$\vec{i}$ $\vec{j}$ $\vec{k}$. basis 基

span. ⇒ all linear combination

$a\vec{i}+b\vec{j}$ span. 二维空间. ⇒ linear independent 线性无关

$a\cdot\vec{v}+b\cdot\vec{w}$ span 一条线 ⇒ linear dependent

$\vec{v} \parallel \vec{w}$

linear transformation $\begin{cases} \text{网格线 直. 平行. 等距} \Rightarrow \text{仅考虑 } \vec{i}\ \vec{j} \text{ 变换} \\ \text{原点不变} \end{cases}$

$$\left.\begin{aligned} \vec{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} &\Rightarrow \vec{i'} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \\ \vec{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} &\Rightarrow \vec{j'} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{v'} = x\cdot\vec{i'} + y\cdot\vec{j'}$$

$$= x\cdot\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} + y\cdot\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1x+3y \\ -2x+0y \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{linear transformation}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{\text{原向量}}$$

$$\begin{array}{cc} i' & j' \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \text{逆时针}90^\circ$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \text{shear}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \text{维空间} \Rightarrow \text{一条线}$$

linearly dependent columns. 列线性相关

矩阵乘法 ⇒ 复合变化

先 rotate 再 shear   shear (Rotate ( )) = Composition

$$\underset{②\ \text{shear}}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} \underset{①\ \text{rotate}}{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

又 $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

$\vec{i}$ $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 1\cdot\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\vec{j}$ $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} = -2\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 0\cdot\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$

$\therefore AB \neq BA$ $A(BC) = (AB)C$

三维

$$\begin{array}{ccc} i' & j' & k' \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = x\cdot i' + y\cdot j' + z\cdot k'$$

$$\begin{bmatrix} & ② & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} & ① & \end{bmatrix}$$ CG / Robotics

determinant 行列式.

观察 $\vec{i}$ 和 $\vec{j}$ 组成的正方形的变化. 可知 linear tran 是 strech out / squish in space

如 $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. 使 1×1 正方形面积扩大 6 倍

$\det\left(\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right) = 6$

det = 0. 将平面 squish to 线/点

det = -2. invert the orientation of the space

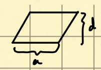
且面积扩大 |det| = 2 倍

三维 i j k 组成 parallelepiped 平行六面体

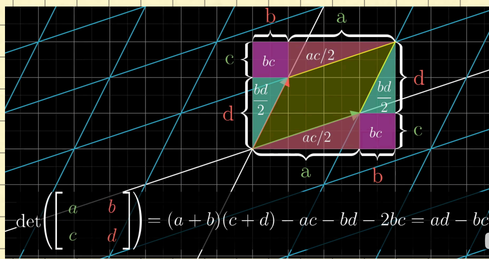
det = 0 ⟺ columns are linear dependent. 可能压缩到面/线/点

det < 0   i' j' k' 不再满足右手螺旋

$\det\left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}\right) = ad.$

$\det\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix}\right) = ad. - b\cdot 0 = ad$ 

b.c 表示平行四边形在对角方向上伸缩程度



$\det\left(\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}\right) = a \cdot \det\begin{bmatrix} e & f \\ h & i \end{bmatrix} - b \cdot \det + c \cdot \det = V_{平行六面体}$

$\det(M_1 \cdot M_2) = \det(M_1) \cdot \det(M_2)$. 缩放比例

A^{-1}. 逆变换 $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$A^{-1} \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 恒等变换

方程组 $\underset{A}{\begin{bmatrix} & & \\ & 3\times3 & \\ & & \end{bmatrix}} \cdot \underset{\vec{x}}{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}} = \underset{\vec{v}}{\begin{bmatrix} 3\times1 \end{bmatrix}}$

$A \cdot \vec{x} = \vec{v}$. $\vec{x}$ 经 linear tran A 得 $\vec{v}$

当 $\det A \neq 0$ 有唯一解. $\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{v}$

当 $\det A = 0$ 无 A^{-1}. 降到二维 A秩 rank = 2

linear tran 不可升维 降到一维 rank = 1

秩: linear tran 后的空间维数

A的 column space $\Rightarrow$ A 的 span. (column $\Rightarrow$ i, j 张成的空间)

秩: dimension in column space.

