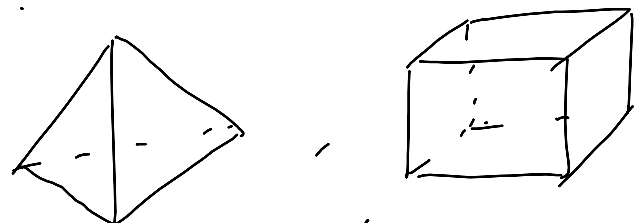
点集拓扑 + 代数拓扑.

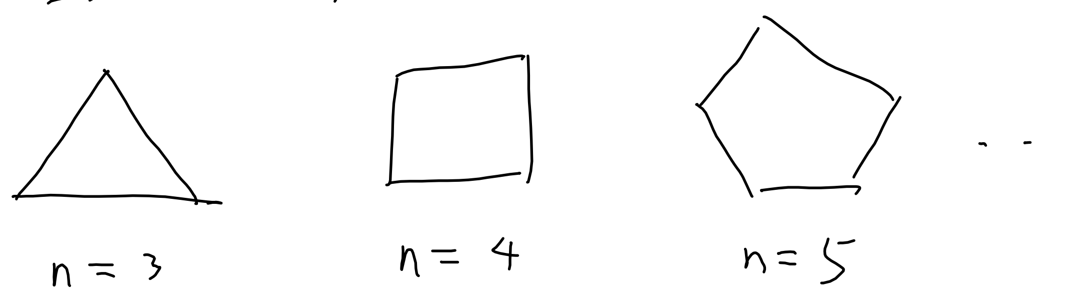
1/3 2/3.

Introduction

1) 欧拉定理:

多面体: 

多面体: 由若干个多边形沿着边粘起来的一个封闭的表面所包围的立体.

n-边形: 

设 X 为多面体, 记: e = X的棱数 (edge)

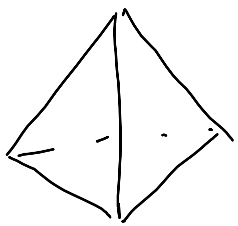
f = X的面数 (face)

v = X的顶点数 (vertex).

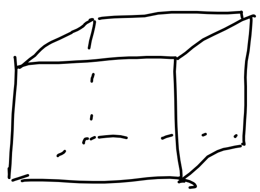
欧拉定理（弱的版本）：对于一个凸的多面体，$v-e+f=2$.

多面体X称为凸的，若：

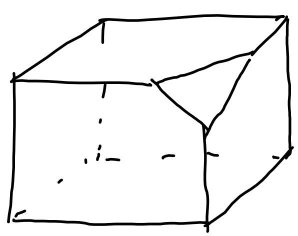
$\forall p, q \in X$，p与q的连线段包含在X中.

例1. 

$v=4$
$e=6$
$f=4$，$v-e+f=2$.

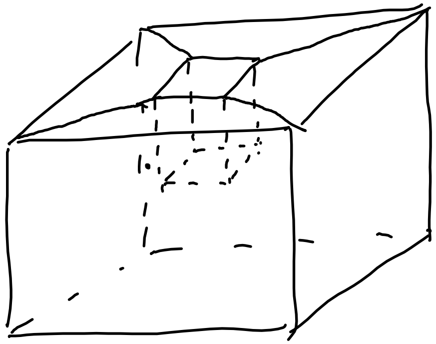
例2 

$v=8$
$e=12$
$f=6$，$v-e+f=2$.

例3. 

$v=8+2$
$e=12+3$
$f=6+1$，$v-e+f=2$.

例4.

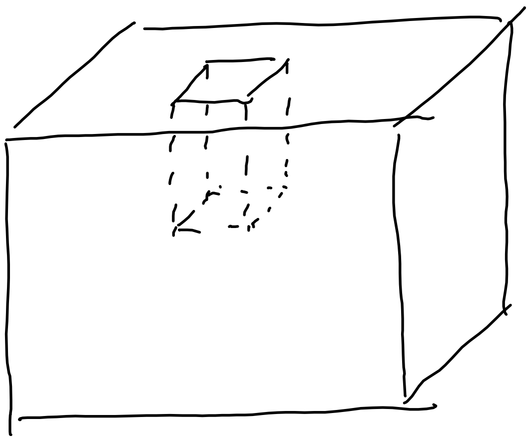


$v = 8+8$

$e = 12+12+4$, $v-e+f = 2+0$

$f = 6+3+5$ $= 2$.

