確率微分方程式 (共立講座 数学の輝き 谷口説男著) 演習問題解答

ゆじとも

2020 年 6 月 12 日

概要

このノートは谷口説男氏による著書「確率微分方程式 (共立講座 数学の輝き)」の演習問題の解答を書いたものです。

目次

日記.

- 2020.6.2 (火)：基礎固めのために購入。練習問題 1.3まで解いた。明日からゆっくりやっていこうと思う。
- 2020.6.3 (水)：練習問題 1.8まで解いた。難しい問題は結構普通に難しいから大変。練習問題 1.5は私の読み間違いでなければいろいろ条件が足りないんじゃないかな？
- 2020.6.4 (木)：練習問題 2.6までといた。練習問題 2.7がわからん。なんか微妙にうまくいかない。Doob の不等式を使うんだとは思うけど。細かいところで計算が合わない。
- 2020.6.5 (金)：やっぱり練習問題 2.7がわからんからとりあえず飛ばした。練習問題 3.5まで解いた。練習問題 3.6がわからんくてかなり悩んでる。
- 2020.6.6 (土)：実家に帰って親とヨガをしてたので解いてない。
- 2020.6.7 (日)：完全にだらけてた。一問も解いてない。何してたんだろ。
- 2020.6.8 (月)：わからなかった練習問題 3.6が解けた。何が問題かを整理して、そのために何をすれば良いかを考えて、ということをきちんと詰めれば自然に解けるものだなと思った。まあ数学って全部そういうものだけど、それをきちんとやるのはわかっていても結構難しい。3 節の演習をとりあえず終わらせた。
- 2020.6.9 (火)：今日はセミナーだったからやらなかった。さぼり。

- 2020.6.10 (水) : さぼっていた TEX 打ちをやった。練習問題 1.4くらいからサボってたからかなり時間がかかったけど、とりあえず 3 節の最後までは終わったのでよかった。まあ打つだけだけど見直しにもなったしよかったのかな。結局練習問題 2.7がわからないままだな。ていうか練習問題 2.8を解いてなかったな。考えないと。
- 2020.6.11 (木) : 4 節を終わらせた。三条大橋のスタバにいたら知り合いがいた気がしたけど気のせいかな。練習問題 4.2は f_t の定義を間違えている気がする。定義関数のとこ、$[t_i, t_{i+1})$ かなあ？と言う指摘を下さった方がいたので、そのつもりで解いた。私も最初はそうかなと思ったんだけど、もし $[t_i, t_{i+1})$ なら本文中に書いてあることと全く同じじゃんって思ってて、それなら違う何かかなあと思ってたんだけど、よく考えると本文中の $\mathcal{L}_0$ は有界関数で、この問題の f_t は f_i の取り方がだんだん大きくなる感じだったら有界じゃなくなるから、そういう違いが一応あるかなと思った。

1　確率論の基礎概念

練習問題 1.1. $\sigma(\mathcal{A})$ は σ-加法族であることを示せ。

解答. 任意の $\mathcal{G} \in \Lambda(\mathcal{A})$ は σ-加法族であるから $\varnothing, \Omega \in \mathcal{G}$ であり、従ってとくに $\varnothing, \Omega \in \sigma(\mathcal{A})$ である。

$A \in \sigma(\mathcal{A})$ とする。任意の $\mathcal{G} \in \Lambda(\mathcal{A})$ は σ-加法族であり、$A \in \sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{G}$ であるから、$\Omega \setminus A \in \mathcal{G}$ となって、とくに $\Omega \setminus A \in \bigcap \mathcal{G} = \sigma(\mathcal{A})$ となる。

$A_i \in \sigma(\mathcal{A}), i = 1, 2, \cdots$ とする。任意の $\mathcal{G} \in \Lambda(\mathcal{A})$ は σ-加法族であり、$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{G}$ であるから、$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{G}$ となって、とくに $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \bigcap \mathcal{G} = \sigma(\mathcal{A})$ となる。以上で全ての条件が確認できた。

練習問題 1.2. 例 1.5(2) の $\mathbf{P}$ が確率測度であることを確認せよ。

解答.

$$\mathbf{P}(\Omega) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i \mathbf{1}_{\Omega}(i) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1,$$