$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$. rank = 1

rank $\leq$ column. 列数.

$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 一定在 column space 中 (原点不变)

full rank 满秩. 变换后仅原点位置不变

not full rank. 变换后落在原点的向量 $\Rightarrow$ 矩阵的 null space / kernel

零空间 核

当 $A\vec{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ null space 就是所有可能解

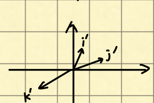
非方阵 $\begin{array}{cc} i' & j' \end{array}$ $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$

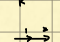
满秩

把 xy 平面投射到三维空间中的一个二维平面.

$\begin{array}{ccc} i' & j' & k' \end{array}$
$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \end{bmatrix}$

三维 → 二维



$\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$ 

二维 → 一维

点积. $[3.4] \cdot [7.2] \overset{\text{duality}}{\Longleftrightarrow} [3\ 4] \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix} = 29$ $7i + 2j$

二维转一维 linear trans $i \to i' = 3$

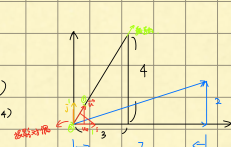
投影 $|\ |\cdot|\ |\cdot\cos$ $j \to j' = 4$

把 $\begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$ 变到一维数轴上 (方向 (3.4))

$\begin{pmatrix} i & j \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{array}{cc} i' & j' \end{array}$
$(u_x, u_y) = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$

再伸缩. ×5 ⇒ (3.4)



叉积.
cross product

大小：$\pm S_{平行四边形} / \pm |\,|\cdot|\,|\cdot \sin$　　$v \times w > 0$　$w \times v < 0$　　$i \times j > 0$　$j \times i < 0$

$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \det\left(\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\right)$（转置det值不变）

方向. 右手螺旋

$$\Rightarrow \det \begin{bmatrix} \vec{i} & v_1 & w_1 \\ \vec{j} & v_2 & w_2 \\ \vec{k} & v_3 & w_3 \end{bmatrix}$$

证：$\det \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{bmatrix} = \pm V_{平行六面体}$

$$f\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} x & v_1 & w_1 \\ y & v_2 & w_2 \\ z & v_3 & w_3 \end{bmatrix}$$

线性变换

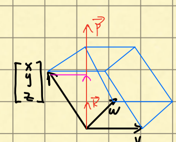
$$\Rightarrow \begin{array}{ccc} p_1 & p_2 & p_3 \end{array} \begin{bmatrix} ? & ? & ? \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} x & v_1 & w_1 \\ y & v_2 & w_2 \\ z & v_3 & w_3 \end{bmatrix}$$

三维→一维

$$\begin{cases} p_1 = v_2 w_3 - v_3 w_2 & \vec{i} \\ p_2 = v_3 w_1 - v_1 w_3 & \vec{j} \\ p_3 = v_1 w_2 - v_2 w_1 & \vec{k} \end{cases}$$

$[p_1\ p_2\ p_3]$ linear tran. 把 $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ 投影到垂直于 $\vec{v}$ 和 $\vec{w}$ 方向上

$\det \begin{bmatrix} x & v_1 & w_1 \\ y & v_2 & w_2 \\ z & v_3 & w_3 \end{bmatrix} = S_{平行四边形} \cdot \underset{(n \cdot \vec{k})}{高} = \vec{p} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ = 点积：$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ 投影到 $\vec{p}$ 方向上. 长度相乘（$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ 投影为高. $\vec{p}$ 长度为 $S_{平行四边形}$）