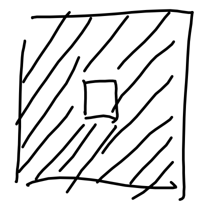
Remark.



$v = 8+8$

$e = 12+12$, $v-e+f = 2+1 = 3$.

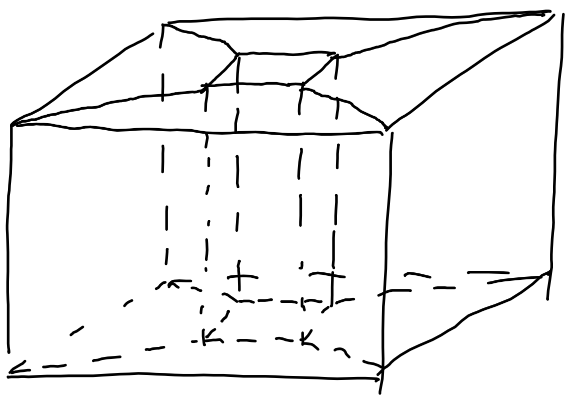
$f = 6+5$



—不是n-边形.

问题出在：它不是一个多面体.

例5.



$v = 16$

$e = 32$, $v-e+f = 0$.

$f = 4\times 4 = 6$

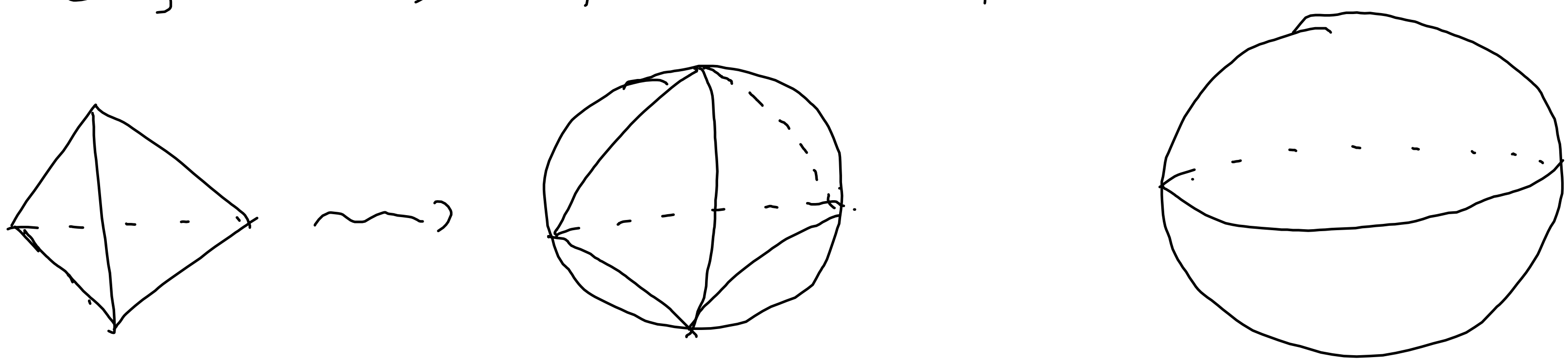
自然的问题：

1) 例1－例4的形状不同，但为何 $v-e+f$ 相等？

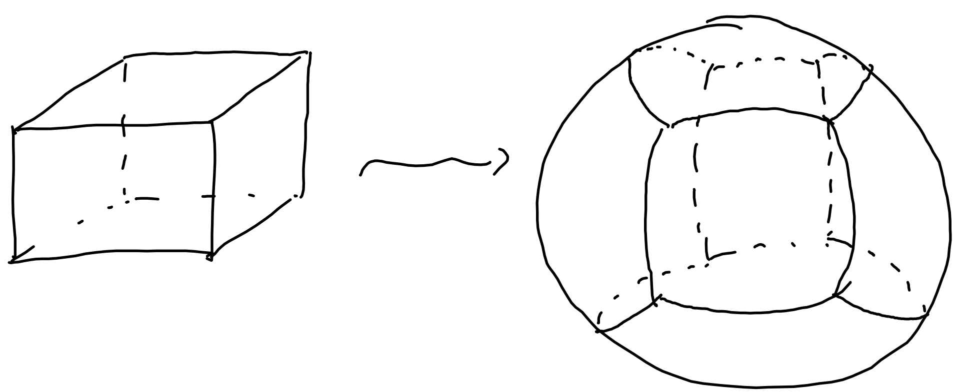
2) 例5与例1－4有何本质上的不同，使 $v-e+f$ 不同？

解答：1) $v-e+f=2$ 的多面体的表面均可连续变化为球面.

