上一次：用 $\mathbb{H}$ 构造

$$\begin{array}{ccc} Sp(1) \cong SU(2) & & \\ \downarrow \theta & & \text{万有 } 2:1 \text{ 覆盖.} \\ SO(3) & & \end{array}$$

一般地：$\forall n \geq 3$, $n \in \mathbb{Z}$.
用 Clifford 代数构造

$$\begin{array}{ccc} Spin(n) & & \text{万有.} \\ \downarrow & & 2:1 \text{ 覆盖.} \\ SO(n) & & \end{array}$$

$Spin(3) = Sp(1) \cong SU(2)$.

[Bröcker–Dieck]. Representation of compact Lie groups.

把拓扑群作用在拓扑空间上.

定义. 设 G 为 top group, X 为 top space. G 在 X 上的一个作用是指一个连续映射

$$G \times X \xrightarrow{\phi} X \qquad (g, x) \longmapsto g(x).$$

满足：(a) $g(h(x)) = g.h(x)$, $\forall g, h \in G$, $x \in X$

(b) $e(x) = x$, $\forall x \in X$. 其中 $e \in G$ 为恒元.

Rmk. $\forall g \in G$, 映射: $\varphi_g: X \longrightarrow X$ 为一个同胚.
$x \longmapsto g(x)$.

$$\varphi_g = \left(X \longrightarrow G \times X \xrightarrow{\psi} X \right)$$
$$x \longmapsto (g, x) \longmapsto g(x)$$

$\varphi_{g^{-1}} = (\varphi_g)^{-1}$.

$\varphi_{g^{-1}} \circ \varphi_g = \varphi_{g^{-1} \cdot g} = \varphi_e = id$.

$\varphi_g \circ \varphi_{g^{-1}} = id$.

记号: 当 G 作用在 X 上时, 记 $G \circlearrowright X$

例: G: top group, H: top subgroup of G.

$H \times G \xrightarrow{l} G$ H在G上的左平移作用
$(h, g) \longmapsto h \cdot g = h(g)$

$H \times G \xrightarrow{r} G$ ...... 右平移作用.
$(h, g) \longmapsto h(g) = g \cdot h^{-1}$

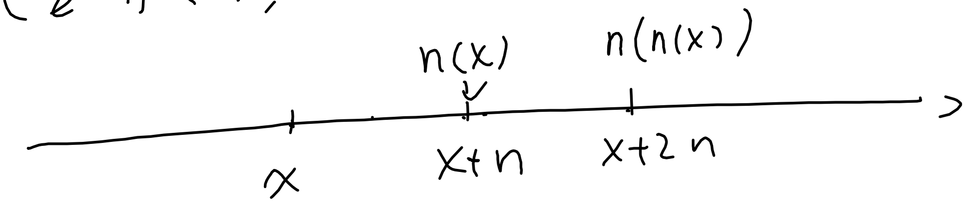
验证：r 满足 (a)(b).

(a). $\forall h_1, h_2 \in H,\ x \in G,\quad (h_1 h_2)(x) = h_1(h_2(x)).$

$$
\begin{aligned}
(h_1 h_2)(x) &= x\cdot(h_1 h_2)^{-1} = x\cdot h_2^{-1}\cdot h_1^{-1} \\
&= (x\cdot h_2^{-1})\cdot h_1^{-1} = h_2(x)\cdot h_1^{-1} = h_1(h_2(x))
\end{aligned}
$$

(b) $e \in H$ 为恒元, $\forall x \in G$, $e(x) = x\cdot e^{-1} = x$

例. $\mathbb{Z} \circlearrowright \mathbb{R}$, $n(x) := x + n$. $\forall n \in \mathbb{Z},\ x \in \mathbb{R}$ (左平移作用)



例. $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$,

$O(n) \circlearrowright S^{n-1}$, $\forall A \in O(n),\ x \in S^{n-1}$, $A(x) := A\cdot x$

如此定义的映射: $O(n) \times S^{n-1} \to S^{n-1}$

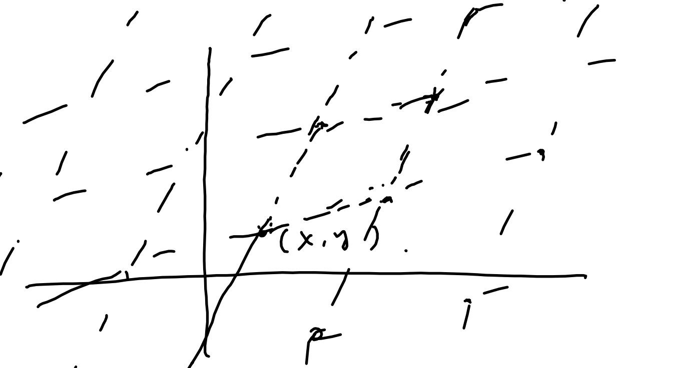
$$(A, x) \mapsto A\cdot x$$

的确为一个连续映射. (a) $A(B(x)) = A\cdot B(x)$, $\forall A, B \in O(n)$

(b) $e(x) = \underset{\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}}{e}\cdot x = x$, $\forall x \in S^{n-1}$

