Yu Jia CHEONG Alexandre SIMCIC

MAP 411 Projet Sujet 1:
Processus de Markov et équations aux dérivées partielles

Question 1

On supposera ici que $N_p < N_x$ afin de garder la notion de probabilité de présence pour π_j^0 et celle de densité de particules pour u_j^0 (par unité de longueur).

$u_j^0 = N_p$

$u_j^{n+1} = u_j^n\left(1 - \alpha\Delta t - p_j^+ - p_j^-\right) + u_{j-1}^n p_j^+ + u_{j+1}^n p_j^-$

$\sum_j u_j^{n+1} = \left(1 - \alpha\Delta t - p_j^+ - p_j^-\right) \sum_j u_j^n + p_j^+ \sum_j u_{j-1}^n + p_j^- \sum_j u_{j+1}^n$

$\sum_j u_j^{n+1} = (1 - \alpha\Delta t) \sum_j u_j^n$ en ré-indexant les sommes

On obtient donc une suite géomètrique.

$\sum_j u_j^n = (1 - \alpha\Delta t)^n N_p$ qui est cohérent avec la notion de désintégration (décroissance du nombre de particules en $e^{-\alpha t}$)

Question 2

En approchant $\partial_t u$ par $\frac{(u_j^{n+1} - u_j^n)}{\Delta t}$

$\partial_x u$ par $\frac{(u_j^n - u_{j-1}^n)}{\Delta x}$

$\partial_{x,x} u$ par $\frac{(2u_j^n - u_{j-1}^n - u_{j+1}^n)}{\Delta x^2}$

On obtient :

$$u_j^{n+1} = u_j^n \left(1 - \alpha\Delta t - V\frac{\Delta t}{\Delta x} - 2D\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) + u_{j-1}^n \left(V\frac{\Delta t}{\Delta x} + D\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) + u_{j+1}^n \left(D\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right)$$

On retrouve bien : $u_j^{n+1} = u_j^n\left(1 - \alpha\Delta t - p_j^+ - p_j^-\right) + u_{j-1}^n p_j^+ + u_{j+1}^n p_j^-$

Il apparait que V représente une vitesse de convection, D un coefficient de diffusion et alpha l'inverse du temps caractéristique de désintégration.

u se trouve alors être une densité de particules (nombre de particules par unité de longueur).

Sous la condition CFL, u_j^{n+1} est une combinaison convexe de u_j^n , u_{j-1}^n et u_{j+1}^n.

Question 4

Posons $u(x,t) \; = \; \sum_k \hat{u}(k,t)\, e^{-2i\pi kx}$

En injectant cette expression dans l'équation différentielle, on obtient :

$$\partial t \; \hat{u}(k,t) \; = \; (2i\pi kV - \alpha - 4D\pi^2 k^2)\, \hat{u}(k,t)$$

Ce qui donne :

$$u(x,t) \; = \; e^{-\alpha t} \sum_k C_k \, e^{-4D\pi^2 k^2 t} e^{-2i\pi k(Vt-x)}$$

Puis

$$u(x,0) = 1 - \cos(2\pi x) \; = \; 1 - \frac{e^{2i\pi x} + e^{-2i\pi x}}{2}$$

Donne :

$$u(x,t) \; = \; e^{-\alpha t}\, [1 - \; e^{-4D\pi^2 t} \cos(2\pi(Vt - x))]$$

Question 5

On a choisi de ne pas normaliser la distribution initiale pour avoir une densité de probabilité, vu que cela change la solution explicite. J signifie donc le nombre de particules, parce qu'on a

$$\sum_{i=1}^{J} (1 - \cos(2\pi x_i)) = J \text{ pour } \; x_i = i * \Delta x, \Delta x = \frac{1}{J}$$

Pour l'analyse d'erreur, on prend la différence entre la solution et la simulation et considère les L_2 et L_∞ normes. On veut montrer que l'erreur est $O(\Delta t^p + \Delta x^q + N^{-m})$, c'est à dire $Err \leq M(\Delta t^p + \Delta x^q + N^{-m})$. Vu qu'on a la relation $\Delta x = \frac{1}{J} = \frac{1}{N}$, on a aussi m = q.