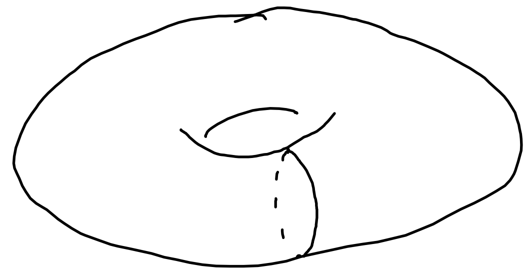
例1.



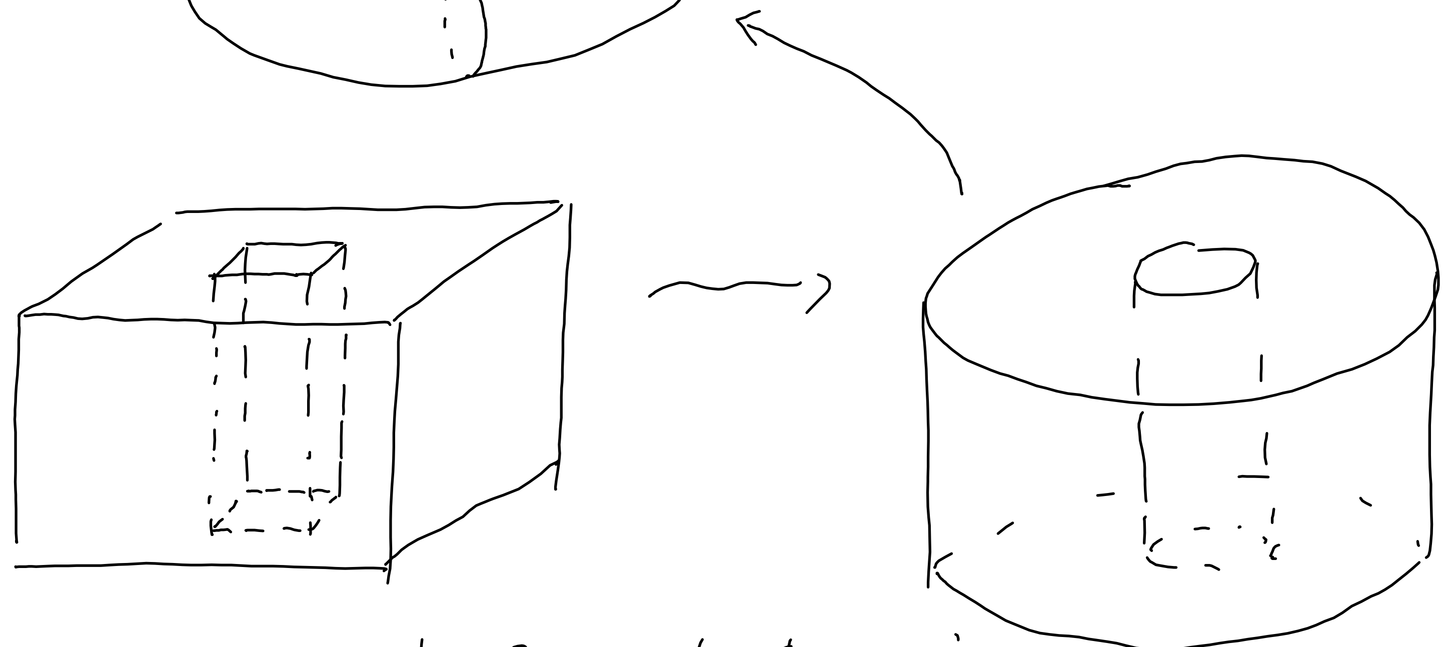
例2.



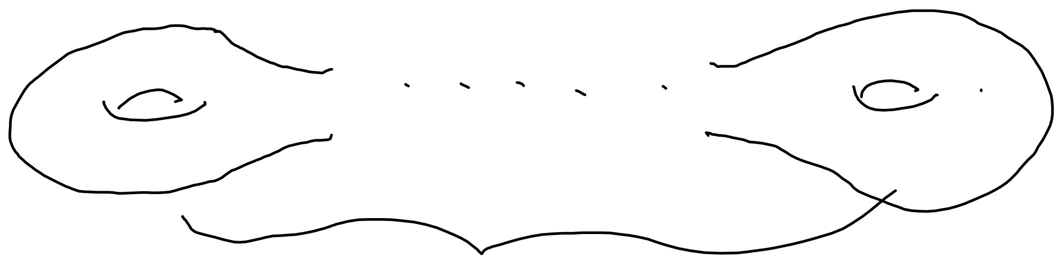
2). $v-e+f=0$ 的多面体的表面能连续地变化为轮胎面。



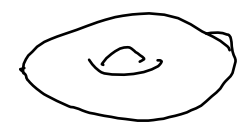
例5.

