§8. 单纯同调 vs. 奇异同调.

设 K 为单纯复形, $L \subset K$ 为子复形. 将证: $H_n(K,L) \xrightarrow{\cong} H_n(|K|,|L|)$ $\forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

为此将构造自然的态射 $C_\cdot(K,L) \longrightarrow S_\cdot(|K|,|L|)$.

为此, 选定 K 的顶点集的一个排序.

记 K 中的 n-单形全体为: $\{\tilde{\Delta}_n^\alpha \mid \alpha \in I_n\}$. $\left(\bigcup_{\substack{n\geq 0\\ \alpha\in I_n}} \tilde{\Delta}_n^\alpha = K\right)$

记 $\tilde{\Delta}_n^\alpha$ 的顶点集为 $v_0^\alpha < \cdots < v_n^\alpha$ (其中"<"从 K 的顶点集的排序继承下来的).

由 $(v_0^\alpha, \cdots, v_n^\alpha)$, $\alpha \in I_n$ 生成的自由Abel群.

$\forall n$, 定义: $C_n(K) \longrightarrow S_n(|K|)$ by 规定.

$(v_0^\alpha, \cdots, v_n^\alpha) \longmapsto$ "$\sigma_\alpha : \Delta_n \to |K|$, $\sum_{i=0}^n t_i p_i \longmapsto \sum_{i=0}^n t_i v_i^\alpha$."

$\rightsquigarrow$ 态射: $C_\cdot(K) \xrightarrow{u_\cdot} S_\cdot(|K|)$

$u(C_\cdot(L)) \subseteq S_\cdot(|L|)$

$\rightsquigarrow$ $C_\cdot(K)/C_\cdot(L) \xrightarrow{u} S_\cdot(|K|)/S_\cdot(|L|)$

$$\begin{tikzcd}
C_{n+1}(K) \arrow[r] \arrow[dd, "\partial"] & S_{n+1}(|K|) \arrow[dd, "\partial"] \\
(v_0^\alpha, \cdots, v_{n+1}^\alpha) \arrow[r, mapsto] \arrow[dd, mapsto] & \sigma_\alpha \arrow[dd, mapsto] \\
C_n(K) \arrow[r] & S_n(|K|) \\
\sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i (v_0^\alpha, \cdots, \hat{v_i^\alpha}, \cdots, v_{n+1}^\alpha) \arrow[r, mapsto, "?"] & \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \sigma_\alpha|_{\langle p_0, \cdots, \hat{p_i}, \cdots, p_{n+1}\rangle}
\end{tikzcd}$$

定理4. 设K为单纯复形, L⊂K为子复形, 则自然态射

$$C_\cdot(K,L)\to S_\cdot(|K|,|L|).$$

诱导的群同态 $H_n(K,L)\to H_n(|K|,|L|)$ 为同构, $\forall n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$.

证明: 先证 $L=\phi$ 的情形.

Case 1. $K=K^n$, for some $n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 成立.

将对 n 做归纳.

$n=0$. 显然.

假设对 $n\leq k-1$ 证明了: $H_i(K)\xrightarrow{\cong}H_i(|K|)$, $\forall i\geq 0$.

下设 $n=k$.

考虑短正合列:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C_\cdot(K^{k-1}) \arrow[r] \arrow[d] & C_\cdot(K^k) \arrow[r] \arrow[d] & C_\cdot(K^k,K^{k-1}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & S_\cdot(|K^{k-1}|) \arrow[r] & S_\cdot(|K^k|) \arrow[r] & S_\cdot(|K^k|,|K^{k-1}|) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$\rightsquigarrow$ 长正合列:

$$\begin{tikzcd}
H_{i+1}(K^k, K^{k-1}) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\cong\ \text{claim}"] & H_i(K^{k-1}) \arrow[r] \arrow[d, "\cong\ \text{归纳假设}"] & H_i(K^k) \arrow[r] \arrow[d] & H_i(K^k, K^{k-1}) \arrow[r] \arrow[d, "\cong\ \text{claim}"] & H_{i-1}(K^{k-1}) \arrow[d, "\cong,\ \text{归纳假设}"] \\
H_{i+1}(|K^k|, |K^{k-1}|) \arrow[r, "\delta"] & H_i(|K^{k-1}|) \arrow[r] & H_i(|K^k|) \arrow[r] & H_i(|K^k|, |K^{k-1}|) \arrow[r] & H_{i-1}(|K^{k-1}|)
\end{tikzcd}$$

