6.2 基于多项式的一维轨迹规划

基本一维轨迹规划

- 线性轨迹（速度恒定）

$$q(t) = a_0 + a_1(t - t_0).$$

  - 只需给定初始时间t0、结束时间t1、初始位置q0和结束位置q1即可

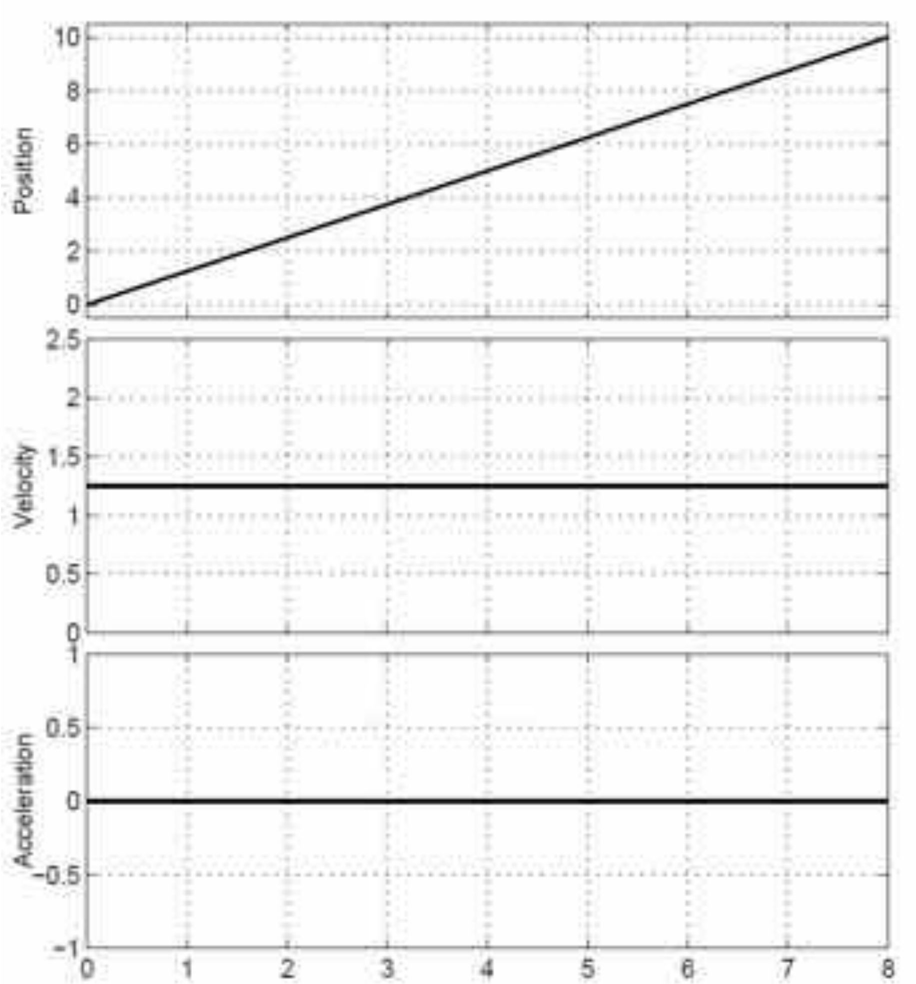
$$\begin{cases} q(t_0) = q_0 = a_0 \\ q(t_1) = q_1 = a_0 + a_1(t_1 - t_0) \end{cases} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \end{bmatrix}$$

$$T = t_1 - t_0$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} a_0 = q_0 \\ a_1 = \dfrac{q_1 - q_0}{t_1 - t_0} = \dfrac{h}{T} \end{cases}$$