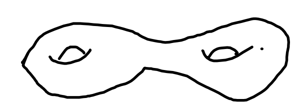


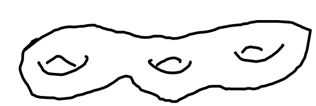
Remark. 设多面体X的表面可连续地变化为:



$g=0$: 

$g=1$: 

$g=2$: 

$g=3$: 

则 X 的 $v-e+f=2-2g$.　(g: 亏格).

总结：对于多面体：$v-e+f$ 的取值只与多面体所能连续变化为的曲面的亏格有关.
的表面
而与多面体的具体形状无关.

2) 闭形式与恰当形式.

($n=2$ 的情形).　$\Omega \underset{\text{区域}}{\subset} \mathbb{R}^2$,　w 为 Ω 上的 1-形式.

$$w = P(x,y)dx + Q(x,y)dy,$$

P, Q 为 Ω 上光滑函数.

定义 $dw = dP\wedge dx + dQ\wedge dy$.

$$= \left(\frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy\right)\wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy\right)\wedge dy$$

$$= \frac{\partial Q}{\partial x}dx\wedge dy - \frac{\partial P}{\partial y}dx\wedge dy.$$

$$= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\wedge dy,$$

若 $dw=0$, i.e. $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$. 则称 w 为一个闭 (closed form) 的 1-形式.

定义：设 $f:\Omega\to\mathbb{R}$, 光滑函数,

$$df := \frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

(exact form)

定义：设 w 为 Ω 上的 1-形式, 称 w 为一个恰当形式, 若 $w=df$, 对某个 $f\in C^\infty(\Omega)$.

结论：恰当形式必为闭形式.

「If $w=df$, $dw=d\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy\right)$

$$=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right)dx\wedge dy=0$$ 」

问题：闭形式是否为恰当形式?

解答：若 Ω 是单连通的，则闭形式必为恰当形式。

「If $d\omega = 0$，固定 $(x_0, y_0) \in \Omega$，

令 $f(x,y) = \displaystyle\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \omega$，微分 $\Rightarrow df = \omega$.」

若 Ω 不是单连通的，则不一定。

$$\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

$$\omega = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$$

$$d\omega = \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) \right) dx \wedge dy.$$

$$= \frac{(x^2+y^2 - x\cdot 2x) + (x^2+y^2 - y\cdot 2y)}{(x^2+y^2)^2}\, dx \wedge dy.$$

$$= 0. \Rightarrow \omega \text{ 闭形式}$$

但是 ω 一定不是恰当形式.

「反证：若 $w = df$. for some $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$

$$\oint_{\substack{x^2+y^2=1 \\ \text{逆时针}}} w = \oint \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}.$$

$$\xlongequal[y=\sin t]{x=\cos t} \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

$$\oint df = \oint \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

$$\xlongequal[y=y(t)]{x=x(t)} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))\, x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))\, y'(t) \right) dt.$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{d}{dt} f(x(t), y(t))\, dt.$$

