§14. Euler-Poincaré 公式.

目标：解释并推广关于多面体的欧拉公式.

推广

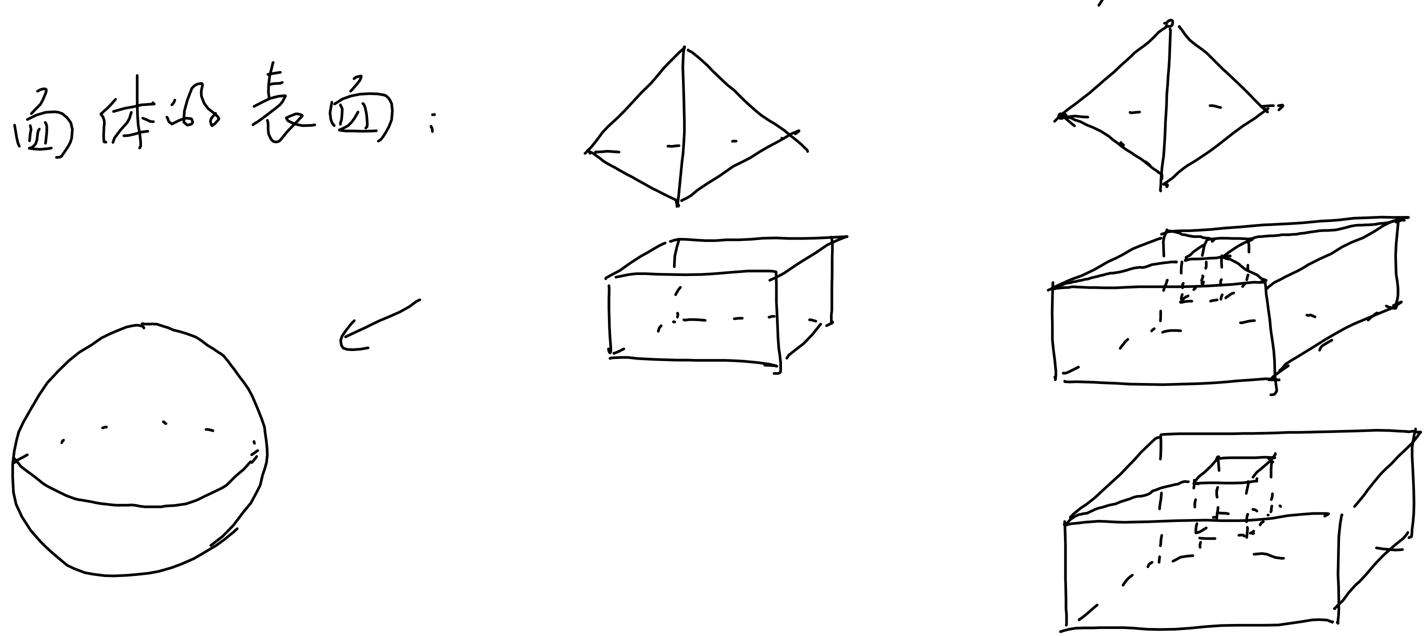
有限CW复形

n：称为X的维数.

设X为一个有限CW复形 (i.e. $X=X^n$, $X^n\setminus X^{n-1}\neq\phi$,

且 $\forall\, 0\leq k\leq n$, X的k-胞腔有有限个)

例：多面体的表面：



定义：设 X 为有限CW复形 $(\dim X = n)$，$\forall\, 0\le k\le n$，

记 c_k 为 X 中的 k 胞腔的个数，定义：

$$\chi(X) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k c_k ,$$

称为 X 的欧拉示性数。

Rmk. $\chi(X)$ 只依赖于 X 的 underlying topological space.

更强的：$\underline{\chi(X)\text{ 只依赖于 } X \text{ 的伦型}}$.

