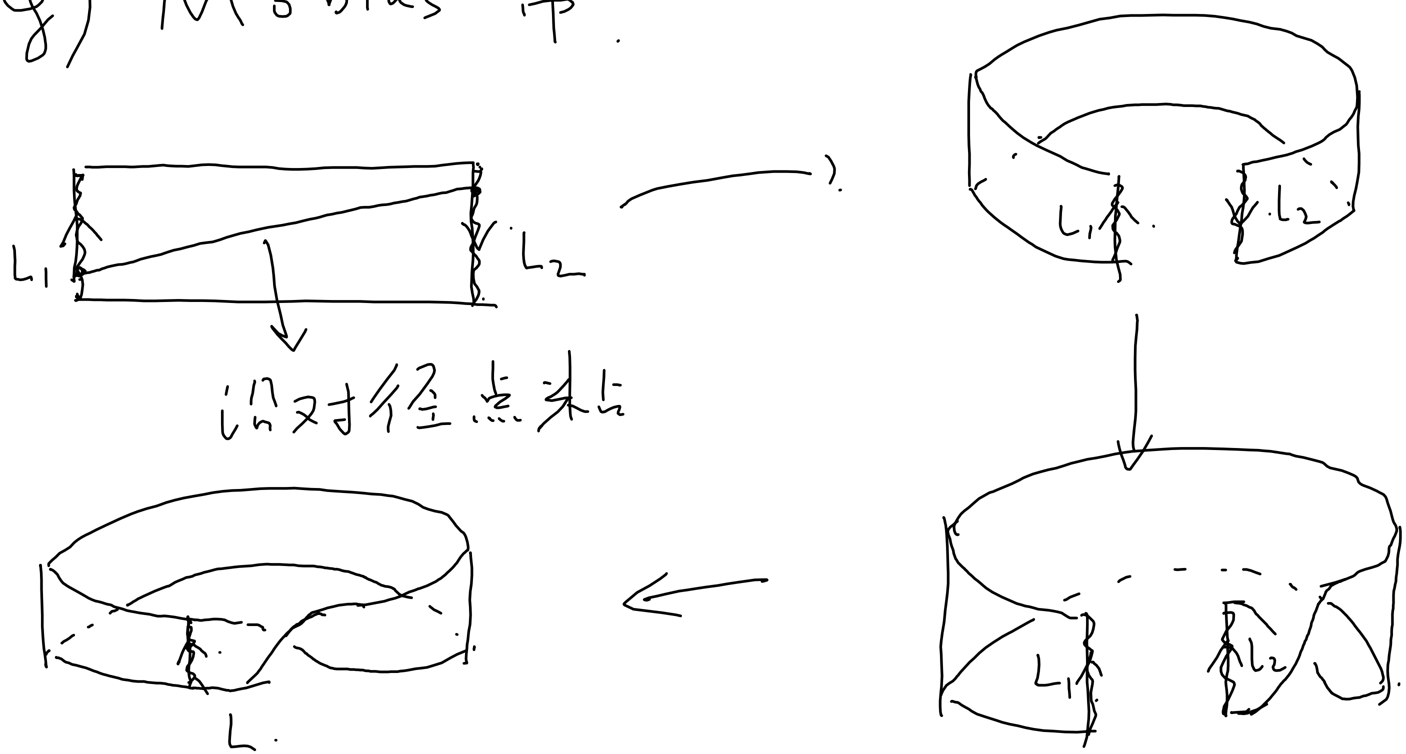
$X \longrightarrow \{X_\alpha \mid \alpha \in I\}$

$x \longmapsto X_\alpha, \text{ if } x \in X_\alpha.$

商空间

例. (glueing) Möbius 带.

「直观：



」

本例将构造 Möbius 带.

① 作为集合.

② 将之赋予拓扑.