$$= f(x(2\pi), y(2\pi)) - f(x(0), y(0)) = 0.$$

矛盾. 」

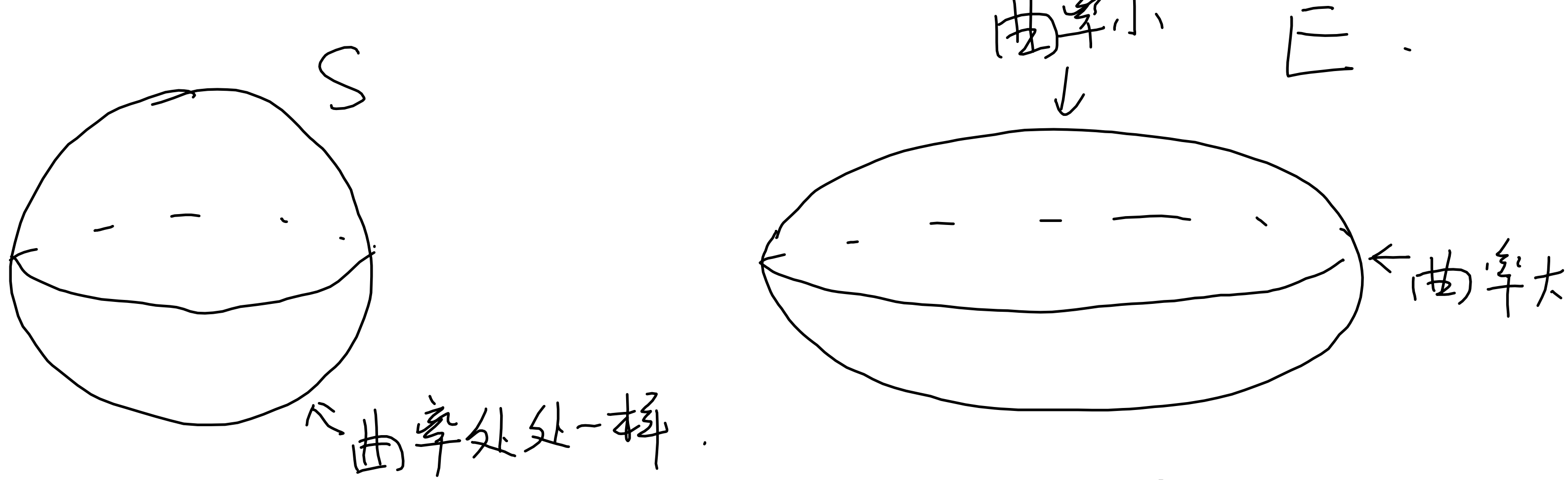
总结：闭形式是否为恰当形式依赖于定义域是否为单连通.

拓扑：忘掉具体的形状信息，研究更本质的空间结构.

几何：研究形状的学问.

(狭义)

例：



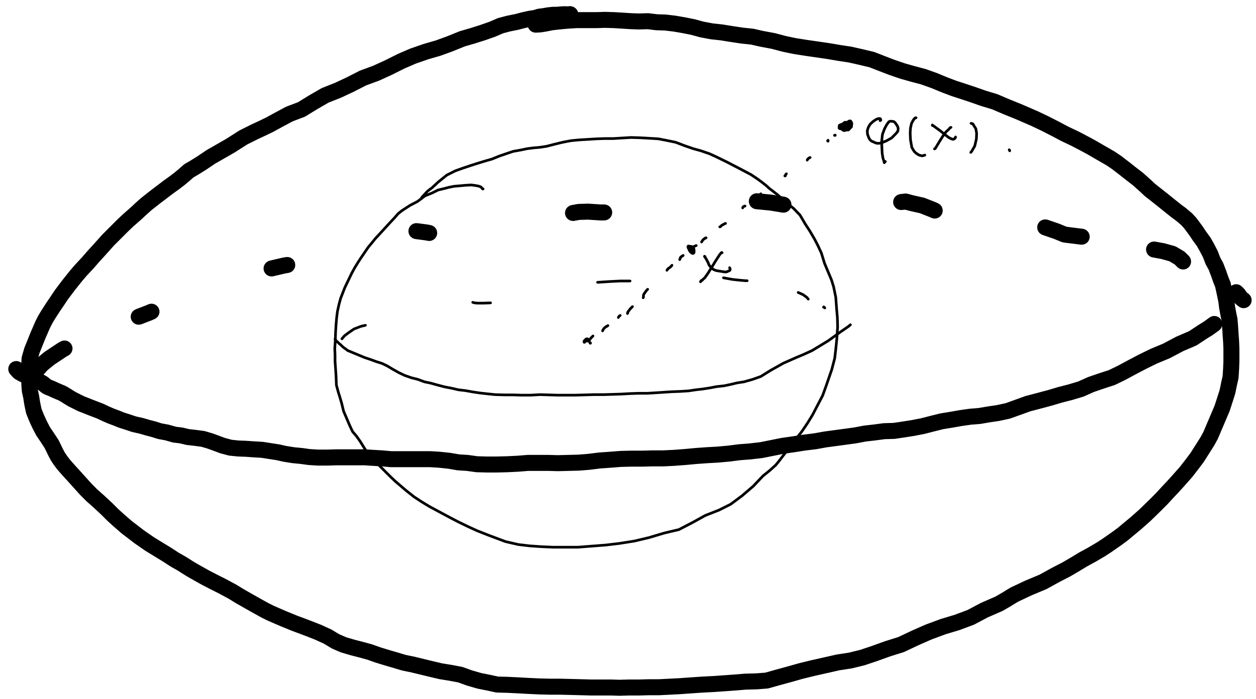
几何上看：S 与 E 不一样.

