2.5 部分積分

2つの関数の積の導関数の公式 (1.5) からも不定積分の公式が得られる．

$$f'(x)g(x) = (f(x)g(x))' - f(x)g'(x)$$

であり，$(f(x)\,g(x))'$ の原始関数は $f(x)g(x)$ なので

公式 2.4-1 (部分積分)

$$\int f'(x)\,g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$$

となる．定積分については

公式 2.4-2 (部分積分)

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$$

これらの公式を使う積分を**部分積分**という．

整関数 × 指数関数または三角関数 (tan は除く) の場合は，指数関数，三角関数を原始関数の導関数に直す．

例 2.14

$$\int_0^1 xe^{3x}\,dx = \frac{1}{3}\int_0^1 x(e^{3x})'\,dx = \frac{1}{3}\Big[xe^{3x}\Big]_0^1 - \frac{1}{3}\int_0^1 (x)'e^{3x}\,dx$$

$$= \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}e^{3x}\right]_0^1 = \frac{2}{9}e^3 + \frac{1}{9} \qquad \blacksquare$$

例 2.15

$$\int x^2 \sin 2x\,dx = -\frac{x^2}{2}\cos 2x + \int x\cos 2x\,dx$$

$$= -\frac{x^2}{2}\cos 2x + \frac{x}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\int \sin 2x\,dx$$

$$= \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{1}{4}\right)\cos 2x + \frac{x}{2}\sin 2x + C \qquad \blacksquare$$