基本一维轨迹规划

- 线性轨迹示例



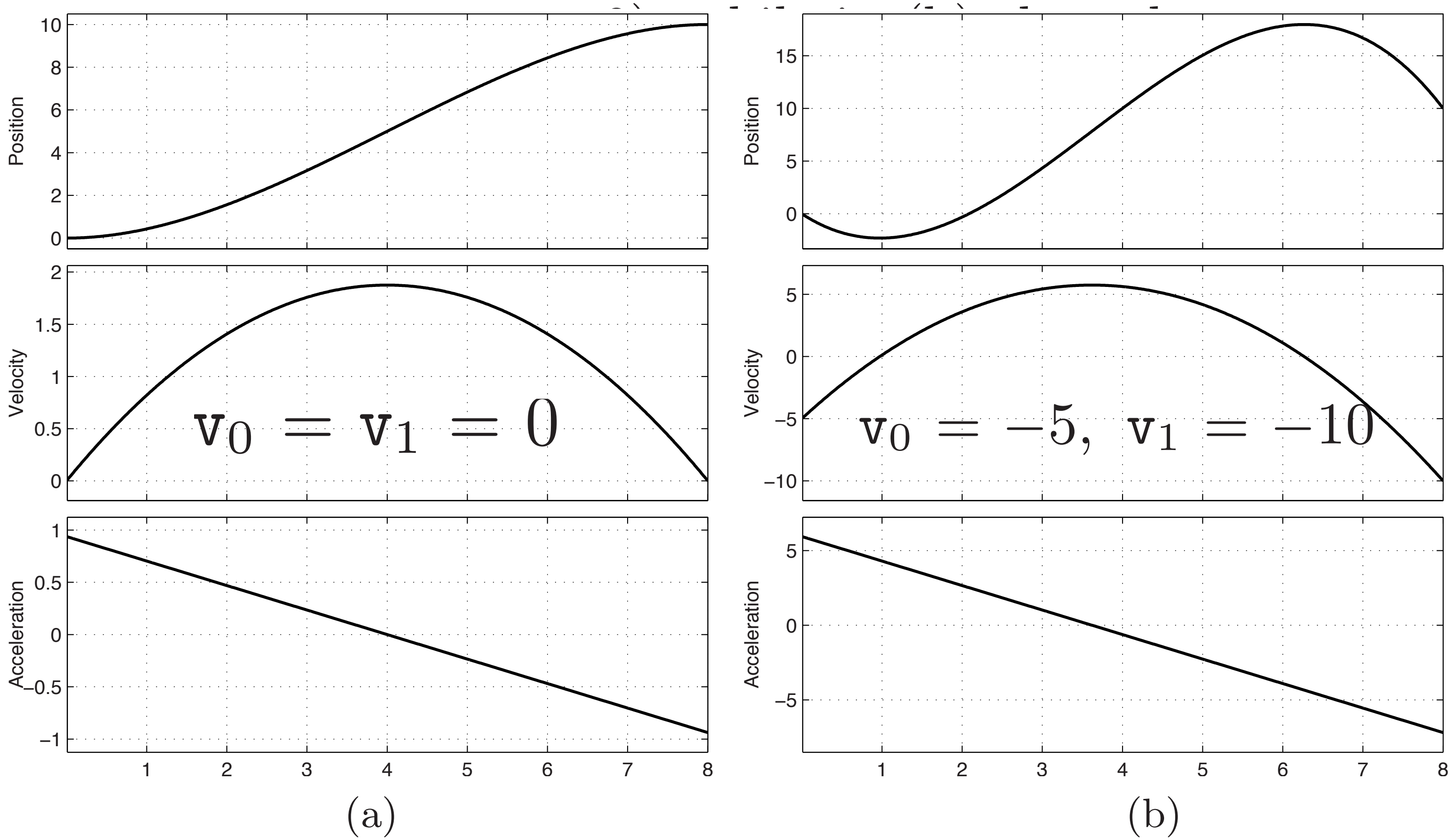
$$t_0 = 0,\ t_1 = 8,$$

$$q_0 = 0,\ q_1 = 10.$$

基本一维轨迹规划

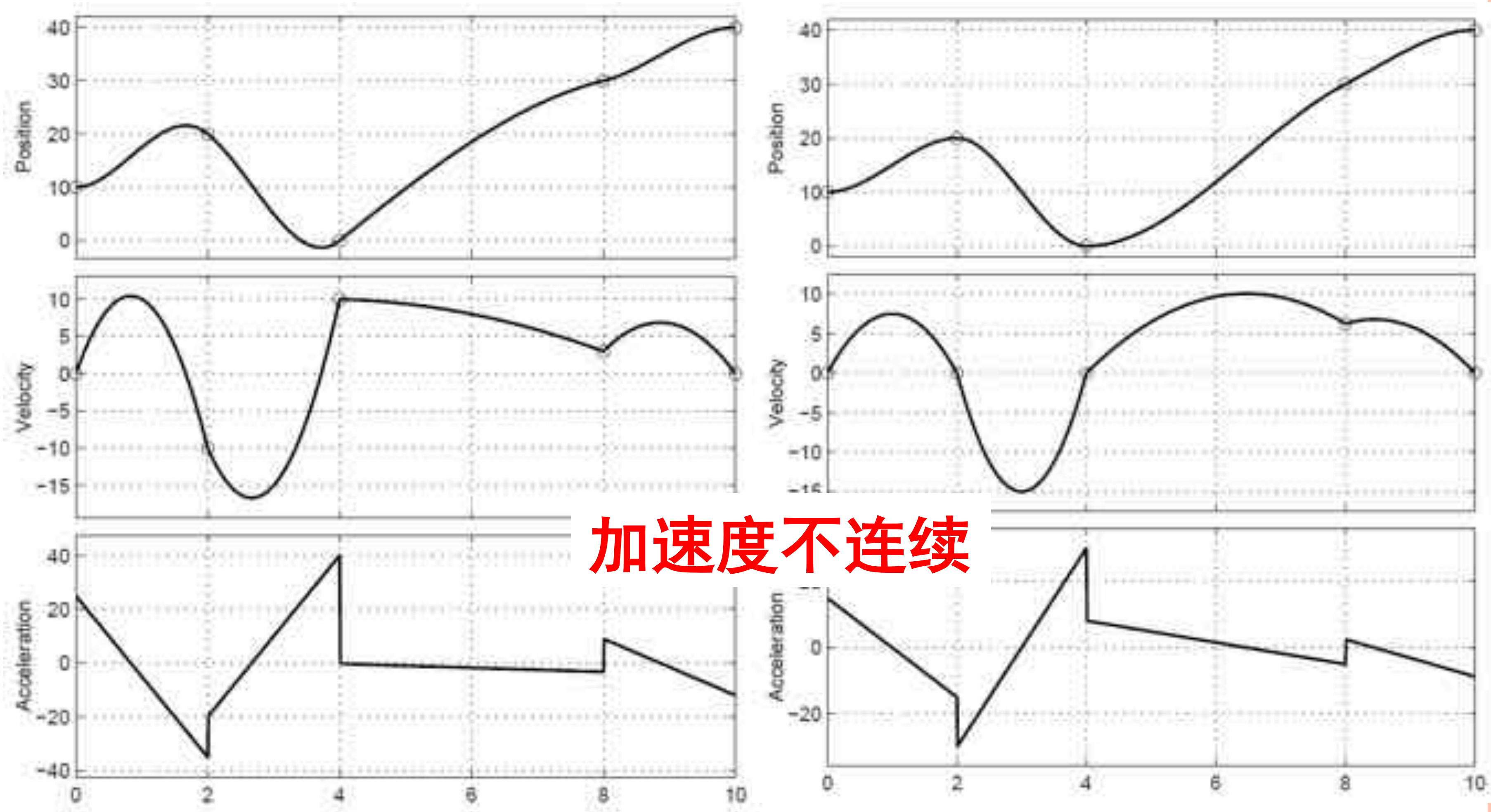
- 三阶多项式：可满足任意的q0,q1,v0,v1约束

$$q_0 = 0,\ q_1 = 10,\ t_0 = 0,\ t_1 = 8.$$



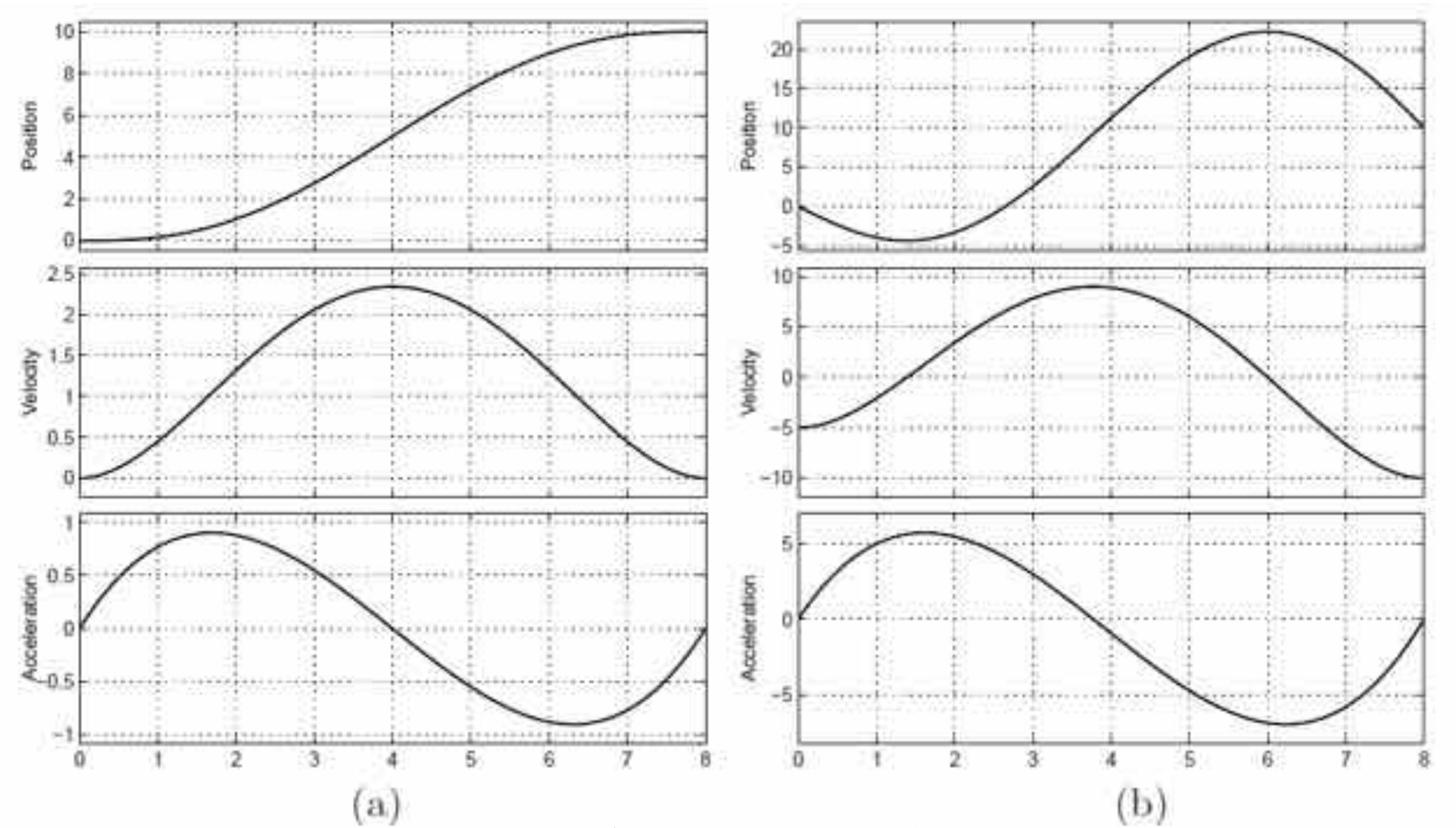
基本一维轨迹规划

- 利用多个三阶多项式可构建过多点的轨迹



基本一维轨迹规划

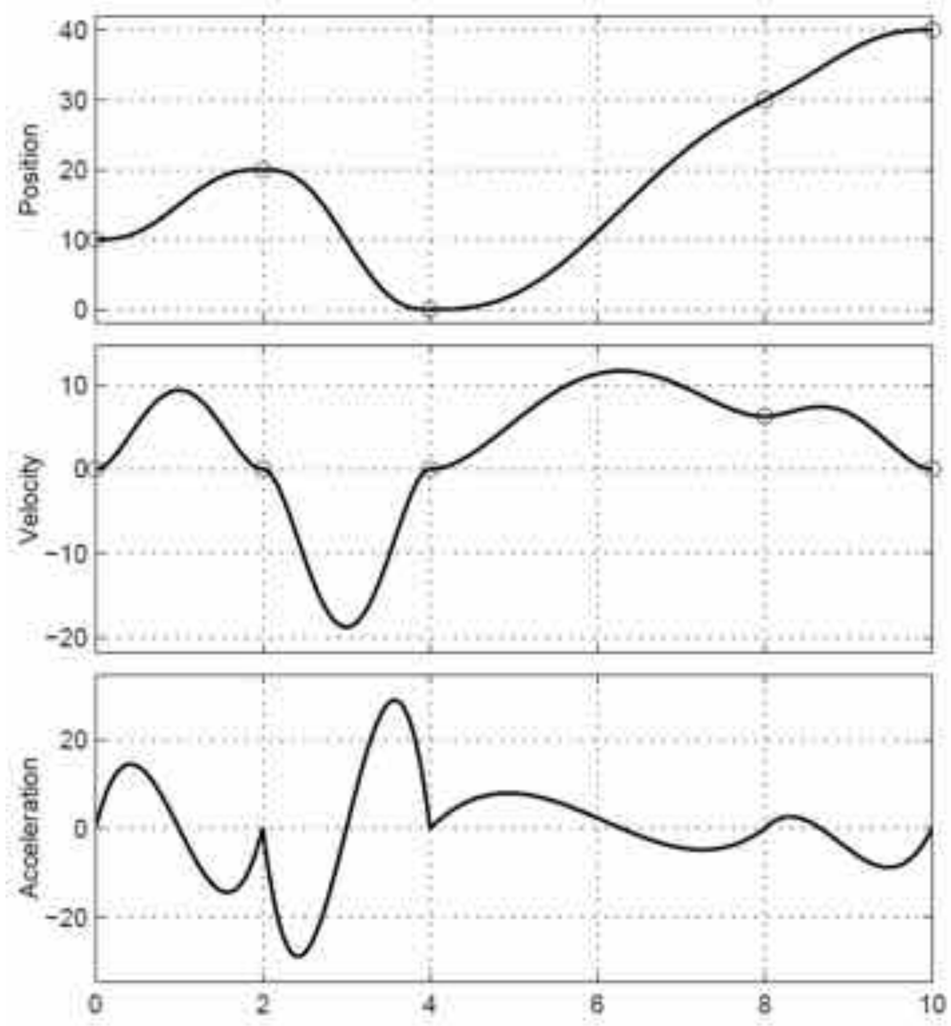
- 五阶多项式：加速度连续



单点轨迹规划