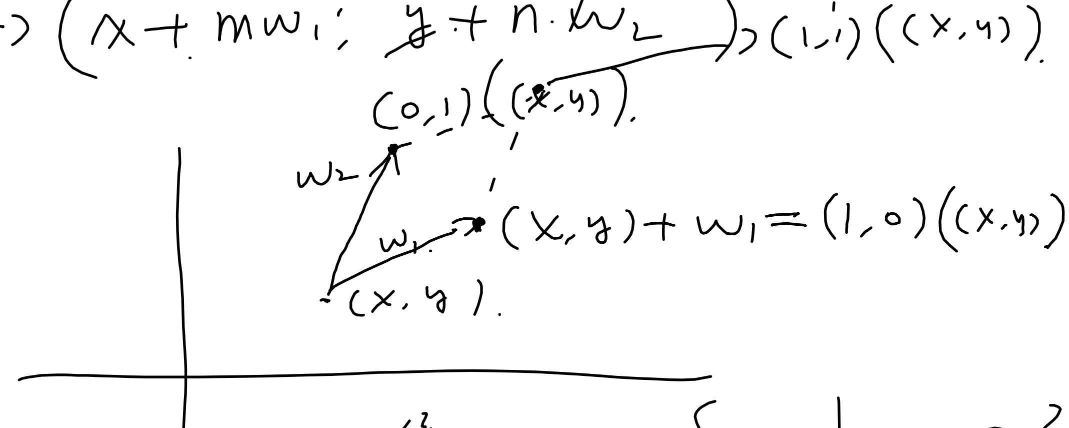
例: $\mathbb{Z}^2 (=\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}) \curvearrowright \mathbb{R}^2$.

选择 $\mathbb{R}^2$ 的一组基 $\{w_1, w_2\}$



$$\mathbb{Z}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$((m,n), (x,y)) \longmapsto (x + m w_1; y + n \cdot w_2)$$



定义 设 $G \curvearrowright X$, $\forall x \in X$, X 的子集 $Gx = \{g(x) \mid g \in G\}$

称为 x 的轨道 (orbit). $(Gx = O(x))$

Rmk. 设 $G \curvearrowright X$, 则 X 中轨道或者不相交, 或者重合.

$\vdash$ If $Gx, Gy \subset X$, 其中 $x, y \in X$,

若 $Gx \cap Gy \neq \emptyset$, $\Rightarrow \exists g \in G, h \in G$, s.t. $gx = hy$,

$\Rightarrow x = g^{-1}hy \Rightarrow Gx = G\underline{g^{-1}hy} = Gy$.

"$\subset$" trivial

"$\supset$" $\forall k(y) \in Gy$, $k(y) = \underbrace{kh^{-1}g}_{\in G}(g^{-1}h(y))$

由 Rmk. X 可表为若干条轨道之无交并 (给出了 X 的一个分割)

此分割对应了 X 上的一个等价关系 "$\sim$"

$\forall x, y \in X$, $x \sim y \iff x$ 与 y 同属一条轨道

$(\exists z \in X, \text{ s.t. } x, y \in Gz)$.

$\iff \exists g \in G, \text{ s.t. } x = g(y)$

"$\Rightarrow$" $x = g(z)$, $\underline{y = h(z)}$. $\Rightarrow z = h^{-1}(y)$.

$\Rightarrow x = g(h^{-1}(y)) = (\underline{g \cdot h^{-1}})(y)$.

"$\Leftarrow$" 取 $y = z$.

$\iff Gx = Gy$.

"$\Rightarrow$" $Gx = Gg(y) \subset Gy \subset Gx$.

"$\Leftarrow$" $x \in Gy$

$\Rightarrow \forall x \in X$. Gx 为其轨道, $\forall y \in Gx$, $Gy = Gx$. 称 y 为轨道 Gx 的一代表元

商空间 $X/\sim \ (= X/G)$ 称为群作用 $G \curvearrowright X$ 的轨道空间.

$$\forall x \in X, \quad \bar{x} = Gx.$$

例| $H \triangleleft G$, top groups. $H \curvearrowright G$ 左平移

$$h(g) = h \cdot g.$$

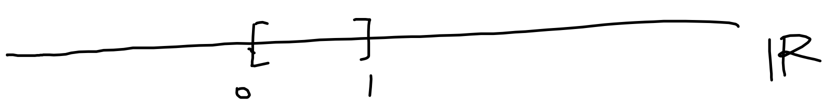
$$\begin{array}{ccc} (\text{轨道空间})\ G/H & \cong & G/H\ (\text{拓扑群的商群}) \\ \| & & \| \\ \{H \cdot g \mid g \in G\} & & \{Hg \mid g \in G\}. \end{array}$$

例| $\mathbb{Z} \curvearrowright \mathbb{R}$, $n(x) := n + x$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R}$.

$\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$. 记 $\mathbb{R} \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}/\mathbb{Z}$

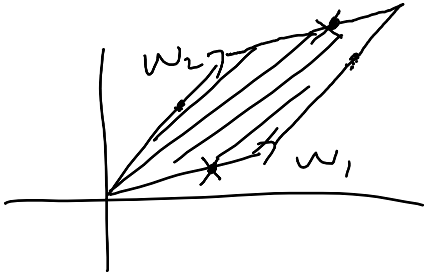
$\pi|_{[0,1]} : [0,1] \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$

紧 ↑ 满 ↑ Hausdorff.



