Mini-projet d'analyse numérique du cours MAP 411
Processus de Markov et équations aux dérivées partielles

Sujet proposé par Eric Cancès (cances@cermics.enpc.fr)

Soit $N_x \in \mathbb{N}^*$ et $\Delta x = 1/N_x$. On considère $\mathbb{R}$ comme la réunion disjointe des intervalles $B_j = [j\,\Delta x, (j+1)\,\Delta x[$, $j \in \mathbb{Z}$, de longueur Δx. Pour tout $j \in \mathbb{Z}$, on pose $x_j = (j+1/2)\,\Delta x$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $V \in \mathbb{R}_+$, $D \in \mathbb{R}_+$ et $\Delta t > 0$ tel que $1 - \alpha\,\Delta t - V\frac{\Delta t}{\Delta x} - 2D\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \geq 0$. On considère le modèle probabiliste de particules indépendantes défini par la chaîne de Markov suivante : si une particule est à l'instant $n\,\Delta t$ dans la boîte B_j, elle a

- une probabilité $p_j^0 = \alpha\,\Delta t$ d'être détruite dans le laps de temps $]n\,\Delta t, (n+1)\,\Delta t]$;
- une probabilité $p_j^+ = V\,\frac{\Delta t}{\Delta x} + D\,\frac{\Delta t}{\Delta x^2}$ de se trouver dans la boîte B_{j+1} à l'instant $(n+1)\,\Delta t$;
- une probabilité $p_j^- = D\,\frac{\Delta t}{\Delta x^2}$ de se trouver dans la boîte B_{j-1} à l'instant $(n+1)\,\Delta t$;
- une probabilité $(1-p_j^0-p_j^+-p_j^-)$ d'être encore dans la boîte B_j à l'instant $(n+1)\,\Delta t$.

On suppose qu'à l'instant $t = 0$, les particules sont distribuées uniformément sur l'intervalle $[0,1]$. On note Π_j^n la probabilité qu'une particule soit dans la boîte B_j à l'instant $n\,\Delta t$, et on pose $u_j^n = \Pi_j^n/\Delta x$.

Question 1. Pour $j \in \mathbb{Z}$, donner l'expression de u_j^0 et écrire l'équation du type

$$u_j^{n+1} = f_{\Delta x,\Delta t}(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n) \tag{1}$$

qui régit l'évolution des u_j^k. Comment évolue $\sum_{j\in\mathbb{Z}} u_j^n$? Commenter.

Question 2. On considère le problème d'advection-diffusion

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) + V\,\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t) = D\,\Delta u(x,t) - \alpha\,u(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^* \\ u(x,0) = \chi_{[0,1]}(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{array} \right. \tag{2}$$

Montrer que (1) est en fait un schéma de discrétisation du problème (2). Quelle est dans ce cadre l'interprétation physique des paramètres α, V et D, de la fonction u, et de la condition CFL associée au schéma (1) ? Dans quel cadre vous paraît-il pertinent d'utiliser une méthode probabiliste pour simuler une EDP.

Question 3. En s'inspirant des questions précédentes, construire une chaîne de Markov à nombre d'états finis correspondant à une discrétisation du problème suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) + V\,\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t) = D\,\Delta u(x,t) - \alpha\, u(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \end{cases} \tag{3}$$

où u_0 est une fonction 1-périodique donnée. Ecrire un programme Scilab permettant de simuler cette chaîne de Markov. On rappelle que la fonction *rand* permet sous Scilab de tirer un nombre pseudo-aléatoire selon la loi uniforme sur $[0,1]$.

Question 4. En utilisant la théorie des séries de Fourier, donner la solution explicite du problème (3) pour

$$u_0(x) = 1 - \cos(2\pi x). \tag{4}$$

Question 5. On suppose dans cette question que $V = 1$, $D = 1$ et $\alpha = 1$. Etudier la convergence vers la solution exacte de la solution numérique du problème (3)-(4) obtenue en simulant la chaîne de Markov construite à la question 3. On montrera en particulier par des tests numériques que l'erreur entre la solution approchée et la solution exacte se comporte en $O(\Delta t^k + \Delta x^l + N_p^{-m})$, où N_p désigne le nombre de particules utilisées dans la simulation de la chaîne de Markov et k, l et m des nombres entiers ou demi-entiers dépendant éventuellement de la norme utilisée pour mesurer l'erreur. On détaillera la méthodologie utilisée pour mener à bien cette étude et on argumentera les choix effectués.

Question 6. On considère le problème aux limites

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) + V\,\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t) = D\,\Delta u(x,t) - \alpha\, u(x,t), \quad (x,t) \in]0,1[\times \mathbb{R}_+^*, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad x \in]0,1[, \\ u(0,t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+^*, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+^*. \end{cases} \tag{5}$$

Donner une interprétation physique des conditions aux bords. Construire une chaîne de Markov à nombre d'états finis correspondant à une discrétisation du problème (5). Ecrire un programme Scilab permettant de simuler cette chaîne de Markov et évaluer les performances de cette approche numérique.