§3. 相对(单纯)同调

概述:

将对一个空间对 (X, A)，其中 $A \subset X$，定义单纯同调群 $H_n(X, A)$，特别地，当 $A=\phi$，$H_n(X, \phi) = H_n(X)$。

将建立相对同调群与绝对同调群之间的联系(长正合列)

设 K 为单纯复形，K_0 为 K 的一个子复形。

$\rightsquigarrow (C_\cdot(K), \partial_\cdot)$，$(C_\cdot(K_0), \partial_\cdot)$ (chain complexes)

$(C_\cdot(K_0), \partial_\cdot)$ 为 $(C_\cdot(K), \partial_\cdot)$ 的一个子链复形

i.e. $\forall p \in \mathbb{Z}$，$C_p(K_0) < C_p(K)$，且 $\partial_p(C_p(K_0)) \subset C_{p-1}(K_0)$。

i.e. 有交换图表:

$$\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] \\
0 \arrow[r] \arrow[d] & C_p(K_0) \arrow[r] \arrow[d, "\partial_p"'] & C_p(K) \arrow[r] \arrow[d, "\partial_p"'] & C_p(K, K_0) \arrow[r] \arrow[d, "\partial_p"] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] \arrow[d] & C_{p-1}(K_0) \arrow[r] \arrow[d] & C_{p-1}(K) \arrow[r] \arrow[d] & C_{p-1}(K, K_0) \arrow[r] \arrow[d, "\partial_{p-1}"] & 0 \arrow[d] \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{tikzcd}$$

由此构造一个商链复形，记为 $(C_\cdot(K, K_0), \partial_\cdot)$，其中

$$C_p(K, K_0) := C_p(K) / C_p(K_0)$$

$$\partial_p : C_p(K, K_0) \to C_{p-1}(K, K_0)$$

由 $C_p(K) \xrightarrow{\partial_p} C_{p-1}(K) \to C_{p-1}(K)/C_{p-1}(K_0) = C_{p-1}(K, K_0)$

诱导 $(\partial_p(C_p(K_0)) \subset C_{p-1}(K_0).)$

于是有链复形的短正合列：$0 \to C_\cdot(K_0) \to C_\cdot(K) \to C_\cdot(K, K_0) \to 0$

定义: $Z_p(K,K_0) := \mathrm{Ker}(C_p(K,K_0) \xrightarrow{\partial_p} C_{p-1}(K,K_0))$.

relative p-cycles of K modulo K_0

$B_p(K,K_0) := \mathrm{Im}(C_{p+1}(K,K_0) \xrightarrow{\partial_{p+1}} C_p(K,K_0))$

relative p-boundaries of K modulo K_0.

$H_p(K,K_0) := Z_p(K,K_0)/B_p(K,K_0)$.

p-th relative homology group of K modulo K_0.

Rmk. 当 $K_0=\phi$ 时, $H_p(K,\phi)=H_p(K)$.

定义: 设 X 为拓扑空间, $A\subset X$ 为子空间, (X,A) 的一个三角剖分是指一组数据 (K,K_0,h), 其中 K 为单纯复形, K_0 为 K 的一个子复形, $h:|K|\to X$ 为一个同胚, 且 $h(|K_0|)=A$. 若 (X,A) 存在三角剖分, 则称 (X,A) 是可三角剖分的对 (triangulable pair).

定理2. 设 (K, K_0, h), (L, L_0, j) 为 (X, A) 的两个三角剖分, 则有"自然"的同构:

$$H_p(K, K_0) \xrightarrow{\cong} H_p(L, L_0).$$

[c.f. Munkres. Elements of Algebraic Topology].

定义. 设 (X, A) 为一个 triangulable pair, 设 (K, K_0, h) 为它的一个三角剖分, 定义:

$$H_p(X, A) := H_p(K, K_0).$$

称为 X 相对于 A 的第 p 个单纯同调群.

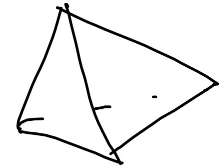
Rmk. 可以不依赖于三角剖分去定义 $H_p(X, A)$, 见 [Munkres].

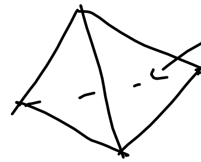
记号: 设 K 为 simplicial complex, 记 K^p 为 K 中维数不超过 p 的单形全体, 则 K^p 为 K 的一个子复形, 称为 K 的 p-骨架 (p-skeleton).

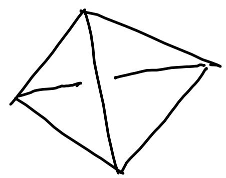
设 X 为可三角剖分的 top space, (K, h) 为 X 的一个三角

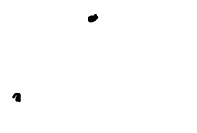
剖分，记 $X^p = h(|K^p|)$，称为 X 在 (K, h) 下的 p-skeleton.

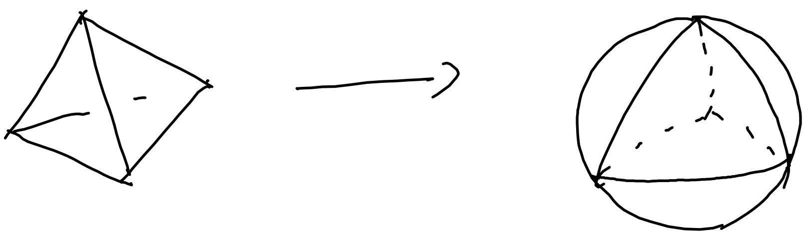
「 $X = B^3$,

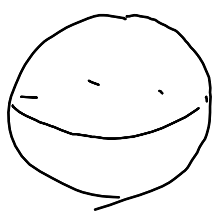
K:  $K^3 = K$.

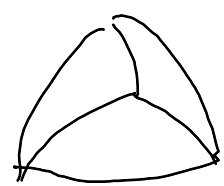
K^2:  挖空.

K^1:  (6条棱).

K^0:  (4个点)

h: 

X^2:  $= S^2$,

X^1:  (6条曲线段).

