上一次： $[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n]\subset\mathbb{R}^n$ 紧.

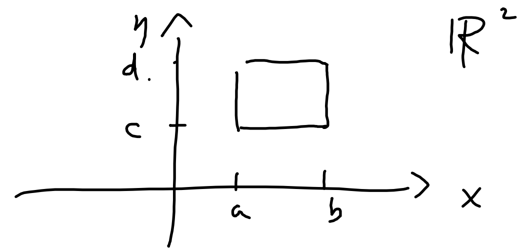
这一次： X 紧, Y 紧 $\Rightarrow$ $X\times Y$ 紧.

回顾：

· $X\times Y$ 作为集合.

$$X\times Y := \{(x,y)\mid x\in X,\ y\in Y\}.$$

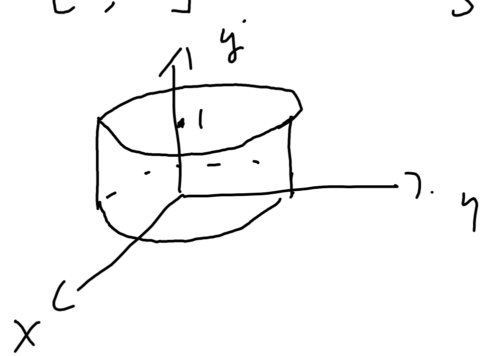
例： $[a,b]\times[c,d]=\{(x,y)\mid a\le x\le b,\ c\le y\le d\}$



例： $S^1\times[0,1]$

$S^1=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1,\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\}$.

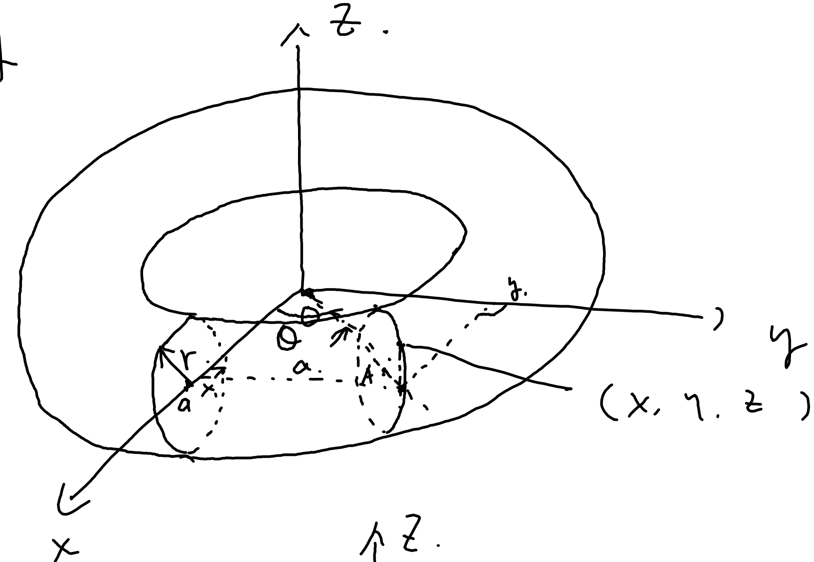
$S^1\times[0,1]=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2=1,\ 0\le z\le 1\}$



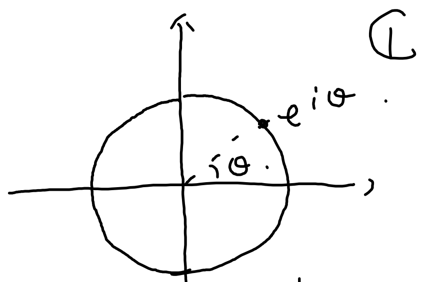
例: $\underbrace{S^1\times S^1}_{\text{乘积拓扑}} \cong \underbrace{T}_{\text{子空间拓扑}}$ (轮胎面) torus.

(x, y, z) 由 (θ, α) 决定.

