

Maxwell 理論の量子異常について

立川裕二

第七回統計物理懇談会

2019 年 3 月 6 日

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \vec{B} &= \rho_m, & \operatorname{rot} \vec{E} + \partial_t \vec{B} &= \vec{J}_m, \\ \operatorname{div} \vec{E} &= \rho_e, & \operatorname{rot} \vec{B} - \partial_t \vec{E} &= \vec{J}_e.\end{aligned}$$

とっても重要。

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \vec{B} &= \rho_m, & \operatorname{rot} \vec{E} + \partial_t \vec{B} &= \vec{J}_m, \\ \operatorname{div} \vec{E} &= \rho_e, & \operatorname{rot} \vec{B} - \partial_t \vec{E} &= \vec{J}_e.\end{aligned}$$

ガリレイ変換で不変でない！



ローレンツ変換で不変だ！

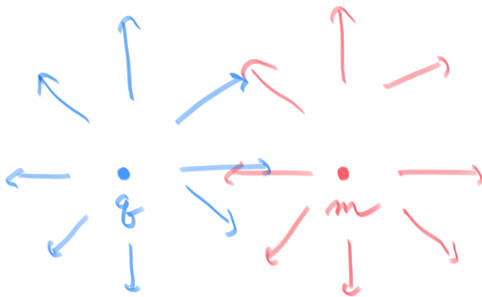
$$\begin{aligned}\operatorname{div} \vec{B} &= \rho_m, & \operatorname{rot} \vec{E} + \partial_t \vec{B} &= \vec{J}_m, \\ \operatorname{div} \vec{E} &= \rho_e, & \operatorname{rot} \vec{B} - \partial_t \vec{E} &= \vec{J}_e.\end{aligned}$$

電磁双対性: $\vec{E} \leftrightarrow \vec{B}$

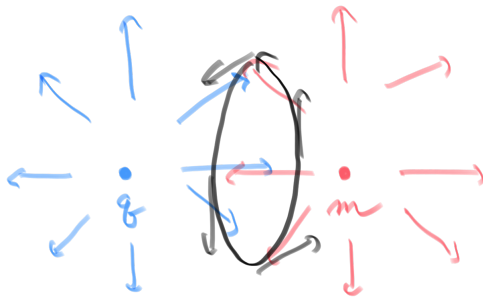
$$\begin{aligned}\operatorname{div} \vec{B} &= \rho_m, & \operatorname{rot} \vec{E} + \partial_t \vec{B} &= \vec{J}_m, \\ \operatorname{div} \vec{E} &= \rho_e, & \operatorname{rot} \vec{B} - \partial_t \vec{E} &= \vec{J}_e.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S : (\vec{E}, \vec{B}) &\mapsto (-\vec{B}, \vec{E}) \\ S^2 : (\vec{E}, \vec{B}) &\mapsto -(\vec{E}, \vec{B})\end{aligned}$$