X^0: (4个点) 」

例16 记号同前. 计算 $H_n(X^p, X^{p-1})$. （X 为可三角剖分 top. sp.，(K, h) 为 X 的三角剖分，$X^p = h(|K^p|)$）

由定义，

$$C_n(K^p, K^{p-1}) = C_n(K^p)/C_n(K^{p-1}).$$

$$= \begin{cases} 0, & n > p \\ 0, & n < p \\ p\text{-单形生成的自由 Abel 群}, & n = p. \end{cases}$$

$$0 \to 0 \to \cdots \to C_p(K^p, K^{p-1}) \to 0 \to \cdots \to 0.$$

$C_p(K^p, K^{p-1})$ = p-单形生成的自由 Abel 群

$$H_n(K^p, K^{p-1}) = \begin{cases} K\text{ 中 }p\text{-单形生成的自由 Abel 群}, & n = p \\ 0 & n \neq p \end{cases}$$

特别地，

$$H_k(B^n, S^{n-1}) \cong \begin{cases} 0, & \text{if } k \neq n \\ \mathbb{Z}, & \text{if } k = n. \end{cases}$$

命题2. 设 (X, A) 是可三角剖分的对，则有长正合列：

$$\cdots \to H_p(A) \to H_p(X) \to H_p(X, A) \to H_{p-1}(A) \to H_{p-1}(X) \to \cdots$$

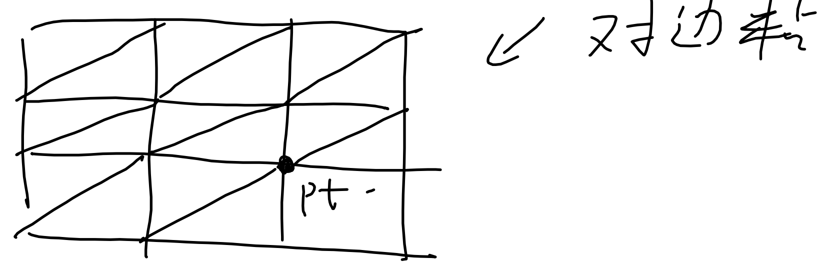
证明：设 (K, K_0, h) 为 (X, A) 的一个三角剖分.

$$0 \to C_\cdot(K_0) \to C_\cdot(K) \to C_\cdot(K, K_0) \to 0.$$

使用 Lemma 5 即可. #

例17. 计算 $H_k(T, pt)$，其中 T 为环面.

取三角剖分：



长正合列：

$$\cdots \to H_p(pt) \to H_p(T) \to H_p(T, pt) \to H_{p-1}(pt) \to H_{p-1}(T) \to \cdots$$

当 $p \geq 2$. $0 \to H_p(T) \to H_p(T, pt) \to 0 \to \cdots$

$$\Rightarrow H_p(T, pt) \cong H_p(T), \text{ 当 } p \geq 2.$$

当 $p=1$ 时,

$$\begin{array}{ccccccccc} H_1(pt) & \to & H_1(T) & \to & H_1(T,pt) & \to & H_0(pt) & \to & H_0(T) \to \cdots \\ \| & & & & & & \cong & & \cong \\ 0. & & & & & & \mathbb{Z}. & & \mathbb{Z}. \end{array}$$

$$0 \to H_1(T) \to H_1(T,pt) \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}.$$

$\rightsquigarrow$ 有正合列: $0 \to H_1(T) \to H_1(T,pt) \to 0$

$$\Rightarrow \quad H_1(T,pt) \cong H_1(T).$$

当 $p=0$ 时,

$$H_0(pt) \xrightarrow{\cong} H_0(T) \to H_0(T,pt) \to 0 \to \cdots$$

$$\Rightarrow \quad H_0(T,pt) \cong 0.$$

$$H_p(T,pt) \cong \begin{cases} 0 & , \text{ if } p=0 \\ H_p(T) & , \text{ if } p \geq 1. \end{cases}$$

定义. 设 K 为单纯复形, $(C_\cdot(K), \partial_\cdot)$ 为相应的链复形,

定义 augmented 链复形为

$$\cdots C_p(K) \xrightarrow{\partial_p} C_{p-1}(K) \xrightarrow{\partial_{p-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_1} C_0(K) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0 \to \cdots \quad (*)$$

ε 称为 augmented map, 定义为:

$\varepsilon(v)=1$, $\forall$ K 中的顶点 v, 决定的从自由Abel 群 $C_0(K)$ 到 $\mathbb{Z}$ 的群同态.

显然 $\varepsilon \circ \partial_1 = 0$. $\left(\varepsilon \circ \partial_1([v_0, v_1]) = \varepsilon(v_1 - v_0) = 0\right)$.

($\Rightarrow$ $(*)$ 的确为 chain complex).

定义 $\widetilde{H}_p(K) := H_p((*))$, K 的第 p 个 reduced simplicial homology group.

由定义. $\widetilde{H}_p(K) = H_p(K)$, $\forall p \geq 1$.

命题 3. $\widetilde{H}_0(K)$ 为自由Abel 群, 且 $\widetilde{H}_0(K) \oplus \mathbb{Z} \cong H_0(K)$.

证明: 容易, 略. #

定义. 设 X 为可三角剖分的 top sp. (K, h) 为 X 的一个三角剖分, 定义 X 的 reduced homology group 为:

$$\tilde{H}_p(X) := \tilde{H}_p(K). \quad \forall p \in \mathbb{Z}.$$

Rmk. X 的 reduced homology group 同样是良好定义.

命题4. 设 X 为可三角剖分的拓扑空间, x_0 为 X 中的一个点, 则:

$$H_p(X, x_0) \cong \tilde{H}_p(X), \quad \forall p \geq 0.$$

证明: 将在 singular homology theory 中证之. #

§4. 奇异同调之定义.

记号: 由 $v_0, \cdots, v_n$ 张成的 n-simplex 记为 $\langle v_0, \cdots, v_n \rangle$.

