**MAP 411 Projet Sujet 1:**

**Processus de Markov et   
équations aux dérivées partielles**

**Question 1**

On supposera ici que afin de garder la notion de probabilité de présence pour et celle de densité de particules pour  (par unité de longueur).

en ré-indexant les sommes

On obtient donc une suite géomètrique.

qui est cohérent avec la notion de désintégration (décroissance du nombre de particules en )

**Question 2**

En approchant par

par

par –

On obtient :

On retrouve bien :

Il apparait que V représente une vitesse de convection, D un coefficient de diffusion et alpha l'inverse du temps caractéristique de désintégration.

u se trouve alors être une densité de particules (nombre de particules par unité de longueur).

Sous la condition CFL, est une combinaison convexe de ,  et.

**Question 4**

Posons

En injectant cette expression dans l'équation différentielle, on obtient :

Ce qui donne :

Puis

Donne :

**Question 5**

On a choisi de ne pas normaliser la distribution initiale pour avoir une densité de probabilité, vu que cela change la solution explicite. J signifie donc le nombre de particules, parce qu’on a

Pour l’analyse d’erreur, on prend la différence entre la solution et la simulation et considère les et normes. On veut montrer que l’erreur est , c’est à dire . Vu qu’on a la relation , on a aussi m = q.

On trace alors le logarithme de l’erreur contre le logarithme de et respectivement. On a donc (ou, respectivement, . En considérant la pente de la graphe tracée, on le majore pour trouver , , et .

On varie d’abord en tenant constante, pour et J = 30 à 60 par incréments de 10. On trouve que la pente est majorée par un coefficient de 1/3 pour , pour les deux normes.

On fait pareil pour en tenant constante, pour = 0.0000075 à = 0.00002 par incréments de 0.000025. On majore l’erreur cette fois pour par un coefficient de ¾ pour et 1/5 pour la norme.

**Question 6**

La première condition du bord gauche est . Cela corresponde à un thermostat à température constant et nul à . L’autre condition de bord est . La flux sortant du bord droit est donc nul et signifie que le système est thermiquement isolé de l’extérieur à . N’ayant pas la solution exacte, on fait une analyse d’erreur de troncation qui nous amène à la convergence et stabilité du schéma. L’équation qu’on veut résoudre est le suivant :

Et le schéma qu’on utilise est pareil à celui de question 5 :

La deuxième condition de bord est schématisé par :

uu(1,1) = 0;

uu(J) = uu(J-1);

En assumant que la solution est exacte à , on analyse l’erreur donné par un pas de  :

On détail les termes en utilisant les séries de Fourier :

Et on les substitue dans l’erreur de troncation pour trouver :

Mais étant une solution, il vérifie

On a donc que l’erreur de troncation est .