であるので $\mathbf{P}$ は一つ目の条件を満たす。また $A_j \in \mathcal{F}, j = 1, 2, \cdots$ がたがいに交わらないとき、

$$\begin{aligned}
& \mathbf{1}_{\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j}(i) = 1 \\
\iff & i \in \textstyle\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \\
\iff & \text{ある } j = 1, 2, \cdots \text{ で } i \in A_j \\
\iff & \text{ただ一つの } j \text{ で } i \in A_j \\
\iff & \text{ただ一つの } j \text{ で } \mathbf{1}_{A_j}(i) = 1
\end{aligned}$$

となる。ただし 3 つ目の $\iff$ は A_j たちがたがいに交わらないことより従う。以上より

$$\mathbf{1}_{\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j}(i) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{1}_{A_j}(i)$$

となって、

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j}(i) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{1}_{A_j}(i) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{1}_{A_j}(i) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_j)$$

となる。よって $\mathbf{P}$ は二つ目の条件も満たす。以上で $\mathbf{P}$ は確率測度となる。

練習問題 1.3. E, E_1, E_2 を可分距離空間とし、d を E 上の距離関数とする。

(1) $E_1 \times E_2$ のボレル σ-加法族 $\mathcal{B}(E_1 \times E_2)$ は $\sigma(\{A_1 \times A_2 | A_i \in \mathcal{B}(E_i), i = 1, 2\})$ と一致することを示せ。
(2) E-値確率変数 X, Y に対し $d(X, Y)$ は確率変数となることを示せ。

解答. (1)。まず $E_1 \times E_2$ の開集合 U は

$$U = \bigcup (U_1 \times U_2)$$

と書ける。ただし U_i は E_i の開集合であり和は $U_1 \times U_2 \subset U$ となるペア (U_1, U_2) すべてに渡る。ここで E_1, E_2 は可分であるから、$E_1 \times E_2$ は第二可算であり、従って可算個のペア (U_1, U_2) をとることで U は上の形のある可算和として表すことができる。すると各 $U_1 \times U_2$ は $\sigma(\{A_1 \times A_2 \mid A_i \in \mathcal{B}(E_i), i = 1, 2\})$ に属す

るから、その可算和である U もそこに属することがわかる。$\mathcal{B}(E_1 \times E_2)$ が開集合系で生成された σ-加法族であることから、以上より、

$$\mathcal{B}(E_1 \times E_2) \subset \sigma(\{A_1 \times A_2 \mid A_i \in \mathcal{B}(E_i), i = 1, 2\})$$

がわかる。

$A_i \in \mathcal{B}(E_i)$ に対して $A_1 \times A_2 \in \mathcal{B}(E_1 \times E_2)$ であるから逆の包含もわかる。以上で示された。

(2) X, Y を並べて得られる $X \times Y : \Omega \to E$ は E-値確率変数であり、また距離関数 $d(-,-)$ は連続関数であり、連続関数は可測関数であるから、以上より d と $X \times Y$ の合成である $d(X, Y)$ は確率変数となる。

練習問題 1.4. 確率変数 X_n が X に確率収束し、$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が連続であれば、$f(X_n)$ は $f(X)$ に確率収束することを示せ。

解答. $\varepsilon > 0$ を任意にとる。$A_n :\overset{\text{def}}{=} \{|f(X_n) - f(X)| > \varepsilon\}$ とおく。示したいことは次である：

$$\mathbf{P}(A_n) \to 0, \quad (n \to \infty).$$

$\delta > 0$ をとる。

$$B_\delta :\overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid \exists y, |x - y| < \delta \text{かつ} |f(x) - f(y)| > \varepsilon\}$$

とおく。また、$C_n(\delta) :\overset{\text{def}}{=} \{|X_n - X| \geq \delta\}$ とおく。これらの定義から、任意の $\delta > 0$ に対して

$$A_n \subset \{X \in B_\delta\} \cup C_n(\delta)$$

となることがわかる。次に注意：

(1) f は連続なので、$\bigcap_{\delta > 0} B_\delta = \varnothing$ であり、従って $\lim_{\delta \to 0} \mathbf{P}(X \in B_\delta) = 0$ となる。
(2) X_n は X に確率収束するので、任意の $\delta > 0$ に対して $\mathbf{P}(C_n(\delta)) \to 0, (n \to \infty)$ となる。

以上より

$$\mathbf{P}(A_n) \leq \mathbf{P}(X \in B_\delta) + \mathbf{P}(C_n(\delta)) \to 0, \quad (n \to \infty, \delta \to 0)$$

となって所望の結果を得る。

練習問題 1.5. $\mathcal{F}$ を σ-加法族、$\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ を有限な σ-加法族とする。このとき、$A_1, \cdots, A_n \in \mathcal{G}$ があって次を満たす：

(1) $A_i \cap A_j = \varnothing, (i \neq j)$.
(2) $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$.