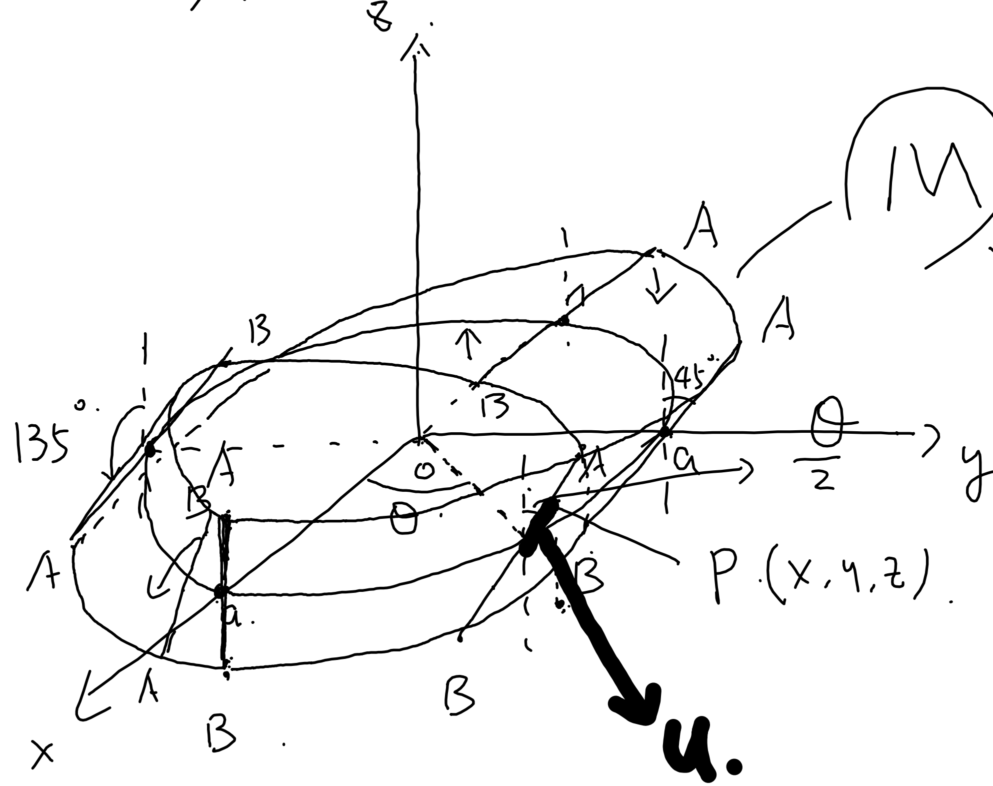
(方法一) 直观的方法.

(直观)

(方法二) 抽象的方法.

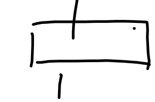
(看清本质).

(方法一) 借助 $\mathbb{R}^3$. 将把 M 定义为 $\mathbb{R}^3$ 中一个子集.



M: 赋予子空间拓扑

定义为 Möbius 带



(下面: 构造 $\varphi: X \to M$

s.t. φ 实现了直观上的粘合过程)

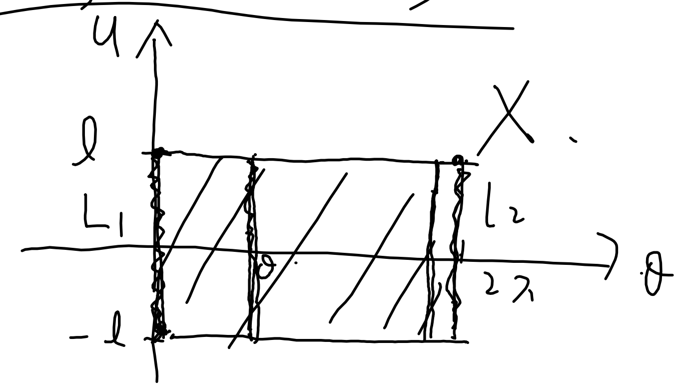
$|AB| = 2l$.

$-l \le u \le l$, $0 \le \theta \le 2\pi$.

$$(\theta, u) \longmapsto \left((a + u\sin\frac{\theta}{2})\cos\theta,\ (a + u\sin\frac{\theta}{2})\sin\theta,\ u\cdot\cos\frac{\theta}{2}\right)$$

$X = [0, 2\pi] \times [-l, l]$.