Claim: $H_i(K^k, K^{k-1}) \longrightarrow H_i(|K^k|, |K^{k-1}|)$ 为同构，$\forall\, i$.

$$H_i(K^k, K^{k-1}) \cong \begin{cases} 由\underbrace{K 的 k\text{-单形}} 生成的自由 \text{Abel} 群, & \text{if } i = k. \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

$\{\tilde{\Delta}_k^\alpha \mid \alpha \in I_k\}$. $\sigma_\alpha : \Delta_k \longrightarrow |K|$

$\sum t_i P_i \longmapsto \sum t_i v_i^\alpha$.

$$\begin{tikzcd}
\left.\begin{array}{l} \varphi_k : \coprod_{\alpha\in I_k} \tilde{\Delta}_k^\alpha \longrightarrow |K^k| \\ \mathrm{Im}\left(\varphi_k\Big|_{\coprod_{\alpha\in I_k} \partial\tilde{\Delta}_k^\alpha}\right) \subset |K^{k-1}| \end{array}\right\} \arrow[r, rightsquigarrow] & \left(\coprod_{\alpha\in I_k} \hat{\Delta}_k^\alpha, \coprod_{\alpha\in I_k} \partial\tilde{\Delta}_k^\alpha\right) \arrow[r] \arrow[d] & (|K^k|, |K^{k-1}|) \arrow[d] \\
 & \text{good pair.} & \text{good pair.}
\end{tikzcd}$$

有交换图表：

$$\begin{tikzcd}
H_i\left(\coprod_{\alpha\in I_k}\widetilde{\Delta}_k^{\alpha},\ \coprod_{\alpha\in I_k}\partial\widetilde{\Delta}_k^{\alpha}\right) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & H_i(|K^k|, |K^{k-1}|) \arrow[d, "\wr"] \\
\widetilde{H}_i\left(\coprod_{\alpha\in I_k}\widetilde{\Delta}_k^{\alpha} \big/ \coprod_{\alpha\in I_k}\partial\widetilde{\Delta}_k^{\alpha}\right) \arrow[r, "\cong"] & \widetilde{H}_i(|K^k| / |K^{k-1}|)
\end{tikzcd}$$

于是： $H_i(|K^k|, |K^{k-1}|) \cong H_i\left(\coprod_{\alpha\in I_k}\widetilde{\Delta}_k^{\alpha},\ \coprod_{\alpha\in I_k}\partial\widetilde{\Delta}_k^{\alpha}\right)$

$$\cong \bigoplus_{\alpha\in I_k} H_i(\widetilde{\Delta}_k^{\alpha}, \partial\widetilde{\Delta}_k^{\alpha}).$$

$$\cong \begin{cases} \bigoplus_{\alpha\in I_k} \mathbb{Z}\, l_\alpha , & i = k \\ 0 , & \text{else} \end{cases}$$

其中 $l_\alpha : \Delta_k \to \widetilde{\Delta}_k^{\alpha}$ （l_α 保持顶点的排序）.

因为当 $i \neq k$ 时，

$$H_i(K^k, K^{k-1}) \cong 0, \quad H_i(|K^k|, |K^{k-1}|) \cong 0.$$

所以只需证：

$$\begin{tikzcd}
H_k(K^k, K^{k-1}) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=90] & H_k(|K^k|, |K^{k-1}|) \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=90] \\
\bigoplus_{\alpha \in I_k} \mathbb{Z}(v_0^\alpha, \cdots, v_n^\alpha). & \bigoplus_{\alpha \in I_k} H_k(\tilde{\Delta}_k^\alpha, \partial \hat{\Delta}_k^\alpha). \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=90, "\leftarrow \text{切除定理}"'] \\
 & \bigoplus_{\alpha \in I_k} \mathbb{Z}\, l_\alpha.
\end{tikzcd}$$

为同构.

