$\vec{i}\ \vec{j}\ \vec{k}$. basis 基

span. ⇒ all linear combination

$a\vec{i} + b\vec{j}$ span. 二维空间. ⇒ linear independent 线性无关

$a\cdot\vec{v} + b\cdot\vec{w}$ span 一条线 ⇒ linear dependent

$\vec{v} \parallel \vec{w}$

linear transformation $\begin{cases} \text{网格线 直. 平行. 等距} \\ \text{原点不变} \end{cases}$ ⇒ 仅考虑 $\vec{i}\ \vec{j}$ 变换

$$\left.\begin{aligned} \vec{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} &\Rightarrow \vec{i'} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \\ \vec{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} &\Rightarrow \vec{j'} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{v'} = x\cdot\vec{i'} + y\cdot\vec{j'}$$

$$= x\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + y\cdot\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1x+3y \\ -2x+0y \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{linear transformation}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{\text{原向量}}$$

$$\begin{array}{cc} i' & j' \end{array}$$
$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ⇒ 逆时针90°

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ⇒ shear

$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ =维空间 ⇒ 一条线

Linearly dependent columns. 列线性相关

矩阵乘法 ⇒ 复合变化

先 rotate 再 shear　　shear (Rotate ( )) = Composition

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{②\ \text{shear}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{①\ \text{rotate}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

又 $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

$\vec{i}$ $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 1\cdot\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\vec{j}$ $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} = -2\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 0\cdot\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$

$\therefore AB \neq BA$　　$A(BC) = (AB)C$

三维
$$\begin{array}{ccc} i' & j' & k' \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = x\cdot i' + y\cdot j' + z\cdot k'$$

$\begin{bmatrix} & ② & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} & ① & \end{bmatrix}$　　CG / Robotics

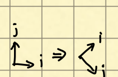
determinant 行列式.

观察 $\vec{i}$ 和 $\vec{j}$ 组成的正方形的变化. 可知 linear tran 是 strech out / squish in space

如 $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. 使 1×1 正方形面积扩大6倍

$\det\left(\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right) = 6$

det = 0. 将平面 squish to 线/点

det = -2. invert the orientation of the space 

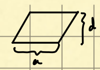
且面积扩大 |det| = 2倍

三维 i j k 组成 parallelepiped 平行六面体

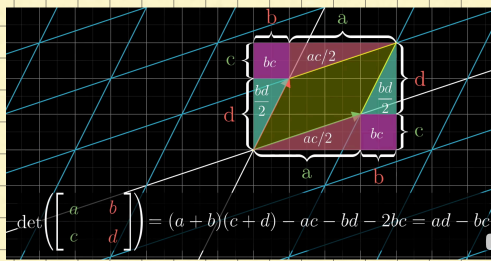
det = 0 ⇔ columns are linear dependent. 可能压缩到面/线/点

det < 0　i' j' k' 不再满足右手螺旋

$\det\left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}\right) = ad.$

$\det\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix}\right) = ad - b\cdot 0 = ad$ 

b.c 表示平行四边形在对角方向上伸缩程度



$\det\left(\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}\right) = a\cdot\det\begin{bmatrix} e & f \\ h & i \end{bmatrix} - b\cdot\det + c\cdot\det = V_{\text{平行六面体}}$

$\det(M_1\cdot M_2) = \det(M_1)\cdot\det(M_2)$. 缩放比例

A^{-1}. 逆变换 $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$A^{-1}\cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 恒等变换

方程组 $\underset{A}{\begin{bmatrix} & & \\ & 3\times 3 & \\ & & \end{bmatrix}} \cdot \underset{\vec{x}}{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}} = \underset{\vec{v}}{\begin{bmatrix} 3\times 1 \end{bmatrix}}$

$A\cdot\vec{x} = \vec{v}$. $\vec{x}$ 经 linear tran A 得 $\vec{v}$

当 $\det A \neq 0$ 有唯一解. $\vec{x} = A^{-1}\cdot\vec{v}$

当 $\det A = 0$ 无 A^{-1}.   降到二维 A秩 rank = 2

linear tran 不可升维   降到一维 rank = 1

秩: linear tran 后的空间维数

A的 column space ⇒ A 的 span. (column ⇒ i, j 张成的空间)

秩: dimension in column space.

$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$. rank = 1

rank ≤ column. 列数.