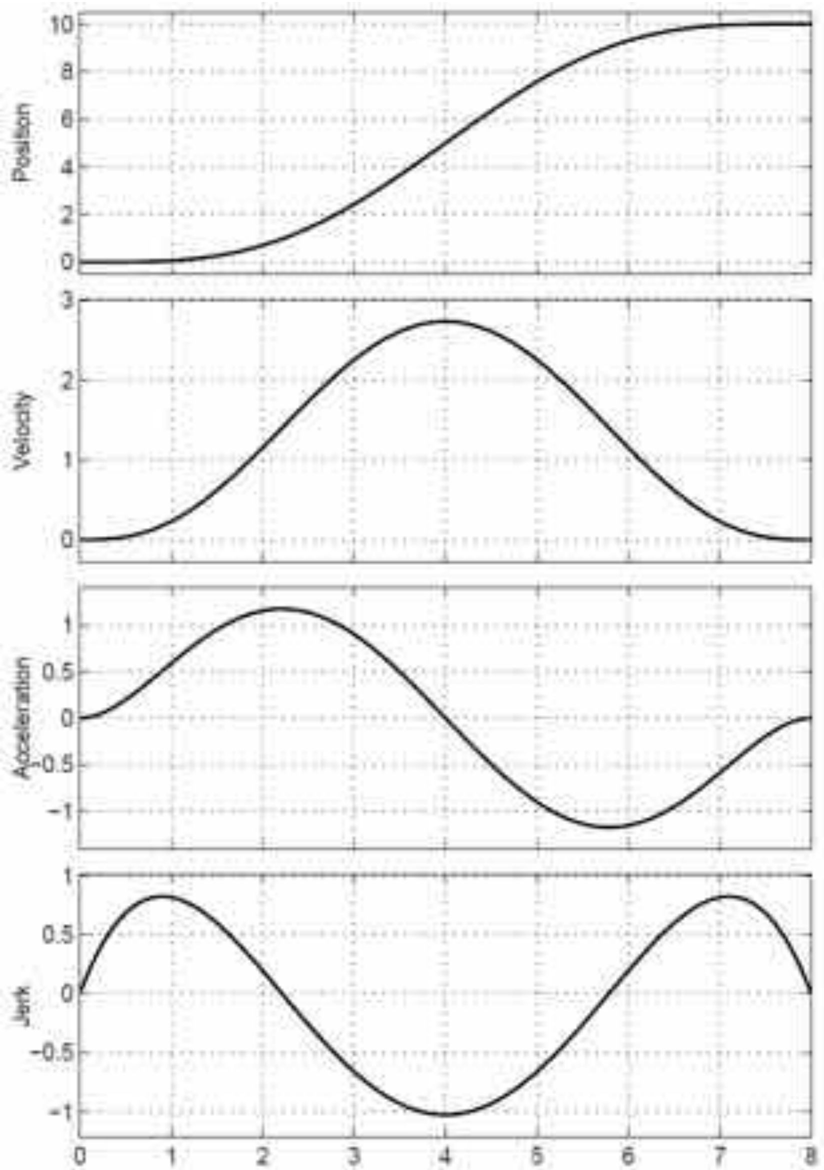
基本一维轨迹规划

- 基于多个五阶多项式实现的多点轨迹规划



基本一维轨迹规划

- 七阶多项式：
  可使加加速度连续

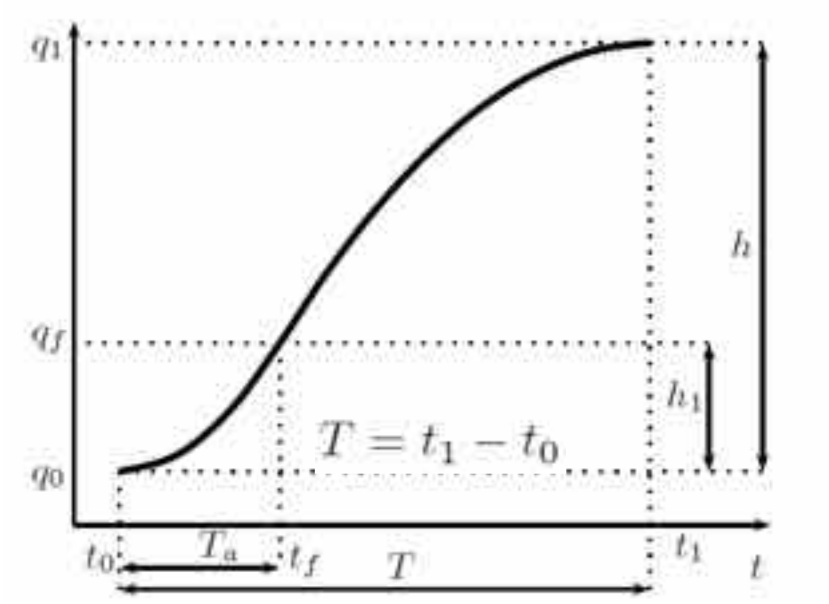


复合一维轨迹规划

- 通过多个基本一维轨迹合成，可降低多项式阶次
- 可以在给定多项式阶数的情况下获得连续的速度、加速度或者加加速度曲线
- 可以利用最大化速度或加速度等来实现时间最优

复合一维轨迹规划

- **抛物线轨迹：由2个二阶多项式合成**



阶段1 $t \in [t_0,\ t_f].$

$$q_a(t) = a_0 + a_1 (t - t_0) + a_2 (t - t_0)^2,$$

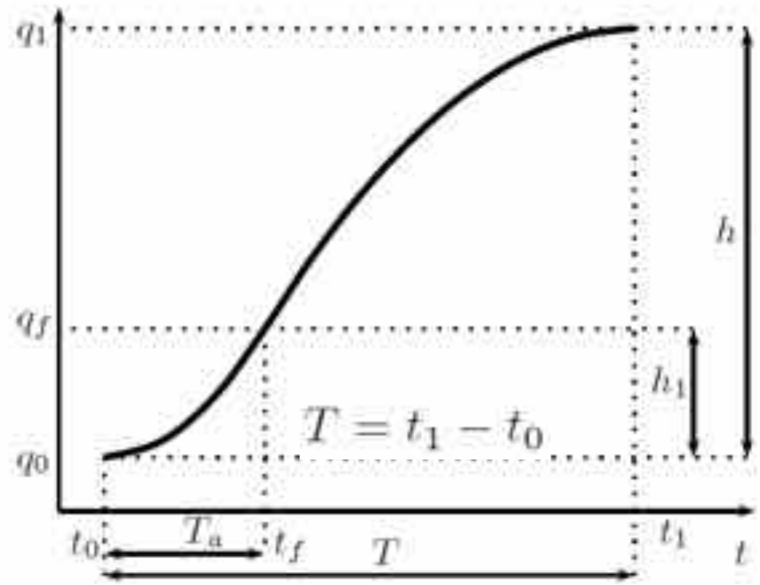
阶段2 $t \in [t_f,\ t_1].$

$$q_b(t) = a_3 + a_4 (t - t_f) + a_5 (t - t_f)^2$$

加速度恒定，可满足初末位置和初末速度约束

复合一维轨迹规划

- 抛物线轨迹（加速度恒定）：由2个二阶多项式合成，可满足初末位置和初末速度约束



阶段1 $t \in [t_0,\ t_f].$

$$q_a(t) = a_0 + a_1(t - t_0) + a_2(t - t_0)^2,$$

根据点q0,qf和初始速度v0可以求得参数

$$\begin{cases} q_a(t_0) = q_0 = a_0 \\ q_a(t_f) = q_f = a_0 + a_1(t_f - t_0) + a_2(t_f - t_0)^2 \\ \dot{q}_a(t_0) = \mathrm{v}_0 = a_1. \end{cases}$$

