

灰色评价法：数学原理、符号公式推导与国赛建模流程 (全符号解释)

一、灰色评价法算法原理与数学推导（含符号释义）

灰色评价法/灰色关联分析法（Grey Relational Analysis, GRA）——信息不全条件下的多指标排序方法。

1.1 基本思路

将各方案与“理想参考序列”做相似性比较，综合所有指标的关联系数得到排序。

1.2 所有符号与数学公式

（一）原始数据与参考序列

- 有 m 个方案、 n 个指标：
- 原始数据矩阵 $X = [x_i(k)]$
 - $x_i(k)$ ：第 i 个方案在第 k 个指标上的原始值
 - $i = 1, \dots, m$ ； $k = 1, \dots, n$
- 参考序列（理想目标）：
- 通常取各指标最大值： $x_0(k) = \max_i x_i(k)$

（二）数据无量纲化

- 极差归一化（极大型、越大越优指标）：

$$y_i(k) = \frac{x_i(k) - \min_i x_i(k)}{\max_i x_i(k) - \min_i x_i(k)}$$

- $y_i(k)$ ：归一化后第 i 方案第 k 指标值
- 极小型（越小越优）可变换为极大型处理（如取倒数或1-归一值）

（三）关联系数

- 表示第 i 方案第 k 指标与理想值的相似度
- 设 $\Delta_i(k) = |y_0(k) - y_i(k)|$
- $\Delta_{\min} = \min_{i,k} \Delta_i(k)$ ， $\Delta_{\max} = \max_{i,k} \Delta_i(k)$
- 分辨系数 ρ ：一般取0.5
- 关联系数：

$$\xi_i(k) = \frac{\Delta_{\min} + \rho \Delta_{\max}}{\Delta_i(k) + \rho \Delta_{\max}}$$

- $\xi_i(k)$: 第i方案第k指标的关联系数（越接近1越优）

（四）灰色关联度（方案综合得分）

- $$\gamma_i = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_i(k)$$

- γ_i : 第i方案的灰色关联系数均值，综合排序依据（越大越优）

二、国赛/高教社杯灰色评价法流程典型案例

2.1 题目背景（模拟国赛风格）

城市生态环境质量综合评价，考虑“大气质量、水体污染、噪音、绿地率、居民满意度”五项指标。数据如下：

城市	大气	水体	噪音	绿地率	满意度
A	80	70	65	45	82
B	75	80	60	48	78
C	88	75	63	52	85

请用灰色评价法对三城市环境质量进行排序。

2.2 步骤详解

（1）构造原始数据矩阵

$X = [[80, 70, 65, 45, 82], [75, 80, 60, 48, 78], [88, 75, 63, 52, 85]]$

（2）选取参考序列

- 各指标最大值：[88, 80, 65, 52, 85]
- 记为 $x_0(k)$

（3）无量纲化（极差归一化）

如大气指标：- A: $(80-75)/(88-75)=5/13 \approx 0.385$ - B: $(75-75)/(88-75)=0/13=0$ - C: $(88-75)/(88-75)=13/13=1$

其他指标同理算出全部 $y_i(k)$

(4) 关联系数计算

以A城“大气”指标为例：- $\Delta_A(\text{大气}) = |1 - 0.385| = 0.615$ - 计算全部 $\Delta_i(k)$ 后，得到 $\Delta_{\min} = 0, \Delta_{\max} = 1$
- 分辨系数 $\rho = 0.5$ - $\xi_A(\text{大气}) = (0 + 0.5 \times 1)/(0.615 + 0.5 \times 1) = 0.5/1.115 \approx 0.448$

其他城市、其他指标同理全部算出 $\xi_i(k)$

(5) 灰色关联度（均值）

- 以A城为例，所有 $\xi_A(k)$ 均值即为A城综合得分
- 三城各自 γ_i 算出后，按大小排序，最大者为最优

三、小结

- 灰色评价法可用于样本少/不确定性大的多指标综合评价，国赛常用于环境、管理类、技术选优等
- 步骤：数据归一化→与理想解做关联系数→算均值→排序

如需某步手算详细数值、支持权重灰色评价等高级扩展，随时可补充！