数字图像处理

第六次作业

姓名：余静

班级：自动化 62

学号：2160504052

提交时间：2019.4.2

摘要

本次实验基于MATLAB，实现对图像的加噪、运动模糊、复原等操作，比较不同滤波复原方式的优劣。1.先给图像加高斯噪声，用几种均值滤波器和统计排序滤波器对图像进行恢复，并比较效果；2.利用脉冲(椒盐)噪声的PDF；3.推导维纳滤波器模型，产生运动模糊和高斯噪声，

一. 在测试图像上产生高斯噪声 lena 图-需能指定均值和方差；并用多种滤波器恢复图像，分析各自优缺点；

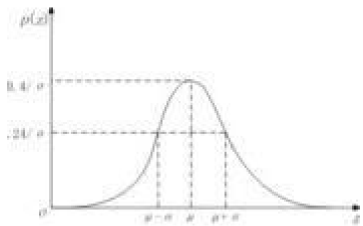
1. 问题分析：

（1） 高斯噪声：

高斯噪声是指它的概率密度函数服从高斯分布（即正态分布）的一类噪声。一个高斯随机变量 z 的 PDF 可表示为：

$$P(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp[-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}]$$

其中 z 代表灰度，u 是 z 的均值，是 z 的标准差。高斯噪声的灰度值多集中在均值附近。



（2） 算数均值滤波：

令 Sxy 表示中心在点(x,y)处，大小为 m×n 的矩形子图像窗口的一组坐标。算术均值滤波器在 Sxy 定义的区域中计算被污染的图像 g(x,y)的平均值

$$\hat{f}(x,y) = \frac{1}{mn}\sum_{(s,t)\in S_{xy}} g(s,t)$$

（3） **几何均值滤波：**

使用几何均值滤波器复原一幅图像由如下表达式给出：

$$\hat{f}(x,y)=\left[\prod_{(s,t)\in S_{xy}} g(s,t)\right]^{\frac{1}{mn}}$$

（4） **谐波均值滤波：**

谐波均值滤波器操作由如下表达式给出：

$$\hat{f}(x,y)=\frac{mn}{\sum_{(s,t)\in S_{xy}}\frac{1}{g(s,t)}}$$

谐波均值滤波器对于盐粒噪声效果较好，但不适用于胡椒噪声。善于处理像高斯噪声那样的其他噪声。

（5） **逆谐波均值滤波：**

逆谐波均值滤波器基于如下表达式产生一副复原图像：

$$\hat{f}(x, y) = \frac{\sum_{(s,t)\in S_{xy}} g(s,\ t)^{Q+1}}{\sum_{(s,t)\in S_{xy}} g(s,\ t)_{Q}}$$

其中 Q 称为滤波器的阶数。这种滤波器适合减少或者在实际中消除椒盐噪声的影响。当 Q 的值为正时，该滤波器消除胡椒噪声；当 Q 的值为负时，该滤波器消除盐粒噪声。但是它不能同时消除这两种噪声。当 Q 等于 0 时，简化为算数均值滤波器，当 Q 等于-1 时，则为谐波滤波器。

实验结果：

（1） **添加高斯噪声：**

原图

加入gaussian噪声后(0 0.01)

加入gaussian噪声后(0 0.1)

加入gaussian噪声后(0.1 0.01)

（2） **图像恢复：**


算术均值滤波
几何均值滤波
谐波均值滤波
逆谐波均值滤波 Q=1

结果分析：

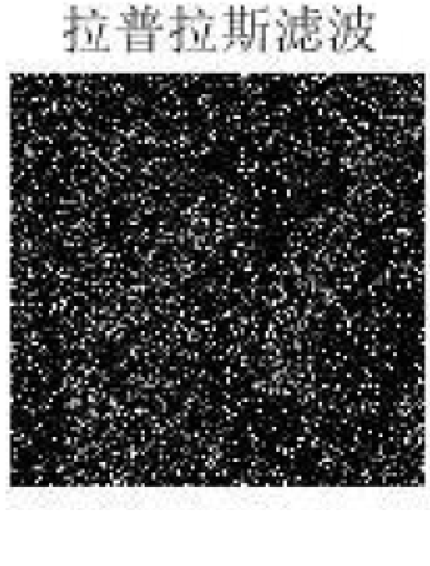
随着方差的增加，图像的噪声现象更加严重，随着均值的增加，图像变得更加明亮；分别使用四种滤波器进行了恢复，算数均值在细节方面比较模糊，中值滤波器保留更多图像细节信息，自适应局部滤波器保留图像的细节最多