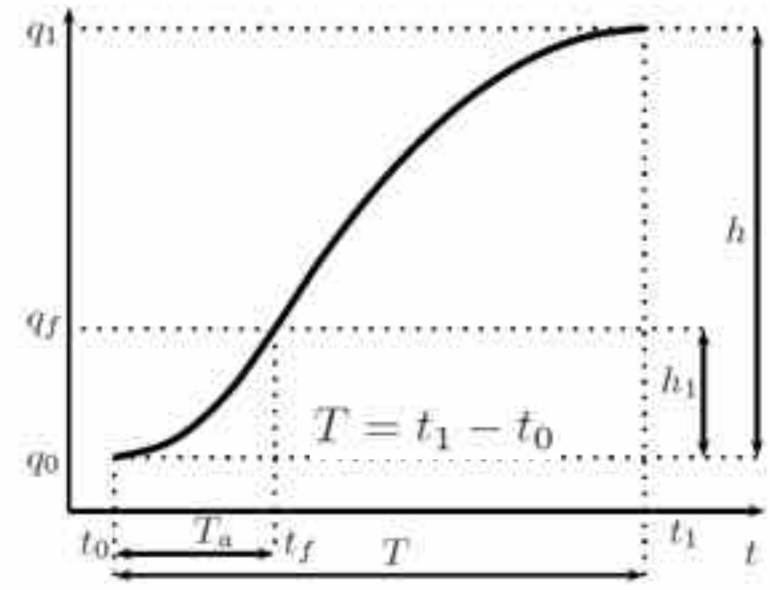
如果 $t_f = \frac{t_0+t_1}{2}$ 且 $q(t_f) = q_f = \frac{q_0+q_1}{2}$

$$\Longrightarrow \quad a_0 = q_0, \quad a_1 = \mathrm{v}_0, \quad a_2 = \frac{2}{T^2}(h - \mathrm{v}_0 T).$$

$$\Longrightarrow \quad \mathrm{v}_{max} = \dot{q}_a(t_f) = 2\frac{h}{T} - \mathrm{v}_0.$$

复合一维轨迹规划

- 抛物线轨迹（加速度恒定）：由2个二阶多项式合成，可满足初末位置和初末速度约束



阶段2 $t \in [t_f, t_1]$.

$$q_b(t) = a_3 + a_4(t - t_f) + a_5(t - t_f)^2$$

根据qf,末位置q1和末速度v1可以求得参数

$$\begin{cases} q_b(t_f) = q_f = a_3 \\ q_b(t_1) = q_1 = a_3 + a_4(t_1 - t_f) + a_5(t_1 - t_f)^2 \\ \dot{q}_b(t_1) = \mathrm{v}_1 = a_4 + 2a_5(t_1 - t_f) \end{cases}$$

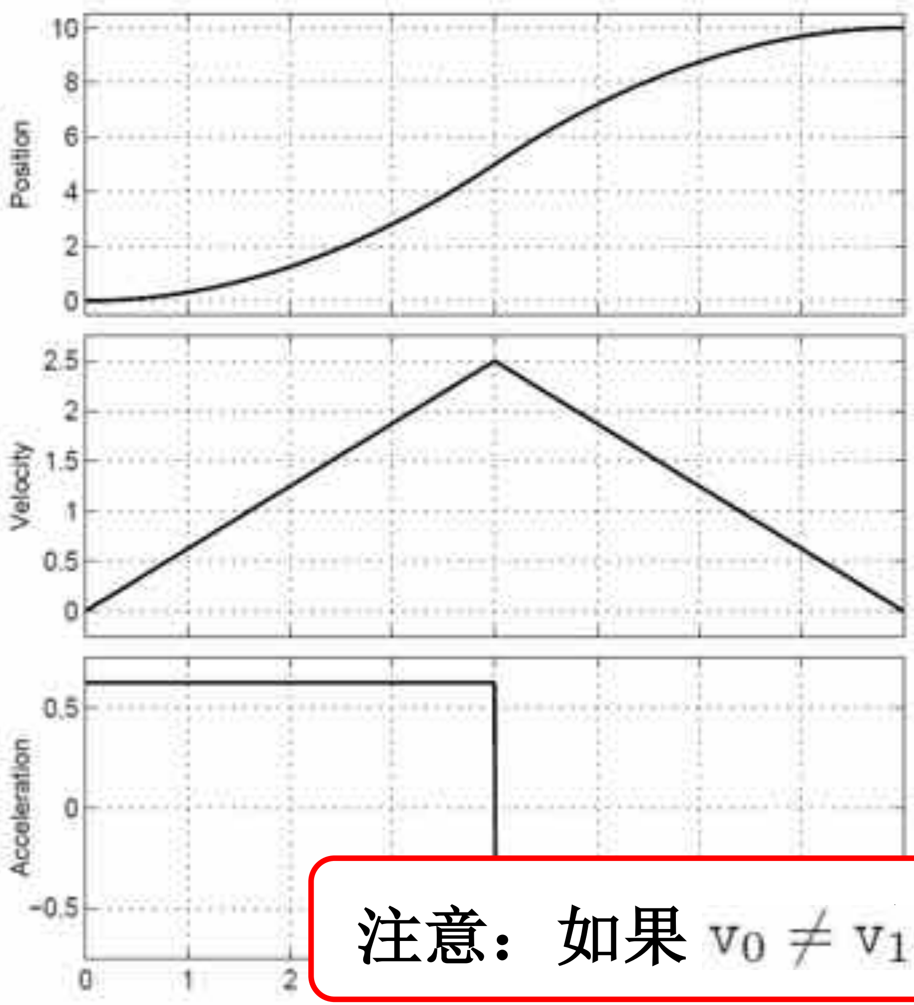
如果 $t_f = \frac{t_0+t_1}{2}$

$q(t_f) = q_f = \frac{q_0+q_1}{2}$

$$\Longrightarrow \quad a_3 = q_f = \frac{q_0 + q_1}{2}, \quad a_4 = 2\frac{h}{T} - \mathrm{v}_1, \quad a_5 = \frac{2}{T^2}(\mathrm{v}_1 T - h).$$