标准 n-单形 Δ_n:

取 $N\in\mathbb{Z}_{>0}$ 足够大，

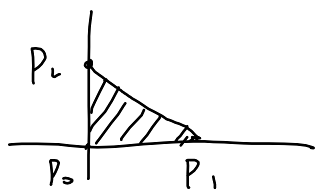
在 $\mathbb{R}^N$ 中，$P_i=(0,\dots,0,\underset{\substack{\uparrow\\ i\text{-th}}}{1},0,\dots,0)\in\mathbb{R}^N$. $i=1,\dots,n$

$\Delta_n := \langle P_0, P_1, \dots, P_n \rangle$，其中 $P_0=(0,\dots,0)$，

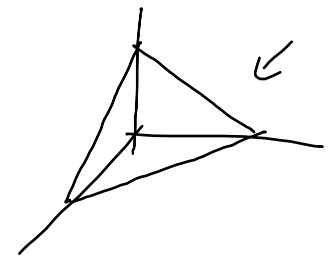
例13. Δ_0 : ·

Δ_1 :

Δ_2 :



Δ_3 :



$$\Delta_n = \left\{ \sum_{i=0}^n t_i P_i \;\middle|\; \sum_{i=0}^n t_i = 1,\ t_j \geq 0,\ \forall j=0,\dots,n \right\}.$$

定义. 设 X 为一个拓扑空间，X 中的一个 singular n-simplex 为一个连续映射 $s:\Delta_n\to X$. 由 X 中的 singular n-simplex 所生成的自由Abel群记为 $S_n(X)$，$\forall c\in S_n(X)$，c 可写为 $c=\sum_{i=1}^k n_i s_i$，其中 s_i 为 singular n-simplex. c 称为 singular n-chain.

定义 (face map). $\forall n$, 定义 Δ_n 的第 i 个面映射 $(i=0,1,\cdots,n)$.

$$\partial_n^i : \Delta_{n-1} \longrightarrow \Delta_n .$$

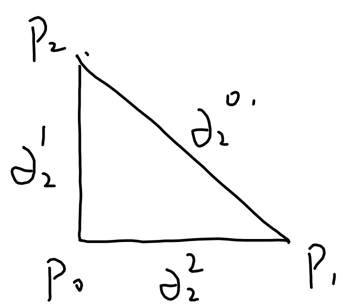
$$\sum_{j=0}^{n-1} t_j P_j \longmapsto \sum_{j=0}^{i-1} t_j P_j + \sum_{j=i+1}^{n} t_{j-1} P_j .$$

例14. $(n=2)$.

$$\partial_2^0 : \Delta_1 \to \Delta_2 , \quad t_0P_0 + t_1P_1 \longmapsto t_0P_1 + t_1P_2 .$$

$$\partial_2^1 : \Delta_1 \to \Delta_2 , \quad t_0P_0 + t_1P_1 \longmapsto t_0P_0 + t_1P_2$$

$$\partial_2^2 : \Delta_1 \to \Delta_2 , \quad t_0P_0 + t_1P_1 \longmapsto t_0P_0 + t_1P_1 .$$



$$\partial_2^0 : \Delta_1 \xrightarrow{\cong} \langle P_1, P_2 \rangle .$$

$$\partial_2^1 : \Delta_1 \xrightarrow{\cong} \langle P_0, P_2 \rangle .$$

$$\partial_2^2 : \Delta_1 \xrightarrow{\cong} \langle P_0, P_1 \rangle$$

一般地, $\partial_n^i : \Delta_{n-1} \xrightarrow{\cong} \langle P_0, \cdots, \hat{P_i}, \cdots, P_n \rangle$

定义(boundary operator). $\partial: S_n(X) \to S_{n-1}(X)$,

by: $\forall s: \Delta_n \to X$, 规定

$$\partial(s) := \sum_{i=0}^{n} (-1)^i s \circ \partial_n^i$$
$$= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i s\Big|_{\langle p_0, \cdots, \hat{p}_i, \cdots, p_n \rangle}.$$

引理6. $\partial^2 = 0$.

证明: 留做习题. #.

由引理:

$$\cdots \to S_n(X) \xrightarrow{\partial} S_{n-1}(X) \to \cdots \xrightarrow{\partial} S_1(X) \xrightarrow{\partial} S_0(X) \to 0 \to 0 \to \cdots \quad (*).$$

为一个 chain complex.

定义: X 的 n-th singular homology group 为:

$$H_n(X) := (*) \text{ 的第 } n \text{ 个 homology group}$$

$$= \ker(S_n(X) \xrightarrow{\partial} S_{n-1}(X)) \big/ \operatorname{Im}(S_{n+1}(X) \xrightarrow{\partial} S_n(X)).$$

称呼：$H_p(X)$ 中元素称为同调类（homology class）.

$\forall c \in Z_p(X) = \ker(S_n(X) \xrightarrow{\partial} S_{n-1}(X))$，记 $[c]$ 为 c 所代表的同调类. $c_1, c_2 \in S_p(X)$ 称为是同调的(homologous)，若 $\exists\, t \in S_{p+1}(X)$, s.t. $c_1 - c_2 = \partial t$.

定义：从 $S_0(X)$ 出发定义 augmented 链复形：

$$\cdots \longrightarrow S_p(X) \xrightarrow{\partial} S_{p-1}(X) \longrightarrow \cdots\cdots \xrightarrow{\partial} S_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0 \to \cdots \quad (**)$$

其中 ε 称为 augmented map，定义为：

由 $\varepsilon(T) = 1$，$\forall$ simplular 0-chain $T: \Delta_0 \to X$，所决定的从而由 Abel 群 $S_0(X)$ 到 $\mathbb{Z}$ 的群同态.

显然 $\varepsilon \circ \partial = 0$，因而 $(**)$ 仍为 chain complex，定义：

X 的 p-th reduced singular homology group $\widetilde{H}_p(X)$ 为 (**) 的第 p 个同调群.

由定义，显然有：$H_p(X) = \widetilde{H}_p(X)$, $\forall p \geq 1$.

