2 次安定化と H^∞ 制御理論

本田雄一郎
森田研 M1

2016/06/27

はじめに

本論文では，ロバスト安定化に対する 2 つの主流となるアプローチを取り上げる．1 つは不確かな線形システムの 2 次安定化による時間領域におけるアプローチ，もう 1 つは H^{∞} 最適化による周波数領域におけるアプローチである．

ノルム有界型で時変な不確かさを持つ線形システムのロバスト安定化

次のような不確実な線形システムを考える．

$$\dot{x}(t) = (A + \Delta A(q(t)))x(t) + (B + \Delta B(q(t)))u(t) \tag{2.1a}$$

ただし，$x(t) \in \mathbb{R}^n$ は状態，$u(t) \in \mathbb{R}^m$ は制御入力，$q(t)$ は不確かさのパラメータベクトルで，コンパクトな有界集合 $\mathbb{Q}$ の元である．$q(t)$ はルベーグ可則とし，$\Delta A, \Delta B$ は連続な q に関する行列関数とする．

定義 2.2

$u = 0$ のシステム (2.1) に対して, ある正定値対称行列 $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ と $\alpha > 0$ が存在して，任意の許容可能な不確実性 $q(t)$ に対し，リアプノフ関数 $V(x) = x^\top Px$ が

$$\mathbb{L}(x,t) := \dot{V} = 2x^\top P(A + \Delta A(q(t)))x \leq -\alpha\|x\|^2$$

をすべての $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ の組に対して満たすとき，システム (2.1) は **2 次可安定**という．また，閉ループが 2 次安定となるような状態フィードバック制御 $u = -Kx(t)$ が存在するとき，システム (2.1) は**線形状態フィードバックによって 2 次可安定**であるという．

以降，次のような不確かさを考える：

$$(\Delta A(t)\ \Delta B(t)) = DF(t)(E_1\ \ E_2) \tag{2.1b}$$

ただし，$F(t) \in \mathbb{R}^{k\times j}$ は不確かさ，D, E_1, E_2 は与えられた実行列で不確かさの構造を特徴付けるものである．また，不確かさは次の式で抑えられる：

$$F(t) \in \mathbb{F} := \{F(t) \mid \|F(t)\| \leq 1; F(t)\ \text{の各要素はルベーグ可測}\}$$

ノルム有界型で時変な不確かさを持つ線形システムのロバスト安定化

システムの不確かさが (2.1b) の形で与えられることにはいくつか根拠がある．まず，ノミナルプラントと不確かさ $F(t)$ の線形な相互接続から (2.1b) の形が導かれる．また，マッチング条件を満たすシステムなど，多くの物理的なシステムの不確かさのモデルは (2.1b) の形をとることが知られている．

システム (2.1) で $E_1 = 0$ または $E_2 = 0$ のとき，リッカチ方程式による解法が Petersen によって与えられている．また，Zhow と Khargonekar によって一般の場合の解法が与えられているが，$(n + m) \times (n + m)$ 次のリッカチ方程式を解かなければならない．本論文では，より直接的にシステム (2.1) の一般の場合の解を求める．解法もシンプルで $n \times n$ 次のリッカチ方程式を解くだけで良い．

いま，$rank(E_2) =: i \leq j$ とし，$\Sigma_2 \in \mathbb{R}^{i \times m}$ を $rank(\Sigma_2) = i,\ E_2^\top E_2 = \Sigma_2^\top \Sigma_2$ を満たすよう定め，$\Phi \in \mathbb{R}^{(m-i) \times m}$ を $\Phi \Sigma_2^\top = 0,\ \Phi \Phi^\top = I$ ($\Phi = 0$ if $i = m$) を満たすように選ぶ．更に，$\Xi = \Sigma_2^\top (\Sigma_2 \Sigma_2^\top)^{-2} \Sigma_2$ とする．

$E_2 = 0$ のとき，$\Sigma_2 = 0, \Phi = I, \Xi = 0$ であることに注意する．また，
$rank(E_2) = m$ のとき，Σ_2 は正則な正方行列であり，
$\Xi = (\Sigma_2^\top \Sigma_2)^{-1} = (E_2^\top E_2)^{-1}, \Phi = 0$ である．