从 $\bigoplus_{\alpha \in I_k} \mathbb{Z}(v_0^\alpha, \cdots, v_n^\alpha)$ 到 $\bigoplus_{\alpha \in I_k} \mathbb{Z}\, l_\alpha$ 有群同构中：$(v_0^\alpha, \cdots, v_n^\alpha) \longmapsto l_\alpha$. 则有交换图表：

$$\begin{tikzcd}
H_k(K^k, K^{k-1}) \arrow[rr] \arrow[dd, phantom, "\cong" sideways] & & H_k(|K^k|, |K^{k-1}|) \arrow[dd, phantom, "\cong" sideways] & \\
& (v_0^\alpha, \dots, v_k^\alpha) \arrow[rr, mapsto] & & \sigma_\alpha : \Delta_k \to |K^k| \quad \sum t_i p_i \mapsto \sum t_i v_i^\alpha \\
\bigoplus_{\alpha \in I_k} \mathbb{Z}(v_0^\alpha, \dots, v_k^\alpha) & & \bigoplus_{\alpha \in I_k} H_k(\widetilde{\Delta}_k^\alpha, \partial \widetilde{\Delta}_k^\alpha) \arrow[dd, phantom, "\cong" sideways] & \iota_\alpha : \Delta_k \to \widetilde{\Delta}_k^\alpha \quad \sum t_i p_i \mapsto \sum t_i v_i^\alpha \arrow[u, mapsto] \\
& (v_0^\alpha, \dots, v_k^\alpha) \arrow[uu, mapsto] \arrow[dr, "\cong"] \arrow[ddrr, mapsto, "\psi"'] & & \\
& & \bigoplus_{\alpha \in I_k} \mathbb{Z} \iota_\alpha & \\
& & & \iota_\alpha \arrow[uuu, mapsto]
\end{tikzcd}$$

于是 Claim 得证.

由 five lemma, $H_i(K^k) \to H_i(|K^k|)$ 为同构, 归纳完成.

Case 2. $K \neq K^n$, $\forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

待证: $H_i(K) \longrightarrow H_i(|K|)$ 为同构, $\forall i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Fact. $|K|$ 中的任何一个紧子集必包含在 K 的一个有限子复形中. ([Munkres], [Hatcher], 或见下一节)

(⟹ ∀ 奇异 i-chain $\sigma = \sum_{j=1}^{m} k_j \sigma_j$ on $|K|$, σ 必落在同态 $S_i(|K^n|) \longrightarrow S_i(|K|)$ 的同态像中, for some n) (*)

- $H_i(K) \longrightarrow H_i(|K|)$ 为满射.

$\forall$ $|K|$ 上的一个奇异 i-cycle σ, 由 (*), $\exists\, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, s.t. σ 为 $|K^n|$ 中的一个奇异 i-cycle.

考虑交换图表:

$$\begin{tikzcd}
H_i(K^n) \ni c \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "\cong", "\text{Case 1}"'] & H_i(K) \ni d \arrow[d, mapsto] \\
H_i(|K^n|) \ni \sigma \arrow[r, mapsto] & H_i(|K|) \ni \sigma
\end{tikzcd}$$

于是 $\exists\, d \in H_i(K)$, s.t. $d \longmapsto \sigma$ 在 $H_i(|K|)$ 中所代表同调类.

- $H_i(K) \longrightarrow H_i(|K|)$ 为单射.

$\forall$ K 中的 i-cycle c, 设 $c \longmapsto \sigma$, 且 $\sigma = \partial \Sigma$, 其中 Σ 为 $|K|$ 上的一个奇异的 $(i+1)$-chain,

由 (*)，$\exists\, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，s.t. ① σ 与 Σ 落在同态 $S.(|K^n|) \longrightarrow S.(|K|)$ 的像中 ② $n \geq i$，考虑交换图表：

$$\begin{tikzcd}
H_i(K^n) \arrow[rr] \arrow[d, "\cong"', "\text{Case 1}"] & c \arrow[rr, mapsto] \arrow[ddl, mapsto] & H_i(K) \arrow[d] & c \arrow[dd, mapsto] \\
H_i(|K^n|) \arrow[rr] & & H_i(|K|) & \\
\partial\Sigma = \sigma \arrow[rrr, mapsto] & & & \sigma = \partial\Sigma
\end{tikzcd}$$

因而 $c = 0$ in $H_i(K)$.