拓扑上看：一样！

术语：同胚.

同胚： $\varphi: S \longrightarrow E$

连续双射，且逆映射也连续．．



拓扑学的终极目标：

分类互不同胚的空间

重要的方法：拓扑不变量（topological invariant）．
（可以是数，群，环，etc.）

拓扑不变量：

设对 $\forall$ 空间 X 定义了一个量 $\mu(X)$，若 μ 满足：

只要 X 与 Y 同胚，则 $\mu(X)=\mu(Y)$.

则称 μ 为一个拓扑不变量.

怎么用？

若 μ 为一个拓扑不变量，X、Y 满足 $\mu(X)\neq\mu(Y)$，

则 X 必与 Y 不同胚.

拓扑不变量的例子： $v-e+f$（欧拉示性数）

Euler characteristic.

同胚：$\varphi: X \to Y$ 称为同胚的，若 φ 为双射，

φ 连续，φ^{-1} 连续

先要搞清楚：① 何为（拓扑）空间？

② 什么叫（拓扑）空间之间的连续映射！

$B(x_0;r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| < r\}$.

回顾微积分.

$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \quad x \mapsto f(x)$, $\quad x = (x^1, \cdots, x^n)$

$f(x) = y = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^m \end{pmatrix}$.

f 称为在 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 处连续，若：$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, s.t.

$\forall x \in \mathbb{R}^n$, 若 $\|x - x_0\| < \delta$, 则 $\|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$.

$f(B(x_0;\delta)) \subset B(f(x_0), \varepsilon)$.

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 称为连续函数, if $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$, f 在 x_0 处连续.

回顾 $\mathbb{R}^n$ 中的开集:

$U \subset \mathbb{R}^n$ 称为 $\mathbb{R}^n$ 中开集, if $\forall x \in U$, $\exists \delta > 0$, s.t.

$B(x;\delta) \subset U$.

设 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 连续, $\forall U \underset{open}{\subset} \mathbb{R}^m$, 考察 $f^{-1}(U)$:

$\forall x_0 \in f^{-1}(U)$, $f(x_0) \in U$. $\exists \varepsilon > 0$, s.t. $B(f(x_0);\varepsilon) \subset U$

f 在 x_0 处连续, $\exists \delta > 0$, s.t. $f(B(x_0;\delta)) \subset B(f(x_0);\varepsilon)$.

$\Rightarrow B(x_0;\delta) \subset f^{-1}(B(f(x_0);\varepsilon)) \subset f^{-1}(U)$.

$\Rightarrow f^{-1}(U)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中开集.

小结: f 连续 $\Rightarrow$ 开集原像为开集.

反过来：若 $\forall U \underset{open}{\subset} \mathbb{R}^m$，$f^{-1}(U)$ 为开集，

$\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$，要证 f 在 x_0 处连续。

$\forall \varepsilon > 0$，考虑 $B(f(x_0);\varepsilon)$，由条件 $f^{-1}(B(f(x_0);\varepsilon))$ 开。

$x_0 \in f^{-1}(B(f(x_0);\varepsilon))$，$\Rightarrow \exists \delta > 0$，s.t. $B(x_0;\delta) \subset f^{-1}(B(f(x_0);\varepsilon))$

$f(B(x_0;\delta)) \subset B(f(x_0);\varepsilon)$.

$\Rightarrow f$ 在 x_0 处连续。

结论：$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 连续 $\Longleftrightarrow$ 在 f 下，开集原像为开集。

作为连续的定义。

观察：连续映射的定义只需用到开集的概念。

2. 拓扑空间

定义1. 设 X 为一个集合，$\mathcal{T}$ 为 X 的一些子集构成的族，

满足：

① $\phi \in \mathcal{T}$，$X \in \mathcal{T}$

② $\forall U, V \in \mathcal{T}$，$U \cap V \in \mathcal{T}$

③ 设 $U_\alpha \in \mathcal{T}$，$\alpha \in I$，$\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \in \mathcal{T}$.

称 $\mathcal{T}$ 为 X 上的一个拓扑，$\mathcal{T}$ 中的元素称为 X 中的开集。这些信息，称为一个拓扑空间。

例1. $\mathbb{R}^n$，$\mathcal{T} = \{\mathbb{R}^n$ 在通常意义下的开集，$\phi\}$.