$\varphi: X \longrightarrow M$

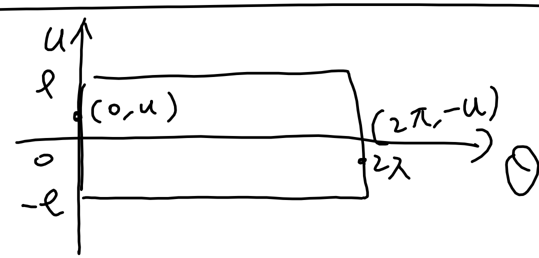


小结：借助 $\mathbb{R}^3$，$M \subset \mathbb{R}^3$ 子空间．

$\varphi: X \longrightarrow M$

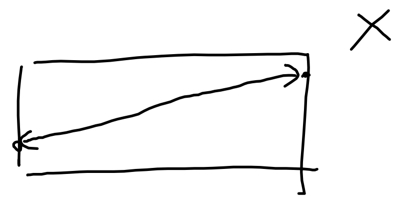
缺点：借助于第三方空间．

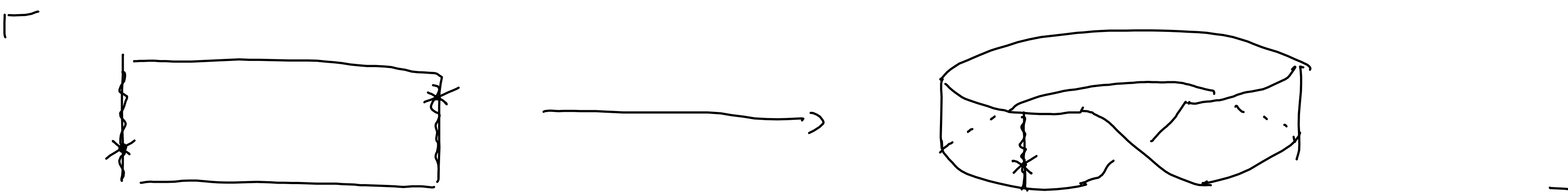
(方法二)．X：



$[0,2\pi]\times[-l,l]$

粘合方式：





定义 X 上等价关系"~"：$\begin{cases} \text{所有点与自身等价．} \\ (0,u)\sim(2\pi,-u) \quad \forall -l\le u\le l. \end{cases}$

$X \xrightarrow{\pi} X/\sim$，$p \longmapsto \bar{p}$．

定义: $X/\sim$ 上拓扑如下:

"$U \subset X/\sim$ 开" $\Longleftrightarrow$ "$\pi^{-1}(U) \subset X$ 开".

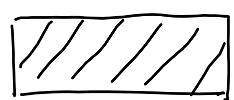
「 ① $\forall\, U, V \underset{open}{\subset} X/\sim$, $\pi^{-1}(U \cap V) = \pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V) \underset{open}{\subset} X$

$\Rightarrow U \cap V$ 为 $X/\sim$ 中开集

② $\forall\, U_\alpha \underset{open}{\subset} X/\sim$, $\alpha \in I$, $\pi^{-1}\left(\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in I} \pi^{-1}(U_\alpha) \underset{open}{\subset} X$

$\Rightarrow \bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha \underset{open}{\subset} X/\sim$ 」

$\tilde{M} = X/\sim$ (抽象定义的 Möbius 带)

目前: X:  下证: f 是同胚

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\varphi"] & \\ X/\sim = \tilde{M} \arrow[rr, "1:1", "f"'] & & M \end{tikzcd}$$

$$
\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\varphi"] & \\
X/\sim = \tilde{M} \arrow[rr, "1:1", "f"'] & & M (\subset \mathbb{R}^3)
\end{tikzcd}
$$

定义 M 上的由 f 移植而来的拓扑（记为 $\mathcal{T}$）：

$$U \underset{\text{open}}{\subset} M \iff f^{-1}(U) \underset{\text{open}}{\subset} \tilde{M}.$$

记 M 上的子空间拓扑为 $\mathcal{S}$.

要证 f 为同胚，等价于证 $\mathcal{T} = \mathcal{S}$.