$(r<a)$

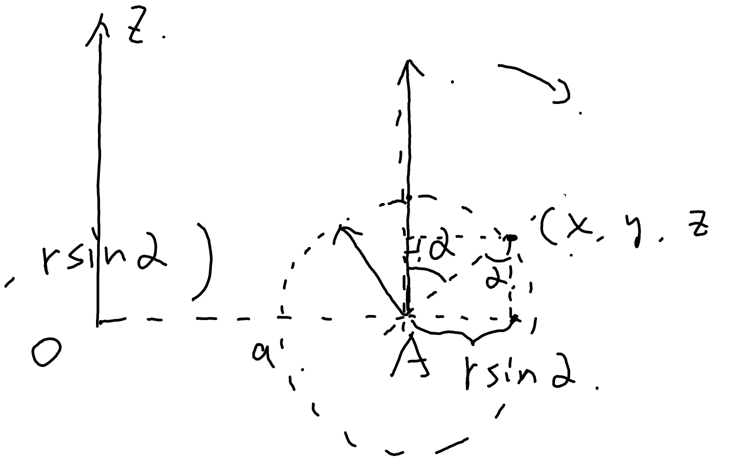


S^1:



$S^1\times S^1 \xrightarrow{1:1} T$

$(e^{i\theta}, e^{i\alpha}) \longmapsto ((a+r\sin\alpha)\cos\theta, (a+r\sin\alpha)\sin\theta, r\sin\alpha)$



$$\begin{cases} x = (a+r\sin\alpha)\cos\theta \\ y = (a+r\sin\alpha)\sin\theta. \\ z = r\sin\alpha \end{cases}$$

· $X\times Y$ 作为拓扑空间.

例: $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 欧氏拓扑.

$$\beta = \{ B(p;\delta) \mid p\in\mathbb{R}^2,\ \rho\in\mathbb{R}_+ \}.$$

$$\beta' = \{ (a,b)\times(c,d) \mid a<b,\ c<d \}$$

定义: X, Y: top space, 定义 $\mathcal{S}$ 为 $X\times Y$ 上的如下的子集族:

(及引理)

$$\{ U\times V \mid U \underset{\text{open}}{\subset} X,\ V \underset{\text{open}}{\subset} Y \}$$

则 $\mathcal{S}$ 生成了 $X\times Y$ 上的一个拓扑, 该拓扑称为 $X\times Y$ 上的乘积拓扑.

证明: $\mathcal{S} = \{ U\times V \mid U \underset{\text{open}}{\subset} X,\ V \underset{\text{open}}{\subset} Y \}$ 的确生成了 $X\times Y$ 上的一个拓扑, 即证:

① $\displaystyle\bigcup_{U\times V\in \mathcal{J}} U\times V = X\times Y$. $\quad (X\times Y\in\mathcal{J})$.

② $\forall\, U_1\times V_1,\ U_2\times V_2 \in \mathcal{J}$, 要证, $\forall (x,y)\in (U_1\times V_1)\cap(U_2\times V_2)$,

$\exists\, U_3\times V_3\in\mathcal{J}$, s.t. $x \in U_3\times V_3 \subset (U_1\times V_1)\cap(U_2\times V_2)$.

只需验证②:

取 $U_3\times V_3 = (U_1\times V_1)\cap(U_2\times V_2)$.

「$(U_1\times V_1)\cap(U_2\times V_2)$

$= \{(x,y) \mid (x,y)\in U_1\times V_1$ 且 $(x,y)\in U_2\times V_2\}$.

$= \{(x,y) \mid x\in U_1$ 且 $x\in U_2$ 且 $y\in V_1$ 且 $y \in V_2\}$

$= \{(x,y) \mid (x,y)\in (U_1\cap U_2)\times(V_1\cap V_2)\} = \underline{(U_1\cap U_2)}\times\underline{(V_1\cap V_2)}$.

$\in \mathcal{J}$ 」

#.

Rmk. $X_1, \dots, X_n$: top space.