$\therefore \vec{p}$ $\begin{cases} 大小为 S_{平行四边形} \\ 方向为 \vec{k}. \end{cases}$

$$\vec{p} = \begin{cases} v_2 w_3 - v_3 w_2 \cdot \vec{i} \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \cdot \vec{j} \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \cdot \vec{k} \end{cases}$$

$\Rightarrow \therefore \vec{p} = \vec{w} \times \vec{v} = \begin{cases} 大小. S_{平行四边形} \\ 方向. \vec{k} \end{cases} = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & v_1 & w_1 \\ \vec{j} & v_2 & w_2 \\ \vec{k} & v_3 & w_3 \end{bmatrix}$

基变换

basis $\vec{i}\ \vec{j}$　　basis 2 $\begin{cases} i' = (2.1) \\ j' = (-1.1) \end{cases}$

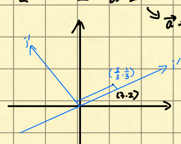
$\vec{a_1} = A \cdot \vec{a_2}$

$A^{-1} \cdot \vec{a_1} = \vec{a_2}$

$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

几何上. basis1 网格 → basis 2 　↗ 坐标系仍是 $\vec{i}.\vec{j}$. $\vec{a} \to \vec{a'}$

数值上. basis 2 语言 → basis 1 　↘ $\vec{a}$ 在 2 个坐标系下的表示形式



$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

basis 2 中 (-1.2) 逆时针 90° 的 linear tran

$$\underset{转回 basis 2}{A^{-1}} \cdot \underset{\circlearrowleft 90^\circ}{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}} \cdot \underset{转到 basis1\ \vec{i}\ \vec{j}}{A} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} \cdot \underset{变换}{\underbrace{M}} \cdot A \cdot \vec{v}$$

特征值 & 特征向量　eigenvector

$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 后 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 未偏离原本 span / 方向　　（三维. 不偏离 span ⇒ 旋转轴. 特征值为 1）

则 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 为特征向量. 伸缩的值为特征值（负为反向）

(1.0)	3
$(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$	2

$$\begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 & 4 \\ 1 & 5-\lambda & 9 \\ 2 & 6 & 5-\lambda \end{bmatrix}$$

$A \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v} \Rightarrow A \cdot \vec{v} = \begin{bmatrix} \lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \lambda \end{bmatrix} \vec{v} = \lambda \cdot \underset{\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}}{I} \cdot \vec{v} \Rightarrow \underbrace{(A - \lambda I)}\vec{v} = \vec{0}$

将空间降维，才可 $\vec{v}=\vec{0}$

$\det(A-\lambda I)=0$

eg: $\begin{bmatrix}3 & 1\\0 & 2\end{bmatrix}$ $\quad \det\begin{bmatrix}3-\lambda & 1\\0 & 2-\lambda\end{bmatrix}=0$

$\lambda = 3 / 2$

解 $\begin{bmatrix}3-2 & 1\\0 & 2-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ 落在 span 为含 $\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$ 的对角线上

二维 linear tran 不一定有特征向量 / 仅有1个特征向量 / 仅有1个特征值，有无数特征向量

逆时针 90°. $\qquad$ shear $\qquad$ $\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}$ 全部 ×2

diagonal matrix
对角阵

$$\underbrace{\begin{bmatrix}3 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}\cdots\begin{bmatrix}3 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}}_{100次}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3^{100}x\\2^{100}y\end{bmatrix}$$

Eigenbasis
特征基

必然是对角阵

计算 $\begin{bmatrix}3 & 1\\0 & 2\end{bmatrix}^{100}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix}3 & 1\\0 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}$

相似对角化 → 仅伸缩

转到特征基空间

向量类比到函数，具有线性。求导看作 linear tran. $1, x, x^2, x^3 \cdots$ 看作基，空间: all polynomials

$$\frac{d}{dx}(1x^3+5x^2+4x+5)=3x^2+10x+4$$

$$\begin{bmatrix}0 & 1 & & \cdots\\0 & & 2 & \\0 & & & 3\\\vdots & & & & \ddots\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\4\\5\\1\\\vdots\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\10\\3\\\vdots\end{bmatrix}$$