二．在测试图像 lena 图加入椒盐噪声（椒和盐噪声密度均是 0.1）；用学过的滤波器恢复图像；在使用反谐波分析 Q 大于 0 和小于 0 的作用；

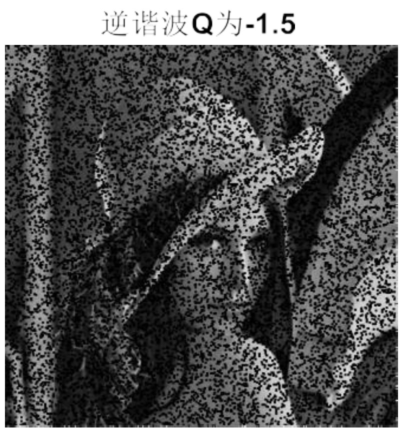
1. 问题分析：

椒盐噪声（salt-and-pepper noise)又称脉冲噪声，它随机改变一些像素值，在二值图像上表现为使一些像素点变白，一些像素点变黑。是由图像传感器，传输信道，解码处理等产生的黑白相间的亮暗点噪声。椒盐噪声往往由图像切割引起，去除脉冲干扰及椒盐噪声最常用的算法是中值滤波。

2. 实验结果：



反谐波分析Q 大于 0 和小于 0 的作用



分析：四种均值滤波方式均可对椒盐噪声实现衰减，但在恢复效果上存在细微的差别。相比于算术均值与几何均值，尽管对噪声的衰减都起到了作用，但几何均值并未像算术均值那样使图像变得模糊。算术均值与几何均值更适合于处理高斯或均匀随机噪声。逆谐波均值更适合于处理脉冲噪声信号。

三．推导维纳滤波器并实现下边要求；

(a) 实现模糊滤波器如方程Eq. (5.6-11).

(b) 模糊lena图像：45度方向，T=1；

(c) 再模糊的lena图像中增加高斯噪声，均值= 0 ，方差=10 pixels 以产生模糊图像；

(d)分别利用方程 Eq. (5.8-6)和(5.9-4)，恢复图像；并分析算法的优缺点.问题分析：

（1） 模糊滤波器：

图像的运动模糊是由于在成像曝光过程中，物体和相机之间的相对运动，使得物体上同一点的光线在多个成像单元上引起响应造成的。以g(x,y) 表示模糊后的图像，T 表示积分时间，运动模糊原理可以表示为:

$$g(x,y)=\int_0^T f[x-x_0(t),y-y_0(t)]dt$$

对上式进行傅里叶变换变换，得

$$G(u,v)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_0^T f[x-x_0(t),y-y_0(t)]dt\right]e^{-j2\pi(ux+vy)}dxdy$$

利用傅里叶变换的移位性质，频域模糊函数可以表示为

$$H(u,v)=\int_0^t e^{-j2\pi[ux_0(t)+vy_0(t)]}dt$$

现在考虑最简单的情况，那就是如果物体在两个坐标轴方向的运动是匀速直线运动，那么最终的模糊函数可以写为

$$H(u,v)=\frac{T}{\pi(ua+vb)}\sin\left[\pi(ua+vb)\right]e^{-j\pi(ua+vb)}$$

此过程的建模结果与频域滤波形式相类似，在进行处理时可以参照频域滤波的步骤，以H(x,y)作为滤波器函数，对进行填充和中心化后的图像频谱进行直接相乘即可。

（2） 维纳滤波器的推导：

维纳滤波是一种基于最小均方误差准则、对平稳过程的最优估计器。这种滤波器的输出与期望输出之间的均方误差为最小，因此，它是一个最佳滤波系统。它可用于提取被平稳噪声所污染的信号。

图像的退化模型为：

$$x(n_1,n_2)=b(n_1,n_2)*s(n_1,n_2)+w(n_1,n_2) \qquad (1)$$

其中，$s(n_1,n_2)$ 为原始图像，$b(n_1,n_2)$ 为退化函数，$w(n_1,n_2)$ 为噪声函数，$x(n_1,n_2)$ 为退化的图像。并假设 s 与 w 不相关， w 为 0 均值的平稳随机过程。

图像的复原模型为：

$$\hat{s}(n_1,n_2)=h(n_1,n_2)*x(n_1,n_2)=\sum_{l_1}\sum_{l_2}h(l_1,l_2)\times x(n_1-l_1,n_2-l_2) \qquad (2)$$

其中， $\hat{s}(\mathrm{n}_1,\mathrm{n}_2)$ 为恢复的图像， $\mathrm{h}(\mathrm{n}_1,\mathrm{n}_2)$ 为恢复滤波器。