命题5. 设 X 为拓扑空间. 设 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 为 X 的道路连通分支全体. $\forall \alpha$, 取 X_α 中的一个 singular 0-simplex $T_\alpha : \Delta_0 \to X_\alpha$, 则 $H_0(X)$ 为一个自由 Abel 群, 且 $[T_\alpha]$, $\alpha \in I$, 为 $H_0(X)$ 的一组基.

命题6. $\widetilde{H}_0(X)$ 为自由 Abel 群, 且 $H_0(X) \cong \widetilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z}$. 特别地, 若 X 道路连通, 则 $\widetilde{H}_0(X) = 0$, 当 X 不道路连通时, 固定 $\alpha_0 \in I$, 则 $[T_\alpha - T_{\alpha_0}]$, $\alpha \in I$, $\alpha \neq \alpha_0$, 为 $\widetilde{H}_0(X)$ 的一组基.

命题5之证明：

$\forall X_\alpha$ 中的 singular 0-simplex $T: \Delta_0 \to \underset{\text{path. conn.}}{X_\alpha}$.

$T_\alpha(\Delta_0),\ T(\Delta_0) \in X_\alpha$.

$\Rightarrow \exists \gamma: \underbrace{[0,1]}_{\Delta_1} \to X_\alpha$, s.t. $\gamma(0) = T_\alpha(\Delta_0)$, $\gamma(1) = T(\Delta_0)$.

γ 就是一个 singular 1-simplex.

$\partial\gamma = \gamma|_{\{1\}} - \gamma|_{\{0\}} = T - T_\alpha$.

$\Rightarrow T$ 同调于 T_α

考虑 $S_0(X)$ 的子群：$H = \left\{ \sum_{\alpha\in I} n_\alpha T_\alpha \,\middle|\, n_\alpha \in \mathbb{Z},\ n_\alpha \text{中只有有限个非零} \right\}$

"$S_0(X) \longrightarrow H_0(X)$" 限制在 H 上为满的.

$\Rightarrow H_0(X) \cong H \Big/ \underline{H \cap \mathrm{Im}(S_1(X) \xrightarrow{\partial} S_0(X))}$

$\forall c \in H \cap \mathrm{Im}(S_1(X) \xrightarrow{\partial} S_0(X))$.

设 $c = \sum_{\alpha\in I} n_\alpha T_\alpha = \partial(d) = \partial\left(\sum_{\alpha\in I} d_\alpha\right) = \sum_{\alpha\in I} \partial d_\alpha$.

$\Rightarrow \forall \alpha \in I,\ n_\alpha T_\alpha = \partial(d_\alpha). \Rightarrow \forall \alpha \in I,\ n_\alpha = 0.$

$\Rightarrow H \cap \mathrm{Im}(S_1(X) \xrightarrow{\partial} S_0(X)) = 0.$

$\Rightarrow H_0(X) \cong H.$ #

命题6之证明：

$S_0(X) / \mathrm{Im}(S_1(X) \xrightarrow{\partial} S_0(X))$ //

已证：设 $\pi: S_0(X) \to H_0(X)$ 为自然投射，

$\pi|_H$ 为满射. $H = \left\{ \sum_{\alpha \in I} n_\alpha T_\alpha \,\middle|\, n_\alpha \in \mathbb{Z},\ n_\alpha \text{中只有有限个非零} \right\}$.

$\tilde{H}_0(X) := \ker \varepsilon / \mathrm{Im}(S_1(X) \xrightarrow{\partial} S_0(X)).$ $\varepsilon: S_0(X) \to \mathbb{Z}$.

$\Rightarrow$ 记 $\ker \varepsilon \xrightarrow{\pi'} \tilde{H}_0(X)$ 为商映射.

$\Rightarrow \pi'|_{\ker\varepsilon \cap H}$ 为满射.

$$\Rightarrow \tilde{H}_0(X) \cong \ker\varepsilon \cap H \Big/ \underbrace{\ker\varepsilon \cap H \cap \mathrm{Im}(S_1(X) \xrightarrow{\partial} S_0(X))}_{0}$$

$$\cong \ker\varepsilon \cap H = \left\{ \sum_{\alpha \in I} n_\alpha T_\alpha \,\middle|\, n_\alpha \in \mathbb{Z},\ n_\alpha \text{中只有有限个非零},\ \sum_{\alpha \in I} n_\alpha = 0 \right\}.$$

$\Rightarrow$ 当 X 道路连通时，$\tilde{H}_0(X) = 0$.

当 X 不道路连通时，

$\tilde{H}_0(X) \cong \left\{ \sum_{\alpha\in I} n_\alpha T_\alpha \,\middle|\, \begin{matrix} n_\alpha \in \mathbb{Z},\ n_\alpha \text{ 中只有有限个非零},\ \sum_{\alpha\in I} n_\alpha = 0 \end{matrix} \right\}$.

$T_\alpha - T_{\alpha_0}$，$\alpha \in I$，$\alpha \neq \alpha_0$. 落在 $H \cap \ker\varepsilon$，

且它们构成了 $H \cap \ker\varepsilon$ 的一组基.

$$\sum_{\alpha\in I} n_\alpha T_\alpha = \sum_{\alpha\neq\alpha_0} n_\alpha T_\alpha + \underbrace{n_{\alpha_0}}_{= -\sum_{\alpha\neq\alpha_0} n_\alpha} T_{\alpha_0}.$$

$$= \sum_{\alpha\neq\alpha_0} n_\alpha (T_\alpha - T_{\alpha_0})$$

$\Rightarrow$ $\tilde{H}_0(X)$ 为自由 Abel 群，一组基为 $\{ T_\alpha - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{固定}}}{T_{\alpha_0}} \mid \alpha \in I, \alpha \neq \alpha_0 \}$.