最后设 $L \neq \phi$ 的情形：

考虑短正合列的交换图表：

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C.(L) \arrow[r] \arrow[d] & C.(K) \arrow[r] \arrow[d] & C.(K, L) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & S.(|L|) \arrow[r] & S.(|K|) \arrow[r] & S.(|K|, |L|) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$\leadsto$ 长正合列：

$$\begin{tikzcd}
H_n(L) \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & H_n(K) \arrow[r] \arrow[d, "f_2"] & H_n(K, L) \arrow[r] \arrow[d, "f_3"] & H_{n-1}(L) \arrow[r] \arrow[d, "f_4"] & H_{n-1}(K) \arrow[d, "f_5"] \\
H_n(|L|) \arrow[r] & H_n(|K|) \arrow[r] & H_n(|K|, |L|) \arrow[r] & H_{n-1}(|L|) \arrow[r] & H_{n-1}(|K|)
\end{tikzcd}$$

由已证的定理的绝对版本，f_1, f_2, f_4, f_5 为同构.

由 five lemma $\Rightarrow$ f_3 为同构. #

定理1. 设 X 为可三角剖分的拓扑空间，(K, h), (K', h') 为 X 的两个三角剖分. 则有自然的同构：

$$\varphi_{KK'} : H_n(K) \xrightarrow{\cong} H_n(K') , \quad \forall\ n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

自然：若 (K, h), (K', h'), (K'', h'') 为 X 的三角剖分，则有交换图表：

$$\begin{tikzcd}
H_n(K) \arrow[rr, "\varphi_{KK'}"] \arrow[dr, "\varphi_{KK''}"'] & & H_n(K') \arrow[dl, "\varphi_{K'K''}"] \\
& H_n(K'') &
\end{tikzcd}$$

i.e. $\varphi_{K'K''} \circ \varphi_{KK'} = \varphi_{KK''}$.

证明：由定理4，有自然同构：

$$\varphi_{KK'} = \varphi_{K'}^{-1} \circ \varphi_K .$$

$\varphi_K : H_n(K) \xrightarrow{u_K} H_n(|K|) \xrightarrow{h_*} H_n(X)$

$\varphi_{K'} : H_n(K') \xrightarrow{u_{K'}} H_n(|K'|) \xrightarrow{h'_*} H_n(X')$

$\varphi_{K''} : H_n(K'') \xrightarrow{u_{K''}} H_n(|K''|) \xrightarrow{h''_*} H_n(X'')$.

#

推论：对于有限单纯复形 X，其奇异同调群 $H_n(X)$ 均为有限生成 Abel 群.

推论：若 X 为紧的流形，$\Rightarrow$ $H_n(X)$ 为有限生成 Abel 群.

定义：若 X 为有限单纯复形，$H_n(X)$ 的自由部分的直和项 $\mathbb{Z}$ 的个数，称为 X 的第 n 个 Betti 数

§9. 应用.

定理5.（Brower 不动点定理）设 B^n 为 n 维闭球，则从 B^n 到 B^n 的连续映射必有不动点.

证明：设 $f: B^n \longrightarrow B^n$ 无不动点，构造映射 $g: B^n \longrightarrow S^{n-1}$.

规定 $g(x)$ = "从 $f(x)$ 连到 x 的射线与 S^{n-1} 的交点".

则 g 连续，$g|_{S^{n-1}} = Id_{S^{n-1}}$

$n = 2$.

考虑复合 $S^{n-1} \xhookrightarrow{i} B^{n} \xrightarrow{g} S^{n-1}$. $g \circ i = \mathrm{Id}_{S^{n-1}}$.

$\mathrm{Id} = (g \circ i)_{*}$:

$$\begin{tikzcd}
H_{n-1}(S^{n-1}) \arrow[rr, "同构"'] \arrow[dr, "i_*"'] & & H_{n-1}(S^{n-1}) \\
& H_{n-1}(B^{n}) \arrow[ur, "g_*"'] &
\end{tikzcd}$$

$||$

$g_{*} \circ i_{*}$.

