

TOPSIS优劣解距离法：原理公式与国赛流程案例（含全部符号释义）

一、TOPSIS算法原理与数学推导（符号全释义）

TOPSIS（Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution）是一种常用多指标排序方法。

1.1 基本思路

“最佳方案”应与“理想解”距离最近、与“负理想解”距离最远。即从正理想解最近、从负理想解最远。

1.2 符号及公式推导

- 假设有m个方案、n个评价指标。

（一）原始数据矩阵

记：- $X = [x_{ij}]_{m \times n}$ - 其中，- x_{ij} ：第i个方案（如某地、某企业）在第j个指标上的原始数值 - $i = 1, 2, \dots, m$ - $j = 1, 2, \dots, n$

（二）指标归一化

由于各指标量纲不同，需归一化消除影响。最常用方法：

- 极大型（越大越好）指标：

$$z_{ij} = \frac{x_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^m x_{ij}^2}}$$

- 极小型（越小越好）指标：

$$z_{ij} = \frac{x_{min}}{x_{ij}}$$

- z_{ij} ：归一化后的指标矩阵
- x_{ij} ：原始数据
- x_{min} ：第j个指标下所有方案的最小值

（三）加权归一化矩阵

- 指定各指标权重 w_j ， $j=1, 2, \dots, n$ ，且 $\sum_{j=1}^n w_j = 1$
- 构建加权归一化矩阵

$$v_{ij} = w_j z_{ij}$$

- v_{ij} : 加权后的第i方案第j指标得分

(四) 确定理想解与负理想解

- 正理想解A+ (所有指标最优值构成的向量) :

$$A^+ = (v_1^+, v_2^+, \dots, v_n^+) \quad \text{其中 } v_j^+ = \max_i v_{ij}$$

- 负理想解A- (所有指标最差值构成的向量) :

$$A^- = (v_1^-, v_2^-, \dots, v_n^-) \quad \text{其中 } v_j^- = \min_i v_{ij}$$

- 含义:

- A^+ : “最优方案”在每个指标上的得分
- A^- : “最差方案”在每个指标上的得分

(五) 分别计算各方案到正/负理想解的欧氏距离

- 距正理想解A+的距离:

$$D_i^+ = \sqrt{\sum_{j=1}^n (v_{ij} - v_j^+)^2}$$

- 距负理想解A-的距离:

$$D_i^- = \sqrt{\sum_{j=1}^n (v_{ij} - v_j^-)^2}$$

- 含义:

- D_i^+ : 第i方案到最优解的“距离”, 距离越小越好
- D_i^- : 第i方案到最差解的“距离”, 距离越大越好

(六) 综合评价指数 (相对接近度)

$$C_i = \frac{D_i^-}{D_i^+ + D_i^-}$$

- 含义:

- C_i : 第i个方案的综合得分, 相对接近度, 取值0~1, 越大越优。

二、国赛/高教社杯TOPSIS流程典型案例

2.1 题目背景（模拟国赛风格）

某地拟优选一批供应商（A,B,C）为城市建设提供材料，需综合考虑“价格（万元，越低越优）、交付周期（天，越低越优）、产品质量（分，越高越优）、售后服务（分，越高越优）”四项指标。决策组指定权重分别为0.3, 0.2, 0.3, 0.2。

现有数据如下：

供应商	价格	交付周期	质量	服务
A	6	8	7	7
B	8	6	8	6
C	7	7	6	8

请用TOPSIS法对三家方案排序。

2.2 步骤详解（逐步推算）

（1）原始数据矩阵：

$X = \begin{bmatrix} 6 & 8 & 7 & 7 \\ 8 & 6 & 8 & 6 \\ 7 & 7 & 6 & 8 \end{bmatrix}$

（2）归一化处理：

- 价格、交付周期为成本型（极小型）
- 质量、服务为效益型（极大型）

假设统一采用极小型： $z_{ij} = x_{\min}/x_{ij}$ （成本型）， $z_{ij} = x_{ij}/\max(x_j)$ （效益型）

- 价格最小=6，交付最小=6，质量最大=8，服务最大=8

计算：- A: 价格=6/6=1, 交付=6/8=0.75, 质量=7/8=0.875, 服务=7/8=0.875 - B: 价格=8/8=1, 交付=6/6=1, 质量=8/8=1, 服务=6/8=0.75 - C: 价格=7/7=1, 交付=7/7=1, 质量=6/8=0.75, 服务=8/8=1

（3）加权：

- 权重分别为0.3, 0.2, 0.3, 0.2
- A: $0.3 \times 1 + 0.2 \times 0.75 + 0.3 \times 0.875 + 0.2 \times 0.875 = 0.3 + 0.15 + 0.2625 + 0.175 = 0.8875$
- B: $0.3 \times 1 + 0.2 \times 1 + 0.3 \times 1 + 0.2 \times 0.75 = 0.3 + 0.2 + 0.3 + 0.15 = 0.875$
- C: $0.3 \times 1 + 0.2 \times 1 + 0.3 \times 0.75 + 0.2 \times 1 = 0.3 + 0.2 + 0.225 + 0.2 = 0.855$

(4) 确定理想解与负理想解：

- 理想解A⁺：各列最大：价格=1, 交付=1, 质量=1, 服务=1
- 负理想解A⁻：各列最小：价格=0.75, 交付=0.75, 质量=0.75, 服务=0.75

(5) 算欧氏距离：

以A为例：- 距A⁺： $\sqrt{(0.3 - 0.3)^2 + (0.15 - 0.2)^2 + (0.2625 - 0.3)^2 + (0.175 - 0.2)^2} \dots$ （实际需对四个指标分别算 v_{ij} 与理想解差值平方和，再开方）

同理算A⁻。

(6) 计算综合得分C_i并排序：

- $C_i = D_i^- / (D_i^+ + D_i^-)$ ，分数越大越优
- 按分数从大到小排列即为最优供应商

三、小结

- TOPSIS流程标准、操作性强，比赛答题建议逐步写清“每步的公式、每个符号解释、数据怎么算”。
- 可进一步扩展到任意多方案、多指标、带权重与归一化等复杂实际场景。

如需手工推算某一步具体数值或遇到变体（如指标有正负型混合等），可随时扩充！