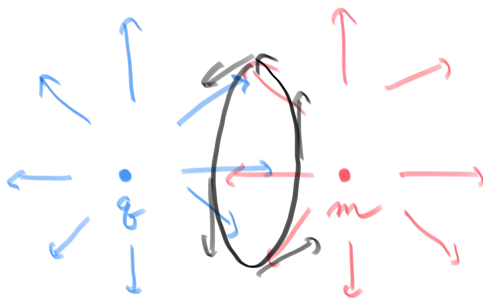
電磁**双対**性は四回やらないと元に戻らない。



電荷 q と磁荷 m を考える。



ポインティングベクトル $\vec{E} \times \vec{B}$ から角運動量 $\propto qm$ が出る。

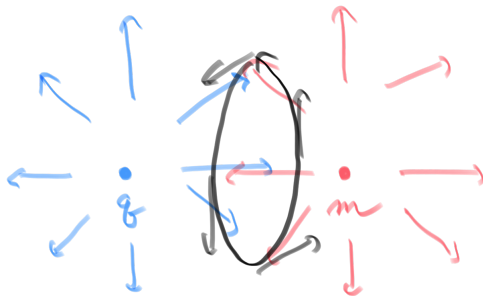


これまで比例定数を全然決めていなかったのを、

$$\text{角運動量} = \frac{\hbar}{2} qm$$

としてよい。量子力学では、 qm は整数でないといけない。

これが **Dirac 量子化条件**。



電荷と磁荷の単位自体も決めていなかった。

$$\text{角運動量} = \frac{\hbar}{2} q m$$

最小の電荷を $q = 1$, 最小の磁荷を $m = 1$ と取ることにする。

(\dot{q}, m) (\dot{q}', m')

電荷と磁荷を両方持った粒子を考えても良い。

$$\text{角運動量} = \frac{\hbar}{2}(q\dot{m}' - m\dot{q}') = \frac{\hbar}{2} \det \begin{pmatrix} q & q' \\ m & m' \end{pmatrix}$$

電場と磁場の変換

$$\begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{pmatrix}$$

は (q, m) にも作用するので、 a, b, c, d は整数。

$$\det \begin{pmatrix} q & q' \\ m & m' \end{pmatrix} \text{ を保存するので、 } \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 1。$$

$$\left. \begin{array}{l} a, b, c, d \text{ は整数} \\ \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 1 \end{array} \right\} \implies \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \textcolor{red}{SL}(2, \mathbb{Z})$$

特に

$$S : \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -\vec{B} \\ +\vec{E} \end{pmatrix}$$

は

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

に対応。

さて、ボゾンとフェルミオンの角運動量は

boson	$0\hbar$	\hbar	$2\hbar$	\dots
fermion	$\frac{1}{2}\hbar$	$\frac{3}{2}\hbar$	$\frac{5}{2}\hbar$	\dots

だった。

$$b + b = b; \quad b + f = f; \quad f + f = b$$

電荷も磁荷も持たない状態は全てボゾンであるような世界を考える。

すると

電荷	...	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3	...
<i>b</i> or <i>f</i> ?		<i>b</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	

か

電荷	...	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3	...
<i>b</i> or <i>f</i> ?		<i>f</i>	<i>b</i>	<i>f</i>	<i>b</i>	<i>f</i>	<i>b</i>	<i>f</i>	

の二通りがありうる。

同様に

磁荷	...	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3	...
<i>b</i> or <i>f</i> ?		<i>b</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	

か

磁荷	...	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3	...
<i>b</i> or <i>f</i> ?		<i>f</i>	<i>b</i>	<i>f</i>	<i>b</i>	<i>f</i>	<i>b</i>	<i>f</i>	

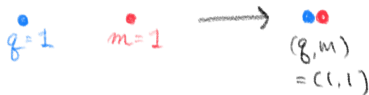
という二通りもある。

電荷も磁荷も持たない状態は全てボゾンであるような世界では、

- 電荷 $\equiv 1 \pmod{2}$ の粒子が b か f かの二通り
- 磁荷 $\equiv 1 \pmod{2}$ の粒子が b か f かの二通り

で微妙に異なる $2 \times 2 = 4$ 通りの Maxwell 理論がある。

磁荷と電荷を両方持つ粒子の b/f は?



角運動量 $\frac{\hbar}{2}qm = \frac{\hbar}{2}$ が追加されることを忘れないようにすると、
 粒子の (q, m) に応じた b/f は四通りのそれぞれに対して

$(1, 0)$	+	$(0, 1)$	→	$(1, 1)$
b	+	b	→	f
b	+	f	→	b
f	+	b	→	b
f	+	f	→	f

となる。

$(1, 0)$	+	$(0, 1)$	\rightarrow	$(1, 1)$
b	+	b	\rightarrow	f
b	+	f	\rightarrow	b
f	+	b	\rightarrow	b
f	+	f	\rightarrow	f