$X_1\times X_2\times\cdots\times X_n := (((X_1\times X_2)\times X_3)\times\cdots)\times X_n$

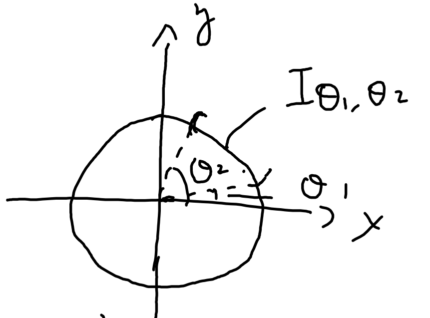
例: $\underbrace{[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]}_{\text{乘积空间}} \subset \mathbb{R}^n$

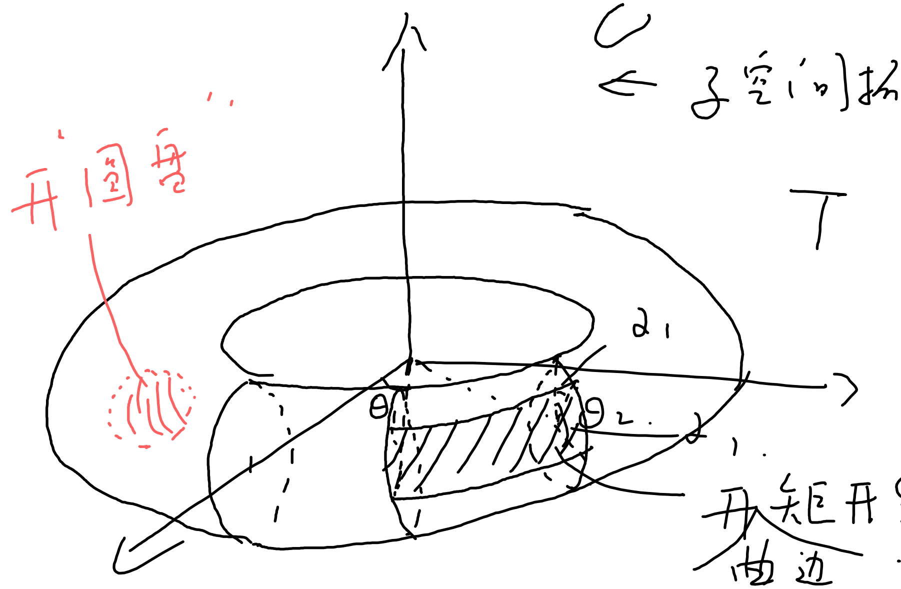
乘积空间 $=$ 子空间拓扑.

例: $\underbrace{S^1 \times S^1}_{\text{乘积拓扑}} \xleftrightarrow{1:1} T \subset \mathbb{R}^3$ ← 子空间拓扑.

同胚

S^1





$\{I_{\theta_1, \theta_2}\}$ 为 S^1 的一个拓扑基.

$\underline{\{I_{\theta_1, \theta_2} \times I_{\alpha_1, \alpha_2}\}}$ 为 $S^1 \times S^1$ 的乘积拓扑的一个拓扑基.

「Fact. $\left.\begin{array}{l}\beta \text{ 为 } X \text{ 的一个拓扑基}, \\ \gamma \text{ 为 } Y \cdots\cdots\end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\{U \times V \mid U \in \beta, V \in \gamma\}}$ 为 $X \times Y$ 的一个拓扑基.」

Universal property of product spaces

(万有)

- 线性空间.

设 V, W 为域 k 上的两个 vector sp.

构造 $V\times W$. 为一个 k-vector sp.

(1) $(v_1, w_1)+(v_2, w_2) := (v_1+v_2, w_1+w_2)$.

(2) $\lambda\cdot(v, w) = (\lambda v, \lambda w)$

$$V\times W \xrightarrow{\pi_1} V. \qquad V\times W \xrightarrow{\pi_2} W$$
$$(v, w) \longmapsto v. \qquad (v, w) \longmapsto w$$

$(V\times W, \pi_1, \pi_2)$ 有如下的 universal property:

$\forall$ 线性空间 Z, us 及线性映射.