$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 一定在 column space 中 (原点不变)

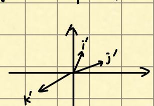
full rank 满秩. 变换后只原点位置不变

not full rank. 变换后落在原点的向量 ⇒ 矩阵的 null space / kernel
零空间 核

当 $A\vec{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ null space 就是所有可能解

非方阵 $\begin{array}{c} \begin{array}{cc} i' & j' \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 9 \end{bmatrix} \end{array} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$
满秩

把 xy 平面投射到三维空间中的一个二维平面.

$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} i' & j' & k' \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \end{bmatrix} \end{array}$ 

三维 → 二维

$[1\ \ 2]$

二维 → 一维

点积. $[3\ 4]\cdot[7\ 2] \overset{\text{duality}}{\Longleftrightarrow} [3\ 4]\begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix} = 29$ $7i + 2j$

二维转一维 linear trans $i \to i' = 3$
$j \to j' = 4$

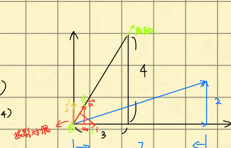
投影 $|\ |\cdot|\ |\cdot\cos$

把 $\begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$ 变到一维数轴上 (方向 (3.4))

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (i j / i' j')

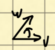
$(u_x, u_y) = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$

再伸缩. ×5 ⇒ (3.4)



叉积.
cross product

大小：
- ±S平行四边形 / ± | | · | | · sin



$v \times w > 0$ $\quad i \times j > 0$

$w \times v < 0$ $\quad j \times i < 0$

- $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \det\left(\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\right)$ (转置det值不变)

方向. 右手螺旋

$\Rightarrow \det \begin{bmatrix} \vec{i} & v_1 & w_1 \\ \vec{j} & v_2 & w_2 \\ \vec{k} & v_3 & w_3 \end{bmatrix}$

证：$\det \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{bmatrix} = \pm V_{平行六面体}$

$f\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} x & v_1 & w_1 \\ y & v_2 & w_2 \\ z & v_3 & w_3 \end{bmatrix}$

线性变换

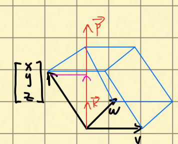
$\Rightarrow \begin{array}{c} p_1 \ p_2 \ p_3 \\ \begin{bmatrix} ? & ? & ? \end{bmatrix} \end{array} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} x & v_1 & w_1 \\ y & v_2 & w_2 \\ z & v_3 & w_3 \end{bmatrix}$

三维→一维

$$\begin{cases} p_1 = v_2 w_3 - v_3 w_2 & \vec{i} \\ p_2 = v_3 w_1 - v_1 w_3 & \vec{j} \\ p_3 = v_1 w_2 - v_2 w_1 & \vec{k} \end{cases}$$

$[p_1 \ p_2 \ p_3]$ linear tran. 把 $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ 投影到垂直于 $\vec{v}$ 和 $\vec{w}$ 方向上

$\det \begin{bmatrix} x & v_1 & w_1 \\ y & v_2 & w_2 \\ z & v_3 & w_3 \end{bmatrix} = S_{平行四边形} \cdot \underset{(\text{n}\vec{k})}{高} = \vec{p} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ = 点积：$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ 投影到 $\vec{p}$ 方向上. 长度相乘（$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ 投影为高. $\vec{p}$ 长度为S平行四边形）



∴ $\vec{p}$
- 大小为S平行四边形
- 方向为 $\vec{k}$.

$$\vec{p} = \begin{cases} v_2 w_3 - v_3 w_2 \cdot \vec{i} \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \cdot \vec{j} \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \cdot \vec{k} \end{cases}$$

$\Rightarrow \therefore \vec{p} = \vec{w} \times \vec{v} = \begin{cases} 大小. \ S_{平行四边形} \\ 方向. \ \vec{k} \end{cases} = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & v_1 & w_1 \\ \vec{j} & v_2 & w_2 \\ \vec{k} & v_3 & w_3 \end{bmatrix}$

基变换

basis $\vec{i}\,\vec{j}$ $\qquad$ basis 2 $\begin{cases} i' = (2.1) \\ j' = (-1.1) \end{cases}$