$SL(2, \mathbb{Z})$ で $(q, m) \equiv (1, 0), (0, 1), (1, 1)$ は入れ替えられる。

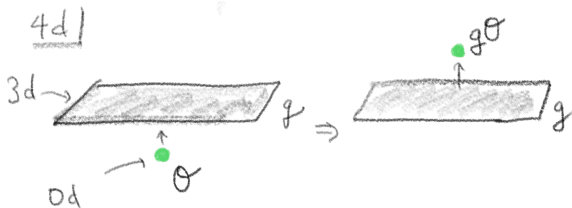
おしまいの一つは $SL(2, \mathbb{Z})$ で不変。

はじめの三つは $SL(2, \mathbb{Z})$ で入れ替わる。 $SL(2, \mathbb{Z})$ で不変でない。

(T^2 上のスピン構造の振舞いと同じ。)



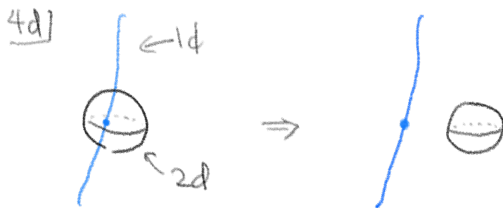
三次元空間内の電荷 四次元時空内の電荷



四次元時空における対称性 $g \in G$ の作用は、

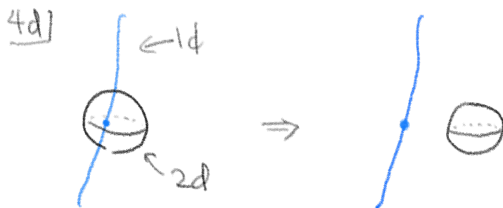
三次元の壁を演算子 O が越えること、と図示できる。

例えば $G = \mathbb{Z}_2$ で、 O が odd なら、壁を通過すると -1 かかる。

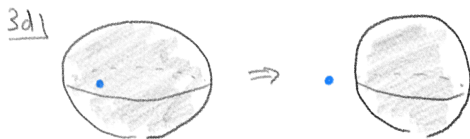


点演算子 \bullet でなくて、世界線に作用する「対称性」も考えられる。

一次元の世界線が、二次元の壁を通過すること、と思える。

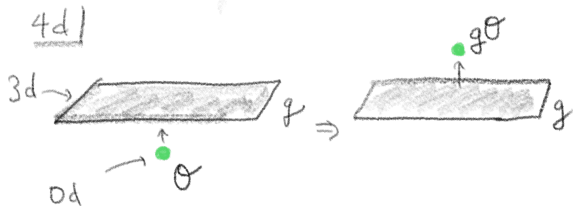


は三次元等時刻面の切り方によってはいろいろに見える:

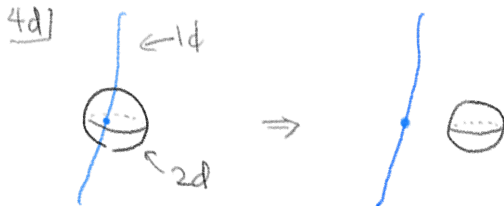


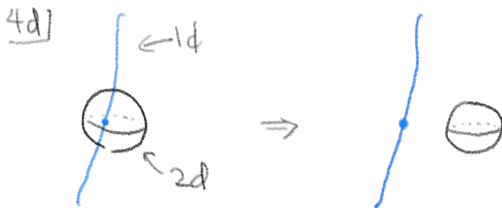
p -次元の対象に作用する対称性を p -対称性と呼ぼう。

0-対称性



1-対称性





Maxwell 理論では、次のような二種類の \mathbb{Z}_2 1-対称性を考えられる:

- 電氣的 \mathbb{Z}_2 1-対称性:

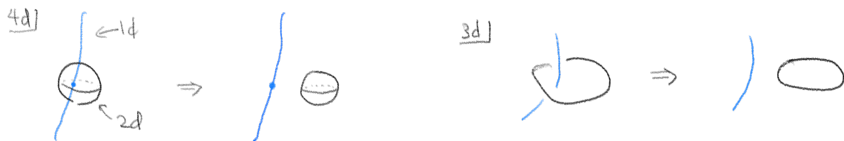
電荷 q の世界線を越えると、 $(-1)^q$ がその期待値に掛かる

- 磁氣的 \mathbb{Z}_2 1-対称性:

磁荷 m の世界線を越えると、 $(-1)^m$ がその期待値に掛かる

ただし電荷 q の世界線の期待値は Aharonov-Bohm 位相

$$\exp(2\pi i q \int \vec{A} \cdot d\vec{x}).$$



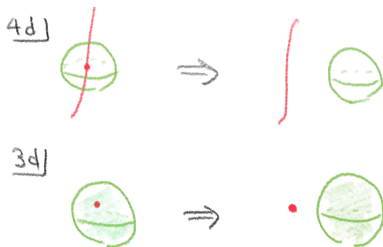
電荷 q の世界線を越えると、 $(-1)^q$ がその期待値に掛かる

$$\exp(2\pi i q \int_C \vec{A} \cdot d\vec{x}) \mapsto (-1)^q \exp(iq \int_{C'} \vec{A} \cdot d\vec{x})$$

すなわち、電氣的 \mathbb{Z}_2 1-対称性を実現する壁をつくっている黒線は
磁束量子の半分

$$\vec{B} = \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{x} = \int_C \vec{A} \cdot d\vec{x} - \int_{C'} \vec{A} \cdot d\vec{x} = \pm \frac{1}{2}$$

を持っているということ。



磁荷 m の世界線を越えると、 $(-1)^m$ がその期待値に掛かる

これは、磁氣的 \mathbb{Z}_2 1-対称性を実現する緑の壁には

$$\exp(\pi i \iint \vec{B} \cdot d\vec{\sigma})$$

という因子があるということ。

電氣的 \mathbb{Z}_2 1-対称性の壁

$$\vec{B} = \pm \frac{1}{2}$$



磁氣的 \mathbb{Z}_2 1-対称性の壁

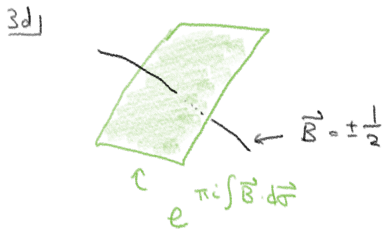
$$\exp(\pi i \iint \vec{B} \cdot d\vec{\sigma})$$



同時に時空に入れると、四次元時空では、二次元面ふたつは点で交わるので微妙なことになる。



一次元おとして絵を書くと、



位相因子が

$$e^{\pm \pi i} = \pm i$$

のどちらか定まらない。

場の量子論において対称性を考えた際に、
分配関数や真空期待値の位相が定まらなくなる現象を
その対称性の**量子異常=アノマリ**という。

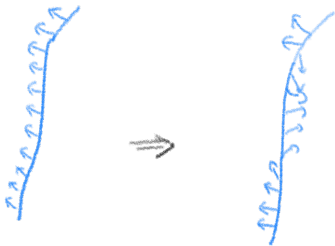
もともと 1969 年代後半にフェルミオンの $U(1)$ 対称性に対して
見つかったのがはじまり。

今回ののは Maxwell 理論の電氣的 \mathbb{Z}_2 1-対称性と磁氣的 \mathbb{Z}_2 1-対称性の間
の混合アノマリという変なもの。

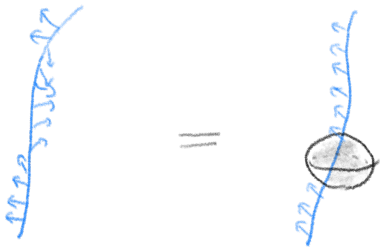
さて、電荷/磁荷をもった粒子の b/f の話と合わせよう。

3+1 次元では 720° 捻るのは連続的に何も捻らないのと同じだが、 360° 捻るというのは非自明な操作。

ある粒子が fermion であるとは、 360° 捻ると -1 がつくということ：



電荷 $q = 1$ を持った粒子が fermion であるとは、
 360° 捻る操作と電氣的 \mathbb{Z}_2 1-対称性の壁で囲むというのが
同じであるということ。