$f: Z\longrightarrow V$, $\quad g: Z\longrightarrow W$,

$\exists !$ $h: Z\longrightarrow V\times W$, s.t. 下列图表交换.

$$\begin{tikzcd}
 & & V\times W \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\
Z \arrow[urr, dashed, "\exists!\, h"] \arrow[r, "f"'] \arrow[rrr, bend right=10, "g"] & V & & W
\end{tikzcd}$$

定义: $h: Z \to V\times W$ 即可.

$v \mapsto (f(v), g(v))$

唯一性: 假设另有一线性映射 $\tilde{h}: Z \to V\times W$ 满足图表交换条件, $\pi_1\circ\tilde{h} = f$, $\underline{\pi_2\circ\tilde{h} = g}$.

$\forall v\in Z$, $\underline{f(v)} = \pi_1(\tilde{h}(v)) = h_1(v)$

$\underline{g(v)} = \pi_2(\tilde{h}(v)) = h_2(v)$.

$\tilde{h}(v) = (h_1(v), h_2(v)) \Rightarrow \tilde{h} = h$.

· 群. 设 G, H 为两个群, $G\times H$ 乘积群

$\forall (g_1,h_1), (g_2,h_2) \in G\times H$, $(g_1,h_1)\cdot(g_2,h_2) := (g_1\cdot g_2, h_1\cdot h_2)$

$$\left.\begin{array}{l} G\times H \xrightarrow{\pi_1} G \\ (g,h) \longmapsto g \\ G\times H \xrightarrow{\pi_2} H \\ (g,h) \longmapsto h \end{array}\right\}\text{自然群同态.}$$

$(G\times H, \pi_1, \pi_2)$ 有如下的universal property:

$\forall$ 群 K, 以及群同态 $f: K \longrightarrow G$
$g: K \longrightarrow H$.

$\exists!$ 群同态 $h: K \longrightarrow G\times H$ 使下面的图表交换:

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, dashed, "\exists! h"] \arrow[dr, "f"'] \arrow[drr, "g"] & G\times H \arrow[d, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\
& G & H
\end{tikzcd}$$

$\forall k\in K, h(k) := (f(k), g(k))$ 即可.

· 拓扑空间.

设 X, Y 为 top. sp. $X\times Y$ 为其 product top. sp.

$$\pi_1 : X\times Y \longrightarrow X \qquad (x,y) \longmapsto x$$

$$\pi_2 : X\times Y \longrightarrow Y \qquad (x,y) \longmapsto y.$$

Lemma. π_1, π_2 连续.

pf. π_1 : $\forall\, U \underset{\text{open}}{\subset} X$, $\pi_1^{-1}(U) = \underline{U\times Y}$ 开. #

$(X\times Y, \pi_1, \pi_2)$ 具有 universal property:

$\forall$ top. sp. Z, 以及 $f: Z \longrightarrow X$ 连续,

$g: Z \longrightarrow Y$

$\underline{\exists!\ h: Z \longrightarrow X\times Y \text{ 连续, s.t. 下列图表交换:}}$

$$\begin{tikzcd}
 & & X\times Y \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\
Z \arrow[urr, dashed, bend left, "\exists!\, h"] \arrow[r, "f"'] \arrow[rrr, bend left=10, "g"'] & X & & Y
\end{tikzcd}$$

若 $\exists h$, s.t. 图表交换, 则

必有: $h(z) = (f(z), g(z))$

$\forall z \in Z$.

Lemma. 设 X, Y, Z 为 top. space, $X\times Y$ 为乘积拓扑空间.

$\forall f: Z \to X\times Y$, 有:

"f 连续" $\Longleftrightarrow$ "$\pi_1\circ f$, $\pi_2\circ f$ 连续"

其 $\pi_1: X\times Y \to X$, $\pi_2: X\times Y \to Y$.