$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong [0,1]/_{0\sim 1} \cong S^1.$$

例: $\mathbb{Z}^2 \circlearrowleft \mathbb{R}^2$, $(m,n)((x,y)) := (x+m w_1,\ y+n w_2)$



Claim: $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \cong T$.

例: $X = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{(0,0,\dots,0)\}$, $G = \mathbb{R}^*$

$\mathbb{R}^* \circlearrowleft (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{(0,\dots,0)\})$, $\lambda \cdot (x_1,\dots,x_{n+1}) := (\lambda x_1,\dots,\lambda x_{n+1})$,

$$\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{(0,\dots,0)\} \big/ \mathbb{R}^* \cong \mathbb{RP}^n.$$

例: $G = \mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\} \circlearrowleft S^n$.

$(-1)(p) = -p \quad \forall p \in S^n$.

$1(p) = p$.

$$S^n/\mathbb{Z}_2 = \mathbb{RP}^n.$$

定义. $G \curvearrowright X$，该群作用称为可迁的 (transitive)，
if $\forall\, x, y \in X$，$\exists\, g \in G$，s.t. $x = g(y)$.
（$\Longleftrightarrow$ $G \curvearrowright X$ 只有一条轨道）

例：$O(n) \curvearrowright S^{n-1}$ 是可迁.

记 $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. ← 第 i 位. $i = 1, \dots, n$.

要证 $\forall\, v \in S^{n-1}$，$\exists\, A \in O(n)$，s.t. $v = A \cdot e_1$.

$\|v\| = 1$，Schmidt 正交化 $\Longrightarrow$ 可找到 $v_2, \dots, v_n$，
s.t. $(v, v_2, \dots, v_n)$ 构成 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基.
$(e_1, \dots, e_n)$ 也构成 $\mathbb{R}^n$ . . . . . .
$\exists\, A \in GL_n(\mathbb{R})$
$(v, v_2, \dots, v_n) = A \cdot (e_1, \dots, e_n)$
$\Longrightarrow A = O(n)$，$\Longrightarrow v = A \cdot e_1$
由证明知：$SO(n) \curvearrowright S^{n-1}$ 可迁.

例. $H < G$, $H \times G \longrightarrow G$

$(h, g) \longmapsto g \cdot h^{-1} = h(g)$.

G/H：轨道空间..

$\underline{G \curvearrowright G/H}$：by：

$G \times G/H \longrightarrow G/H$.

$(g, g_1 H) \longmapsto g \cdot g_1 H$.

「well-defined：

$\forall g_2 \in G$, if $\underline{g_2 \cdot H = g_1 \cdot H}$. $\Longrightarrow g_2 = g_1 \cdot h$，对某$h \in H$成立.

$g \cdot g_2 H = g \cdot g_1 H$.

$g \cdot g_2 H = g \cdot g_1 \cdot h \cdot H = g \cdot g_1 H$.」

还需验证：① $G \times G/H \longrightarrow G/H$ 连续.

② 与G上乘法相容. (a) $\forall g_1, g_2 \in G$, $g_1 g_2 (g_3 H) = g_1(g_2(g_3 H))$

(b) $e(gH) = gH$ 显然!

有交换图表.

$$\begin{tikzcd} G\times G \arrow[r, "m"] \arrow[d, "Id_G\times\pi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & G \arrow[d, "\pi"] \\ G\times G/H \arrow[r, "\psi"] & G/H \end{tikzcd}$$

Claim: π 为一个开映射.

$\Longrightarrow$ $Id_G\times\pi$ 为一个开映射.

要证 ψ 连续, 只需证: $\forall\, U \underset{open}{\subset} G/H$, $\psi^{-1}(U)$ 开.

$\Longleftarrow$ $(Id_G\times\pi)^{-1}(\psi^{-1}(U))$ 开.

$\Longleftarrow$ $\underbrace{m^{-1}(\pi^{-1}(U))\text{ 开}}_{\text{显然}}$.

由Lemma之得:

Lemma. $G \curvearrowright X$, 则 $X \xrightarrow{\pi} X/G$ 为一个开映射.

pf. $\forall\, U \underset{open}{\subset} X$, 要证 $\pi(U)$ 开 $\Longleftarrow$ $\pi^{-1}(\pi(U))$ 开

$\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{g\in G} gU$ #

② 也显然, 综上: $G \curvearrowright G/H$ 为一个拓扑群作用.

$G \curvearrowright G/H$ 为一个可迁的群作用.

$\uparrow$ $H \curvearrowright G$ 的轨道

$\uparrow$ 右平移

$\forall\ g_1H,\ g_2H \in G/H$, $\quad g = g_2 \cdot g_1^{-1}$

$$g(g_1H) = g_2H.$$

「记号：设 $G \curvearrowright X$, $x_0 \in X$ 固定, 定义：

$$\varphi_{x_0}: G \longrightarrow X$$
$$g \longmapsto g(x_0).$$

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} G & \rightarrow & G \times X & \longrightarrow & X \\ g & \mapsto & (g, x_0) & \longmapsto & g(x_0) \end{array}}$$

若 $G \curvearrowright X$ 可迁, $\Rightarrow$ φ_{x_0} 为一个满的连续映射.」

取 $x_0 = e \cdot H$, $\quad \varphi_{x_0}: G \longrightarrow G/H$.

$$g \longmapsto g(eH) = g \cdot H.$$

$\Rightarrow$ φ_{x_0} 就是商映射 $\pi: G \rightarrow G/H$. $\Rightarrow$ φ_{x_0} 为粘合映射.

