

# AHP / TOPSIS / 灰色评价法：原理推导与案例全流程详解

## 1. AHP（层次分析法）

### 1.1 算法原理与详细推导

AHP的核心思想是：将复杂多目标决策问题分层，利用两两比较矩阵，量化每一层因素权重，最终递推得到最优排序。适合于“权重主观、专家评判为主”的场景。

#### 步骤与公式

1. 层次结构建模（如：目标-准则-方案）
2. 判断矩阵A，元素 $a_{ij}$ 表示第i项相对于j项的重要性（1~9分制）：

	交通	人才	市场	成本
交通	1	3	2	0.5
人才	1/3	1	0.5	1/3
市场	0.5	2	1	1/3
成本	2	3	3	1

1. 权重计算（几何平均法示例）
2. 交通：开4次方  $\sqrt[4]{1 \times 3 \times 2 \times 0.5} \approx 1.316$
3. 人才：  $\sqrt[4]{1/3 \times 1 \times 0.5 \times 1/3} \approx 0.375$
4. 市场：  $\sqrt[4]{0.5 \times 2 \times 1 \times 1/3} \approx 0.759$
5. 成本：  $\sqrt[4]{2 \times 3 \times 3 \times 1} \approx 2.060$

6. 总和：4.510，标准化为：

。交通：0.29，人才：0.08，市场：0.17，成本：0.46

7. 一致性检验：

$$CI = \frac{\lambda_{max} - n}{n - 1}, \quad CR = \frac{CI}{RI}$$

RI查表，n=4时RI=0.9，CR<0.1为通过。

1. 最终得分：各方案评分×权重和，例如A市得分= $7 \times 0.29 + 8 \times 0.08 + 6 \times 0.17 + 6 \times 0.46 = 6.45$

## 1.2 代码与案例复现

见case1\_ahp\_company.csv + case1\_ahp.py，核心流程同上。

---

## 2. TOPSIS

### 2.1 算法原理与详细推导

TOPSIS思想：理想方案应“最接近正理想解、最远离负理想解”。

#### 步骤与公式

1. 归一化：极大值指标 $z_{ij} = \frac{x_{ij}}{\sqrt{\sum x_{ij}^2}}$ ，极小型如成本 $z_{ij} = x_{min}/x_{ij}$
2. 加权： $v_{ij} = w_j z_{ij}$
3. 理想解A+：各列最大值；A-：最小值
4. 距离： $D_i^+ = \sqrt{\sum_j (v_{ij} - A_j^+)^2}$ ,  $D_i^- = \sqrt{\sum_j (v_{ij} - A_j^-)^2}$
5. 综合评价： $C_i = \frac{D_i^-}{D_i^+ + D_i^-}$

### 2.2 案例手算示范

以三家供应商A/B/C部分数据：

供应商	价格	交付周期	质量	服务
A	6	8	7	7
B	8	6	8	6
C	7	7	6	8

- 价格/交付（成本型，越小越优）：归一化A:6/6=1, B:6/8=0.75, C:6/7=0.857...
- 质量/服务（效益型）：如A质量7/ $\sqrt{(7^2+8^2+6^2)}$ =0.631...
- 权重0.3/0.2/0.3/0.2后相乘
- 各方案到理想解、负理想解距离、最终分值排序

### 2.3 代码与案例复现

见case2\_topsis\_suppliers.csv + case2\_topsis.py

---

### 3. 灰色评价法（灰色关联分析）

#### 3.1 算法原理与详细推导

灰色评价法适用于样本小、信息不全。核心思想是：评价对象与理想参考序列越接近，其“灰色关联度”越大，排序越靠前。

##### 步骤与公式

1. 参考序列 $x_0$ ：如各项指标最大值。
2. 无量纲化（极差归一化）： $x_{norm} = (x - \min) / (\max - \min)$
3. 关联系数：

$$\xi_i(k) = \frac{\Delta_{\min} + \rho \Delta_{\max}}{|x_0(k) - x_i(k)| + \rho \Delta_{\max}}$$

$\rho$ 一般0.5。

4. 关联度： $\gamma_i = \frac{1}{n} \sum \xi_i(k)$

#### 3.2 案例手算演示

以A/B/C三市大气、水体、噪音部分：

城市	大气	水	噪音
A	80	70	65
B	75	80	60
C	88	75	63

- 参考序列=最大[88,80,65]
- 比如A大气 $\Delta = |88-80|=8$ ,  $\min\Delta=0$ ,  $\max\Delta=28$ ,  $\xi=(0+0.5\times 28)/(8+0.5\times 28)=14/22\approx 0.636$
- 依次算均值， $\gamma$ 最大者为最佳

#### 3.3 代码与案例复现

见case3\_gray\_environment.csv + case3\_gray.py

### 4. 小结与建模竞赛应用建议

- 三大算法都是“先无量纲/归一/标准化，后加权/关联/距离，最终排序”
- 代码实现均一一对应上述步骤
- 国赛中建议答题时“原理+公式+步骤+案例手算+代码对照”全流程写明

如需更详细拆解或公式逐步演算补充，随时可继续扩展。