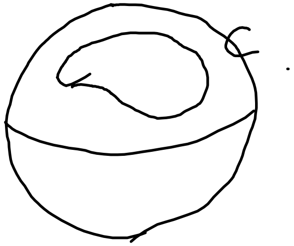
$\Rightarrow g_{*} : H_{n-1}(B^{n}) \longrightarrow H_{n-1}(S^{n-1})$ 为满同态. $(n \geq 1)$.

$n = 1$. $g_{*} : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. 矛盾

$n > 1$, $g_{*} : 0 \longrightarrow \mathbb{Z}$ 矛盾.

综上，g_{*} 不可能为满同态，矛盾. 因而 f 必有不动点 #.

定理6. (Generalized Jordan curve theorem). 设 $n\in\mathbb{Z}_+$, 设 C 为 S^n 中同胚于 S^{n-1} 的子空间, 则 $S^n\setminus C$ 有两个连通分支.



定理7. (invariance of domain) 设 $U\subset\mathbb{R}^n$ 为开子集, $f: U\to\mathbb{R}^n$ 为连续单射, $f(U)\subset\mathbb{R}^n$ 也为开子集, 且 $f: U\to f(U)$ 为同胚.

定理8. (invariance of dimension). 设 $U\subset\mathbb{R}^m$, $V\subset\mathbb{R}^n$ 均为非空开子集, 则 $U\cong V$, 则 $m=n$.

定理7 $\Rightarrow$ 定理8:

If $m<n$, $U\subset\mathbb{R}^m\hookrightarrow\mathbb{R}^n$, $U\xrightarrow{\overset{\varphi}{\cong}}V$.

$$V\xrightarrow{\varphi^{-1}}U\overset{i}{\hookrightarrow}\mathbb{R}^m\overset{j}{\hookrightarrow}\mathbb{R}^n$$

由定理7. $j\circ i(U)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中开集, 且 $j\circ i(U)\subset j(\mathbb{R}^m)$ 矛盾.

#

定理6与定理7之证明依赖于：

(a) 若 $D \subset S^n$ 为一个闭的k-胞腔，则 $\tilde{H}_i(S^n \setminus D) = 0$, $\forall i$.

(b) 若 $C \subset S^n$ 为同胚于 S^k, $0 \le k < n$, 的子空间，则：

$$\tilde{H}_i(S^n \setminus C) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{if } i = n-k-1 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

先承认 (a), (b)：

定理6之证明： $C \subset S^n$, $C \cong S^{n-1}$,

由 (b), $\Rightarrow \tilde{H}_0(S^n \setminus C) \cong \mathbb{Z}$, $\Rightarrow H_0(S^n \setminus C) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

$\Rightarrow S^n \setminus C$ 有两个道路连通分支.

$$\left. \begin{array}{l} S^n \setminus C \underset{open}{\subset} S^n, \\ S^n \text{局部道路连通} \end{array} \right\} \Rightarrow S^n \setminus C \text{ 也局部道路连通}$$

(问题： 对于局部道路连通空间，道路连通分支与连通分支吻合)

$\Rightarrow S^n\setminus C$ 恰有两个连通分支. #

定理下之证明:

对 $\mathbb{R}^n$ 做一点紧化: $\mathbb{R}^n\cup\{\infty\}\cong S^n$.

$f: U\longrightarrow S^n$ 为连续单射. $U\underset{\text{open}}{\subset}\mathbb{R}^n$. 下证

$f(U)$ 为 S^n 中开集 ($\Rightarrow f: U\to f(U)$ 为同胚).

$\forall x\in U$, 要证 $f(x)$ 为 $f(U)$ 的内点.