#

例15. $H_n(pt)$,

$$S_n(pt) = \mathbb{Z}\sigma_n \cong \mathbb{Z}.$$

(pt 的 singular n-simplex 只有一个: $\sigma_n: \Delta_n \to pt$.)

$$\begin{array}{ccccccccc} S_n(pt) & \xrightarrow{\partial} & S_{n-1}(pt) & \xrightarrow{\partial} & S_{n-2}(pt) & \xrightarrow{\partial} \cdots\cdots \xrightarrow{\partial} & S_0(pt) & \to 0 \to \cdots & \\ \cong & & \cong & & \cong & & \cong & & (*) \\ \mathbb{Z} & & \mathbb{Z} & & \mathbb{Z} & & \mathbb{Z}. & & \end{array}$$

$\sigma_1: \Delta_1 \to pt$.

$$\partial(\sigma_1) = \sigma_1|_{\{1\}} - \sigma_1|_{\{0\}} = 0$$

$\sigma_2: \Delta_2 \to pt$. $\quad \sigma_2 = \langle p_0, p_1, p_2 \rangle$.

$$\partial(\sigma_2) = \sigma_2|_{\langle p_1,p_2\rangle} - \sigma_2|_{\langle p_0,p_2\rangle} + \sigma_2|_{\langle p_0,p_1\rangle} = \sigma_1.$$

因此 (*) 长成:

$$\begin{array}{cccccccc} S_{2n}(pt) & \xrightarrow{\cong} & S_{2n-1}(pt) & \xrightarrow{0} & S_{2n-2}(pt) & \xrightarrow{\cong} \quad \xrightarrow{0} \cdots\cdots \xrightarrow{\cong} & S_1(pt) \xrightarrow{0} S_0(pt). \\ \cong & & \cong & & \cong & & \\ \mathbb{Z} & & \mathbb{Z} & & \mathbb{Z} & & \end{array}$$

$\Rightarrow H_0(pt) \cong \mathbb{Z}$, $\quad H_i(pt) = 0$, $\quad i > 0$

§5. 奇异同调的同伦不变性.

设 $f: X \to Y$ 连续映射. f 诱导群同态

$$f_\#: S_p(X) \to S_p(Y). \quad \forall p \geq 0, p \in \mathbb{Z}.$$

by: $\forall$ singular p-simplex $s: \Delta_p \to X$,

规定 $f_\#(s) := f \circ s \quad (f\circ s: \Delta_p \to Y)$.

这些 $f_\#$ 一起给出下列交换图表:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & S_p(X) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f_\#"'] & S_{p-1}(X) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f_\#"'] & S_{p-2}(X) \arrow[r] \arrow[d, "f_\#"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & S_p(Y) \arrow[r, "\partial'"] & S_{p-1}(Y) \arrow[r, "\partial'"] & S_{p-1}(Y) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd} \qquad (*)$$

$$\forall \sigma \in S_p(X), \quad \partial(\sigma) = \sum (-1)^i \sigma\big|_{\langle p_0, \cdots, \hat{p}_i, \cdots, p_p \rangle}$$

$$f_\# \circ \partial(\sigma) = \sum (-1)^i f\circ\sigma\big|_{\langle p_0, \cdots, \hat{p}_i, \cdots, p_p \rangle}.$$

$$\partial' \circ f_\#(\sigma) = \partial'(f\circ\sigma) = \sum_i (-1)^i f\circ\sigma\big|_{\langle p_0, \cdots, \hat{p}_i, \cdots, p_p \rangle}$$

(*) 诱导了群同态：

$$f_*: H_p(X) \to H_p(Y), \qquad p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

Rmk. $f \rightsquigarrow f_*$ 显然满足下列性质：

(1) $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$, $\quad (g\circ f)_* = g_* \circ f_*$.

(2) $X \xrightarrow{1_X} X$, $\quad (1_X)_* = \mathrm{Id}$.

自然的问题： $f_*: H_p(X) \to H_p(Y)$ 何时为一个群同构？

「插播一些同调代数」.

定义. 设 $(C_\cdot, \partial_\cdot)$, $(D_\cdot, \partial'_\cdot)$ 为两个 chain complex, $\alpha, \beta: C_\cdot \to D_\cdot$ 为两个态射, 一个从 α 到 β 的链同伦 (chain homotopy) 是指一列群同态 $K_p: C_p \to D_{p+1}$, $\forall p \in \mathbb{Z}$, 使

$$\partial'_{p+1} \circ K_p + K_{p-1} \circ \partial_p = \beta_p - \alpha_p, \quad \forall p.$$

(简记为 $\partial' \circ K + K \circ \partial = \beta - \alpha$).

$$\left(\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_{p+1} \arrow[r, "\partial_{p+1}"] \arrow[d, shift right, "\alpha_{p+1}"'] \arrow[d, shift left, "\beta_{p+1}"] & C_p \arrow[r, "\partial_p"] \arrow[dl, "K_p"'] \arrow[d, shift right, "\alpha_p"'] \arrow[d, shift left, "\beta_p"] & C_{p-1} \arrow[r, "\partial_{p-1}"] \arrow[dl, "K_{p-1}"'] \arrow[d, shift right, "\alpha_{p-1}"'] \arrow[d, shift left, "\beta_{p-1}"] & C_{p-2} \arrow[r] \arrow[dl, "K_{p-2}"'] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & D_{p+1} \arrow[r, "\partial'_{p+1}"] & D_p \arrow[r, "\partial'_p"] & D_{p-1} \arrow[r, "\partial'_{p-1}"] & D_{p-2} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}\right) \quad (\text{homotopic}).$$

如果存在一个从α到β的链同伦，则称α与β是同伦的.

此时记 $\alpha \sim \beta$.

Rmk. "$\sim$"为一个等价关系.

定义. 设$(C_\cdot, \partial_\cdot)$, $(D_\cdot, \partial_\cdot)$为两个chain complexes. 一个从$C_\cdot$到$D_\cdot$的同伦等价(homotopy equivalence)是指一个态射 $u: C_\cdot \to D_\cdot$，使得 $\exists v: D_\cdot \to C_\cdot$，满足 $u \circ v \sim 1_{D_\cdot}$, $v \circ u \sim 1_{C_\cdot}$. 若存在从$C_\cdot$到$D_\cdot$的同伦等价，则称$C_\cdot$与$D_\cdot$是同伦等价的.