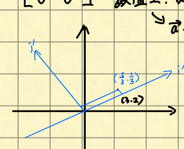
$\vec{a_1} = A \cdot \vec{a_2}$

$A^{-1} \cdot \vec{a_1} = \vec{a_2}$

$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

几何上. basis1网格 → basis2 → 坐标系仍是 $\vec{i}.\vec{j}$. $\vec{a} \to \vec{a}$

数值上. basis2语言 → basis1 → $\vec{a}$ 在iy坐标系下的表示形式



$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

basis2中 (-1.2) 逆时针90°的 linear tran

$\underset{转回basis2}{A^{-1}} \cdot \underset{\circlearrowleft 90°}{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}} \cdot \underset{转到basis1 \ \vec{i}\vec{j}}{A} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$A^{-1} \cdot \underset{变换}{\underbrace{M}} \cdot A \cdot \vec{v}$

特征值 & 特征向量 eigenvector

$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 后 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 未偏离原本span/方向

（三维. 不偏离span ⇒ 旋转轴. 特征值为1）

则 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 为特征向量. 伸缩的值为特征值（负为反向）

(1.0)	3
$(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$	2

$A \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v} \Rightarrow A \cdot \vec{v} = \begin{bmatrix} \lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \lambda \end{bmatrix} \vec{v} = \lambda \cdot \underset{\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}}{I} \cdot \vec{v} \Rightarrow \underbrace{(A - \lambda I)}_{\begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 & 4 \\ 1 & 5-\lambda & 9 \\ 2 & 6 & 5-\lambda \end{bmatrix}} \vec{v} = \vec{0}$

↓

将空间降维，才可 $\vec{v}=\vec{0}$

$\det(A-\lambda I)=0$

eg: $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad \det\begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{bmatrix}=0$

$\lambda=3/2$

↓

解 $\begin{bmatrix} 3-2 & 1 \\ 0 & 2-2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 落在 span 为含 $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 的对角线上

二维 linear tran 不一定有特征向量 / 仅有1个特征向量 / 仅有1个特征值，有无数特征向量

逆时针 90°. $\quad$ shear $\quad$ $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ 全部 ×2

diagonal matrix
对角阵

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\cdots\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_{100次}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3^{100}x \\ 2^{100}y \end{bmatrix}$$

Eigenbasis . 必然是对角阵
特征基

相似对角化 → 仅伸缩

计算 $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{100}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

↓

转到特征基空间

向量类比到函数，具有线性。求导看作 linear tran. $1, x, x^2, x^3\cdots$ 看作基。空间: all polynomials

$$\frac{d}{dx}(1x^3+5x^2+4x+5)=3x^2+10x+4$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \cdots \\ 0 & & 2 & & \\ 0 & & & 3 & \\ \vdots & & & & \ddots \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 5 \\ 1 \\ \vdots \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 \\ 10 \\ 3 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

↓

求导 linear tran. 来自 $\begin{bmatrix} (1)' & (x)' & & \cdots \\ & & (x^2)' & \\ & & & (x^3)' \\ \cdots & & & \cdots \end{bmatrix}$

线性代数中的概念	应用于函数时的别名
Linear transformations 线性变换	Linear operators 线性算子
Dot products 点积	Inner products 内积
Eigenvectors 特征向量	Eigenfunctions 特征函数

线代可应用到其他主体，此学科中主体为向量
线代是一系 Axioms 公理，是抽象的而非具体。

Rules for vectors addition and scaling

向量加法和数乘的规则

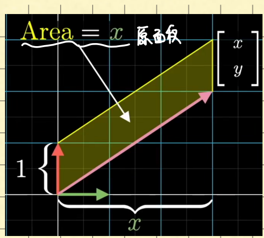
1. $\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})=(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}$
2. $\vec{v}+\vec{w}=\vec{w}+\vec{v}$
3. There is a vector $\mathbf{0}$ such that $\mathbf{0}+\vec{v}=\vec{v}$ for all $\vec{v}$
4. For every vector $\vec{v}$ there is a vector $-\vec{v}$ so that $\vec{v}+(-\vec{v})=\mathbf{0}$
5. $a(b\vec{v})=(ab)\vec{v}$
6. $1\vec{v}=\vec{v}$
7. $a(\vec{v}+\vec{w})=a\vec{v}+a\vec{w}$
8. $(a+b)\vec{v}=a\vec{v}+b\vec{v}$