复合一维轨迹规划

- 抛物线轨迹（加速度恒定）:由2个二阶多项式合成



$t_0 = 0,\ t_1 = 8,$

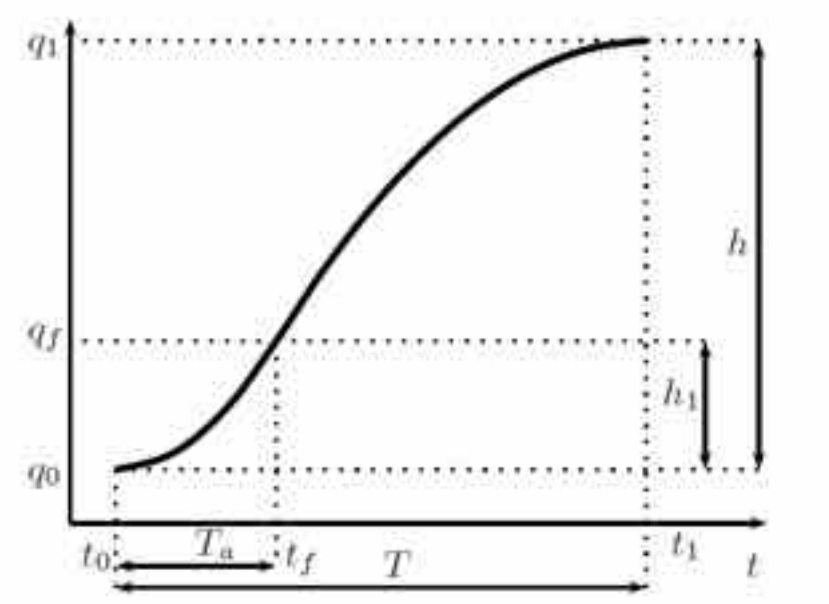
$q_0 = 0,\ q_1 = 10,$

$v_0 = v_1 = 0$

注意：如果 $v_0 \neq v_1$在 处t_f度不连续

复合一维轨迹规划

- 抛物线轨迹（加速度恒定）：由2个二阶多项式合成



根据以下约束求解

$$\begin{cases} q_a(t_0) = a_0 & = q_0 \\ \dot{q}_a(t_0) = a_1 & = \mathrm{v}_0 \\ q_b(t_1) = a_3 + a_4\frac{T}{2} + a_5\left(\frac{T}{2}\right)^2 & = q_1 \\ \dot{q}_b(t_1) = a_4 + 2a_5\frac{T}{2} & = \mathrm{v}_1 \\ q_a(t_f) = a_0 + a_1\frac{T}{2} + a_2\left(\frac{T}{2}\right)^2 & = a_3 \quad = q_b(t_f) \\ \dot{q}_a(t_f) = a_1 + 2a_2\frac{T}{2} & = a_4 \quad = \dot{q}_b(t_f) \end{cases}$$

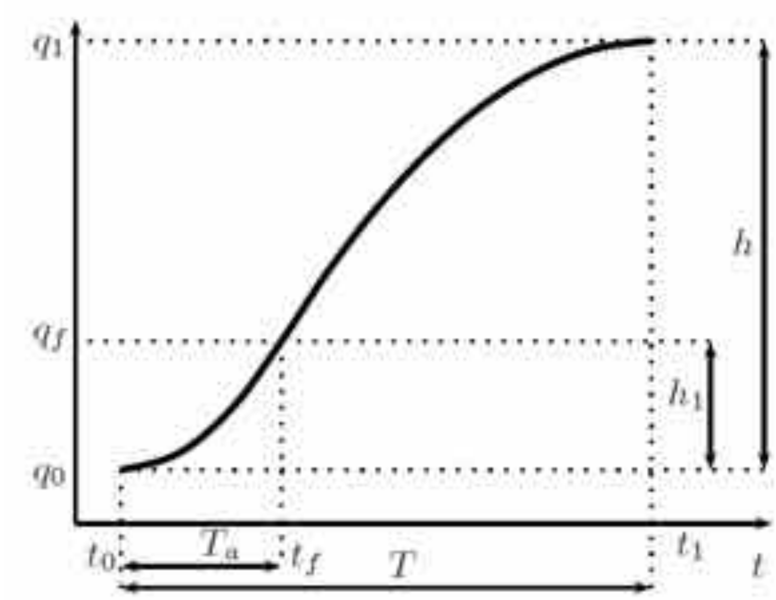
如果要求分段中间点满足位置和速度的连续性要求，需要取消中间位置约束

$$q(t_f) = q_f = \frac{q_0+q_1}{2}$$

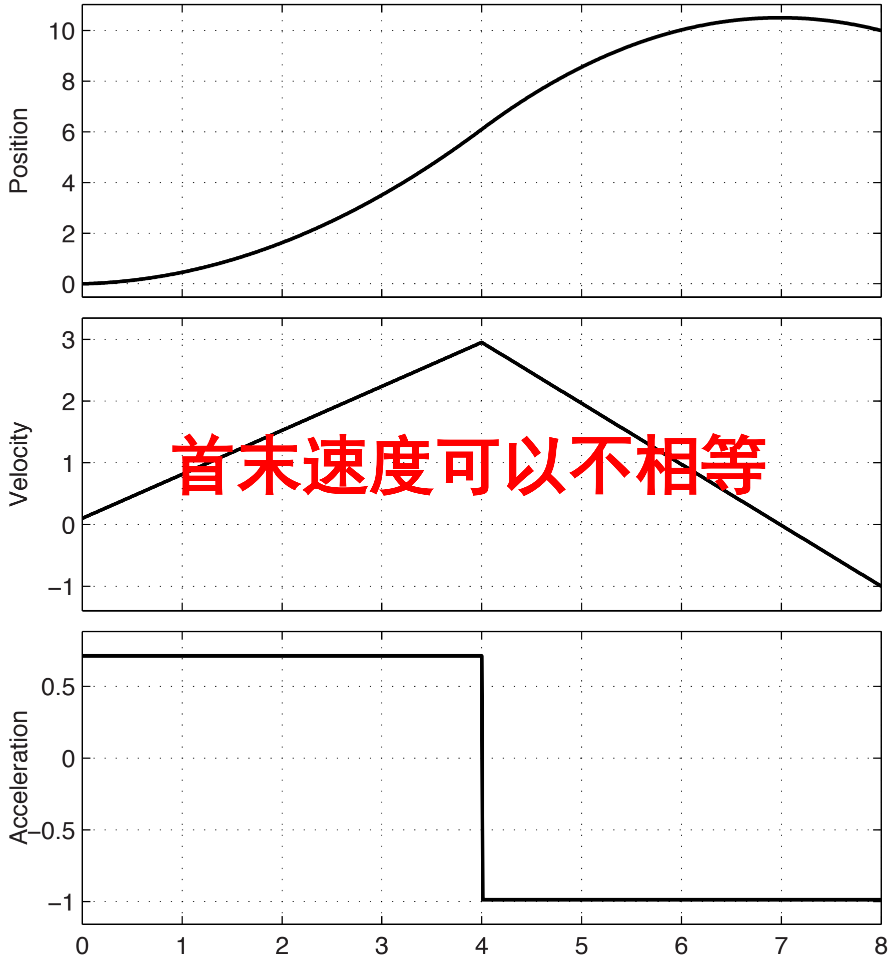
$$T/2 = (t_f - t_0) = (t_1 - t_f)$$

复合一维轨迹规划

- 抛物线轨迹（加速度恒定）：由2个二阶多项式合成

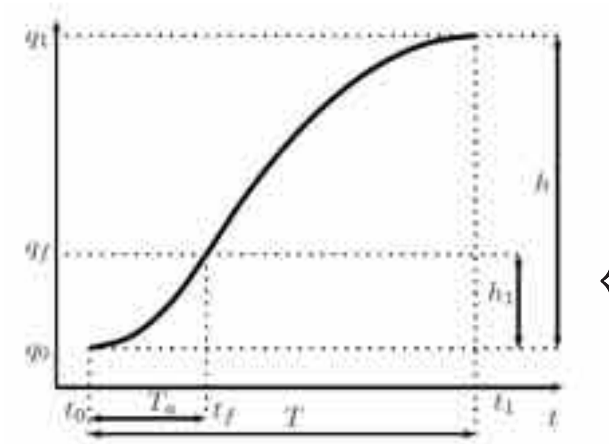


$$t_0 = 0,\ t_1 = 8,$$
$$q_0 = 0,\ q_1 = 10,$$
$$\mathrm{v}_0 = 0.1,\ \mathrm{v}_1 = -1$$