小结：$H < G$，$H \circlearrowleft G$ 右作用 $\rightsquigarrow$ 轨道空间 G/H.

$$G \circlearrowleft G/H, \quad g(g_1H) := g\cdot g_1H.$$

固定 $x_0 = eH \in G/H$，

$\varphi_{x_0}: G \to G/H$，$g \mapsto g(x_0)$ 为粘合映射，

定义：设 X 为一个 top space，称 X 为一个齐性空间 (homogeneous space)，

if X 上有一个可迁的拓扑群作用.

G/H 为 G 作用下的齐性空间

下面：若 X 为 G 作用下的齐性空间，$x_0 \in X$ 固定 $\varphi_{x_0}: G \to X$，$g \mapsto g(x)$

为粘合映射，则 $X \cong G/H$，对某 $H < G$.

定义，设 $G \circlearrowleft X$，$\forall x \in X$，定义：

$$G_x := \{g \in G \mid g(x) = x\} < G$$

称为 x 的迷向子群 (isotropy group at x).

$G \curvearrowright X$, $x \in X$. $\forall y \in Gx$. 设 $y = g(x)$.

$G_x, G_y < G$.

$$G_y = g G_x g^{-1}.$$

「"$\supset$" $\forall h \in RHS$, $h = g \cdot k \cdot g^{-1}$, for some $k \in G_x$.

$$h(y) = g \cdot k \cdot g^{-1}(y) = g \cdot k(\underbrace{g^{-1}(y)}_{=x}).$$

$$= g(\underbrace{k(x)}_{=x}) = g(x) = y.$$

$\Rightarrow h \in LHS$.

$\therefore$ 已证: $g G_x g^{-1} \subset G_y$.

对 $x = g^{-1}(y)$ 重复上面的证明,

$$\Rightarrow g^{-1} G_y (g^{-1})^{-1} \subset G_x \Rightarrow G_y \subset g G_x \cdot g^{-1}.$$」

$\forall y \in Gx$, G_y 与 G_x 共轭.

反过来, $\forall H < G$, 若 H 与 G_x 共轭, 则 $H = G_y$, for some $y \in X$ 成立

「不妨设 $H = g \cdot G_x \cdot g^{-1}$, $g \in G$. $H = G_{g(x)}$ ($H \subset G_{g(x)}$, "$\supset$" ....)

命题：设 $G \curvearrowright X$ 可迁，固定 $x_0 \in X$，记

$\varphi_{x_0} : G \to X$，$g \mapsto g(x_0)$，设 φ_{x_0} 为

粘合映射，则 $\exists ! \ \overline{\varphi}_{x_0} : G/G_{x_0} \to X$

为同胚，使图表交换：

右作用 $G_{x_0} \curvearrowright G$ 的轨道空间

$$
\begin{tikzcd}
 & G \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\varphi_{x_0}"] & \\
G/G_{x_0} \arrow[rr, "\exists ! \ \overline{\varphi}_{x_0}", "\cong"'] & & X
\end{tikzcd}
$$

Pf. φ_{x_0} 粘合映射，$\Rightarrow G/\sim_{\varphi_{x_0}} \xrightarrow[\cong]{\overline{\varphi}_{x_0}} X$.

$\forall g, h \in G$，$g \sim_{\varphi_{x_0}} h$，$\varphi_{x_0}(g) = \varphi_{x_0}(h)$.

$\Leftrightarrow g(x_0) = h(x_0) \Leftrightarrow h^{-1} g(x_0) = x_0 \Leftrightarrow h^{-1} g \in G_{x_0}$.

$\Leftrightarrow g \in h \cdot G_{x_0} \Leftrightarrow gG_{x_0} = hG_{x_0}$.

$\Rightarrow$ 在 $\sim_{\varphi_{x_0}}$ 下，$\forall g \in G$，$\overline{g} = gG_{x_0} \Rightarrow G/\sim_{\varphi_{x_0}} = G/G_{x_0}$.

#

例：$O(n) \curvearrowright S^{n-1}$ 可迁 （$SO(n) \curvearrowright S^{n-1}$ 可迁）.

固定 $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{rcl} \varphi_{e_1} : O(n) & \longrightarrow & S^{n-1} \\ \text{紧} \quad A & \longmapsto & A \cdot e_1 \end{array}$$

满射. Hausdorff.