「练习：设 X、Y 为拓扑空间，$f: X \to Y$ 为双射，记 Y 上拓扑为 $\mathcal{T}$，记 Y 通过 f 移植来的拓扑为 $\mathcal{S}$，则 f 为同胚 $\iff$ "$\mathcal{T} = \mathcal{S}$".」

$\mathcal{T}$ 中开集："$U \underset{\text{open}}{\subset} M$" $\iff$ "$\varphi^{-1}(U) \underset{\text{open}}{\subset} X$"

"$\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$":

$\forall U \in \mathcal{G}$, $\varphi^{-1}(U)$ 显然为 X 中开集 ($\varphi: X \to M$)

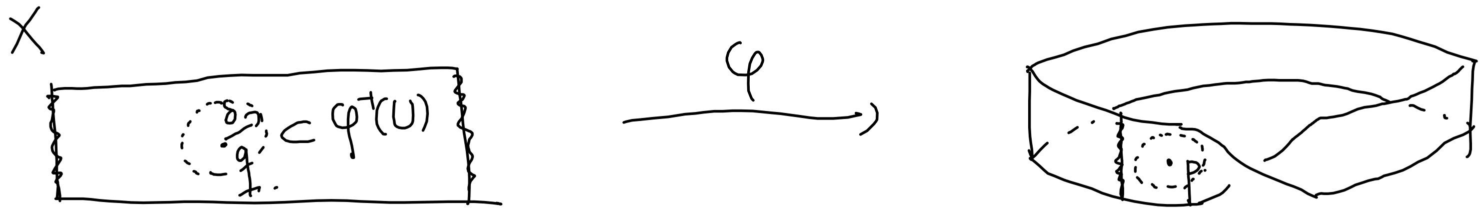
$\Rightarrow U \in \mathcal{F}$.

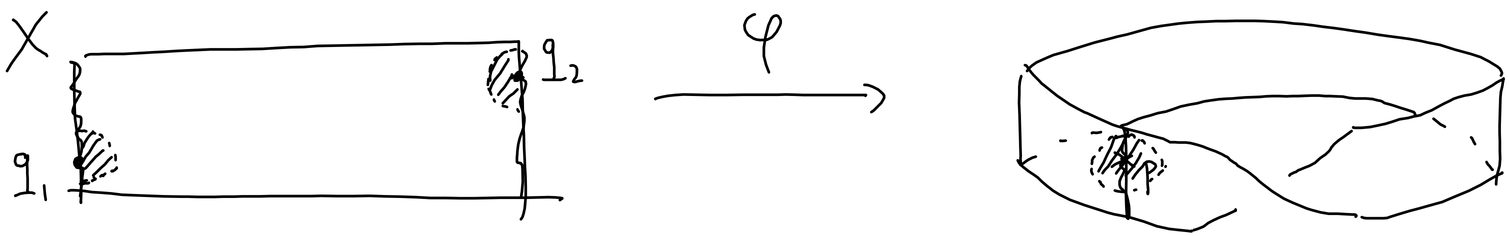
"$\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$":

$\forall U \in \mathcal{F}$, 要证 U 为 M 在子空间拓扑下开集.

$\Updownarrow$

$\forall p \in U$, $\exists B(p;\delta) \cap M \subset U$





例 (moduli spaces 模空间)

$$\{\mathbb{R}^2\text{中经过原点直线}\} = \mathbb{R}P^1$$

$$\Big\updownarrow 1:1$$

$$\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}/\sim$$

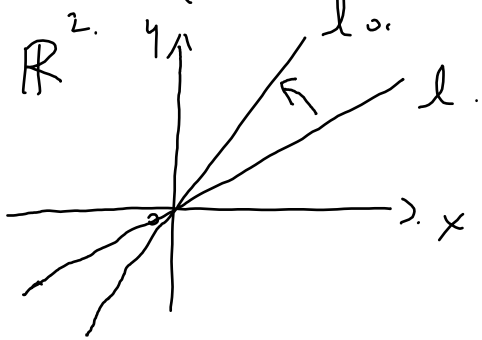
"$\sim$"：$\forall x, y \in \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