误差度量为：

$$e^2 = E\{(s(n_1, n_2) - \hat{s}(n_1, n_2))^2\}$$

基于正交性原理，若要求误差最小，则必有下式成立： （5）

$$E\{e(n_1, n_2) \times x^*(m_1, m_2)\} = 0$$

将（3）式带入（4）式有：

$$E\{s(n_1, n_2) \times x^*(m_1, m_2)\} = E\{\hat{s}(n_1, n_2) \times x^*(m_1, m_2)\}$$

（3）

（4）

即

$$\begin{aligned} R_{sx}(n_1-m_1,n_2-m_2) &= E\{\sum_{l_1}\sum_{l_2} h(l_1,l_2)\times x(n_1-l_1,n_2-l_2)\times x^*(m_1,m_2)\} \\ &= \sum_{l_1}\sum_{l_2} h(l_1,l_2)\times E\{x(n_1-l_1,n_2-l_2)\times x^*(m_1,m_2)\} \\ &= \sum_{l_1}\sum_{l_2} h(l_1,l_2)\times R_{xx}(n_1-l_1-m_1,n_2-l_2-m_2) \\ &= h(n_1-m_1,n_2-m_2) * R_{xx}(n_1-m_1,n_2-m_2) \end{aligned} \quad (6)$$

换元得：

$$R_{sx}(n_1,n_2) = h(n_1,n_2) * R_{xx}(n_1,n_2) \quad (7)$$

等式两端同时取傅里叶变换得：

$$P_{sx}(w_1,w_2) = H(w_1,w_2)\times P_x(w_1,w_2) \quad (8)$$

即

$$H(w_1, w_2) = \frac{P_{sx}(w_1, w_2)}{P_x(w_1, w_2)} \quad (9)$$

公式（8）中

$$\begin{aligned} R_{sx}(n_1,n_2) &= E\{s(n_1+k_1,n_2+k_2)\times x^*(k_1,k_2)\} \\ &= E\{s(n_1+k_1,n_2+k_2)\times(\sum_{l_1}\sum_{l_2} b(l_1,l_2)\times s(k_1-l_1,k_2-l_2)+w(k_1,k_2))^*\} \\ &= \sum_{l_1}\sum_{l_2} b^*(l_1,l_2)\times E\{s(n_1+k_1,n_2+k_2)\times s^*(k_1-l_1,k_2-l_2)+s(n_1+k_1,n_2+k_2)\times w^*(k_1,k_2)\} \\ &= \sum_{l_1}\sum_{l_2} b^*(l_1,l_2)\times R_s(n_1+l_1,n_2+l_2) \\ &= b^*(-n_1,-n_2) * R_s(n_1,n_2) \end{aligned} \quad (10)$$

公式（10）两端同时取傅里叶变换得：

$$P_{sx}(w_1, w_2) = B^*(w_1, w_2) \times P_s(w_1, w_2) \quad (11)$$

公式（8）中

$$
\begin{aligned}
R_x(\mathrm{n}_1,\mathrm{n}_2) &= E\{\mathrm{x}(\mathrm{n}_1+\mathrm{k}_1,\mathrm{n}_2+\mathrm{k}_2)\times x^*(\mathrm{k}_1,\mathrm{k}_2)\} \\
&= E\{(\sum_{l_1}\sum_{l_2}\mathrm{b}(\mathrm{l}_1,\mathrm{l}_2)\times \mathrm{s}(\mathrm{n}_1+\mathrm{k}_1-\mathrm{l}_1,\mathrm{n}_2+\mathrm{k}_2-\mathrm{l}_2)+\mathrm{w}(\mathrm{n}_1+\mathrm{k}_1,\mathrm{n}_2+\mathrm{k}_2))\times(\sum_{m_1}\sum_{m_2}\mathrm{b}(\mathrm{m}_1,\mathrm{m}_2)\times \mathrm{s}(\mathrm{k}_1-m_1,\mathrm{k}_2-m_2)+\mathrm{w}(\mathrm{k}_1,\mathrm{k}_2))^*\} \\
&= \sum_{l_1}\sum_{l_2}\sum_{m_1}\sum_{m_2}\mathrm{b}(\mathrm{l}_1,\mathrm{l}_2)\times \mathrm{b}^*(\mathrm{m}_1,\mathrm{m}_2)\times E\{\mathrm{s}(\mathrm{n}_1+\mathrm{k}_1-\mathrm{l}_1,\mathrm{n}_2+\mathrm{k}_2-\mathrm{l}_2)\times \mathrm{s}^*(\mathrm{k}_1-m_1,\mathrm{k}_2-m_2)+R_w(\mathrm{n}_1,\mathrm{n}_2) \\
&= \sum_{m_1}\sum_{m_2}\mathrm{b}^*(\mathrm{m}_1,\mathrm{m}_2)\sum_{l_1}\sum_{l_2}\mathrm{b}(\mathrm{l}_1,\mathrm{l}_2)R_s(\mathrm{n}_1+m_1-\mathrm{l}_1,\mathrm{n}_2+m_2-\mathrm{l}_2)+R_w(\mathrm{n}_1,\mathrm{n}_2) \\
&= \sum_{m_1}\sum_{m_2}\mathrm{b}^*(\mathrm{m}_1,\mathrm{m}_2)\times(b(\mathrm{n}_1+m_1,\mathrm{n}_2+m_2)*R_s(\mathrm{n}_1+m_1,\mathrm{n}_2+m_2))+R_w(\mathrm{n}_1,\mathrm{n}_2) \\
&= \mathrm{b}^*(-n_1,-n_2)*b(\mathrm{n}_1,\mathrm{n}_2)*R_s(\mathrm{n}_1,\mathrm{n}_2)+R_w(\mathrm{n}_1,\mathrm{n}_2)
\end{aligned}
\tag{12}
$$