命题：$O(n) / O(n)_{e_1} \cong S^{n-1}$.

$$O(n)_{e_1} = \left\{ A \in O(n) \,\middle|\, A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & \\ \vdots & B \\ 0 & \end{pmatrix} \in O(n-1) \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & B \\ 0 & \end{pmatrix} \,\middle|\, B \in O(n-1) \right\}$$

$O(n-1)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & \\ \vdots & B \\ 0 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ \alpha^T & B^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 + \alpha \cdot \alpha^T & \alpha B^T \\ B \alpha^T & B \cdot B^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}. \Longrightarrow \begin{cases} \alpha = 0. \\ \underline{B \cdot B^T = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & B B^T \\ 0 & \end{pmatrix}.$$

$\Rightarrow \quad O(n)/O(n-1) \cong S^{n-1}$. $\qquad n \geq 2$.

$\left(SO(n)/SO(n-1) \cong S^{n-1} \right)$

$n=2$. $\quad SO(2)/SO(1) \cong S^1 \Rightarrow SO(2) \cong S^1 \Rightarrow SO(2)$ 连通.

$n=3 \quad SO(3)/SO(2) \cong S^2$.

引理：设 $G \circlearrowleft X$，X/G 连通，G 连通，则 X 连通.

Pf. 设 $U \subset X$ 为既开又闭的非空集，且 $U \neq X$.

$\pi : X \to X/G$ 自然投射（之前已证：π 为开映射）

$$X = \underset{\text{开集},\ \neq \phi}{U \sqcup (X \setminus U)}$$

$$\underset{\text{连通}}{X/G} = \underset{\text{开集},\ \neq \phi}{\pi(U) \cup \pi(X \setminus U)} . \Rightarrow \pi(U) \cap \pi(X \setminus U) \neq \phi .$$

$\Rightarrow \exists\, x \in U,\ y \in X \setminus U,\ s.t.\ \pi(x) = \pi(y)$.

$\Rightarrow Gx = Gy = \Theta \subset X$.

考虑 Θ：

Θ 为连续映射：$\underset{\text{连通}}{G} \longrightarrow X$ 的像。
$g \longmapsto g(x)$

$\Rightarrow \Theta$ 连通.

$X = U \sqcup (X \setminus U)$

$\Rightarrow \Theta = (\underset{\ni x}{\Theta \cap U}) \sqcup (\Theta \cap \underset{\ni y}{(X \setminus U)}) \Rightarrow \Theta$ 不连通

开集，$\neq \phi$.

矛盾. $\therefore X$ 连通. #

Corollary：$SO(n)$ 连通.

Rmk. 类似可证：$\left.\begin{array}{l} U(n)/U(n-1) \cong S^{2n-1} \\ SU(n)/SU(n-1) \cong S^{2n-1} \end{array}\right\} \Rightarrow SU(n), U(n)$ 均连通.

[cf. [Warner] Foundations of differentible manifolds and Lie groups.]

例. $S^3 = \{(z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_0|^2 + |z_1|^2 = 1\}$. $p, q \in \mathbb{Z}_+, (p, q) = 1$,

$\mathbb{Z}_p \circlearrowleft S^3$ $\qquad \mathbb{Z}_p = \{e, g, g^2, \dots, g^{p-1}\}$.

$$g(z_0, z_1) := \left(e^{2\pi i/p} z_0, \ e^{2\pi i q/p} \cdot z_1\right).$$

$S^3/\mathbb{Z}_p$: lens space

$\quad \parallel$

$L(p, q)$.

7. Fundamental groups 基本群.

X : top space $\rightsquigarrow$ 群.

§1. 同伦 (homotopy).

大概：把连续变形精确化.

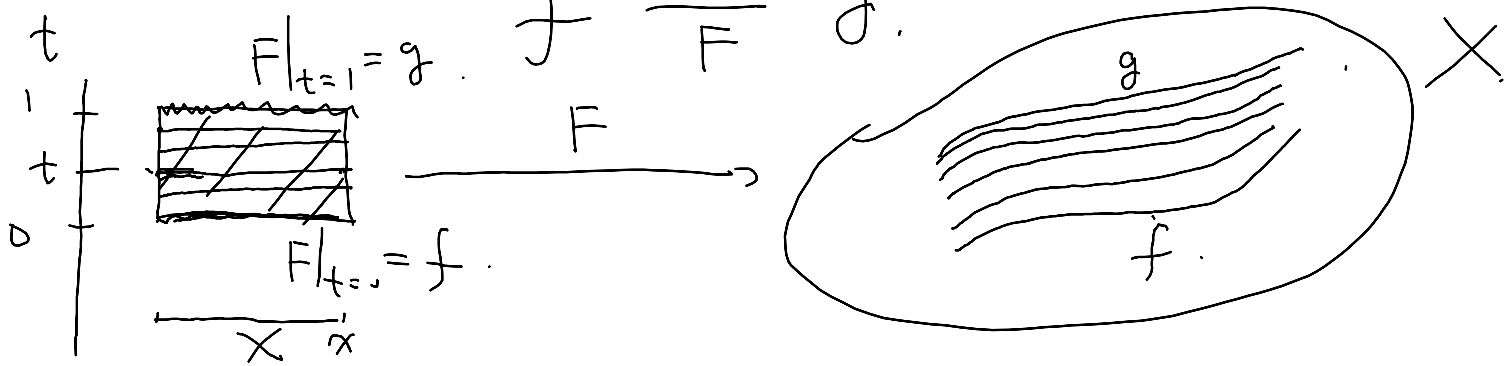
定义. 设 $f, g : X \to Y$ 连续. 称 f 与 g 同伦 if
$\exists$ 连续映射 $F: X \times I \to Y$. $(I=[0,1])$

$$(x,t) \mapsto F(x,t),$$

s.t. $F(x,0)=f(x)$, $F(x,1)=g(x)$, $\forall x \in X$.