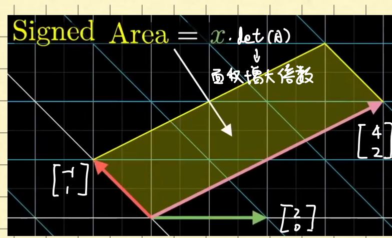
"公理"
"Axioms"

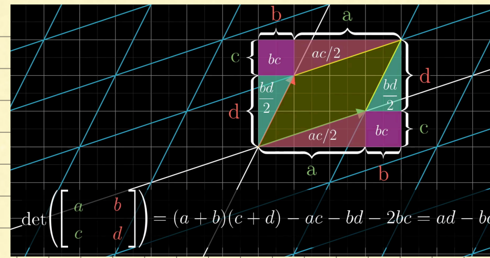
Cramer's rule
克莱姆法则（高斯消元法更快） 仅考虑 det≠0 情况

$$\begin{cases} 2x-y=4 \\ 0x+y=2 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

（基向量的点积在线性变化前后通常会改变
Orthonormal tran 正交变换. 基在变换前后长度不变，仍相互垂直（如旋转90°））







$$x = \frac{\text{Area}}{\det A} = \frac{\det\begin{bmatrix}4 & -1\\ 2 & 1\end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix}2 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}}$$

扩展到三维

$$\begin{bmatrix}-4 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 2\\ -4 & 6 & -9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\ -8\\ 3\end{bmatrix}$$

$$x = \frac{\det\left(\begin{bmatrix}7 & 2 & 3\\ -8 & 0 & 2\\ 3 & 6 & -9\end{bmatrix}\right)}{\det\left(\begin{bmatrix}-4 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 2\\ -4 & 6 & -9\end{bmatrix}\right)} \quad y = \frac{\det\left(\begin{bmatrix}-4 & 7 & 3\\ -1 & -8 & 2\\ -4 & 3 & -9\end{bmatrix}\right)}{\det\left(\begin{bmatrix}-4 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 2\\ -4 & 6 & -9\end{bmatrix}\right)} \quad z = \frac{\det\left(\begin{bmatrix}-4 & 2 & 7\\ -1 & 0 & -8\\ -4 & 6 & 3\end{bmatrix}\right)}{\det\left(\begin{bmatrix}-4 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 2\\ -4 & 6 & -9\end{bmatrix}\right)}$$

MIT 18.06

Lec 1 $Ax = b$. $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

row picture

column picture

row picture 直线相交

☆ column picture 列向量的线性组合 $x \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

高维时列图像更清洁

Lec 2 world is digital. is linear algebra

数乘 not analog. not calculus

overview

(inverse subspace)

乘法.另一种角度. $\begin{array}{ccc} u & v & w \\ \end{array}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1 \overset{u}{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}} + x_2 \overset{v}{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}} + x_3 \overset{w}{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$

linear comb of column vector

difference. matrix $Ax = b$.

思考其逆运算 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_1 + b_2 \\ b_1 + b_2 + b_3 \end{bmatrix}$

sum matrix $A^{-1} \cdot b = x$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ 当 $b_1 = b_2 = b_3 = 0$.

⇒ 解 $x_1 = x_2 = x_3 = 0$

difference. matrix

$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$: $\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{三者都在 } x+y+z=0 \text{ 平面上}}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - x_3 \\ x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ 当 $b_1 = b_2 = b_3 = 0$.

⇒ 解 $x_1 = x_2 = x_3 = c$ 无唯一解

不可逆

1个平面. $b_1 + b_2 + b_3 = 0$

三个向量 $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ span 的 space 等价于 Cx

等价: ① independent.

② 5-dim basis

③ [00000] is invertible 可逆的

5 vector

二维平面是三维空间的 subspace

subspace 0-dim ⇒ a point. 仅含1个点

1-dim. ⇒ a line

2-dim ⇒ a plane

3-dim ⇒ space 本身

7×3 rectangular matrix A. 不可逆

$A^T \cdot A$ ⇒ 3×3. symmetric. (A. KVL. A^T. KCL)

3×7 7×3

LEC3 $Ax = b$

gauss elimination A消元(行变换) ⇒ 上三角阵 $U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ first pivot second pivot det = 10 (diagonal 上有0 ⇒ 矩阵不可逆. 消元法无解)

软件中解方程. [A b] augmented matrix ⇒ ① Gauss Elimination 消元 ② Back-substitution 回带求解

(增广) 得 [U. c]

pivot ≠ 0. (换行处理. temp failure ; 全0行. complete failure)

将消元过程表示为矩阵变换 (行变换. 左乘. 消元阵 × A)

单位阵 × A = A.