公式（12）两端同时取傅里叶变换：

$$
P_x(\mathrm{w}_1,\mathrm{w}_2)=\left|B(\mathrm{w}_1,\mathrm{w}_2)\right|^2\times P_s(\mathrm{w}_1,\mathrm{w}_2)+P_w(\mathrm{w}_1,\mathrm{w}_2) \tag{13}
$$

将（11）式和（13）式带入（8）式得

$$
\mathrm{H}(\mathrm{w}_1,\mathrm{w}_2)=\frac{B^*(\mathrm{w}_1,\mathrm{w}_2)\times P_s(\mathrm{w}_1,\mathrm{w}_2)}{\left|B(\mathrm{w}_1,\mathrm{w}_2)\right|^2\times P_s(\mathrm{w}_1,\mathrm{w}_2)+P_w(\mathrm{w}_1,\mathrm{w}_2)} \tag{14}
$$

将符号化成与书中一致的表示

$$
\begin{aligned}
\mathrm{w}(\mathrm{u},\mathrm{v}) &= \frac{H^*(\mathrm{u},\mathrm{v})\times\left|F(\mathrm{u},\mathrm{v})\right|^2}{\left|H(\mathrm{u},\mathrm{v})\right|^2\times\left|\mathrm{N}(\mathrm{u},\mathrm{v})\right|^2+\left|\mathrm{N}(\mathrm{u},\mathrm{v})\right|^2} \\
&= \frac{H^*(\mathrm{u},\mathrm{v})}{\left|H(\mathrm{u},\mathrm{v})\right|^2+\dfrac{\left|\mathrm{N}(\mathrm{u},\mathrm{v})\right|^2}{\left|\mathrm{F}(\mathrm{u},\mathrm{v})\right|^2}}
\end{aligned}
\tag{15}
$$

故表达式由下式给出

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathrm{F}}(\mathrm{u},\mathrm{v}) &= \left[\frac{H^*(\mathrm{u},\mathrm{v})\times S_f(\mathrm{u},\mathrm{v})}{\left|H(\mathrm{u},\mathrm{v})\right|^2\times S_f(\mathrm{u},\mathrm{v})+S_\eta(\mathrm{u},\mathrm{v})}\right]\mathrm{G}(\mathrm{u},\mathrm{v}) \\
&= \left[\frac{H^*(\mathrm{u},\mathrm{v})}{\left|H(\mathrm{u},\mathrm{v})\right|^2+S_\eta(\mathrm{u},\mathrm{v})/S_f(\mathrm{u},\mathrm{v})}\right]\mathrm{G}(\mathrm{u},\mathrm{v}) \\
&= \left[\frac{1}{H(\mathrm{u},\mathrm{v})}\frac{\left|H(\mathrm{u},\mathrm{v})\right|^2}{\left|H(\mathrm{u},\mathrm{v})\right|^2+S_\eta(\mathrm{u},\mathrm{v})/S_f(\mathrm{u},\mathrm{v})}\right]\mathrm{G}(\mathrm{u},\mathrm{v})
\end{aligned}
\tag{16}
$$

实验结果

模糊变换

模糊变换后加入椒盐噪声

维纳滤波器恢复后图片 k=0.0001

维纳滤波器恢复后图片 k=0.001

维纳滤波器恢复后图片 k=0.01

维纳滤波器恢复后图片 k=0.1

分析：在相同参数选择下，最小二乘方滤波对噪声的去除效果更好，最终的复原图像中噪声的影响已经非常微弱，这可能与参数选择有关， k 和 r过大或者过小都会影响最终滤波的结果。

参考文献：

[1] 冈萨雷斯.数字图像处理（第三版）北京：电子工业出版社，2011