复合一维轨迹规划

- 抛物线轨迹（加速度恒定）：由2个二阶多项式合成



$$\begin{cases} q_a(t_0) = a_0 & = q_0 \\ q_b(t_1) = a_3 + a_4(t_1 - t_f) + a_5(t_1 - t_f)^2 & = q_1 \\ \dot{q}_a(t_0) = a_1 & = \mathrm{v}_0 \\ \dot{q}_b(t_1) = a_4 + 2a_5(t_1 - t_f) & = \mathrm{v}_1 \\ q_a(t_f) = a_0 + a_1(t_f - t_0) + a_2(t_f - t_0)^2 & = a_3 \ (= q_b(t_f)) \\ \dot{q}_a(t_f) = a_1 + 2a_2(t_f - t_0) & = a_4 \ (= \dot{q}_b(t_f)). \end{cases}$$

如果没有对t_f的约束

$$T_a = (t_f - t_0) \qquad T_d = (t_1 - t_f)$$

$$a_0 = q_0 \qquad a_3 = \frac{2q_1 T_a + T_d(2q_0 + T_a(\mathrm{v}_0 - \mathrm{v}_1))}{2T}$$

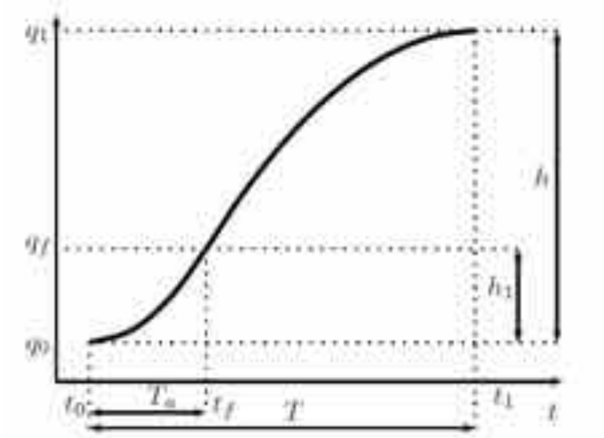
$$a_1 = \mathrm{v}_0 \qquad a_4 = \frac{2h - \mathrm{v}_0 T_a - \mathrm{v}_1 T_d}{T}$$

$$a_2 = \frac{2h - \mathrm{v}_0(T + T_a) - \mathrm{v}_1 T_d}{2TT_a} \qquad a_5 = -\frac{2h - \mathrm{v}_0 T_a - \mathrm{v}_1(T + T_d)}{2TT_d}.$$