$\exists\delta>0$. s.t. 开球 $B(x;\delta)\subset \underbrace{U.\ 则}_{\text{且 }\overline{B(x;\delta)}\subset U,}$ 只要证 $f(B(x;\delta))$

为 S^n 中开集.

$$f|_{\partial B(x;\delta)}: \underset{\substack{\uparrow\\ \text{紧}}}{\partial B(x;\delta)}\longrightarrow \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Hausdorff}}}{f(\partial B(x;\delta))}.$$

$$\Rightarrow f|_{\partial B(x;\delta)}: \partial B(x;\delta)\longrightarrow \overset{=C\subset S^n}{f(\partial B(x;\delta))}\ 为同胚.$$

$$f|_{\overline{B(x;\delta)}}: \overline{B(x;\delta)}\longrightarrow f(\overline{B(x;\delta)})\ 为同胚.$$

由定理6, $S^n\setminus C$ 恰有两个(道路)连通分支.

$$S^n\setminus C = \underbrace{\left(S^n\setminus f(\overline{B(x;\delta)})\right)}_{\uparrow} \amalg \underbrace{f(B(x;\delta))}_{道路连通}.$$

$\parallel$

$S^n\setminus f(\partial B(x;\delta))$. 道路连通 $\Leftarrow$

由(a), $\tilde{H}_0(S^n\setminus f(\overline{B(x;\delta)}))=0$.

$\Rightarrow S^n\setminus C = (S^n\setminus f(\overline{B(x;\delta)}))\amalg f(B(x;\delta))$ 为连通分支分解.

$\Rightarrow f(B(x;\delta))$ 为 S^n 中开子集 #.

下面着手于(a)、(b)的计算:

Mayer-Vietoris sequence: (M-V sequence).

设 X: top. sp. $A, B\subset X$, $\mathrm{int}(A)\cup\mathrm{int}(B)=X$.

记 $\mathcal{U}=\{A, B\}$, 有正合列:

$\forall n$. $$0 \to S_n(A\cap B) \to S_n(A)\oplus S_n(B) \to S_n^{\mathcal{U}}(X) \to 0$$ (M-V sequence)

$$c \longmapsto (-c,\ c)$$

$$(a,\ b) \longmapsto a+b.$$

$\rightsquigarrow$ 链复形的正合列:

$$0 \to S_\bullet(A\cap B) \to S_\bullet(A)\oplus S_\bullet(B) \to S_\bullet^{\mathcal{U}}(X) \to 0. \qquad (*)$$

$\rightsquigarrow$ 长正合列: (Homological M-V sequence).

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_n(A\cap B) \arrow[r] & H_n(A)\oplus H_n(B) \arrow[r] & H_n(X) \arrow[r] & H_{n-1}(A\cap B) \arrow[r] & H_{n-1}(A)\oplus H_{n-1}(B) \arrow[d] \\
 & & & & & \vdots
\end{tikzcd}$$

在(*)基础上加工.

$$\begin{tikzcd}
 & {} \arrow[d] & {} \arrow[d] & {} \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & S_1(A\cap B) \arrow[r] \arrow[d] & S_1(A)\oplus S_1(B) \arrow[r] \arrow[d] & S_1^{\mathcal{U}}(X) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & S_0(A\cap B) \arrow[r] \arrow[d] & S_0(A)\oplus S_0(B) \arrow[r] \arrow[d] & S_0^{\mathcal{U}}(X) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

(原来的)

加 I :

$$\begin{tikzcd}
 & \arrow[d] & \arrow[d] & \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & S_1(A\cap B) \arrow[r] \arrow[d] & S_1(A)\oplus S_1(B) \arrow[r] \arrow[d] & S_1^{ll}(X) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & S_0(A\cap B) \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon"] & S_0(A)\oplus S_0(B) \arrow[r, dash] \arrow[d, "\varepsilon"] & S_0^{ll}(X) \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d, dotted] & 0 \arrow[r] \arrow[d, dotted] & 0 \arrow[r] \arrow[d, dotted] & 0 \\
 & {} & {} & {} &
\end{tikzcd}$$

$$\sum n_i\sigma_i \longmapsto \left(-\sum n_i\sigma, \sum n_i\sigma_i\right)$$

$$\sum n_i\sigma_i \mapsto \sum n_i \qquad \left(-\sum n_i\sigma, \sum n_i\sigma_i\right) \mapsto \left(-\sum n_i, \sum n_i\right)$$

$$c \longmapsto (-c, c) \qquad (a, b) \longmapsto a+b$$

对之应用短正合列诱导长正合列引理：

$$\cdots \longrightarrow \tilde{H}_n(A\cap B) \longrightarrow \tilde{H}_n(A)\oplus\tilde{H}_n(B) \longrightarrow \tilde{H}_n(X) \longrightarrow \tilde{H}_{n-1}(A\cap B) \longrightarrow \tilde{H}_{n-1}(A)\oplus\tilde{H}_{n-1}(B) \longrightarrow \cdots$$

(a) $\tilde{H}_i(S^n\setminus D)=0$, $\forall i$. 其中 D 为闭的 k-胞腔.