同様に、磁荷 $m = 1$ を持った粒子が fermion であるとは、 360° 捻る操作と磁氣的 \mathbb{Z}_2 1-対称性の壁で囲むというのが同じであるということ。



別に僕は粒子を捻らないからそんなこと気にしないよ、というわけにはいかない。

四次元の時空が非自明だと、時空のパッチ間の貼り合わせのために、 360° の捻りが必然的に生じることがある。

これをはかるのが代数トポロジーでいう **Stiefel-Whitney 類 w_2** というもの。(1940 年代に導入された。)

四次元時空 M_4 に対して、 360° の捻りに対応する \mathbb{Z}_2 **1-対称性**の壁に対応。

複素射影平面 \mathbb{CP}^2 だと、 w_2 はその中の複素射影直線

$$w_2 = \mathbb{CP}^1 \subset \mathbb{CP}^2$$

に対応。

さて、Maxwell 理論には四種類あった:

(q, m)	$(1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 1)$
	b	b	f
	b	f	b
	f	b	b
	f	f	f

$SL(2, \mathbb{Z})$ で $(q, m) \equiv (1, 0), (0, 1), (1, 1)$ は入れ替えられる。

おしまいの一つは $SL(2, \mathbb{Z})$ で不変。

はじめの三つは $SL(2, \mathbb{Z})$ で入れ替わる。 $SL(2, \mathbb{Z})$ で不変でない。

(q, m)	$(1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 1)$
	b	b	f
	b	f	b
	f	b	b
	f	f	f

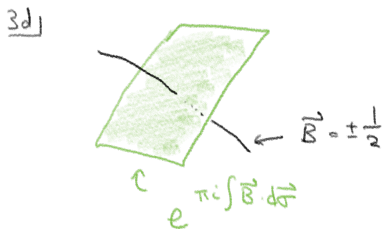
はじめの $SL(2, \mathbb{Z})$ 不変でない三つは、
 電氣的 \mathbb{Z}_2 1-対称性の壁もしくは
 磁氣的 \mathbb{Z}_2 1-対称性の壁どちらかしか挿入する必要がないので、
 何の問題も生じない。

おしまいの $SL(2, \mathbb{Z})$ 不変な一つは、
 電氣的 \mathbb{Z}_2 1-対称性の壁および
 磁氣的 \mathbb{Z}_2 1-対称性の壁の両方を挿入する必要があるので、
 ± 1 だけの不定性が生じうる。

(q, m)	$(1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 1)$
	f	f	f

おしまいの $SL(2, \mathbb{Z})$ 不変な一つを複素射影平面 \mathbb{CP}^2 上で考えると、
 フェルミオンの 360° 捻りを捉える為、
 $w_2 = \mathbb{CP}^1$ に電氣的 \mathbb{Z}_2 1-対称性の壁と磁氣的 \mathbb{Z}_2 1-対称性の壁を
 それぞれいれないといけない。

\mathbb{CP}^2 内の二つの \mathbb{CP}^1 は一ヶ所で交わる



ので、符号が定まらない危険がある。

実際、 \mathbb{CP}^2 の複素共役写像 $[z : w] \mapsto [\bar{z} : \bar{w}]$ のもとで、どうしても符号が反転してしまうことが確認出来る。

まとめると、

(q, m)	$(1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 1)$
	f	f	f

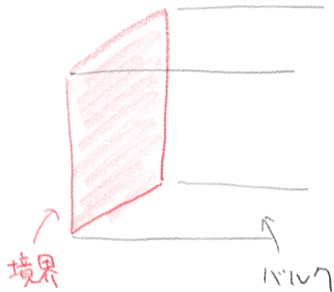
に対応する、 $SL(2, \mathbb{Z})$ 不変な Maxwell 理論は、
たとえば四次元時空 \mathbb{CP}^2 上で考えると、
その座標変換 $[z : w] \mapsto [\bar{z} : \bar{w}]$ のもとで分配関数を不変に保てない。