Lemma 7. 设$\alpha, \beta: C_\cdot \to D_\cdot$的两个同伦的态射，则

$$\alpha_* = \beta_* : H_p(C_\cdot) \to H_p(D_\cdot), \quad \forall p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

证明：$(\partial'\circ K + K\circ\partial = \beta - \alpha)$.

要证：$\alpha_* = \beta_*: H_p(C_\cdot) \to H_p(D_\cdot)$.

$\forall\ \bar{x} \in H_p(C_\cdot)$，设 $\bar{x}$ 是由 $x \in C_p$ 代表的.

$$\alpha_*(\bar{x}) \overset{?}{=} \beta_*(\bar{x})$$

要看：$\underbrace{\beta_*(\bar{x}) - \alpha_*(\bar{x})}_{\shortparallel} \overset{?}{=} 0$.

$$\overline{\beta(x)-\alpha(x)} = \overline{\partial'(K(x)) + \underbrace{K(\underbrace{\partial(x)}_{=0})}_{=0}}$$

$$= \overline{\partial'(K(x))} = \bar{0}. \quad \#$$

推论. 若 $C_\cdot$ 与 $D_\cdot$ 是同伦等价的，则 $H_p(C_\cdot) \cong H_p(D_\cdot)$, $\forall p$.

证明：设 $u: C_\cdot \to D_\cdot$, $v: D_\cdot \to C_\cdot$. $u\circ v \sim 1_{D_\cdot}$, $v\circ u \sim 1_{C_\cdot}$,

$$\Rightarrow \underbrace{(u\circ v)_*}_{u_*\circ v_*} = (1_{D_\cdot})_* = Id, \quad \underbrace{(v\circ u)_*}_{u_*\circ v_*} = (1_{C_\cdot})_* = Id.$$

$\Rightarrow u_*: H_p(C_\cdot) \to H_p(D_\cdot)$ 为一个~~群~~同构，$\forall p$. #

同伦拓扑：

命题7. 设 X, Y 为 top. sp. $f, g: X \to Y$ 为 conti. maps.

则："$f \simeq g$" $\Longrightarrow$ "$f_* = g_*: H_n(X) \to H_n(Y), \forall n \in \mathbb{Z}$".

证明：由 Lemma 7，只需证：

$f_\#: S_\cdot(X) \to S_\cdot(Y)$
$g_\#: S_\cdot(X) \to S_\cdot(Y)$. 是同伦的，

即只需构造 $P: S_n(X) \to S_{n+1}(Y), \forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，使

P 给出了从 $f_\#$ 到 $g_\#$ 的一个链同伦.

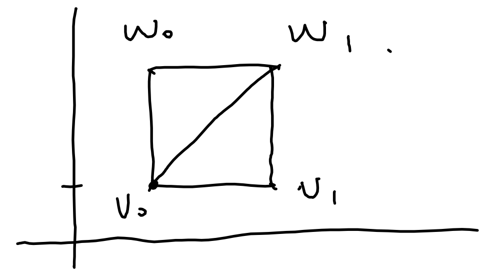
(P: prism operator).

最主要的构造：分割 $\Delta_n \times [0,1]$ 为 $(n+1)$ 个 $(n+1)$-单形.

记号：$\Delta_n = \langle P_0, P_1, \cdots, P_n \rangle$. $\quad P_i = (0, \cdots, \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-th}}}{1}, \cdots, 0)$.

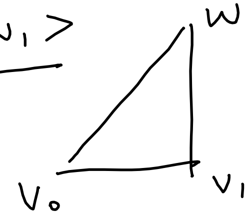
$v_i = (P_i, 0)$, $w_i = (P_i, 1)$.

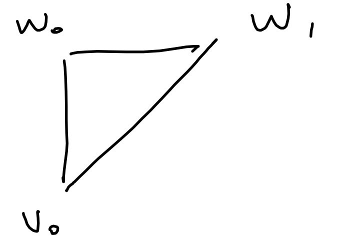
例: $n=1$, $\Delta_1 \times [0,1]$.



⇝ 分割成了 2 个 2-simplexes:

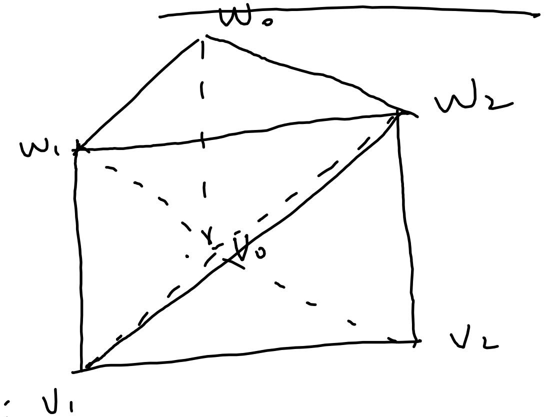
$\langle v_0, v_1, w_1 \rangle$



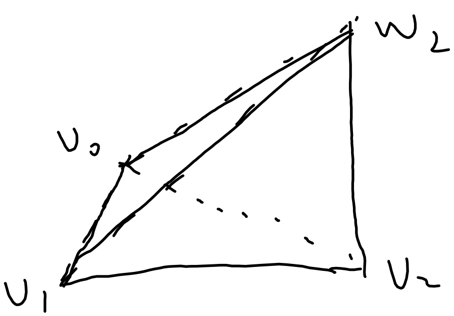


$\langle v_0, w_0, w_1 \rangle$.

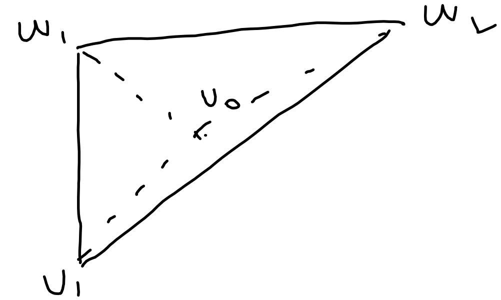
$n=2$, $\Delta_2 \times [0,1]$.