On trace alors le logarithme de l'erreur contre le logarithme de Δt et Δx respectivement. On a donc $\log(Err) \leq \log M + p * \log(\Delta t)$ (ou, respectivement, $q * \log(\Delta x)$. En considérant la pente de la graphe tracée, on le majore pour trouver p, q, et m.

On varie d'abord Δt en tenant Δx constante, pour $\Delta x = \frac{1}{J} = \frac{1}{N}$ et J = 30 à 60 par incréments de 10. On trouve que la pente est majorée par un coefficient de 1/3 pour Δt, pour les deux normes.

On fait pareil pour Δx en tenant Δt constante, pour Δt = 0.000025 à Δt = 0.0002 par incréments de 0.000025. On majore l'erreur cette fois pour Δx par un coefficient de ¾ pour L_∞ et 1/5 pour la L_2 norme.

Question 6

La première condition du bord gauche est $u(0,t) = 0\ t \in \mathbb{R}_+^*$. Cela corresponde à un thermostat à température constant et nul à $x = 0$. L'autre condition de bord est $\frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0\ t \in \mathbb{R}_+^*$. La flux sortant du bord droit est donc nul et signifie que le système est thermiquement isolé de l'extérieur à $x = 1$. N'ayant pas la solution exacte, on fait une analyse d'erreur de troncation qui nous amène à la convergence et stabilité du schéma. L'équation qu'on veut résoudre est le suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + V\frac{\partial u}{\partial x} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \alpha u$$

Et le schéma qu'on utilise est pareil à celui de question 5 :

$$u_j^{n+1} = \left(V\frac{\Delta t}{\Delta x} + D\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right)u_{j-1}^n + \left(D\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right)u_{j+1}^n + \left(1 - \alpha\Delta t - V\frac{\Delta t}{\Delta x} - 2D\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right)u_j^n$$

La deuxième condition de bord est schématisé par :

```
uu(1,1) = 0;
uu(J) = uu(J-1);
```

En assumant que la solution est exacte à (t,x), on analyse l'erreur donné par un pas de Δt : $u(t+\Delta t,x) - \left(V\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)u(t,x-\Delta x) - \left(D\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right)(u(t,x-\Delta x) + u(t,x+\Delta x)) - \left(1 - \alpha\Delta t - V\frac{\Delta t}{\Delta x} - 2D\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right)u(t,x)$

On détail les termes en utilisant les séries de Fourier :

$$u(t+\Delta t,x) = u(t,x) + \frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\Delta t + O(\Delta t^2)$$

$$u(t,x+\Delta x) = u(t,x) + \frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}\frac{\Delta x^2}{2} + \frac{\partial^3 u(t,x)}{\partial x^3}\frac{\Delta x^3}{6} + O(\Delta x^4)$$

$$u(t,x-\Delta x) = u(t,x) - \frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}\frac{\Delta x^2}{2} - \frac{\partial^3 u(t,x)}{\partial x^3}\frac{\Delta x^3}{6} + O(\Delta x^4)$$

Et on les substitue dans l'erreur de troncation pour trouver :

$$u(t,x) + \frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\Delta t + O(\Delta t^2) - \left(V\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)\left(u(t,x) - \frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\Delta x + O(\Delta x^2)\right) -$$
$$D\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\left(2u(t,x) + 2\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}\frac{\Delta x^2}{2} + O(\Delta x^4)\right) - \left(1 - \alpha\Delta t - V\frac{\Delta t}{\Delta x} - 2D\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right)u(t,x)$$
$$= \Delta t\left(\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + V\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} - D\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + \alpha u(t,x)\right) + O(\Delta t^2 + \Delta x^1)$$

Mais $u(t,x)$ étant une solution, il vérifie $\frac{\partial u}{\partial t} + V\frac{\partial u}{\partial x} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \alpha u$

On a donc que l'erreur de troncation est $O(\Delta t^2 + \Delta x)$.