一般共変性の微妙な破れがある。

これは大域的重力アノマリの例。

[Wang-Wen-Witten 1810.00844 の一部]

アノマリとトポロジカル相には関係がある。



典型例は量子ホール効果:

- 1+1 次元の境界にはギャップレスカイラルフェルミオン
- 2+1 次元のバルクの有効作用は **Chern-Simons**

考える対称性は電磁気の $U(1)$ 対称性。ゲージ変換は

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{1}{2\pi i} e^{-2\pi i \chi} \partial_\mu e^{2\pi i \chi} = A_\mu + \partial_\mu \chi$$

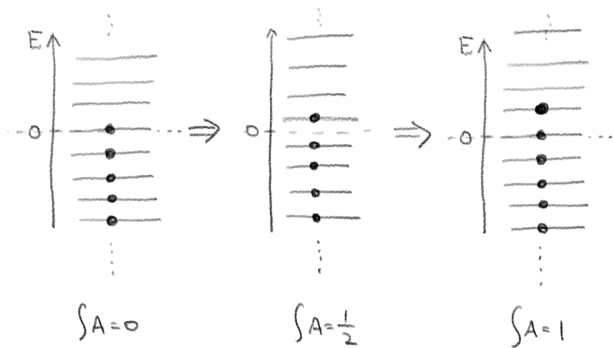
だから

$$\oint A_t dt \rightarrow \oint A_t dt + \oint \partial_t \chi dt$$

$\chi \sim \chi + 1$ だから

$$\oint A_t dt \sim \oint A_t dt + 1.$$

1 + 1 次元境界のフェルミオンを、空間方向を円周上において考える。



一粒子エネルギーレベルは

$$E \propto n + \oint A_t dt$$

負エネルギー状態は Dirac の海。

きちんと正則化すると、Dirac の海は電荷

$$q = \oint A_t dt$$

を持つ。分配関数は

$$Z = \text{tr} e^{-\beta H} e^{iq \oint A_t dt}$$

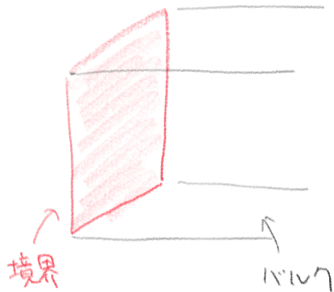
だが、ゲージ変換

$$\oint A_t dt \rightarrow \oint A_t dt + \oint \partial_t \chi dt$$

のもとで

$$Z \rightarrow Z e^{iq \oint \partial_t \chi dt} = Z \exp(i \oint \partial_t \chi dt \oint A_t dt)$$

となってしまう。分配関数の位相が定まらない！



境界の分配関数の位相の定まらなさが、
バルクの分配関数の位相の定まらなさで相殺される。

バルクの有効作用は Chern-Simons 項 $e^{iS_{\text{CS}}}$ ただし

$$S_{\text{CS}} = \int_{M_3} A dA \propto \int_{M_3} \epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\rho A_\nu$$

ゲージ変換

$$A \mapsto A + d\chi$$

のもとでの変化は

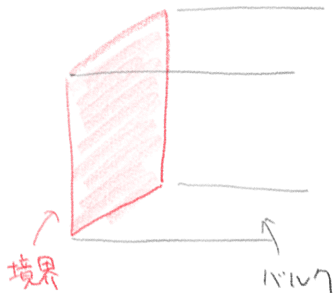
$$\delta \int_{M_3} A dA = \int_{M_3} d\chi dA = \int_{\partial M_3} (d\chi) A.$$