さらに $\mathbf{P}(A_i) > 0$ と仮定する。このとき、ある $X \in L^1(\mathbf{P})$ が存在して

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = \sum_{i=1}^n \frac{\mathbb{E}[X; A_i]}{\mathbf{P}(A_i)} \mathbf{1}_{A_i}$$

となることを示せ。

解答. なんかこの問題は「A_i たちに対する最小性」のようなものがないとまずい気がする。たとえば $n = 1, A_1 = \Omega$ とかは二つの条件を満たして、しかも $\mathbf{P}(A_1) = 1$ になるけど $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[X]$ で一定になっ

て、これはすごくまずい気がする。というわけでここではそのような A_i たちであって最小のものをとってくることで最後の等式が成立するようにできることを示す。

まず Ω に同値関係を入れる：

$$\omega_1 \sim \omega_2 :\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall A \in \mathcal{G}, \omega_1, \omega_2 \in A \text{ または} \omega_1, \omega_2 \in \Omega \setminus A.$$

明らかに $\sim$ は Ω 上の同値関係であり、$\mathcal{G}$ が有限集合であることから、Ω は有限個の同値類 $A_1, \cdots, A_n$ に分割される。しかも A_i は A_i を含む $\mathcal{G}$ の元すべての共通部分として表すことができるので、$\mathcal{G}$ が有限集合であることから、$A_i \in \mathcal{G}$ であることもわかる。これらの A_i は明らかに条件 (1) と (2) を満たす。

任意の i で $\mathbf{P}(A_i) > 0$ であると仮定して、最後の等式を証明する。$\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]$ は A_i 上一定の値 (それを c とおく) をとる確率変数である (なぜなら A_i より小さい $\mathcal{G}$ の元は $\varnothing$ しかないから)。従って

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X; A_i] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X|\mathcal{G}\right]; A_i\right] \\
&= \int_{A_i} \mathbb{E}\left[X|\mathcal{G}\right] d\mathbf{P} \\
&= c \int_{A_i} d\mathbf{P} \\
&= c\mathbf{P}(A_i)
\end{aligned}$$

となる。ゆえに確率変数 $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]$ は A_i 上で一定の値 $c = \frac{\mathbb{E}[X;A_i]}{\mathbf{P}(A_i)}$ をとる。A_i たちは disjoint であるから、所望の等式を得る。

練習問題 1.6. $X \in L^2(\mathbf{P})$ であるとき、次を示せ：

$$\mathbb{E}\left[\left(X - \mathbb{E}\left[X|\mathcal{G}\right]\right)^2\right] = \min\left\{\mathbb{E}\left[(X-Z)^2\right] \middle| Z \in L^2(\mathbf{P}) \text{ は } \mathcal{G}\text{-可測}\right\}.$$

解答. $X \in L^2(\mathbf{P})$ より $\left|\mathbb{E}\left[X|\mathcal{G}\right]\right|^2 \leq \mathbb{E}\left[X^2\middle|\mathcal{G}\right]$ となる (定理 1.34(4))。期待値をとって、

$$\mathbb{E}\left[\left|\mathbb{E}\left[X|\mathcal{G}\right]\right|^2\right] \leq \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X^2\middle|\mathcal{G}\right]\right] = \mathbb{E}[X^2] < \infty$$

となる。ゆえに $\mathbb{E}\left[X|\mathcal{G}\right] \in L^2(\mathbf{P})$ である。従って、とくに、任意の $Z \in L^2(\mathbf{P})$ に対して

$$\mathbb{E}\left[\left(X - \mathbb{E}\left[X|\mathcal{G}\right]\right)^2\right] \leq \mathbb{E}\left[(X-Z)^2\right]$$