Pf. "$\Rightarrow$" 显然.

"$\Leftarrow$" 要证: $\underline{\forall \text{ 开集 } W\subset X\times Y,\ f^{-1}(W) \text{ 开}}$.

只要证: $\underline{\forall\ U \underset{open}{\subset} X,\ V \underset{open}{\subset} Y,\ f^{-1}(U\times V) \text{ 开}}$.

$$f^{-1}(U\times V) = \{z\in Z \mid \underset{(\pi_1\circ f(z),\ \pi_2\circ f(z))}{\underset{\shortparallel}{f(z)}} \in U\times V\}$$

$$= \{z\in Z \mid \pi_1\circ f(z)\in U,\ \pi_2\circ f(z)\in V\}$$

$$= \underline{(\pi_1\circ f)^{-1}(U)} \cap \underline{(\pi_2\circ f)^{-1}(V)} \text{ 开 } \#$$

提炼 $\rightsquigarrow$ 范畴 (category).

<u>定义</u>. 一个范畴 $\mathcal{C}$ 是指下面的数据.

① 一些称为对象的东西所组成的集合 $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. (object).

$\mathrm{Mor}(\mathcal{C})$

② 一些称为态射的东西所组成的集合 $\underline{\mathrm{Hom}(\mathcal{C})}$ (morphism)

③ 映射

$$s: \mathrm{Hom}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \quad \text{(source)}$$
$$f \longmapsto s(f)$$

$$t: \mathrm{Hom}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \quad \text{(target)}$$
$$f \longmapsto t(f).$$

($\forall f \in \mathrm{Hom}(\mathcal{C})$, $s(f) = X$, $t(f) = Y$.

记: $f: X \longrightarrow Y$)

记 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) = \{ f \in \mathrm{Hom}(\mathcal{C}) \mid s(f) = X, t(f) = Y \}$.

④. $\circ$: $\mathrm{Hom}(X,Y)\times\mathrm{Hom}(Y,Z)\longrightarrow\mathrm{Hom}(X,Z)$.

$$(f, g)\longmapsto g\circ f.$$

(复合映射, composition)

满足:

(i) 结合律. $\forall X, Y, Z, W$.

$$X\xrightarrow{f}Y\xrightarrow{g}Z\xrightarrow{h}W$$

$$(h\circ g)\circ f = h\circ(g\circ f),$$

(ii) 恒等态射: $\forall X\in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, $\exists\, 1_X: X\to X$,

s.t. $\forall X\xrightarrow{f}Y$, $Z\xrightarrow{g}X$

$$f\circ 1_X = f,\quad 1_X\circ g = Z.$$

($\Rightarrow$ 恒等态射唯一, 假设 $1'_X$ 同样满足上述性质.

$1'_X: X\to X$. $\quad 1'_X\circ 1_X = 1_X$

$$\begin{matrix} 1'_X\circ 1_X = 1_X \\ \| \\ 1'_X \end{matrix}$$
)

定义：设 $\mathcal{C}$ 为一个范畴，X, Y 为 $\mathcal{C}$ 中两个对象。

X 与 Y 称为是同构，iff $\exists$ 两个态射 $f: X \to Y$，$g: Y \to X$，s.t. $f \circ g = 1_Y$，$g \circ f = 1_X$.

例. Vect_k：k 上的线性空间范畴

例. Grp：群范畴

例. Top：拓扑空间范畴

定义. 设 $\mathcal{C}$ 为一个范畴, $X_1, X_2 \in Ob(\mathcal{C})$, X_1 与 X_2 的乘积是指如下数据:

(1) $Y \in Ob(\mathcal{C})$ (记为 $X_1 \times X_2$)

(2) $\pi_1: Y \to X_1$, $\pi_2: Y \to X_2$,

满足如下 universal property:

$\forall Z \in Ob(\mathcal{C})$ 以及 $f: Z \to X_1$, $g: Z \to X_2$. $\exists$ 唯一的一个态射 $h: Z \to Y$, s.t. 下列图表交换:

$$\begin{tikzcd}
& & Y \arrow[d, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\
Z \arrow[urr, dashed, "\exists! h"] \arrow[rr, bend right, "f"'] \arrow[rrr, bend left, "g"] & & X_1 & X_2
\end{tikzcd}$$

Rmk. 若 X_1 与 X_2 的乘积存在, 则在同构下唯一.