构成一个拓扑空间.

证明：① 自动满足

② 设 $U, V \underset{open}{\subseteq} \mathbb{R}^n$ 要证 $U \cap V$ 也为开集.

$\forall x_0 \in U \cap V$，$\Rightarrow x_0 \in U$ 且 $x_0 \in V$.

$x_0 \in U \Rightarrow \exists\, \delta_1 > 0$, s.t. $B(x_0;\delta_1) \subset U$.

$x_0 \in V$, $\Rightarrow \exists\, \delta_2 > 0$, s.t. $B(x_0;\delta_2) \subset V$.

取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$

$\Rightarrow B(x_0;\delta) \subset U \cap V$. $\Rightarrow U \cap V$ 为开集.

③ 设 $U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ 为一族开集, $\alpha \in I$.

要证 $\bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha$ 为开集.

$\forall\, x_0 \in \bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha$. $\Rightarrow \exists\, \alpha_0 \in I$, s.t. $x_0 \in U_{\alpha_0}$.

$\Rightarrow \exists\, \delta > 0$, s.t. $B(x_0;\delta) \subset U_{\alpha_0} \subset \bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha$.

$\Rightarrow \bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha$ 为开集

#

例2.(平凡拓扑). 设 X 为一个集合, $\mathcal{T} = \{\phi, X\}$.

$\mathcal{T}$ 显然满足 ①、②、③

例3 (离散拓扑). 设 X 为一个集合, $\mathcal{T} = \{U \mid U \subset X\}$

$\mathcal{T}$ 显然满足 ①、②、③

Rmk. 对于同一个集合，可以有不同的拓扑.

设 X 为一个集合，且满足定义 1. $\longrightarrow$ 拓扑空间.

X : underlying set

有时候也用一个字母来记一个拓扑空间，

例："设 X 为一个拓扑空间"

$\downarrow$ 意思

X 为一个集合. 我还规定了 X 中的开集为何.

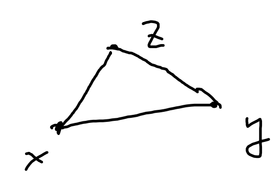
例 4.(度量空间诱导的拓扑) 设 X 为一个集合，$d: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$，

满足：

1) $d(x,y) = d(y,x)$.

2) $d(x,y) \geqslant 0$, $\forall x,y \in X$, "$=$" $\Leftrightarrow$ "$x=y$".

3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$



此时，称 (X,d) 为一个度量空间.

设 (X,d) 为一个度量空间，

定义：$U\subset X$ 为 X 的开集

$\Longleftrightarrow \forall x_0\in U$，$\exists\,\delta>0$. s.t. $\underbrace{B(x_0;\delta)}_{\substack{\| \\ \{x\in X \mid d(x,x_0)<\delta\}}}\subset U$.

$\mathcal{T}=\{U \mid U\subset X$ 为开集$\}\cup\{\phi\}$

可以证明 $\mathcal{T}$ 满足 ① ② ③

$\Rightarrow \mathcal{T}$ 给出了 X 上的一个拓扑.（度量 d 所诱导的拓扑）.

例1 为例4 的特殊情形.

例5. $X=C([a,b])$.

定义 d：$C[a,b]\times C[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ $\quad d(f,g):=\max\limits_{x\in[a,b]}|f(x)-g(x)|$

① $d(f,g)=d(g,f)$

② $d(f,g)\geq 0$ "$=$" $\Leftrightarrow \max\limits_{x\in[a,b]}|f(x)-g(x)| \Leftrightarrow$ "$f(x)=g(x)$"

③ $d(f,g)\leq d(f,h)+d(h,g)$.

$\max|f(x)-g(x)| \leq \max|f(x)-h(x)|+\max|h(x)-g(x)|$

$$|f(x)-g(x)| \leq |f(x)-h(x)|+|h(x)-g(x)|$$
$$\leq \underbrace{\max|f(x)-h(x)|+\max|h(x)-g(x)|}$$

$\Rightarrow \max|f(x)-g(x)| \leq \max|f(x)-h(x)|+\max|h(x)-g(x)|$.

$\Rightarrow$ $(C[a,b], d)$ 也是一个度量空间.

$\rightsquigarrow$ 诱导了 $C[a,b]$ 上的一个拓扑.

例6. $X=\{0,1\}$, $\mathcal{T}=\{\phi, \{0\}, \{0,1\}\}$.

