拓扑习题-14

1. 设 $\mathbb{F}$ 为一个域, 设 V 为一个 $\mathbb{F}$ 上的线性空间, 设 $<\cdot,\cdot>$ 为 V 上的一个非退化的反称的双线性型, 可以证明 V 的维数一定是偶数, 记 $\dim_{\mathbb{F}} V = 2n$. 可以证明可以找到 V 的一组基 $e_1, \cdots, e_n, f_1, \cdots, f_n$, 使

$$< e_i, f_j >= \delta_{ij}, < e_i, e_j >= 0, < f_i, f_j >= 0, \forall i, j.$$

(这样的基称为 $(V, <\cdot,\cdot>)$ 的一组 symplectic basis), 通过映射 $V \to \mathbb{F}^{2n}, \sum_{i=1}^n a^i e_i + \sum_{j=1}^n b^j f_j \mapsto (a^1, \cdots, a^n, b^1, \cdots, b^n)$, 我们就把 $(V, <\cdot,\cdot>)$ 等同于 $(\mathbb{F}^{2n}, <\cdot,\cdot>)$, 其中对于任意的 $x = (x^1, \cdots, x^{2n}), y = (y^1, \cdots, y^{2n}) \in \mathbb{F}^{2n}$,

$$< x, y >:= \begin{pmatrix} x^1 & \cdots & x^{2n} \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{array}{c|c} 0 & I_n \\ \hline -I_n & 0 \end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^{2n} \end{pmatrix}.$$

记

$$\Omega = \left(\begin{array}{c|c} 0 & I_n \\ \hline -I_n & 0 \end{array}\right).$$

记 $M_{n\times n}(\mathbb{F})$ 为 $\mathbb{F}$ 上的 $n \times n$ 方阵全体，则 $\mathbb{F}$ 在矩阵加法、矩阵乘法、数乘下构成一个 $\mathbb{F}$-代数，称为 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶全矩阵代数。定义域 $\mathbb{F}$ 上的辛群为

$$Sp(2n; \mathbb{F}) = \{A \in M_{2n\times 2n}(\mathbb{F}) \mid < Ax, Ay >=< x, y >, \forall x, y \in \mathbb{F}^{2n}\}.$$

试验证 $Sp(2; \mathbb{F}) = SL(2, \mathbb{F})$, 试猜测 $Sp(2n; \mathbb{C})$ 的实维数。