将对 k 做归纳.

$k=0$, $S^n\setminus D\cong\mathbb{R}^n$, 显然成立.

设当 $k \leq l-1$ 时，已证 $\tilde{H}_i(S^n \setminus D) \cong 0$，$\forall i$，其中 D 为闭 k-胞腔，

下设 D 为闭的 l-胞腔。选取同胚 $h: I^l \longrightarrow D$.

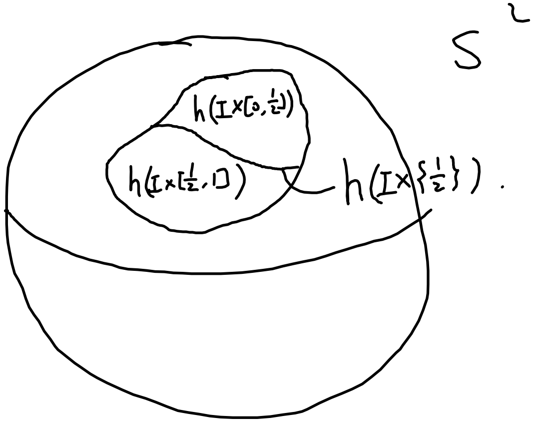
$(I = [0,1])$

令 $A = S^n \setminus h(I^{l-1} \times [0,\frac{1}{2}])$，$B = S^n \setminus h(I^{l-1} \times [\frac{1}{2},1])$.

「$n=2$，$l=2$.

$$A \cup B = S^n \setminus h(I^{l-1} \times \{\tfrac{1}{2}\}).$$

$$A \cap B = S^n \setminus D.$$



」

应用 M-V sequence:

$$\underset{\substack{\cong\ \text{由假设} \\ 0}}{\tilde{H}_{j+1}(S^n \setminus \underbrace{h(I^{l-1}\times\{\tfrac{1}{2}\})})} \to \tilde{H}_j(A \cap B) \to \tilde{H}_j(A) \oplus \tilde{H}_j(B) \to \underset{\substack{\cong\ \text{由假设} \\ 0}}{\tilde{H}_j(S^n \setminus \overset{\text{closed } (l-1)\text{-cell}}{\overset{\downarrow}{\underbrace{h(I^{l-1}\times\{\tfrac{1}{2}\})}}})}.$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{H}_j(\underset{S^n \setminus D.}{\underline{A \cap B}}) \xrightarrow{\cong} \tilde{H}_j(A) \oplus \tilde{H}_j(B).$$

下证: $\tilde{H}_j(S^n\setminus D) \cong 0$.

假设 $S^n\setminus D$ 中的奇异 j-cycle c 不为 boundary.

由同构 $\tilde{H}_j(S^n\setminus D) \xrightarrow{\cong} \tilde{H}_j(A) \oplus \tilde{H}_j(B)$.

$$c\text{代表的同调类} \longmapsto (c\text{视为}A\text{中cycle所代表的同调类},\ c\text{视为}B\text{中cycle所代表的同调类})$$

不妨设 c 视为 A 中 cycle 所代表的同调类不为零, i.e. c 不为 A 中的 boundary. 记 $A = S^n\setminus h(I^{l-1}\times I_1)$, $I_1 = [0,\frac{1}{2}]$.

再将 I_1 二等分, 重复上述操作, 设 I_1 等分后得到的两个闭区间为 I_2^1, I_2^2, $\tilde{H}_j(S^n\setminus h(I^{l-1}\times I_1)) \xrightarrow{\cong} \tilde{H}_j(S^n\setminus h(I^{l-1}\times I_2^1)) \oplus \tilde{H}_j(S^n\setminus h(I^{l-1}\times I_2^2))$.