定理（Euler-Poincaré公式）设 X 为有限CW复形，$\dim X = n$，

则：$$\chi(X) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \operatorname{rank} \underbrace{H_k(X)}_{\text{有限生成Abel群}}$$ （同伦不变量）

「X 的胞腔同调群：

$$0 \to \mathbb{Z}^{c_n} \xrightarrow{d_n} \cdots \to \mathbb{Z}^{c_k} \xrightarrow{d_k} \mathbb{Z}^{c_{k-1}} \to \cdots \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z}^{c_0} \to 0$$

」

推论：设 X 为 $\dim=2$ 的有限 CW 复形，设 X 同伦等价于 $H(g)$，则 $\chi(X)=2-2g = 1-2g+1$ $= \chi(H(g)) = \operatorname{rank} H_0(H(g)) - \operatorname{rank} H_1(H(g)) + \operatorname{rank} H_2(H(g))$.

Euler-Poincaré 公式之证明：

注意：$H_k^{CW}(X)$ 为下面链复形（记为 $K_\cdot$）的同调群：

$$0 \to \mathbb{Z}^{c_n} \xrightarrow{d_n} \cdots \to \mathbb{Z}^{c_k} \xrightarrow{d_k} \mathbb{Z}^{c_{k-1}} \to \cdots \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z}^{c_0} \to 0$$

要证：
$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \operatorname{rank}(\mathbb{Z}^{c_k}) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \operatorname{rank} H_k(K_\cdot)$$

我们证更一般地结论：

(*) 设 $\underbrace{0 \to K_n \xrightarrow{d_n} K_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \to K_0 \xrightarrow{d_0} 0}$（记为 $K_\cdot$）为一个链复形，且 $\forall\, 0\le i\le n$，K_i 为有限生成 Abel 群，则：

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i \operatorname{rank} K_i = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \operatorname{rank} H_i(K_\bullet)$$

为证 (*)，将 $K_\bullet$ "分割"为短正合列：

记 $Z_i = \ker(K_i \xrightarrow{d_i} K_{i-1})$，

$B_i = \operatorname{Im}(K_{i+1} \xrightarrow{d_{i+1}} K_i)$.

则 $0 \to Z_i \hookrightarrow K_i \to B_{i-1} \to 0$ 为短正合列. $\forall\, 0 \leq i \leq n$

（规定：$B_{-1} = 0$）

$0 \to B_i \hookrightarrow Z_i \to H_i(K_\bullet) \to 0$ $\forall\, 0 \leq i \leq n$

（规定：$B_n = 0$）

「Lemma：设 $0 \to A \to B \to C \to 0$ 为有限生成Abel群的短正合列，则 $\operatorname{rank}(B) = \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(C)$

pf 1：留作练习.

Pf 2. 「设 B 为一个 $\mathbb{Z}$-模，则 B torsion free $\Leftrightarrow$ B flat

(Def. 设 A 为一个交换环，M 为 A-模，M 称为 flat 的，若 $\forall$ A-模的短正合列：

$$0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$$

有短正合列：

$$0 \to M_1 \otimes_A M \to M_2 \otimes_A M \to M_3 \otimes_A M \to 0.$$

」)

$\mathbb{Q}$: $\mathbb{Z}$-模. (torsion free $\Rightarrow$ flat).

有短正合列：

$$0 \to \underbrace{A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}}_{\substack{\cong \\ \mathbb{Q}^{\operatorname{rank} A}}} \to \underbrace{B \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}}_{\substack{\cong \\ \mathbb{Q}^{\operatorname{rank} B}}} \to \underbrace{C \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}}_{\substack{\cong \\ \mathbb{Q}^{\operatorname{rank} C}}} \to 0$$

线代 $\Rightarrow$ $\operatorname{rank} B = \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} C$. #.

Weibel. Introduction to Homological Algebra.

」

$$\operatorname{rank} K_i = \operatorname{rank} Z_i + \operatorname{rank} B_{i-1}$$

$$\operatorname{rank} Z_i = \operatorname{rank} B_i + \operatorname{rank} H_i(K_\cdot).$$

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \left(\operatorname{rank} K_i - \operatorname{rank} H_i(K) \right) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \left(\cancel{\operatorname{rank} Z_i} + \operatorname{rank} B_{i-1} - \cancel{\operatorname{rank} Z_i} + \operatorname{rank} B_i \right),$$

$$= -\sum_{i=0}^{n} (-1)^{i-1} \operatorname{rank} B_{i-1} + \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \operatorname{rank} B_i \,. = 0 \qquad \#.$$