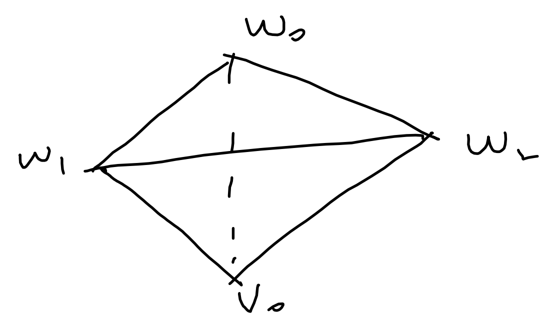
⇝ 分割成了 3 个 3-simplexes:



$\langle v_0, v_1, v_2, w_2 \rangle$



$\langle v_0, v_1, w_1, w_2 \rangle$



$\langle v_0, w_0, w_1, w_2 \rangle$

一般地，可把 $\Delta_n \times [0,1]$ 分割为 $(n+1)$ 个 $(n+1)$-simplexes：

$\langle v_0, \cdots, v_n, w_n \rangle$，$\langle v_0, \cdots, v_{n-1}, w_{n-1}, w_n \rangle$，$\cdots$，$\langle v_0, \cdots, v_i, w_i, \cdots, w_n \rangle$，

$\cdots$，$\langle v_0, w_0, w_1, \cdots, w_n \rangle$

（详见 Hatcher, Algebraic Topology）

设 $f \underset{F}{\simeq} g$，$F: X \times I \to Y$，$F_0 = f$，$F_1 = g$.

定义 $P: S_n(X) \to S_{n+1}(Y)$. by：

规定：$\forall \sigma: \Delta_n \to X$，$P(\sigma) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i F \circ (\sigma \times 1_{[0,1]}) \Big|_{\langle v_0, \cdots, v_i, w_i, \cdots, w_n \rangle}$.

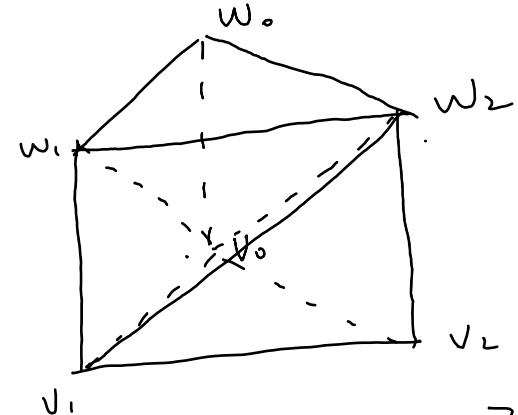
「 $\Delta_n \times [0,1] \xrightarrow{\sigma \times 1_{[0,1]}} X \times [0,1] \xrightarrow{F} Y$

还做了等同：$\Delta_{n+1} \longrightarrow \langle v_0, \cdots, v_i, w_i, \cdots, w_n \rangle$

$\sum_{i=0}^{n+1} t_i P_i \longmapsto t_0 v_0 + \cdots + t_i v_i + t_{i+1} w_i + \cdots + t_{n+1} w_n$ 」

「解释 $(-1)^i$：

$n=2$ ： $\sigma : \Delta_2 \longrightarrow X$.



$\sigma : \langle p_0, p_1, p_2 \rangle \longrightarrow X$

$\partial\sigma : \sigma|_{\langle p_1, p_2\rangle} - \sigma|_{\langle p_0, p_2\rangle} + \sigma|_{\langle p_0, p_1\rangle}$.

$$P(\sigma) = F_0(\sigma \times 1_{[0,1]})\Big|_{\langle v_0, w_0, w_1, w_2\rangle} - F_0(\sigma \times 1_{[0,1]})\Big|_{\langle v_0, v_1, w_1, w_2\rangle} + F_0(\sigma \times 1_{[0,1]})\Big|_{\langle v_0, v_1, v_2, w_2\rangle}.$$

$\partial_0 P(\sigma)$ 为 X 上的一个奇异 2-链.

$$\partial(P(\sigma)) = F_0(\sigma \times 1_{[0,1]})\Big|_{\langle w_0, w_1, w_2\rangle} - F_0(\sigma \times 1_{[0,1]})\Big|_{\langle v_0, w_1, w_2\rangle} + F_0(\sigma \times 1_{[0,1]})\Big|_{\langle v_0, w_0, w_2\rangle}$$

$$- F_0(\sigma \times 1_{[0,1]})\Big|_{\langle v_0, w_0, w_1\rangle}. - \Big(\overset{4\text{项}}{\cdots} \Big)$$

$$+ \Big(\overset{4\text{项}}{\cdots} \Big)$$

$F_0(\sigma \times 1_{[0,1]})\Big|_{\langle v_0, v_1, w_2\rangle}$ 前的系数： $-1+1=0$.

$F_0(\sigma \times 1_{[0,1]})\Big|_{\langle v_0, w_1, w_2\rangle}$ $\cdots\cdots$ ： $-1+1=0$.
」

下证：P 为链同伦，i.e.

$$\partial' \circ P + P \circ \partial = g_\# - f_\# .$$

即证：$\forall$ singular n-simplex $\sigma: \Delta_n \to X$,

$$\partial'(P(\sigma)) + P(\partial(\sigma)) = g\circ\sigma - f\circ\sigma .$$

移项 $\longrightarrow$ $\underbrace{\partial'(P(\sigma))}_{\text{定义在 } \Delta_n\times[0,1] \text{ 的边界上的侧面}} = \underbrace{g\circ\sigma}_{\text{定义在顶上}} - \underbrace{f\circ\sigma}_{\text{定义在底上}} - \underbrace{P(\partial(\sigma))}_{\text{定义在侧面上}}$.