设 c 不为 $S^n\setminus h(I^{l-1}\times I_2^1)$ 中 boundary. 记 $I_2 = I_2^1$.

重复该构造, $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots\cdots$, 满足

$$|I_n| = \frac{1}{2^n}.$$

c 不为 $S^n \setminus h(I^{l-1}\times I_m)$ 中 boundary. $\forall m \geqslant 1$.

$$\begin{array}{l} \Big(S^n\setminus h(I^{l-1}\times I_1) \subset S^n\setminus h(I^{l-1}\times I_2) \subset \cdots\cdots \subset S^n\setminus h(I^{l-1}\times I_m) \subset \cdots \Big) \\ \qquad\quad \cup \\ S^n\setminus h(I^{l}) \\ \qquad\quad \rotatebox{90}{$\in$} \\ \qquad\quad c \end{array} \subset S^m\setminus \underbrace{h(I^{l-1}\times\{p\})}_{\substack{\downarrow \\ \text{closed } (l-1)\text{-cell}}}.$$

设 $\bigcap\limits_{m=1}^{+\infty} I_m = \{p\}$.

由归纳假设, c 必为 $S^m\setminus h(I^{l-1}\times\{p\})$ 中 boundary.

设 $c = \partial d$, $d = \sum\limits_{j=1}^{q} m_j \sigma_j$.

$$S^m\setminus h(I^{l-1}\times\{p\}) = \bigcup_{m=1}^{+\infty} S^n\setminus h(I^{l-1}\times I_m) \supset \bigcup_{j=1}^{q} \mathrm{Im}\,\sigma_j$$

不妨设 $S^n\setminus h(I^{l-1}\times I_{m_0}) \supset \bigcup\limits_{j=1}^{q} \mathrm{Im}\,\sigma_j$.

$\Rightarrow d \in S_{j+1}(S^n\setminus h(I^{l-1}\times I_{m_0}))$ $\Rightarrow$ c 为 $S^n\setminus h(I^{l-1}\times I_{m_0})$ 中 boundary. 矛盾

\#

(b). $$\tilde{H}_i(S^n \setminus C) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{if } i = n-k-1 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

(其中 $C \cong S^k$, $0 \le k < n$).

对 k 用归纳法：

$k=0$. $S^n \setminus C \cong S^{n-1} \times \mathbb{R} \simeq S^{n-1}$. 显然!

设对 $k \le l-1$ 已证. 下设 $C \cong S^l$. 固定一个同胚

$h : S^l \to C$.

$S^l_+ = \{(x^0, \cdots, x^l) \in S^l \mid x^l \geq 0\}$, $S^l_- = \{(x^0, \cdots, x^l) \in S^l \mid x^l \le 0\}$.

令 $A = S^n \setminus \underbrace{h(S^l_+)}_{\text{闭胞腔}}$, $B = S^n \setminus h(S^l_-)$.

$A \cap B = S^n \setminus C$. $A \cup B = S^n \setminus \underbrace{h(S^l_+ \cap S^l_-)}_{\cong S^{l-1}}$.

M-V sequence:

$$\begin{tikzcd}
H_j(A\cap B) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H_j(A)\oplus H_j(B) \arrow[r] \arrow[d, equal, "(a)"] & H_j(A\cup B) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H_{j-1}(A\cap B) \arrow[d, equal] \\
H_j(S^n\setminus C) & 0 & H_j(S^n\setminus h(S^\ell_+\cap S^\ell_-)) & H_{j-1}(S^n\setminus C)
\end{tikzcd}$$

$$0 \to H_{j+1}(S^n\setminus h(S^\ell_+\cap S^\ell_-)) \longrightarrow H_j(S^n\setminus C) \longrightarrow 0.$$

$$\Rightarrow \quad H_{j+1}(S^n\setminus \underbrace{h(S^\ell_+\cap S^\ell_-)}_{\cong\, S^{\ell-1}}) \xrightarrow{\cong} H_j(S^n\setminus C).$$

$$j = n-\ell-1 .$$

$$\Updownarrow$$

$$H_j(S^n\setminus C) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{if } \underline{j+1 = n-(\ell-1)-1} \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

#