$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix}$

$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times A$. 2行互换

$A \times \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 2列互换

$PA \neq AP$ not commutative

消元矩阵由单位阵变化得到.

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

第一行×-3. 加到第二行

记作E_{21}. 将2行1列置0的消元阵

若 $E_{32} E_{21} A = U$. 记 $E = E_{32} \cdot E_{21}$ 为A的消元阵. associative

逆矩阵 $E^{-1}\cdot E$ = 单位阵 the identity matrix

$Ax=b.$

$E\cdot Ax=E\cdot b$

$U\cdot x=E\cdot b$

LEC4

矩阵乘法

逆矩阵

矩阵乘法 $\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3\\4\\5\end{bmatrix}=3\cdot\begin{bmatrix}1\\4\\7\end{bmatrix}+4\cdot\begin{bmatrix}2\\5\\8\end{bmatrix}+5\begin{bmatrix}3\\6\\9\end{bmatrix}$ $\qquad [1\ 2\ 7]\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}=1\cdot[1\,2\,3]+2\cdot[4\,5\,6]+7\cdot[7\,8\,9]$

$\underset{4\times4}{A}\begin{bmatrix}a&b&c&d\\a&b&c&d\\a&b&c&d\\a&b&c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A\cdot\begin{bmatrix}a\\a\\a\\a\end{bmatrix} & A\cdot\begin{bmatrix}b\\b\\b\\b\end{bmatrix} & A\cdot\begin{bmatrix}c\\c\\c\\c\end{bmatrix} & A\cdot\begin{bmatrix}d\\d\\d\\d\end{bmatrix}\end{bmatrix}$ $\qquad \begin{bmatrix}a&a&a&a\\b&b&b&b\\c&c&c&c\end{bmatrix}\cdot\underset{4\times4}{A}=\begin{bmatrix}[a\ a\ a\ a]\cdot A\\ [b\ b\ b\ b]\cdot A\\ [c\ c\ c\ c]\cdot A\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}2&7\\3&8\\4&9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&6\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}7\\8\\9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}[1\ 6]=\begin{bmatrix}2&12\\3&18\\4&24\end{bmatrix}$ (2.12) (3.18) (4.24) on same line

(2.3.4) (12.18.24) on same line

$\Rightarrow$ row/column space is a single line

逆矩阵 方阵. 唯一. $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I$ $\Rightarrow$ invertible / nonsingular

Inverses $\begin{bmatrix}1&3\\2&6\end{bmatrix}$ 不可逆 det = 0

$\exists\vec{x}\neq\vec{0}$. 使 $Ax=0$. 则A不可逆. singular $\begin{bmatrix}1&3\\2&6\end{bmatrix}\underset{\vec{x}}{\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$

求逆矩阵. 高斯-若当. Gauss-Jordan

$$\underset{A}{\begin{bmatrix}1&3\\2&7\end{bmatrix}}\underset{A^{-1}}{\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}}=I=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc}1&3&1&0\\2&7&0&1\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{cc|cc}1&3&1&0\\0&1&-2&1\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{cc|cc}1&0&7&-3\\0&1&-2&1\end{array}\right]$$

A $\downarrow$ $\quad$ I $\downarrow$

$E\cdot A=I \quad E\cdot I=A^{-1}$

LEC5

LU factorization

求逆复杂度

Permulation

$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1} \Leftarrow AB\cdot B^{-1}A^{-1}=I$