ノルム有界型で時変な不確かさを持つ線形システムのロバスト安定化

定理 2.3

ある $\epsilon > 0$ が存在して，次の代数的リッカチ方程式

$$
\begin{aligned}
(A - B\Xi E_2^\top E_1)^\top P + P(A - B\Xi E_2^\top E_1) + P(DD^\top - B\Xi B^\top - \frac{1}{\epsilon} B\Phi^\top \Phi B^\top)P \\
+ E_1^\top (I - E_2 \Xi E_2^\top) E_1 + \epsilon I = 0 \qquad (2.4)
\end{aligned}
$$

が正定値対称行列 P を解に持つとき，不確実なシステム (2.1) は線形制御で 2 次可安定である．またこのとき，状態フィードバック制御は

$$
u(t) = -((\frac{1}{2\epsilon}\Phi^\top \Phi + \Xi) B^\top P + \Xi E_2^\top E_1) x(t) \qquad (2.5)
$$

で与えられる．逆に，システム (2.1) が線形制御で 2 次可安定ならば，ある $\epsilon^* > 0$ が存在して，任意の $0 < \epsilon < \epsilon^*$ となる ϵ に対し，式 (2.4) は $A - B\Xi E_2^\top E_1 + (DD^\top - B\Xi B^\top - \frac{1}{\epsilon} B\Phi^\top \Phi B^\top) P_0$ が漸近安定であるような唯一の対称行列解 P_0 を持ち，更に P_0 は正定値である．

＜定理 2.3 の証明の概略＞

(⇒)

証明に次の事実を用いる：

$$\forall \beta \in \mathbb{R};\ X^\top Y + Y^\top X \geq \beta X^\top X + \frac{1}{\beta} Y^\top Y \tag{A1}$$

(2.4) **が正定対称行列解** P **を解に持つとする．このとき，システム** (2.1) **が制御則** (2.5) **によって安定であることをリアプノフ関数によって示す．**

$$\begin{aligned}\mathbb{L}(x,t) = \dot{V} =& x^\top((A + DF(t)E_1)^\top P + P(A + DF(t)E_1))x \\ & - 2x^\top P(B + DF(t)E_2)((\frac{1}{2\epsilon}\Phi^\top\Phi + \Xi)B^\top P + \Xi E_2^\top E_2)x\end{aligned}$$

$\Phi\Sigma^\top = 0$ **より** $\Phi E_2^\top = 0$**．したがって事実** A1 **と** $F(t)^\top F(t) \leq I$ **から，**

$$\begin{aligned}\mathbb{L}(x,t) = \dot{V} =& x^\top(A^\top P + PA - PB\Xi B^\top P - E_1^\top E_2\Xi B^\top P - PB_2^\top E_1 \\ & + PDD^\top P + E_1^\top E_1 - E_1^\top E_2\Xi E_2^\top E_1)x\end{aligned}$$

と変形できる．いま，(2.4) **式より，**$\mathbb{L} \leq \epsilon x^\top x$ **であるから，**$\alpha = \epsilon > 0$ **とすると，**(2.5) **が安定な線形制御則であることがわかる．**

ノルム有界型で時変な不確かさを持つ線形システムのロバスト安定化

式 $A - B\Xi E_2^\top E_1 + (DD^\top - B\Xi B^\top - \frac{1}{\epsilon}B\Phi^\top\Phi B^\top)P_0$ **が漸近安定となる解** P_0 **は安定な解と呼ばれ，存在すれば一意である．**
定理 2.3 **は，システム** (2.1) **が動的でない状態フィードバックで** 2 **次可安定であることの必要十分条件を与えている．また，入力行列，状態行列に不確かさが含まれないとき，定理** 2.3 **はそれぞれ** Petersen **の与えた結果と一致する．**