いまの状況では

$$= \oint \partial_t \chi dt \oint A_x dx$$

で、ちょうど境界のフェルミオンの位相の定まらなさを相殺。

今日の Maxwell 理論のアノマリの場合は、



- 3+1 次元の境界に Maxwell 理論
- 4+1 次元のバルクには Chern-Simons 理論の親戚

考える対称性が電氣的 \mathbb{Z}_2 1-対称性と磁氣的 \mathbb{Z}_2 1-対称性の場合には、それぞれにゲージ場

$$V_e, V_m \in H^2(M_5, \mathbb{Z}_2)$$

を導入。バルクの作用は

$$\exp(\pi i \int_{M_5} V_e \mathbf{Sq}^1 V_m)$$

ここで \mathbf{Sq}^1 は **Steenrod 作用素** というもの。
(これも 1940 年代後半に導入された代数トポロジーの概念)

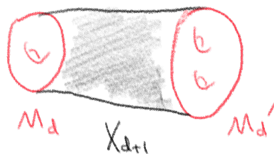
考える対称性が一般共変性の場合は、 V_e, V_m を両方とも **Stiefel-Whitney 類** w_2 にとる。するとバルク的作用は

$$\begin{aligned}\exp(\pi i \int_{M_5} V_e \mathbf{S} \mathbf{q}^1 V_m) &= \exp(\pi i \int_{M_5} w_2 \mathbf{S} \mathbf{q}^1 w_2) \\ &= \exp(\pi i \int_{M_5} w_2 w_3).\end{aligned}$$

de Rham 不変量と呼ばれるもの。

(導入されたのは 1931 年らしい;
Stiefel-Whitney 類と関係付いたのはもうすこし後)

向き付け可能多様体 M_d, M'_d が X_{d+1} でつながるとき



$M_d \sim M'_d$ と定めた同値類を向き付きコボルディズム類という。特に



なら $M_d \sim 0$ という。



五次元向き付きコボルディズム類は二種類で、de Rham 不変量

$$\exp(\pi i \int_{M_5} w_2 w_3) = \pm 1$$

で区別されることが知られている。

$+1$ ならつぶせる、 -1 ならつぶせない。

1950 から 60 年代の代数トポロジーの結果。

Chern-Simons が 70 年代半ばなので、それより昔の話。

数理論理では数学をいろいろつかうが、
代数トポロジーはこれまであまり使われていなかった。

最近になって半世紀前の代数トポロジーを使うようになってきたのは
面白い (?) ことだと思う。

さて、ここまでの話は全然僕自身の研究ではないです。

いま共同研究者の米倉君とやっているのは、Maxwell 理論の $SL(2, \mathbb{Z})$
対称性自体のアノマリを決定するという話。

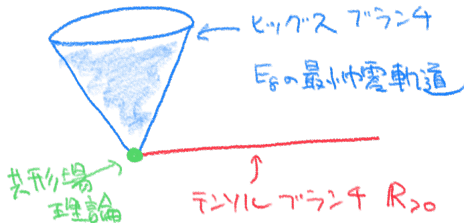
頑張ってややこしい解析をした結果、 $SL(2, \mathbb{Z})$ 変換の作用する
フェルミオンのアノマリの **56** 倍であることがわかった。

最近になって、この **56** という数字は例外群 E_7 の最小の非自明表現
の次元だということが効いていることに気がついた。

それを利用すれば、実際連続的に Maxwell 理論をフェルミオン **56** 個
に化かすことができる。

というのは、Maxwell 理論は 6 次元の self-dual tensor 理論というものの T^2 コンパクト化だと思える。

Self-dual tensor 理論は、E-string 理論という E_8 対称性を持った超対称共形場理論のテンソルブランチに埋め込める。E-string 理論の真空には、ヒッグスブランチという側もあって、連続的に移行できる。



移行したあとは、 E_8 は E_7 に破れて、フェルミオンが 56 個ある。

E-string 理論は非自明な六次元超対称共形場理論で一番小さいもので、僕は五年ぐらいまえから全然別の動機で研究していた。

それが急に四次元の単なる Maxwell 理論の性質を理解するのに「役に立った」ので、びっくりしました。

興味を持った人は、僕らの論文が出ましたら読んでみてください。
今日の話は以上です。