$$g\circ\sigma = F\circ(\sigma\times 1_{[0,1]})\big|_{\Delta_n\times\{1\}} .$$

$$\left(\begin{array}{ccccccccc} & & & & \Delta_n\times[0,1] & \xrightarrow{\sigma\times 1_{[0,1]}} & X\times[0,1] & \xrightarrow{F} & Y \\ \Delta_n & \longrightarrow & \Delta_n\times\{1\} & \hookrightarrow & & & (\sigma(x),1) & \longmapsto & g\circ\sigma(x) \\ & & & & (x,1) & \longmapsto & & & \\ x & \longmapsto & (x,1) & \longmapsto & & & & & \end{array}\right).$$

$$\partial'(P(\sigma)) = \partial'\left(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i F\circ(\sigma\times 1_{[0,1]})\big|_{\langle v_0,\cdots,v_i,w_i,\cdots,w_n\rangle}\right).$$

$$= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\left[\sum_{j\le i}(-1)^j F\circ(\sigma\times 1_{[0,1]})\big|_{\langle v_0,\cdots,\hat{v}_j,\cdots,v_i,w_i,\cdots,w_n\rangle}\right.$$

$$+ \sum_{j \geq i} (-1)^{j+1} F\circ(\sigma \times 1_{[0,1]})\Big|_{\langle v_0, \cdots, v_i, w_i, \cdots, \hat{w}_j, \cdots, w_n \rangle} \Big]$$

$$= \sum_{j \leq i} (-1)^{i+j} F\circ(\sigma \times 1_{[0,1]})\Big|_{\langle v_0, \cdots, \hat{v}_j, \cdots, v_i, w_i, \cdots, w_n \rangle}$$

$$+ \sum_{j \geq i} (-1)^{i+j+1} F\circ(\sigma \times 1_{[0,1]})\Big|_{\langle v_0, \cdots, v_i, w_i, \cdots, \hat{w}_j, \cdots, w_n \rangle}.$$

$$= [\,i=j \text{ 的部分}\,] + [\,i \neq j \text{ 的部分}\,].$$

[$i=j$ 的部分]:

$$\sum_{i=0}^{n} \underbrace{F\circ(\sigma \times 1_{[0,1]})\Big|_{\langle v_0, \cdots, v_{i-1}, w_i, \cdots, w_n \rangle}}_{a_i} - \sum_{i=0}^{n} \underbrace{F\circ(\sigma \times 1_{[0,1]})\Big|_{\langle v_0, \cdots, v_i, w_{i+1}, \cdots, w_n \rangle}}_{b_i}$$

(注意 $a_{i+1} = b_i$)

$$= a_0 + \underline{(a_1 - b_0) + (a_2 - b_1) + \cdots + (a_n - b_{n-1})} - b_n = a_0 - b_n.$$

$$= F\circ(\sigma\times 1_{[0,1]})\big|_{\langle w_0,\cdots,w_n\rangle} - F\circ(\sigma\times 1_{[0,1]})\big|_{\langle v_0,\cdots,v_n\rangle}.$$

$$= g\circ\sigma - f\circ\sigma. \qquad \begin{pmatrix} w_i = (p_i, 1) \\ v_i = (p_i, 0) \end{pmatrix}$$

$$= g_\#(\sigma) - f_\#(\sigma).$$

[$i\neq j$的部分].

$$\sum_{j<i}(-1)^{i+j} F\circ(\sigma\times 1_{[0,1]})\big|_{\langle v_0,\cdots,\hat{v}_j,\cdots,v_i,w_i,\cdots,w_n\rangle}$$

$$+\sum_{j>i}(-1)^{i+j+1} F\circ(\sigma\times 1_{[0,1]})\big|_{\langle v_0,\cdots,v_i,w_i,\cdots,\hat{w}_j,\cdots,w_n\rangle}.$$

其期望它 $= -P\circ\partial(\sigma)$.

算 $P\circ\partial(\sigma)$:

(問42: $\forall \sigma : \langle p_0, \dots, p_n \rangle \longrightarrow X$.

$v_i = (p_i, 0)$

$w_i = (p_i, 1)$

$$P(\sigma) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i F \circ (\sigma \times 1_{[0,1]}) \Big|_{\langle v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n \rangle}.$$
)

$$\partial(\sigma) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma \Big|_{\langle p_0, \dots, \hat{p}_i, \dots, p_n \rangle}$$

$$P(\partial(\sigma)) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j P\left(\sigma \Big|_{\langle p_0, \dots, \hat{p}_j, \dots, p_n \rangle}\right).$$

$$= \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \Bigg(\sum_{i<j} (-1)^i F \circ (\sigma \times 1_{[0,1]}) \Big|_{\langle v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, \hat{w}_j, \dots, w_n \rangle}$$

$$+ \sum_{i>j} (-1)^{i+1} F \circ (\sigma \times 1_{[0,1]}) \Big|_{\langle v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n \rangle} \Bigg)$$

$$= \sum_{i<j} (-1)^{i+j} F \circ (\sigma \times 1_{[0,1]}) \Big|_{\langle v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, \hat{w}_j, \dots, w_n \rangle}$$

$$+ \sum_{i>j} (-1)^{i+j+1} F \circ (\sigma \times 1_{[0,1]}) \Big|_{\langle v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n \rangle}.$$

$\therefore$ [$i \neq j$ の部分] $= -P(\partial(\sigma))$.

$\therefore \ \partial' \circ P + P \circ \partial = g_\# - f_\#$. #

推论：设 X，Y 为 top. spaces，$X \simeq Y$，则

$$H_p(X) \cong H_p(Y) \quad \forall p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

证明：设 $u: X \to Y$，$v: Y \to X$．$u \circ v \simeq 1_Y$，$v \circ u \simeq 1_X$．

$$\underset{\substack{\parallel \\ u_* \circ v_*}}{(u \circ v)_*} = (1_Y)_* = Id$$

类似地：$v_* \circ u_* = Id$．

$\Rightarrow u_* : H_p(X) \longrightarrow H_p(Y)$ 为同构． #

例．$B^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| \leq 1\}$．$B^n \simeq pt$．

$$\Rightarrow H_p(B^n) \cong \begin{cases} 0, & \text{if } p > 0 \\ \mathbb{Z}, & \text{if } p = 0 \end{cases}$$