假设 (Y', $Y' \xrightarrow{\pi_1'} X_1$, $Y' \xrightarrow{\pi_2'} X_2$) 也满足 universal property.

$$
\begin{tikzcd}
Y' \arrow[rr, dashed, bend left, "h"] \arrow[dr, "\pi_1'"'] \arrow[drr, "\pi_2'"] & & Y \arrow[ll, dashed, bend left, "l"] \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[d, "\pi_2"] \\
& X_1 & X_2
\end{tikzcd}
$$

$\underline{l \circ h}$ $\quad Y' \longrightarrow Y'$

$$
\begin{tikzcd}
Y' \arrow[rr, shift left, "1_{Y'}"] \arrow[rr, shift right, "l \circ h"'] \arrow[dr, "\pi_1'"'] \arrow[drr, "\pi_2'"] & & Y' \arrow[dl, "\pi_1'"'] \arrow[d, "\pi_2'"] \\
& X_1 & X_2
\end{tikzcd}
$$

$$\pi_1' \circ (l \circ h) = (\underline{\pi_1' \circ l}) \circ h = \pi_1 \circ h = \pi_1'.$$

$\Rightarrow \underline{1_{Y'} = l \circ h}.$

类似可证: $\underline{h \circ l = 1_Y}.$ $\qquad Y' \underset{l}{\overset{h}{\rightleftarrows}} Y$

$\Rightarrow$ Y' 与 Y 同构 $\quad (Y' \cong Y).$

小结：对 top. space X_1、X_2，
令 $X_1 \times X_2$ 为其乘积拓扑空间，
我们已证：$(X_1 \times X_2, \pi_1, \pi_2)$ 为 X_1、X_2 在 Top 中的乘积。

Rmk：代数拓扑，从 Top 到 Grp, Ring 一些"映射"（Functor）。

回到我们的主线：X 紧，Y 紧 $\Rightarrow$ $X \times Y$ 紧。

Lemma. 设 X 为一个 top. sp. 设 β 为 X 的一组拓扑基，
则 X 紧 $\Longleftrightarrow$ $\forall$ 一族 $U_\alpha \in \beta$, $\alpha \in I$, $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 覆盖 X，则 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 存在有限子覆盖。

Pf "$\Rightarrow$" 显然.

"$\Leftarrow$" 任取 X 的一个开覆盖 $\{V_\alpha\}_{\alpha\in J}$.

$$\bigcup_{\alpha\in J} V_\alpha = X.$$

$$V_\alpha = \bigcup_{U_{\alpha i}\in\beta} U_{\alpha i}$$

$$\Rightarrow \quad X = \bigcup_{\alpha\in J}\ \bigcup_{U_{\alpha i}\in\beta} U_{\alpha i}.$$

由条件 $\Rightarrow \exists\ U_{\alpha_1 i_1}, \cdots, U_{\alpha_n i_n} \in \boxed{\{U_{\alpha i}\}}$