$(AA^{-1})^T=\underbrace{(A^{-1})^T\cdot A^T=I}$

$A^T\cdot(A^T)^{-1}=I$

$\Rightarrow (A^{-1})^T=(A^T)^{-1}$ transpose 和 inverse 可交换

LU分解 $\quad A=LU$ (Pivot $\neq 0$) $\qquad U=E\cdot A \qquad A=LU\begin{cases}L \text{ is lower triangular with 1 on diagnal}\\ U \text{ is upper triangular with pivots on diagnal}\end{cases}$

factorization $\quad E^{-1} \qquad A=E^{-1}\cdot U$

$$\overset{A}{\begin{bmatrix}2&1\\8&7\end{bmatrix}}=\overset{L}{\begin{bmatrix}1&0\\4&1\end{bmatrix}}\overset{U}{\begin{bmatrix}2&1\\0&3\end{bmatrix}}.$$

$$\overset{A}{\begin{bmatrix}2&1\\8&7\end{bmatrix}}=\overset{L}{\begin{bmatrix}1&0\\4&1\end{bmatrix}}\overset{D}{\begin{bmatrix}2&0\\0&3\end{bmatrix}}\overset{U'}{\begin{bmatrix}1&1/2\\0&1\end{bmatrix}}.$$

三维: $E_{32}\cdot E_{31}\cdot E_{21}\cdot A=U$ (only 高斯消元. $\underbrace{\text{no row exchange}}_{\text{pivot}\neq0}$)

顺序 $E_{21}^{-1}\cdot E_{31}^{-1}\cdot E_{32}^{-1}\cdot U=A$

$E_{21}^{-1}\cdot E_{31}^{-1}\cdot E_{32}^{-1}$ 比 $E_{32}\cdot E_{31}\cdot E_{21}$ 更好 $\Rightarrow E_{32}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-5&1\end{bmatrix}$ $E_{31}=I$ $E_{21}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ $E=\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\10&-5&1\end{bmatrix}$

$E_{21}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ $E_{31}^{-1}=I$ $E_{32}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&5&1\end{bmatrix}$ $L=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&5&1\end{bmatrix}$

if no row exchanges. multipliers go directly into L

计算机求矩阵逆. how expansive

将 A (100×100) 经行变换得 U. 要计算几次?

第一列 ⋮. 运算100次. 第一行100个元素. $\therefore 100^2$次

第二列 99^2次

计算量 $\sum_1^n k^2 \approx \int_1^n k^2\,dk$ 次 $=\frac{1}{3}n^3$

如果有 row changes 呢? (pivot = 0)

置换矩阵P. 使两行交换

Permulation

n阶方阵有n!个置换矩阵

$P\cdot P^{-1}=I \qquad P^{-1}=P^T$

求矩阵 $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ 的所有置换矩阵，并判断其性质。

一共有 6 个置换矩阵：

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$$

LEC6

Transpose

vector space

symmetric

对称阵 $A=A^T$. 主对角线

$(AB)^T = B^T A^T$

B不一定是方阵. $(B\cdot B^T)$是对称阵 ⇐ $(B\cdot B^T)^T = B^{T^T} B^T = BB^T$

向量空间/子空间. 对线性运算 封闭. 必须包含原点, 即$\vec{0}$

推广一下，R^3的子空间就是如下三个：

（1） 穿过原点的平面

（2） 穿过原点的直线

（3） Z，原点。$\vec{0}$

2个子空间 $\cap$ 仍是子空间

$\cup$ 不是子空间

LEC 7

column space

null space

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ 　 $C(A)$ 列空间 $= A\cdot x =$ 由 $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ span的 R^2. 是R^3的子空间

$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

$x_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ 　 $\overbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}^{\text{主列}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$

∴ $C(A)$ span到 R^2. 是R^4的子空间 　 $C(A)$是 subspace of R^4 (A列向量是4维)

$\underset{4\times3}{A}\ \underset{3\times1}{x} = \underset{4\times1}{b}$ 　 当b落在 $C(A)$ 中. 有解

当$b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. 必有解. 因为任何子空间都含$\vec{0}$

$Ax=0$ 的 x span 的空间 null space

eg: 求$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ 的零空间 $N(A)$ 　 (1+1=2)

$Ax=0$. 　 $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdots$ 　 $N(A) = \underset{\text{常数}}{c}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ($c\cdot x$)

$N(A)$ span到R^1. 是R^3中一条直线

$N(A)$是 subspace of R^3 (x是3维)

证nullspace是 space 　 $Av=0$, $Aw=0 \Rightarrow A(v+w)=0$

$A\cdot v = 0 \Rightarrow A\cdot(cv) = 0$

$Ax=b$. 　 $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ 　 $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdots$ 是一条不过原点的直线

x不可构成向量空间. 因为$x=\vec{0}$不是方程的解

(向量空间必须包含$\vec{0}$)