1-(a)

Size of ω : d+1 , Size of y : n

1-(b)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \cdots & x_1^d \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \cdots & x_2^d \\ & & \vdots & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \cdots & x_n^d \end{bmatrix}$$

Size of matrix A : (d+1)n

1-(c)

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \cdots & x_1^d \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \cdots & x_2^d \\ & & \vdots & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \cdots & x_n^d \end{bmatrix}$$

row1 을 제외한 row들에서 row1을 뺀다.

$$= \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \cdots & x_1^d \\ 0 & x_2-x_1 & x_2^2-x_1^2 & x_2^3-x_1^3 & \cdots & x_2^d-x_1^d \\ & & \vdots & & & \\ 0 & x_n-x_1 & x_n^2-x_1^2 & x_n^3-x_1^3 & \cdots & x_n^d-x_1^d \end{bmatrix}$$

d번째 column에 $(-x_1)$을 곱한 뒤
d+1 번째 column에서 빼면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \cdots & x_1^d-x_1^d \\ 0 & x_2-x_1 & x_2^2-x_1^2 & x_2^3-x_1^3 & \cdots & x_2^d-x_1^d-x_2^{d-1}x_1+x_1^d \\ & & \vdots & & & \\ 0 & x_n-x_1 & x_n^2-x_1^2 & x_n^3-x_1^3 & \cdots & x_n^d-x_1^d-x_n^{d-1}x_1+x_1^d \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2-x_1 & x_2^2-x_1^2 & x_2^3-x_1^3 & \cdots & x_2^{d-1}(x_2-x_1) \\ & & \vdots & & & \\ 0 & x_n-x_1 & x_n^2-x_1^2 & x_n^3-x_1^3 & \cdots & x_n^{d-1}(x_2-x_1) \end{bmatrix}$$

위와 같은 연산을 다른 column들에도 적용하면 다음과 같다.

$$= \begin{bmatrix} 1 & x_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2-x_1 & x_2(x_2-x_1) & x_2^2(x_2-x_1) & \cdots & x_2^{d-1}(x_2-x_1) \\ 0 & x_3-x_1 & x_3(x_3-x_1) & x_3^2(x_3-x_1) & \cdots & x_3^{d-1}(x_3-x_1) \\ & & \vdots & & & \\ 0 & x_n-x_1 & x_n(x_n-x_1) & x_n^2(x_n-x_1) & \cdots & x_n^{d-1}(x_2-x_1) \end{bmatrix}$$

공통인자를 묶어내면 위 matrix는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$= (x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1) \begin{bmatrix} 1 & x_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{d-1} \\ 0 & 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & x_3^{d-1} \\ & & \vdots & & & \\ 0 & 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{d-1} \end{bmatrix}$$

남은 matrix에 대하여 위의 연산을 반복하면 결과적으로 다음과 같이 det A를 구할 수 있다.

$$\det A = (x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)(x_3-x_2)(x_4-x_2)\cdots(x_n-x_2)\cdots(x_n-x_{n-1})$$

$$= \prod_{1\le i<j\le n} (x_j - x_i)$$

1-(d)

$\det A = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$ 이므로 $\det A$ 가 non-zero 값을 가지려면 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 들의 값이 서로 모두 달라야 한다.

1-(e)

$$Aw = y$$

$$\Leftrightarrow A^{-1} \cdot Aw = A^{-1} \cdot y$$

$$\Leftrightarrow Iw = A^{-1} \cdot y$$

$\Leftrightarrow \quad w = A^{-1} \cdot y$ 이므로 $Aw = y$ 의 solution 은 $w = A^{-1} \cdot y$ 이다.

2.

matrix A 는 SVD의 형태로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$A = U \Sigma V^T$$

따라서 $Aw = y$ 에서 $U \Sigma V^T w = y$ 이다. 여기서 좌변에 w만 남기면 solution은 다음과 같다.

$$U \Sigma V^T w = y$$

$$\Leftrightarrow V \Sigma^{-1} U^T U \Sigma V^T w = V \Sigma^{-1} U^T y$$

$$\Leftrightarrow w = V \Sigma^{-1} U^T y$$

$$= A^{+} y$$