となることが示せれば良い。

$Y :\overset{\text{def}}{=} Z - \mathbb{E}\left[X|\mathcal{G}\right]$ とおく。このとき、

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[(X-Z)^2\right] - \mathbb{E}\left[\left(X - \mathbb{E}\left[X|\mathcal{G}\right]\right)^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[-Y\left(X - \mathbb{E}\left[X|\mathcal{G}\right] + X - Z\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[-Y\left(2X - 2\mathbb{E}\left[X|\mathcal{G}\right] - Y\right)\right] \\
&= \mathbb{E}[Y^2] + 2\mathbb{E}\left[Y\left(\mathbb{E}\left[X|\mathcal{G}\right] - X\right)\right] \\
&\geq 2\mathbb{E}\left[Y\mathbb{E}\left[X|\mathcal{G}\right] - YX\right] \\
&= 2\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[XY|\mathcal{G}\right]\right] - 2\mathbb{E}\left[YX\right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

となって所望の不等式を得る。

練習問題 1.7. $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ を σ-加法族、X, Y を独立な確率変数、Y を $\mathcal{G}$-可測とするとき、任意の有界な $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$-可測関数 $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ に対し

$$\mathbb{E}\left[g(X, Y) | \mathcal{G}\right] = \mathbb{E}\left[g(X, y) | \mathcal{G}\right]|_{y=Y}$$

となることを示せ。

解答. $g = g^+ - g^-$ と分けて示すことを考えれば g は非負であると仮定して良い。また g を単関数の単調増加な列で近似して単調収束定理を用いることを考えれば、g は単関数であると仮定して良い。さらに単関数は定義関数の線形和であることから、ある $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ に対して $g = \mathbf{1}_A$ の形であると仮定しても良い。

練習問題 1.8. $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ を σ-加法族とし、$X, X_n \in L^1(\mathbf{P})$ とする。次を示せ：

(1) $X_n \to X, \mathrm{in} L^1$ ならば $\mathbb{E}\left[X_n | \mathcal{G}\right] \to \mathbb{E}\left[X | \mathcal{G}\right], \mathrm{in} L^1$ である。

(2) $X_n \le X_{n+1}, (\mathbf{P}\text{-a.s.})$ かつ $X_n \to X, (\mathbf{P}\text{-a.s.})$ ならば $\mathbb{E}\left[X_n | \mathcal{G}\right] \to \mathbb{E}\left[X | \mathcal{G}\right], (\mathbf{P}\text{-a.s.})$ である。

(3) $X_n \ge 0, (\mathbf{P}\text{-a.s.})$ ならば

$$\mathbb{E}\left[\liminf_{n\to\infty} X_n \middle| \mathcal{G}\right] \le \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[X_n | \mathcal{G}\right], (\mathbf{P}\text{-a.s.})$$

となる。ただし $\liminf_{n\to\infty} X_n \notin L^1(\mathbf{P})$ の場合は、この不等式は $\infty = \infty$ を許して

$$\mathbb{E}\left[\liminf_{n\to\infty} X_n; A\right] \le \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[X_n; A\right], (\forall A \in \mathcal{G})$$

が成り立つことを意味する。

(4) $Y \ge 0$ なる $Y \in L^1(\mathbf{P})$ が存在し、$|X_n| \le Y, (\mathbf{P}\text{-a.s.})$ であり、さらに $X_n \to X, (\mathbf{P}\text{-a.s.})$ であるとする。このとき $\mathbb{E}\left[X_n | \mathcal{G}\right] \to \mathbb{E}\left[X | \mathcal{G}\right], (\mathbf{P}\text{-a.s.})$ である。

解答. (1)。$\|X_n - X\|_1 = \mathbb{E}\left[X_n - X\right] \to 0, (n \to \infty)$ とする。このとき

$$\begin{aligned}
\|\mathbb{E}\left[X_n | \mathcal{G}\right] - \mathbb{E}\left[X | \mathcal{G}\right]\|_1 &= \mathbb{E}\left[\|\mathbb{E}\left[X_n - X | \mathcal{G}\right]\|\right] \\
&\le \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\|X_n - X\| | \mathcal{G}\right]\right] \qquad (\text{イェンセンの不等式}) \\
&\le \mathbb{E}\left[\|X_n - X\|\right] \\
&\to 0, \qquad (n \to \infty)
\end{aligned}$$

