

# $k$ 最短路の探索

本田雄一郎

大阪大学情報科学研究科  
情報数理学専攻 森田研究室 M1

2017/01/30

## 紹介する論文

D.Eppstein: “Finding the  $k$  shortest paths” SIAM Journal on Computing 28(2) (1997)

# 問題設定

## 問題

### Input:

- $G = (E, V)$ : 有向グラフ
- $c : E \rightarrow R_+$ : 正の辺重み関数
- $s, t \in V$ : 始点, 終点

### Output:

- $p_1, p_2, \dots, p_k$ :  $1 \sim k$  最短路

# 主結果

## 主結果

グラフ  $G$  における  $s$  から  $t$  への  $1 \sim k$  最短路を  $O(m + n \log n + k)$  で列挙できる.

# 手順

大まかには以下の流れで  $k$  最短路を求めるためのグラフ  $P(G)$  を作成する.

- ① 最短路木  $T$  の作成. ( $O(m + n \log n)$ )
- ② 2つの2分ヒープの族  $H_{out}(v)$ ,  $H_T(v)$  ( $v \in V$ ) を作成. ( $O(m)$ ,  $O(n \log n)$ )
- ③  $H_{out}(v)$ ,  $H_T(v)$  をマージして3分ヒープからなる非巡回グラフ  $D(G)$  を作成. ( $O(n \log n)$ )
- ④  $D(G)$  に辺と頂点を追加し, 4分ヒープからなるグラフ  $P(G)$  を作成. ( $O(m + n \log n)$ )

# 用語整理

- $d(u, v)$ : 頂点  $u$  から頂点  $v$  への最短路の距離
- $l(e)$ : 辺  $e$  の長さ
- $tail(e)$ ,  $head(e)$ : 有向辺  $e$  の始点, 終点
- $\delta(e) := l(e) + d(head(e), t) - d(tail(e), t)$ :  $e$  を通ったことによる最短路との差

## 有向グラフ $G$ と最短路木 $T$

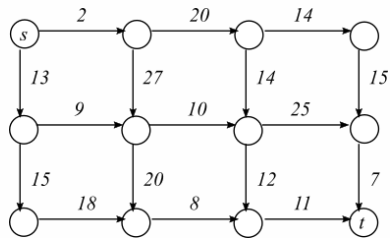


Figure:  $G$

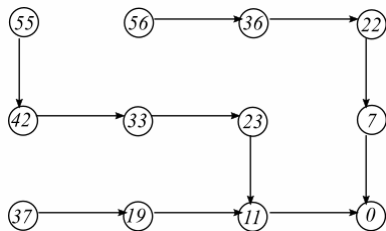


Figure: 最短路木  $T$

- $G$  内で,  $t$  から逆向きに Dijkstra 法を適用することで  $T$  を得る. ( $O(m + n \log n)$ )
- $T$  の各頂点の重みは  $t$  からの距離.
- $T$  内で頂点  $v$  の次に来る頂点を  $next_T(v)$  と表す.

## $G - T$ と *sidetracks*

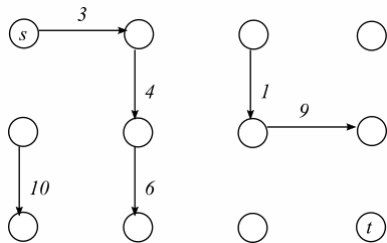


Figure:  $G - T$

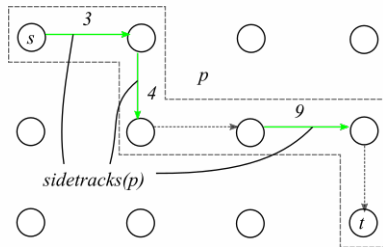


Figure:  $\text{sidetracks}(p)$

$G$  内の  $s - t$  道  $p$  が与えられたとき，辺集合  $\text{sidetracks}(p)$  を次のように定める．

$$\text{sidetracks}(p) = \{e \mid e \in G - T, e \in p\}$$

$G - T$  内の  $\text{sidetracks}(p)$  は  $G$  内の  $s - t$  道  $p$  と 1 対 1 に対応する．



## 2つのヒープの作成 (1)

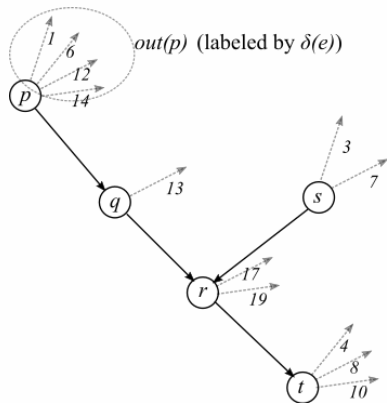


Figure: 最短路木  $T$  の部分グラフ

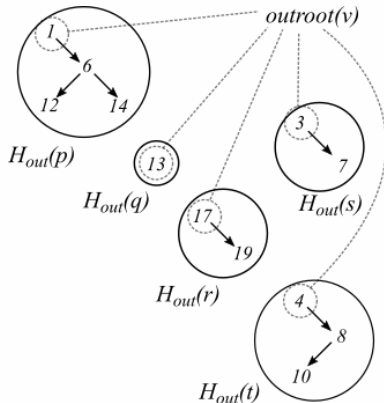


Figure:  $H_{out}(v)$

- 各頂点  $v$  について,  $(v, w) \in G - T$  となる最小の辺 (以後,  $outroot(v)$  と呼ぶ) を取り出し, 残りの辺でヒープを作る. 作成したヒープの根を  $outroot(v)$  の右の子とする. ( $O(m)$ )