求导 linear tran. 来自 $\begin{bmatrix}(1)' & (x)' & & & \cdots\\ & & (x^2)' & & \\ & & & (x^3)' & \\ \cdots & & & & \cdots\end{bmatrix}$

线性代数中的概念	应用于函数时的别名
Linear transformations 线性变换	Linear operators 线性算子
Dot products 点积	Inner products 内积
Eigenvectors 特征向量	Eigenfunctions 特征函数

线代可应用到其他主体，此学科中主体为向量

线代是一堆 Axioms 公理，是抽象的而非具体。

Rules for vectors addition and scaling

向量加法和数乘的规则

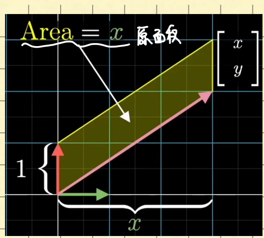
1. $\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})=(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}$
2. $\vec{v}+\vec{w}=\vec{w}+\vec{v}$
3. There is a vector $\mathbf{0}$ such that $\mathbf{0}+\vec{v}=\vec{v}$ for all $\vec{v}$
4. For every vector $\vec{v}$ there is a vector $-\vec{v}$ so that $\vec{v}+(-\vec{v})=\mathbf{0}$
5. $a(b\vec{v})=(ab)\vec{v}$
6. $1\vec{v}=\vec{v}$
7. $a(\vec{v}+\vec{w})=a\vec{v}+a\vec{w}$
8. $(a+b)\vec{v}=a\vec{v}+b\vec{v}$

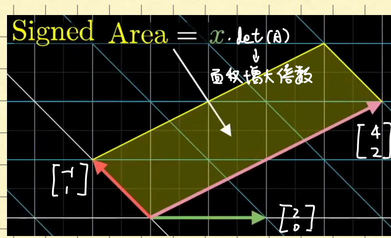
"公理"
"Axioms"

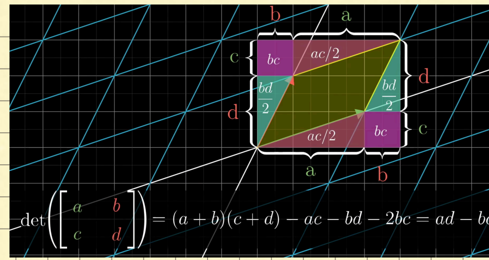
Cramer's rule
克莱姆法则 (高斯消元法更快) 仅考虑 det=0 情况

$$\begin{cases}2x-y=4\\0x+y=2\end{cases} \qquad \begin{bmatrix}2 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}$$

(基向量的点积在线性变化前后通常会改变
Orthonormal tran 正交变换。基在变换前后长度不变，仍相互垂直 (如 ↺90°))







$$x = \frac{\text{Area}}{\det A} = \frac{\det \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

扩展到三维

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ -4 & 6 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -8 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$x = \frac{\det\left(\begin{bmatrix} 7 & 2 & 3 \\ -8 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & -9 \end{bmatrix}\right)}{\det\left(\begin{bmatrix} -4 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ -4 & 6 & -9 \end{bmatrix}\right)} \quad y = \frac{\det\left(\begin{bmatrix} -4 & 7 & 3 \\ -1 & -8 & 2 \\ -4 & 3 & -9 \end{bmatrix}\right)}{\det\left(\begin{bmatrix} -4 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ -4 & 6 & -9 \end{bmatrix}\right)} \quad z = \frac{\det\left(\begin{bmatrix} -4 & 2 & 7 \\ -1 & 0 & -8 \\ -4 & 6 & 3 \end{bmatrix}\right)}{\det\left(\begin{bmatrix} -4 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ -4 & 6 & -9 \end{bmatrix}\right)}$$