"$x\sim y$" $\Longleftrightarrow$ $\overline{xO}$ 与 $\overline{yO}$ 重合

$\Longleftrightarrow \exists \lambda\in\mathbb{R}^*$, s.t. $x=\lambda\cdot y$

目的：赋予 $\mathbb{R}P^1$ 一个自然的拓扑，

直观：



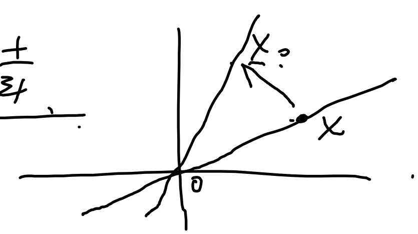
直线 $l\subset\mathbb{R}^2$，l 对应的 $\mathbb{R}P^1$ 中的点记为 $[l]$。

$[l] \longrightarrow [l_0]\in\mathbb{R}P^1$.

精确化：$\pi: \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}P^1 = \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}/\sim$.

$x \longmapsto [\overline{xO}]\ (=\bar{x})$. (自然投射)

$\rightarrow$ 想要赋予 $\mathbb{R}P^1$ 拓扑，使 π 连续。



直接了当的方法：

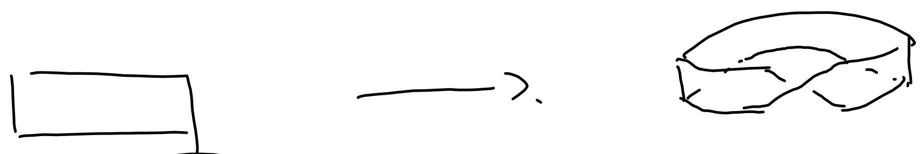
定义 $U \subset \mathbb{RP}^1 \left(= \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}/\sim\right)$ 为开集

$\Longleftrightarrow$ $\pi^{-1}(U)$ 为开集

$\Rightarrow$ 令 $\mathcal{T} = \{U \underset{\text{open}}{\subseteq} \mathbb{RP}^1\}$，$\mathcal{T}$ 构成了 $\mathbb{RP}^1$ 上的一个拓扑，

在此拓扑下，$\pi : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{RP}^1 = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}/\sim$ 为连续映射

(glueing)

Rmk. X :  M

$\tilde{M} = X/\sim$

(moduli sp)

$U \subset X/\sim$ 开 $\Longleftrightarrow$ $\pi^{-1}(U)$ 开

$\left(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\right)/\sim \; = \mathbb{RP}^1$.

$U \subset \mathbb{RP}^1$ 开 $\Longleftrightarrow$ $\pi^{-1}(U)$ 开.

的构造方法相同

此两例的构造都归结于在商集上构造拓扑，且该拓扑

定义：设 X：top space，"$\sim$" 为 X 一个等价关系，

$\overline{X} = X/\sim$，$\pi: X \to \overline{X}$ 自然投射，定义 $\overline{X}$ 上

的拓扑为：

商拓扑 $\longleftarrow$ $\left\{ \begin{array}{l} U \subset \overline{X} \text{ 开} \iff \pi^{-1}(U) \text{ 为 } X \text{ 中开集} \\ (\text{已记 } \mathcal{T} = \{U \underset{\text{open}}{\subset} \overline{X}\} \text{ 构成 } \overline{X} \text{ 上的一个拓扑}) \end{array} \right.$

$\overline{X}$ 在此拓扑下构成的拓扑空间称为商空间，

$\pi: X \longrightarrow \overline{X}$ 显然连续，称之为商映射

(quotient map).

<u>Rmk</u>: $\overline{X}$ 上的商拓扑为使 $\pi: X \to \overline{X}$ 连续的最大

拓扑.

「设 $\mathcal{T}'$ 为 $\overline{X}$ 上另一个拓扑，$\pi: X \longrightarrow \overline{X}$ 在 $\mathcal{T}'$ 下

连续. $\forall U \in \mathcal{T}'$，$\pi^{-1}(U)$ 为 X 中开集，$\Rightarrow U \in \mathcal{T}$.