## 2つのヒープの作成 (2)

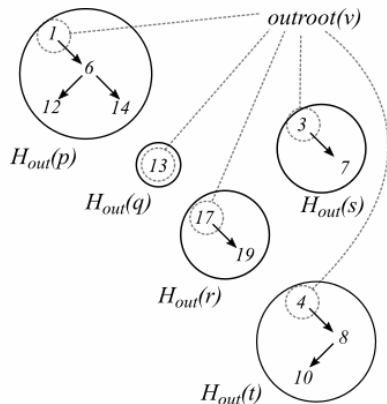


Figure:  $H_{out}(v)$

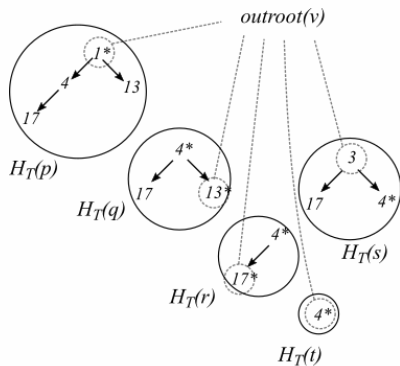


Figure:  $H_T(v)$

- $H_T(t) := \text{outroot}(t)$ .  $H_T(\text{next}_T(v))$  に  $\text{outroot}(v)$  を挿入し  $H_T(v)$  を構成. ( $O(n \log n)$ )
- $H_{out}(v)$ ,  $H_T(v)$  の頂点はグラフ  $G$  の辺と 1 対 1 に対応することに注意.

## $D(G)$ から $P(G)$ の構成へ

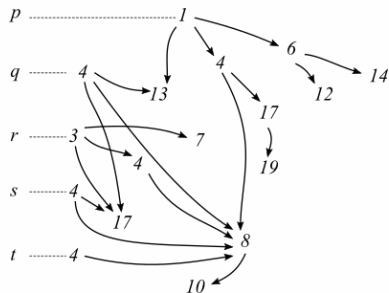


Figure: 有向非巡回グラフ  $D(G)$

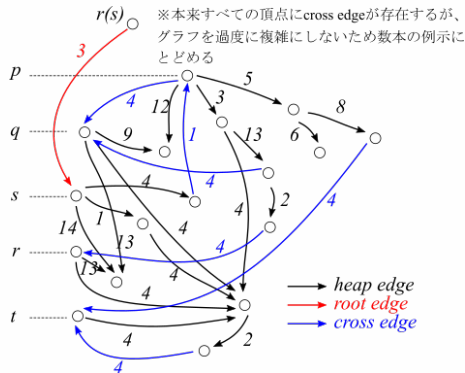


Figure: グラフ  $P(G)$

- ヒープ  $H_T(v)$ ,  $H_{out}(v)$  をマージしてグラフ  $D(G)$  を作成. ( $D(G)$  の頂点の出次数は高々 3 となることに注意)
- $D(G)$  に根となる頂点  $r(s)$  を追加し,  $r(s)$  から  $h(s)$  への辺重みを  $\delta(h(s))$  とする.
- $D(G)$  内の辺  $(u, v)$  の重みを  $\delta(v) - \delta(u)$  で定める.
- $D(G)$  内の頂点  $p$  が対応する  $G$  内の辺  $(x, y)$  に対し, 辺  $(p, h(y))$  を  $D(G)$  内に追加し, 重みを  $\delta(h(y))$  で定める.
- $P(G)$  は右図のようになる (※). なお, 上記の作業は全て  $O(m + n \log n)$  で行えることに注意.

## $P(G)$ の性質

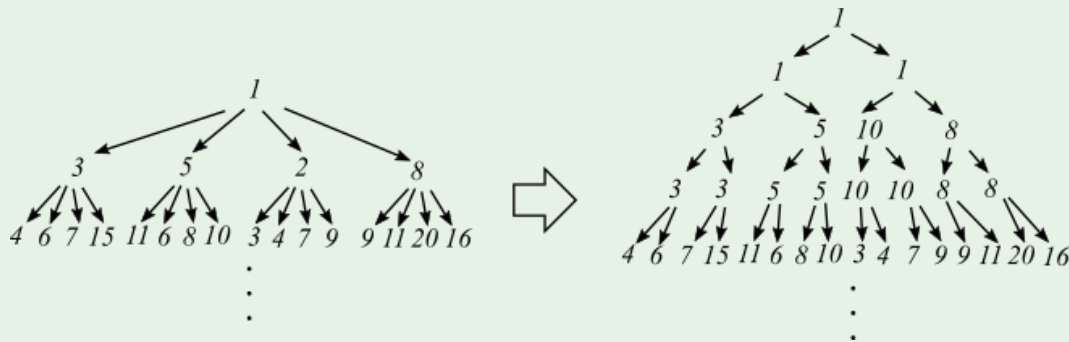
- ①  $P(G)$  は  $O(m + n \log n)$  個の頂点を持つ.
- ②  $P(G)$  の頂点の出次数は高々 4 である.
- ③  $P(G)$  の辺は非負の重みを持つ.
- ④  $G$  内の  $s-t$  道と  $P(G)$  内の  $r$  から出発した道は 1 対 1 に対応する.
- ⑤  $P(G)$  内の道  $p'$  の重みを  $l$  とすると, 対応する  $G$  内  $s-t$  道  $p$  の重みは  $d(s, t) + l$  で表せる.

# ヒープに関する補題


補題 (Frederickson, 1993)

2分ヒープ内の  $k$  番目に小さい要素を  $O(k)$  で取得できる.

4分ヒープから2分ヒープへの変形



# Reference

-  D.Eppstein: “Finding the  $k$  shortest paths” SIAM Journal on Computing 28(2) (1997)
-  G.N.Frederickkson: “An optimal algorithm for selection in a min-heap” Information and Computation 104 (1993)