此时称 F 为从 f 到 g 的一个同伦. 记为:

$$f \underset{F}{\simeq} g.$$



记 $F_t: X \to Y$
$x \mapsto F(x,t)$
$F_0 = f$
$F_1 = g$

定义. 设 $A \subset X$, $f, g: X \to Y$, $f|_A = g|_A$, 称 f 与 g 相对于 A 同伦, if $\exists$ 连续映射

$$F: X \times I \to Y \quad (\text{relative})$$

s.t. ① $F_0 = f$, $F_1 = g$;

② $\forall x \in A$, $F(x,t) = f(x)$, $\forall t \in I$.

记为: $f \underset{F}{\simeq} g \ \text{rel } A$.

例: $f, g: [0,1] \to X$, $f(0) = g(0) = p$, $f(1) = g(1) = q$.

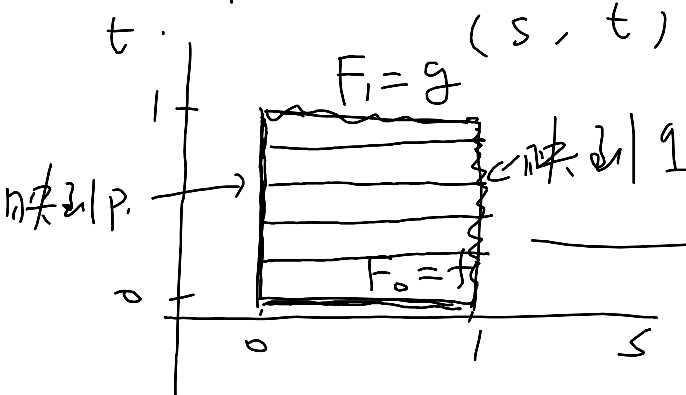
若 $f \underset{F}{\simeq} g \ \text{rel } \{0,1\}$

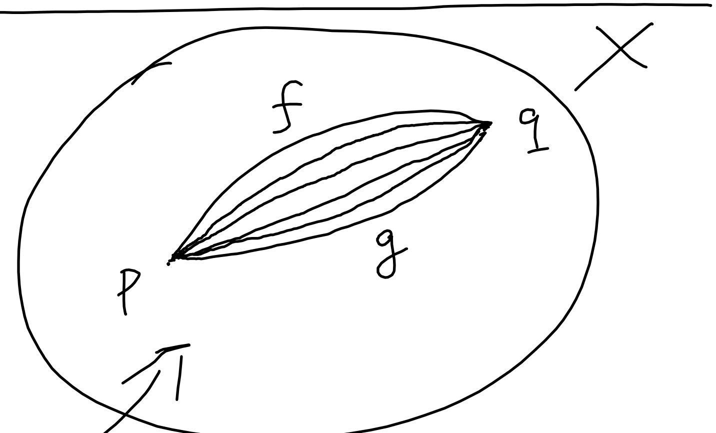
$$F: [0,1] \times [0,1] \to X$$

$$(s,t) \longmapsto F(s,t)$$

$$F(s,0) = f(s)$$

$$F(s,1) = g(s).$$





F.

例：$C \subset \mathbb{R}^n$，C：convex. 设 $f, g : X \to C$.

则 $f \simeq g$.

$$F(x,t) = (1-t)f(x) + t g(x).$$

（直线同伦）.

例：$f, g : X \to S^n$，$\underline{f(x) \neq -g(x)}$，$\forall x \in X$.

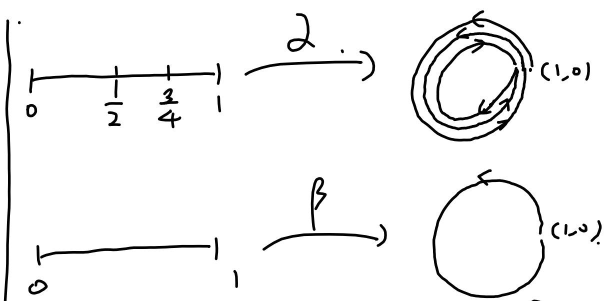
$$F(x,t) = \frac{(1-t)f(x) + t g(x)}{\|(1-t)f(x) + t g(x)\|}.$$

$\Rightarrow f \underset{F}{\simeq} g$.

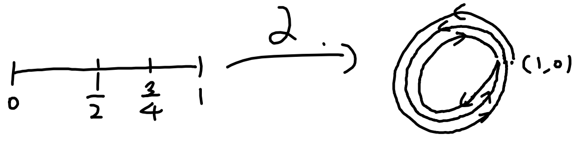
例：$\alpha, \beta : [0,1] \to S^1$.