s.t. $$\bigcup_{j=1}^{n} U_{\alpha_j i_j} = X.$$

$$U_{\alpha_j i_j} \subset V_{\alpha_j}.$$

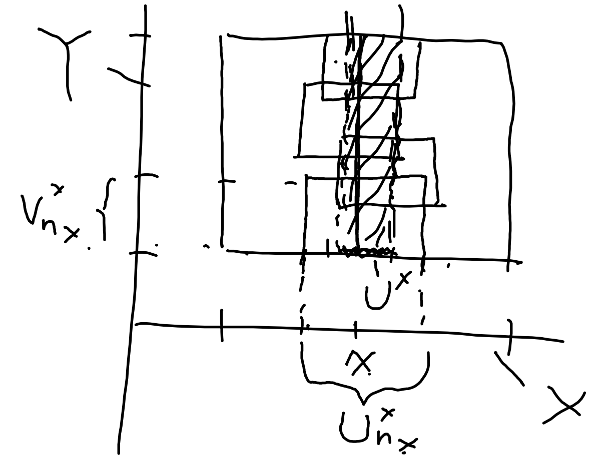
$$\underline{V_{\alpha_1}\cup\cdots\cup V_{\alpha_n} = X}$$

#.

命题: X, Y 紧 $\Rightarrow X\times Y$ 紧.

证. 任取 $\{U_\alpha \times V_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 为 $X\times Y$ 的一组开覆盖.

$\forall x\in X$. $\underline{\{x\}\times Y} \cong Y$.



Y 紧. $\Rightarrow \{x\}\times Y$ 紧

$\{U_\alpha\times V_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 覆盖 $\{x\}\times Y$.

由 $\{x\}\times Y$ 的紧性. $\exists$ $\{U_\alpha\times V_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 的有限子覆盖.

不妨设其中一个有限子覆盖为:

$$U_1^x\times V_1^x, \ \cdots, \ U^x_{n_x}\times V^x_{n_x}$$

令 $U^x = U_1^x \cap \cdots \cap U^x_{n_x}$ 为 X 中开集.

$\bigcup\limits_{x\in X} U^x = X$. $\because X$ 紧. $\therefore \exists\, x_1,\cdots,x_m$.

$U^{x_1},\cdots,U^{x_m}$ 覆盖 X.

则 $U_1^{x_1}\times V_1^{x_1}, \ldots\ldots, U_{n_{x_1}}^{x_1}\times V_{n_{x_1}}^{x_1}$ 覆盖 $U^{x_1}\times Y$

$\ldots\ldots$

$U_1^{x_m}\times V_1^{x_m}, \ldots\ldots, U_{n_{x_m}}^{x_m}\times V_{n_{x_m}}^{x_m}$

覆盖了 $X\times Y$.

$\Gamma\ \forall x\in X,\quad x\in U^{x_i}\quad \{x\}\times Y\subset U^{x_i}\times Y$ #.

紧性与连续映射

命题：X 紧，$f: X\to Y$ 连续，$f(X)$ 紧.

Pf. $\forall f(X)$ 一组开覆盖 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$，$U_\alpha \underset{\text{open}}{\subset} Y$

$\{f^{-1}(U_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ 为 X 的一组开覆盖.

X 紧 $\Rightarrow \exists\, \alpha_1,\ldots,\alpha_n$，$f^{-1}(U_{\alpha_1}),\ldots,f^{-1}(U_{\alpha_n})$ 覆盖 X.

$\Rightarrow U_{\alpha_1}, \cdots, U_{\alpha_n}$ 覆盖 $f(X)$ #.

推论：紧空间上的连续的实值函数有界，可取到最值.

证. X 紧，$f: X \to \mathbb{R}$ 连续.

$f(X)$ 紧. $\Rightarrow f(x)$ 为有界闭集.

$S = \sup f(X)$. $s = \inf f(X)$.

闭 $\Rightarrow S \in f(X)$, $s \in f(X)$. #

其它的紧性

· limit point compact.

定义. 设 X 为 top. sp. X 称为 limit point compact, if X 中的任意无限子集都有极限点.

命题：compact $\Rightarrow$ limit point compact.

Pf. 设 X compact.

任取 $A \subset X$，A 无限集，假设 A 无极限点

$\forall x \in X$，$\exists\, U_x \underset{\text{open}}{\subset} X$，s.t. $(U_x \setminus \{x\}) \cap A = \phi$.