可以结合考虑任务约束和/或最大加速度约束

复合一维轨迹规划

- 抛物线轨迹（加速度恒定）：由2个二阶多项式合成

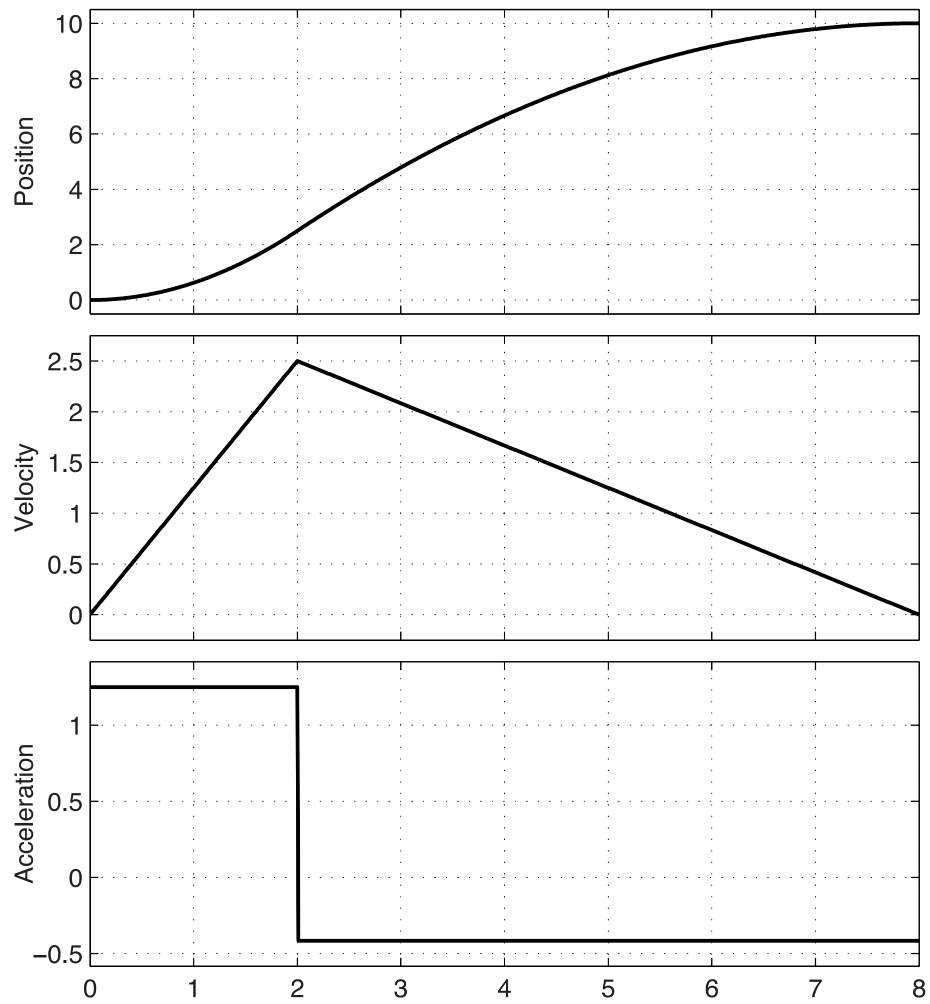


如果没有对t_f的约束

$$t_0 = 0,\ t_1 = 8,$$

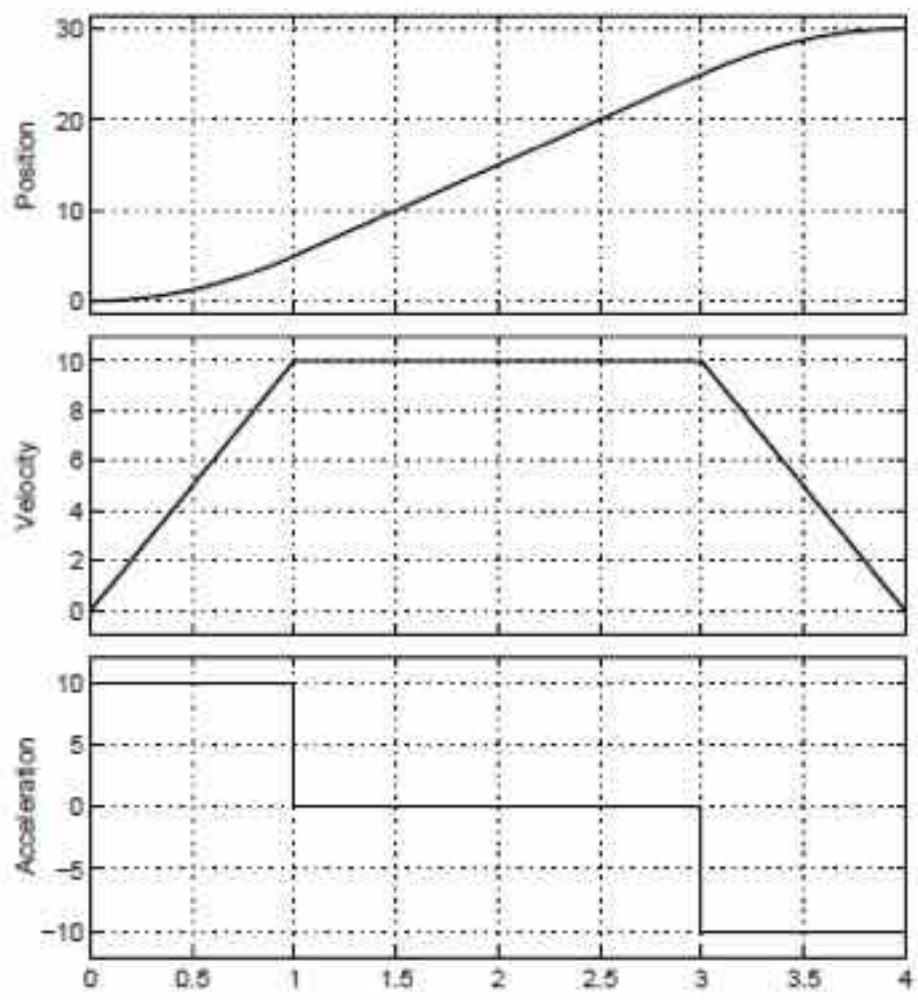
$$q_0 = 0,\ q_1 = 10,$$

$$v_0 = v_1 = 0$$



复合一维轨迹规划

- **基于2个二阶多项式和1个一阶多项式合成的梯形速度曲线**
  - 匀加速
  - 匀速
  - 匀减速

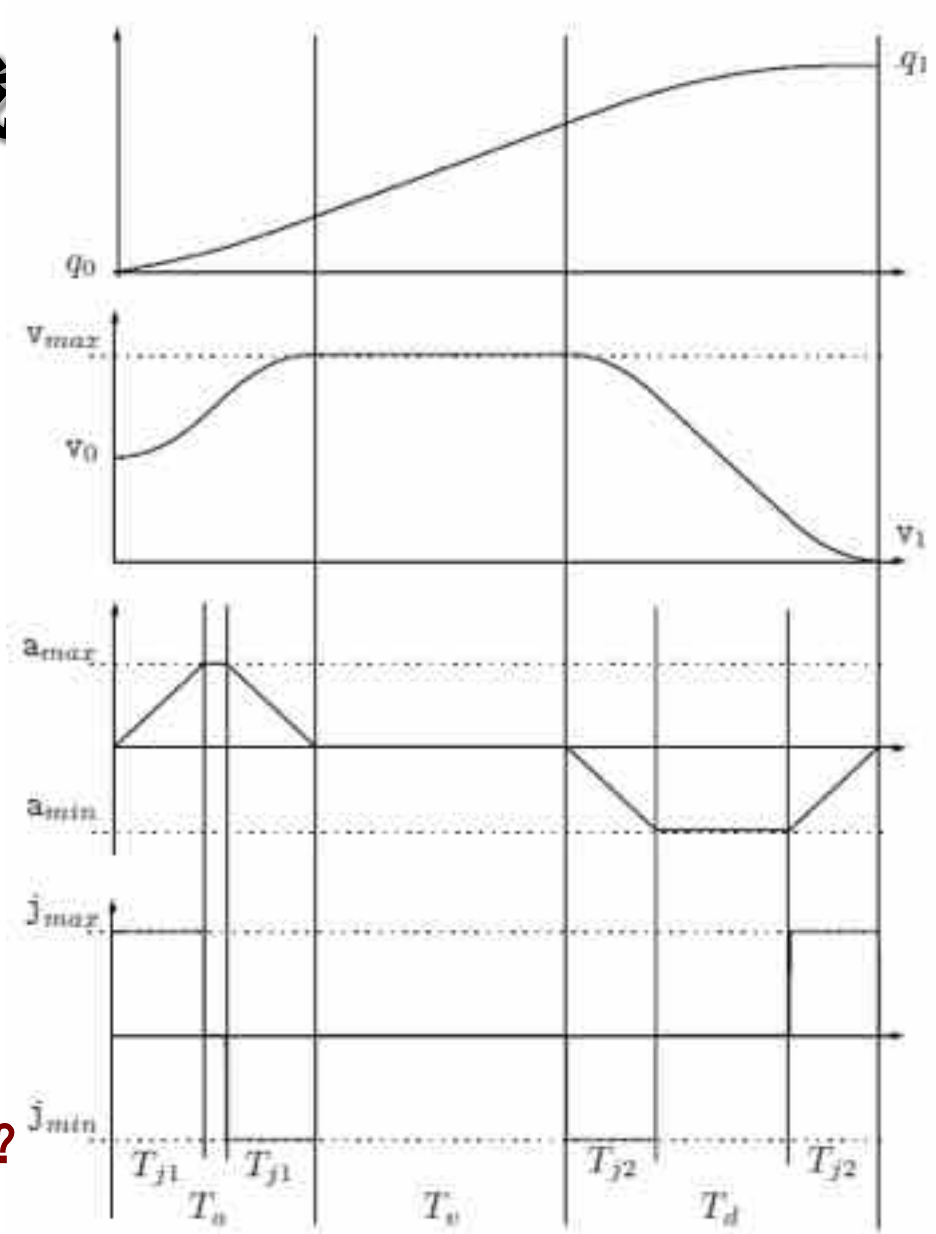


具有更好的通用性

存在问题：加速度不连续

复合一维轨迹规划

- 双S曲线



每一段采用怎样的多项式？

如果希望加加速度连续，怎么办？