ノルム有界型で時変な不確かさを持つ線形システムのロバスト安定化

小さなゲインに対する不確実な線形自律システムの 2 次安定性を考える:

$$\dot{x}(t) = (A_0 + DF(t)E)x(t), \|F(t)\| \leq 1 \qquad (\Sigma)$$

定理 2.7

システム (Σ) **が 2 次安定であることは，次の 2 つの条件を満たすことと同値である．**

(2.7i) A_0 **は安定行列である．**

(2.7ii) $\|E(sI - A_0)^{-1}D\|_\infty < 1$

系 2.8

行列の集合 $\mathbb{A} := \{A = A_0 + DFE \mid F$ **は実行列，** $\|F\| \leq 1\}$ **を考える．このとき，ある正定値行列** P **が存在して，任意の** $A \in \mathbb{A}$ **に対して** $A^\top P + PA < 0$ **が成り立つことと，**(2.7i), (2.7ii) **が成り立つことは同値である．**

＜定理 2.7 の証明の概略＞

(⇒)

システム (2.1) **が** 2 **次安定であるとする．定義** 2.2 **より，ある正定対称行列** S **が存在して，** $\forall F(t) \in \mathbb{F};\ (A_0 + DF(t)E)^\top S + S(A_0 + DF(t)E) < 0$ **であるから，** $F(t) = 0$ **として，**(2.7i) **を得る．また，** $Q > 0,\ E_0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (E **は正則**) **を次のように定める：**

$-Q := A_0^\top P + PA_0 + PDD^\top P + E^\top E,\quad E_0^\top E_0 := E^\top E + Q$

先行研究の結果より， $\forall \omega \in \mathbb{R};\ D^\top(j\omega I - A_0^\top)^{-1} E_0^\top E_0 (j\omega I - A_0)^{-1} D \le I$ **であることが知られている．更に，** $E_0(j\omega I - A_0)^{-1}D \to 0\ (\omega \to 0)$ **である．**

$\therefore\ \forall \mu \in (0,\ 1),\ \exists \omega_0,\ \forall \omega \in (\omega_0,\ \infty];$

$D^\top(j\omega I - A_0^\top)^{-1} E_0^\top E_0 (j\omega I - A_0)^{-1} D \le (1-\mu)I < I$

一方， D **は列フルランクで** Q **は正定なので**

$\exists \delta > 0,\ \forall \omega \in (\omega_0,\ \infty];\ D^\top(j\omega I - A_0^\top)^{-1} Q (j\omega I - A_0)^{-1} D \ge \delta I$ **.**

$\therefore\ \forall \omega \in (\omega_0,\ \infty];\ D^\top(j\omega I - A_0^\top)^{-1} E^\top E (j\omega I - A_0)^{-1} D \le I - \delta I < I$ **.**

$\epsilon = min\{\mu,\ \delta\}$ **として，** $\|E(sI - A_0)^{-1}D\|_\infty \le 1 - \epsilon < 1$**，すなわち** (2.7ii) **を得る．**

出力フィードバックによる 2 次可安定性

次に，これまでの結果を使って出力フィードバックによる 2 次安定化問題の解を与える．次のような線形システムを考える：

$$\dot{x}(t) = (A + \Delta A(t))x(t) + (B + \Delta B(t))u(t) \tag{3.1a}$$

$$y(t) = Cx(t) \tag{3.1b}$$

$$\Delta A(t)\Delta B(t) = DF(t)E_1E_2, \ \|F(t)\| \leq \rho \tag{3.1c}$$

ただし，$x(t) \in \mathbb{R}^n$ は状態，$u(t) \in \mathbb{R}^m$ は制御入力，$y(t) \in \mathbb{R}^k$ は出力である．また，$F(t)$ はノルム有界な不確かさを表す行列である．システムの形は (2.1) と同じだが，今回はすべての状態が可測とは限らない．ノミナルシステムは $F(t) = 0$ で与えられる．

仮定 3.2

$(A,\ B)$ は可安定であり，$(A,\ C)$ は可検出である．

明らかに，この仮定はノミナルシステムが可安定であることの必要条件である．

出力フィードバックによる 2 次可安定性

定義 3.3

ある線形時不変なコントローラー $K(s)$ が存在して，$u = -K(s)y$ のとき，$\|F(t)\| \leq \rho$ となる任意の不確かさ $F(t)$ に対して閉ループが 2 次安定となるとき，システム (3.1) は **(線形出力フィードバックで)2 次安定**であるという．
また，任意の $\rho > 0$ に対して，ある線形時不変なフィードバックコントローラー $K(s)$ が存在して，$u = -K(s)y$ のとき，$\|F(t)\| \leq \rho$ となる任意の不確かさ $F(t)$ に対して閉ループが 2 次可安定となるとき，システム (3.1) は **(線形出力フィードバックで) 完全 2 次可安定**であるという．