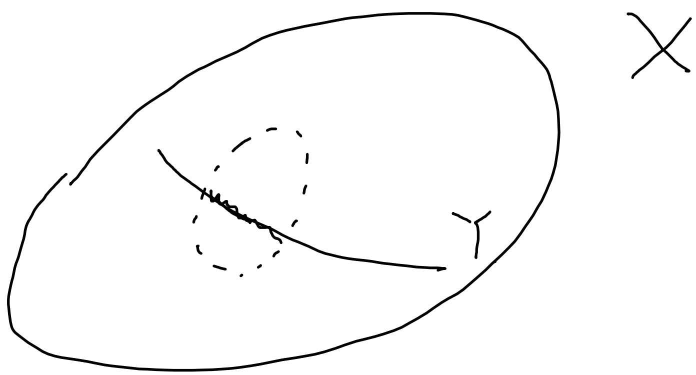
$\mathcal{T}$ 满足 ①、②、③. $X+\mathcal{T}$ ~~为~~一个拓扑空间.

更多的拓扑空间

定义2(&引理). 设 X 为一个拓扑空间, $Y \subset X$ 为 X 的一个子集, 则 Y 上可以如下定义一个拓扑结构.

$$\mathcal{T} = \{U \cap Y \mid U \underset{\text{open}}{\subset} X\}.$$

则 $\mathcal{T}$ 定义了 Y 上的一个拓扑空间结构, 此结构称为 X 在 Y 上诱导的拓扑, 或称 Y 被赋予子空间拓扑.



证明: trivial.

例7. $[0,1) \subset \mathbb{R}$ — 给通常的拓扑.

$U \subset \mathbb{R}$ 为开集

$\Longleftrightarrow$ U = 一些 $\mathbb{R}$ 中的开区间的无交并.

赋予 $[0,1)$ 子空间拓扑:

$[0,\frac{1}{2})$: 开集 $= \underbrace{(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})}_{\text{为}\mathbb{R}\text{中开集}} \cap [0,1)$

$(\frac{1}{2},1)$: 开集

$(\frac{1}{2},\frac{3}{4})$: 开集

$(0,\frac{1}{2})$: 开集.

例8. $\underbrace{S^n}_{n\text{-维球面}} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ — 赋予欧氏拓扑.

$S^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$.

例9. $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ —.

$\mathbb{R}$ 在 $\mathbb{Z}$ 上诱导的拓扑长成什么样? → 离散拓扑.

$\forall n \in \mathbb{Z}$, $\{n\} = \underbrace{(n-\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2})}_{\mathbb{R}\text{中开集}} \cap \mathbb{Z}$

定义2. 设 X 为一个拓扑空间，$F\subset X$，F 称为 X 的一个闭集，if $X\setminus F$ 为一个开集.

例10. $B(0;1)\subset\mathbb{R}^n$ 为开集

$\Rightarrow \{x\in\mathbb{R}^n \mid \|x\|\geq 1\}$ 为闭集

由定义1，立知闭集有下列性质：

设 X 为拓扑空间.

① ϕ，X 闭.

② 设 F_1, F_2 为 X 中闭集，$F_1\cup F_2$ 为闭集

$$\ulcorner\ X\setminus(F_1\cup F_2) = \underbrace{(X\setminus F_1)}_{\text{开}} \cap \underbrace{(X\setminus F_2)}_{\text{开}} \text{ 开 } \lrcorner$$

③ 设 $F_\alpha\subset X$ 为一族闭集，$\alpha\in I$，则 $\bigcap_{\alpha\in I} F_\alpha$ 为闭集.

Rmk. 开集：$\underbrace{U, V \text{ 为开集} \Rightarrow U\cap V \text{ 为开集}}$ $\Rightarrow$ 有限个开集之交为开.

「如：$U_1, U_2, U_3 \underset{\text{open}}{\subset} X$

$$U_1 \cap U_2 \cap U_3 = \underline{\underline{(U_1 \cap U_2)} \cap U_3}.$$ 」.

类似地，闭集的有限并也是闭集.

例11. $\{x_0\} \subset \mathbb{R}^n$ 为一个闭集

$\Rightarrow$ 若 $F \subset \mathbb{R}^n$ 为有限集，则 F 为闭集.

问：闭集的无限并是否一定为闭集？ ×

$B(0;1) \subset \mathbb{R}^n$

反例：$B(0;1) = \bigcup_{x \in B(0;1)} \{x\}$