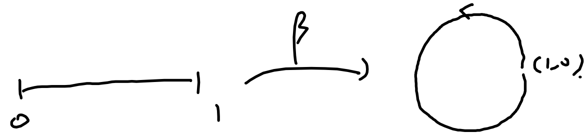
$$\alpha(s) = \begin{cases} e^{4\pi i s}, & 0 \le s \le \frac{1}{2} \\ e^{4\pi i (2s-1)}, & \frac{1}{2} \le s \le \frac{3}{4} \\ e^{8\pi i (1-s)}, & \frac{3}{4} \le s \le 1 \end{cases}$$

$$\beta(s) = e^{2\pi i s}, \quad 0 \le s \le 1.$$



$\alpha \underset{F}{\simeq} \beta$ rel $\{0,1\}$.





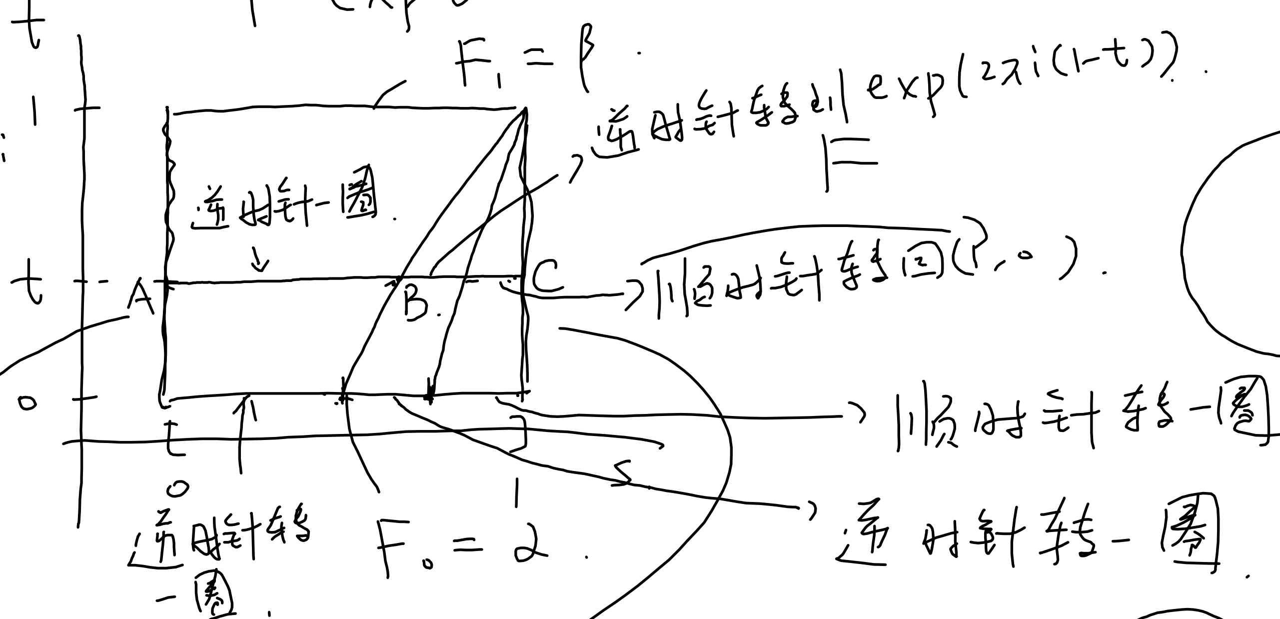
$$\frac{BC}{\frac{1}{2}} = \frac{1-t}{1}$$

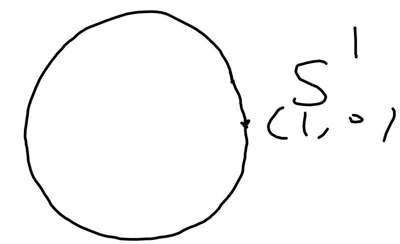
$$\Rightarrow BC = \frac{1}{2}(1-t)$$

$$\Rightarrow AB = \frac{1}{2}(1+t).$$

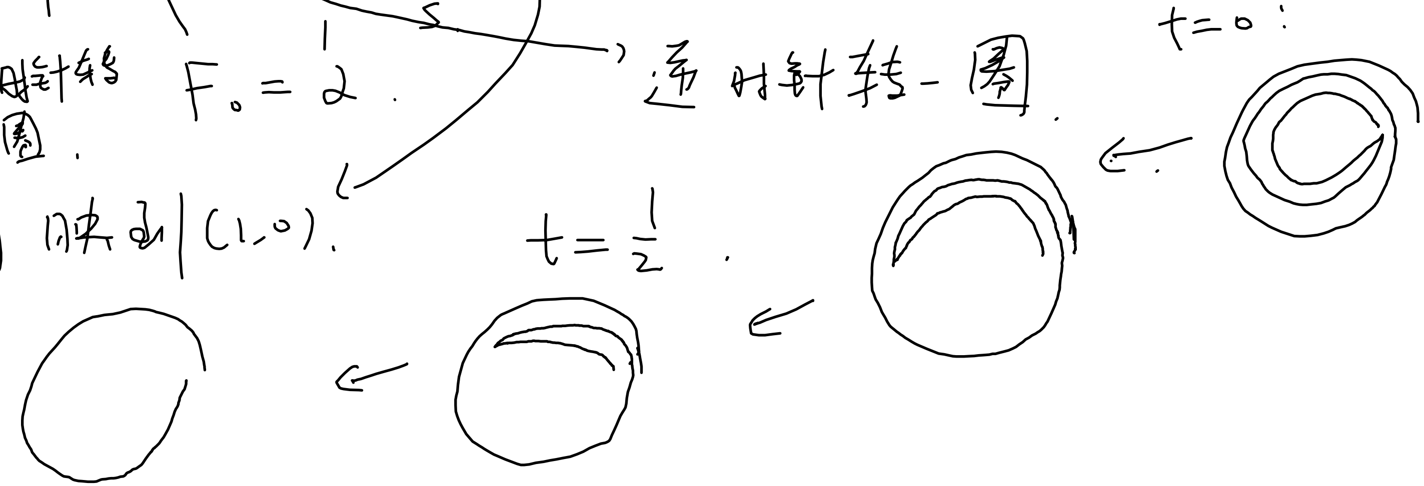
$$F(s,t) = \begin{cases} \exp\frac{4\pi i s}{t+1}, & 0 \le s \le \frac{t+1}{2} \\ \exp 4\pi i(2s-1-t), & \frac{t+1}{2} \le s \le \frac{t+3}{4} \\ \exp 8\pi i(1-s), & \frac{t+3}{4} \le s \le 1 \end{cases}$$