$\Rightarrow \mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$ 」

回顾集合论：

X：set，"$\sim$" 为 X 上等价关系，

$\pi: X \to X/\sim$，

命题：任一满射本质上为自然投射。

定义（粘合映射 identification map）X, Y：top spaces，

$f: X \to Y$ 映射，f 称为粘合映射，if：

① f 连续满射。

② $\forall U \subset Y$，$f^{-1}(U)$ 开 $\Leftrightarrow$ U 为 Y 为开集。

例。$X = [0, 2\pi] \times [-l, l]$，$\varphi: X \to M \ (\subset \mathbb{R}^3)$

$(\theta, u) \mapsto \varphi(\theta, u)$

需证：M 上子空间拓扑，与 M 上这么个拓扑相同。

$\Rightarrow$ φ 为一个粘合映射。$\forall U \subset M$，U 开 $\Leftrightarrow$ $\varphi^{-1}(U)$ 开 eg.

命题：设 X、Y：top spaces. $\varphi: X \longrightarrow Y$ 粘合映射，

则 $\exists$ X 上等价关系 "$\sim$"，以及唯一的同胚

令 $\bar{X} = X/\sim$ 为商空间，

$g: Y \xrightarrow{\cong} X/\sim$，s.t. 下列图表交换：

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] \arrow[r, phantom, shift right=4ex, "\circlearrowleft"] & Y \arrow[d, dashed, "\exists!\, g"] \\ & X/\sim \end{tikzcd}$$

在集合范畴中

Pf. 已证过，令 $\sim = \sim_\varphi$，就有一一映射：$g: Y \to X/\sim$，

s.t.
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] \arrow[r, phantom, shift right=4ex, "\circlearrowleft"] & Y \arrow[d, "g", "1:1"'] \\ & X/\sim \end{tikzcd}$$

只需证：g 连续，g^{-1} 连续。

· g 连续.

$\forall\, U \underset{\text{open}}{\subset} X/\sim$, 要证 $g^{-1}(U)$ 开.

即证 $\underbrace{\varphi^{-1}(g^{-1}(U))}_{\substack{\parallel \\ \pi^{-1}(U)}}$ 开.

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \arrow[dl, "g"] \\
X/\sim &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & y \arrow[dl, mapsto] \\
\pi(x) = g(y) &
\end{tikzcd}
$$

· g^{-1} 连续. 由 Lemma 立得. #

「Lemma. 设 $X \xrightarrow{\pi} X/\sim$ 为商映射, $\psi: X/\sim \to Z$ 映射:

"ψ 连续" $\Longleftrightarrow$ "$\psi\circ\pi : X \to Z$ 连续"

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "\psi\circ\pi"] & \\
X/\sim \arrow[r, "\psi"'] & Z
\end{tikzcd}
$$

$(\psi\circ\pi)^{-1}(U)$

$\parallel$

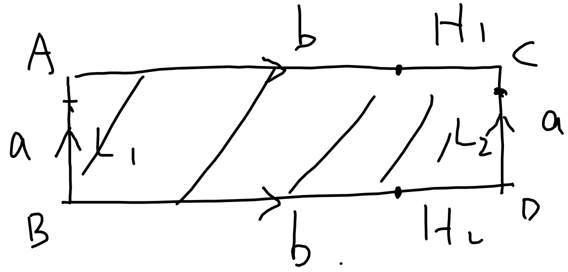
$\pi^{-1}(\psi^{-1}(U))$ 开.

$\Updownarrow$

Pf. ψ 连续 $\Longrightarrow$ $\psi\circ\pi$ 连续.

反之, $\psi\circ\pi$ 连续, 要证 ψ 连续. $\forall\, U \underset{\text{open}}{\subset} Z$, 要证 $\psi^{-1}(U)$ 为 $X/\sim$ 中开集 #」

例：

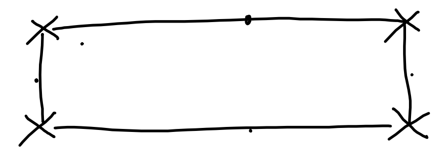


X.

