2 次安定化と H^∞ 制御理論

本田雄一郎
森田研 M1

2016/06/27

はじめに

ノルム有界型で時変な不確かさを持つ線形システムのロバスト安定化

次のような不確実な線形システムを考える．

$$\dot{x}(t) = (A + \Delta A(q(t)))x(t) + (B + \Delta B(q(t)))u(t) \tag{2.1a}$$

ただし，$F(t) \in \mathbb{R}^{k\times j}$ は不確かさ，D, E, E_2 は与えられた実行列で不確かさの構造を特徴付けるものである．また，不確かさは次の式で抑えられる：

$$F(t) \in \mathbb{F} := \{F(t) \mid \|F(t)\| \leq 1; F(t) \text{ の各要素はルベーグ可測 } \}$$

ノルム有界型で時変な不確かさを持つ線形システムのロバスト安定化

定義 2.2

$u = 0$ のシステム (2.1) に対して, ある正定値対称行列 $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ と $\alpha > 0$ をが存在して，任意の許容可能な n 不確実性 $q(t)$ に対し，リアプノフ関数 $V(x) = x^\top P x$ が

$$\mathbb{L}(x,t) := \dot{V} = 2x^\top P(A + \Delta A(q(t)))x \leq -\alpha \|x\|^2$$

をすべての $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ の組に対して満たすとき，システム (2.1) は **2 次可安定**という．また，閉ループが 2 次安定となるような状態フィードバック制御 $u = -Kx(t)$ が存在するとき，システム (2.1) は**線形状態フィードバックによって 2 次可安定**であるという．

ノルム有界型で時変な不確かさを持つ線形システムのロバスト安定化

定理 2.3

ある $\epsilon > 0$ **が存在して，次の代数的リッカチ方程式**

$$
\begin{aligned}
(A - B\Xi E_2^\top E_1)^\top P + P(A - B\Xi E_2^\top E_1) + P(DD^\top - B\Xi B^\top - \frac{1}{\epsilon} B\Phi^\top \Phi B^\top)P \\
+ E_1^\top (I - E_2 \Xi E_2^\top) E_1 + \epsilon I = 0 \qquad (2.4)
\end{aligned}
$$

が正定値対称行列 P **を解に持つとき，不確実なシステム** (2.1) **は線形制御で** 2 **次可安定である．またこのとき，状態フィードバック制御は**

$$
u(t) = -(\{\frac{1}{2\epsilon}\Phi^\top \Phi + \Xi\} B^\top P + \Xi E_2^\top E_1) x(t) \qquad (2.5)
$$

で与えられる．逆に，システム (2.1) **が線形制御で** 2 **次可安定ならば，ある** $\epsilon^* > 0$ **が存在して，任意の** $0 < \epsilon < \epsilon^*$ **となる** ϵ **に対し，式** (2.4) **は** $(A - B\Xi E_2^\top E_1 + (DD^\top - B\Xi B^\top - \frac{1}{\epsilon} B\Phi^\top \Phi B^\top) P_0)$ **が漸近安定であるような唯一の対称行列解** P_0 **を持ち，更に** P_0 **は正定値である．**

ノルム有界型で時変な不確かさを持つ線形システムのロバスト安定化

小さなゲインに対する不確実な線形自律システムの 2 次安定性を考える:

$$\dot{x}(t) = (A_0 + DF(t)E)x(t), \|F(t)\| \leq 1 \qquad (\Sigma)$$

定理 2.7

システム (Σ) **が 2 次安定であることは，次の 2 つの条件を満たすことと同値である．**

(2.7i) A_0 **は安定行列である．**

(2.7ii) $\|E(sI - A_0)^{-1}D\|_\infty < 1$

補題 2.8

行列の集合 $\mathbb{A} := \{A = A_0 + DFE \mid F$ **は実行列，** $\|F\| \leq 1\}$ **を考える．このとき，ある正定値行列** P **が存在して，任意の** $A \in \mathbb{A}$ **に対して** $A^\top P + PA < 0$ **が成り立つことと，**(2.7i), (2.7ii) **が成り立つことは同値である．**

出力フィードバックによる 2 次可安定性

出力フィードバックによる 2 次可安定性

定義 3.3

ある線形時不変なコントローラー $K(s)$ が存在して，$u = -K(s)y$ のとき，$\|F(t)\| \le \rho$ となる任意の不確かさ $F(t)$ に対して閉ループが 2 次安定となるとき，システム (3.1) は (線形出力フィードバックで)2 次安定であるという．
また，任意の $\rho > 0$ に対して，ある線形時不変なフィードバックコントローラー $K(s)$ が存在して，$u = -K(s)y$ のとき，$\|F(t)\| \le \rho$ となる任意の不確かさ $F(t)$ に対して閉ループが 2 次安定となるとき，システム (3.1) は (線形出力フィードバックで) 完全 2 次安定であるという．

本論文の成果

本論文のメインテーマは，不確実なシステムの 2 次安定化による時間領域の結果と，H^∞ 最適化による周波数領域の結果の相互作用を見ることであった．これらの関係は，定理 2.7，定理 3.4 によって見ることができた．この関係は 1960 年代から知られていたが，2 次安定化による時間領域と，H^∞ 最適化による周波数領域の論文ではあまり注目されていなかった．いま，再びこれらの関係を見ることで，双方の分野でより価値が認められるようになることが期待される．実際，多くの 2 次安定化の結果は，H^∞ 最適化の特別な場合と見ることができる．