想法：





$$e^{4\pi i s\cdot\frac{\frac{1}{2}}{|AB|}} = e^{\frac{4\pi i s}{t+1}}$$



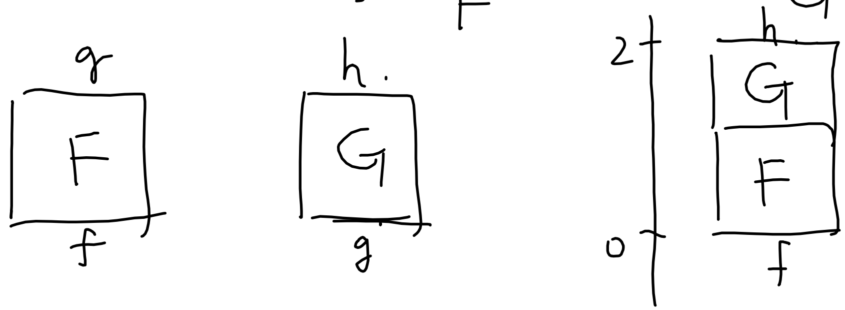
引理：记 $Map(X,Y)=\{f:X\to Y \mid f \text{ 连续}\}$，则同伦定义了 $Map(X,Y)$ 上的一个等价关系.

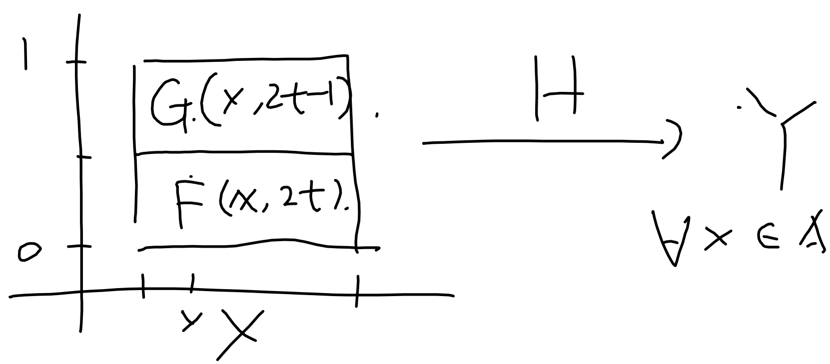
Pf. (1) 反身性. $f\simeq f$. $F=f\times Id: X\times I\to Y$.

(2) 对称性. $f\underset{F}{\simeq} g \implies g\underset{G}{\simeq} f$.

只需取 $G(x,t)=F(x,1-t)$.

(3) 传递性: $f\underset{F}{\simeq} g$, $g\underset{G}{\simeq} h$, $\implies f\underset{H}{\simeq} h$.





$$H(x,t):=\begin{cases}F(x,2t), & 0\le t\le \frac{1}{2}\\ G(x,2t-1), & \frac{1}{2}\le t\le 1\end{cases}$$

$\forall x\in X$, $H(x,t)=\underset{G(x,t)}{F(x,t)}=\psi(x)$

#

推论：设 $A\subset X$，固定 $\psi: A\to Y$，记 $\mathrm{Map}(X,Y;\psi) = \{f\in \mathrm{Map}(X,Y) \mid f|_A=\psi\}$，则相对 A 的同伦定义了 $\mathrm{Map}(X,Y;\psi)$ 上的一个等价关系。

下一次：X 为 top space，$p\in X$，

$$L(X,p)=\{\gamma:[0,1]\to X \mid \gamma(0)=\gamma(1)=p\}$$

$$\underline{L(X,p)/\sim}$$

$\forall \alpha,\beta\in L(X,p)$，$\alpha\sim\beta \iff \alpha\simeq\beta \ \mathrm{rel}\ \{0,1\}$

$$L(X,p)/\sim \;=\; \underline{\pi_1(X,p)},$$

↑ 群结构

↓

基本群，