出力フィードバックによる 2 次安定化問題は不確かなシステムにおいては解かれていなかったが，定理 2.7 を用いると，明らかに一般的な H^∞ 最適化による手法で解くことができる．実際，定理 2.7 の応用として次の定理 3.4 が得られる．

出力フィードバックによる 2 次可安定性

定理 3.4

$H_0(s) := (E_1 - E_2K(s)C)(sI - A + BK(s)C)^{-1}D$ とし，$\gamma_0 := inf\{\|H_0(S)\|_\infty \mid K(s) \in \mathbb{S}\}$ とする．ただし，$\mathbb{S}$ は (3.1) のノミナルシステムを内部安定にする実有理行列 $K(s)$ 全体の集合である．いま，$\rho > 0$ が与えられたとする．このとき，$\gamma_0 < \frac{1}{\rho}$ であるとき，またそのときに限り，不確実なシステム (3.1) は動的線形出力フィードバックで 2 次可安定である．

系 3.5

$H_0(s) := (E_1 - E_2K(s)C)(sI - A + BK(s)C)^{-1}D$ とし，$\gamma_0 := inf\{\|H_0(S)\|_\infty \mid K(s) \in \mathbb{S}\}$ とする．このとき，$\gamma_0 = 0$ であるとき，またそのときに限り，システム (3.1) は動的線形出力フィードバックで完全 2 次可安定である．

出力フィードバックによる 2 次可安定性

仮定 3.6

$\Delta B = 0$ (*i.e.*, $E_2 = 0$), $D = B$ (*i.e.*, ΔA はマッチング条件を満たし，$\Delta A = BF(t)E_1$), $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$は列フルランク，$C \in \mathbb{R}^{k\times n}$は行フルランク であるとする．すなわち，次のような不確かなシステムを考える：

$$\dot{x}(t) = (A + BF(t)E_1)x(t) + Bu(t) \tag{3.7a}$$

$$y(t) = Cx(t) \tag{3.7b}$$

ただし，$F(t)$ は不確かさを表すノルム有界な行列である．

定理 3.8

システム (3.7) が仮定 3.2，3.6 を満たすとする．このとき，ある行列 $P > 0$, Ω が存在して，次の制約付きリアプノフ問題 (CLP) が解を持つならば，システム (3.7) は動的出力フィードバックで完全 2 次可安定である：

(i) $\Theta^\top(A^\top P + PA)\Theta < 0$

(ii) $B^\top P = \Omega C$

ただし，$\Theta \in \mathbb{R}^{n\times(n-k)}$ は $C\Theta = 0$, $\Theta^\top\Theta = I$ を満たす行列である．

出力フィードバックによる 2 次可安定性

定理 3.5 と定理 3.8 から直ちに次の定理 3.9 が得られる．

定理 3.9

システム (3.1) が仮定 3.2，3.6 を満たし，更にある $P > 0,\ \Omega$ が存在して定理 3.8 の CLP が解を持つとする．このとき，

$$\gamma_0 = inf\{\|E_1(sI - A + BK(s)C)^{-1}B\|_\infty \mid K(s) \in \mathbb{S}\} = 0$$

系 3.5，定理 3.9 は明らかに，CLP で完全 2 次安定化問題が可解であるとき，それはまた H^∞ 最適化による方法でも可解であることを意味していることに注意されたい．

本論文の成果

本論文のメインテーマは，不確実なシステムの 2 次安定化による時間領域の結果と，H^∞ 最適化による周波数領域の結果の相互の関係を見ることであった．これらの関係は，定理 2.7，定理 3.4 によって見ることができた．この関係は 1960 年代から知られていたが，2 次安定化による時間領域と，H^∞ 最適化による周波数領域の論文ではあまり注目されていなかった．いま，再びこれらの関係を見ることで，双方の分野でより価値が認められるようになることが期待される．実際，多くの 2 次安定化の結果は，H^∞ 最適化の特別な場合と見ることができる．