$X/\sim$，"$\sim$"：两点等价 $\Longleftrightarrow$ 粘成同一点.（此两点）

X 上的点的分类：

① $\forall x \in L_1^\circ \cup L_2^\circ \cup H_1^\circ \cup H_2^\circ$，

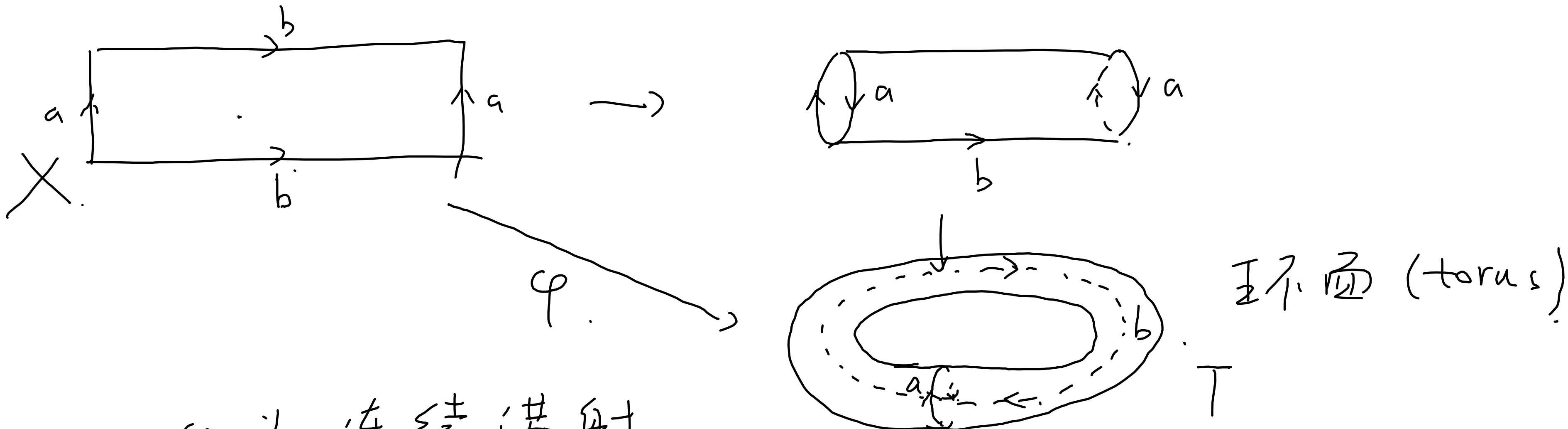


$\bar{x}$ 都含有两个元素.

② A, B, C, D.　$\bar{A}$ 含有四个元素，

③ $\forall x \in X^\circ$，　$\bar{x}$ 只含有一个元素.

$X/\sim$：定义为把 X 沿相应箭头粘合而得的空间.



$\Longrightarrow$ φ 为连续满射.

<u>要证: φ 为一个粘合映射</u>

$\ulcorner \Longrightarrow \quad T \cong X/\sim_\varphi \qquad \sim_\varphi = \sim$

$$X/\sim_\varphi = X/\sim$$

引理: 设 $\varphi: X \to Y$ 连续满射, 若 φ 为开映射(或闭映射) $\urcorner$

则 φ 为粘合映射.

Pf. 若 φ 为开映射（$\forall U \underset{open}{\subset} X$, $\varphi(U)$ open）

要证：$\forall U \subset Y$, if $\varphi^{-1}(U)$ 开, 则 $U \underset{open}{\subset} Y$.

$$\Downarrow$$

$$U = \varphi(\varphi^{-1}(U)) \text{ 开}$$

若 φ 为闭映射.

要证：$\forall U \subset Y$, if $\varphi^{-1}(U)$ 开, 则 $U \underset{open}{\subset} Y$.

$$\Downarrow$$

$$X \setminus \varphi^{-1}(U) \text{ 闭}$$

$$\Downarrow$$

$$Y \setminus U \overset{\varphi \text{ 满}}{=} \varphi(X \setminus \varphi^{-1}(U)) \text{ 闭}$$

#

Cor. 设 X: compact, Y: Hausdorff, $\varphi: X \to Y$ 满射.

则 φ 为粘合映射.

Pf. $\forall F \underset{closed}{\subset} X$, $\Rightarrow F$ compact $\Rightarrow \varphi(F)$ compact, Y Hausdorff $\Big\} \Rightarrow \varphi(F)$ closed

由 Lemma 立得.

#