$\Rightarrow$ U_x 最多只有 A 中一个点..

$$\bigcup_{x \in X} U_x = X.$$

X 紧 $\Rightarrow$ $\exists\, x_1, \dots, x_n$, s.t. $\bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i} = X$

A

最多只有 A 中一个点

最多只有 A 中 n 个点.

矛盾.

反过来，limit point compact $\overset{?}{\Rightarrow}$ compact. $\times$ #.

反例：$\mathbb{Z}_+ \times Y$　　$\mathbb{Z}_+ = \{1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}$ 离散拓扑

$Y = \{0, 1\}$，平凡拓扑

$\forall \overset{\phi}{\cancel{\ }} A \subset \mathbb{Z}_+ \times Y$.

若 $(n, 1) \in A$，$\Rightarrow$ $\underline{(n, 0)}$ 为 A 的极限点

$\mathbb{Z}_+ \times Y$ 的一组拓扑基为：$\underline{\{n\} \times Y,\ n = 1, 2, 3, \cdots\cdots}$

$\forall\ U \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{Z}_+ \times Y$，$(n, 0) \in U$.

U 必包含 $\underline{\{n\} \times Y}$.

$(n, 1) \in \underline{(\{n\} \times Y \setminus (n, 0))} \cap \underline{A} \neq \phi$

$\Rightarrow \mathbb{Z}_+ \times Y$ limit point compact.

$\mathbb{Z}_+ \times Y$ 不紧，$\underline{\{\{n\} \times Y\}_{n = 1, 2, \cdots}}$

定义. 设 X 为一个 top. sp. X 称为 sequentially compact (列紧)

if $\forall$ 无限点列 $\{x_n\} \subset X$, $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 都有收敛子列.

compact $\not\Rightarrow$ sequentially compact

$\not\Leftarrow$

反例: 难.

compact but not sequentially compact:

$$[0,1]^{[0,1]} = \prod_{\alpha\in[0,1]} \underbrace{[0,1]}_{\text{紧}}$$

(Tychonoff thm $\Rightarrow \prod_{\alpha\in[0,1]}[0,1]$ 紧)

命题: sequentially compact $\Rightarrow$ limit point compact.

Pf. X seq. compact.

$\forall A \subset X$, A 无限集. 任取一个 $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 为 A 的一个

点列 $\{x_n\}$ 互不相同.

seq. compact $\Rightarrow \{x_n\}$ 有收敛子列，设收敛子列为 $\{x_{n_k}\}$.

$$x_{n_k} \to x_0.$$

则 x_0 为 A 的极限点 #.

limit point compact $\Rightarrow$ sequentially compact.

反例. $\mathbb{R}$. right topology: $\mathcal{J} = \{(a,+\infty) \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \emptyset$.

$\mathbb{R}$: limit point compact.

$\forall \emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$. 设 $x_0 \in A$.

$\boxed{x_0 - 1 \text{ 就为 } A \text{ 的一个极限点}}$.

$\forall U \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}$, $x_0 - 1 \in U$. U 长成 $(x, +\infty)$, $x < x_0 - 1$.

$$x_0 \in (\underbrace{U \setminus \{x_0 - 1\}}_{x_0}) \cap \underbrace{A}_{x_0} \neq \emptyset.$$

$x_n = -n$, $n \in \mathbb{N}$.
假设 $\{x_n\}$ 有收敛子列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{+\infty}$.
$x_{n_k} \to x_0$.
(i.e. $\forall$ 包含 x_0 的开集 U, $\exists N$, $\forall k > N$, $x_{n_k} \in U$).
$\forall$ 包含 x_0 的开集 $U = (a, +\infty)$ $(a < x_0)$.
但 $\exists M$, $\forall k > M$, $x_{n_k} < a$,
$x_{n_k} \notin U$.

命题：设 X 为度量空间，则三种紧性等价．

<u>Pf</u>．cf．Munkres <u>Topology</u>．　　　　　　　　#