となる。

(2)。$\bar{X} :\overset{\mathrm{def}}{=} \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[X_n | \mathcal{G}\right]$ とおく。これは $\mathcal{G}$-可測である。$\bar{X} = \mathbb{E}\left[X | \mathcal{G}\right], (\mathbf{P}\text{-a.s.})$ を示せば良い。そのためには、条件付き確率の一意性より、任意の $A \in \mathcal{G}$ に対して $\mathbb{E}\left[\bar{X}; A\right] = \mathbb{E}\left[X; A\right]$ であれば良い。ここで通常の期待値に対する単調収束定理より、$\mathbf{P}$-a.s. に

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\bar{X}; A\right] &= \mathbb{E}\left[\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[X_n | \mathcal{G}\right]; A\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[X_n | \mathcal{G}\right] \mathbf{1}_A\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X_n | \mathcal{G}\right] \mathbf{1}_A\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[X_n \mathbf{1}_A\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\lim_{n\to\infty} X_n \mathbf{1}_A\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbb{E}\left[\lim_{n\to\infty} X_n; A\right] \\
&= \mathbb{E}\left[X; A\right]
\end{aligned}
$$

となる。これは所望の結果である。

(3)。もしある $\mathbf{P}(A) > 0$ となる $A \in \mathcal{G}$ 上で $>$ 側の不等号が成立するとすれば、A 上で期待値をとることで

$$
\mathbb{E}\left[\liminf_{n\to\infty} X_n; A\right] > \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[X_n; A\right]
$$

となるが、これは通常の期待値に対するファトゥの補題で X_n を $X_n\mathbf{1}_A$ とした場合に反する。

(4)。

$$
\mathbb{E}\left[X_n|\mathcal{G}\right] \leq \mathbb{E}\left[|X_n||\mathcal{G}\right] \leq \mathbb{E}\left[Y|\mathcal{G}\right]
$$

なので $\bar{X} :\stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[X_n|\mathcal{G}\right]$ をとって (2) と同じことをすれば良い。

2 マルチンゲール

練習問題 2.1. $\mathcal{F}_t^X$ は $X_s, (s \in \mathbb{T} \cap [0,t])$ をすべて可測にする最小の σ-加法族であることを示せ。

解答. $\mathcal{F}$ が $\mathcal{F}_t^X$ より小さい σ-加法族であれば、ある s とある $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ があって $\{X_s \in A\} \notin \mathcal{F}$ となるので X_s は $\mathcal{F}$-可測でなくなる。

練習問題 2.2. $\{X_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ が $\mathcal{F}_t$-発展的可測であれば、$(\mathcal{F}_t)$-適合である。

解答. 二つの可測関数の合成

$$\{t\} \times \Omega \to [0,t] \times \Omega \xrightarrow{X} E$$

は可測である。

練習問題 2.3. $\mathcal{N} \subset \mathcal{F}_0$ とする。$\mathbf{P}$-a.s. に右連続かつ $(\mathcal{F}_t)$-適合な確率過程 $\{X_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ は $(\mathcal{F}_t)$-発展的可測な修正 $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ を持つことを示せ。

解答. 例 2.2 より X_t は右連続な修正を持つ。補題 2.4 よりそれは $(\mathcal{F}_t)$-発展的可測である。

練習問題 2.4. $X, Y \geq 0, p \geq 0$ とする。このとき次を示せ：

$$\mathbb{E}\left[XY^p\right] = \int_0^\infty p\lambda^{p-1}\mathbb{E}\left[X; Y > \lambda\right] d\lambda.$$

解答. $Z = Y^p$ とおく。右辺を変形すると

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty p\lambda^{p-1}\mathbb{E}\left[X; Y > \lambda\right] d\lambda &= \int_0^\infty \mathbb{E}\left[X; Y > \lambda\right] d(\lambda^p) \\
&= \int_0^\infty \mathbb{E}\left[X; Y > \lambda^{1/p}\right] d\lambda \\
&= \int_0^\infty \mathbb{E}\left[X; Z > \lambda\right] d\lambda \\
&= \int_0^\infty \int_\Omega X(\omega)\mathbf{1}_{Z>\lambda} d\mathbf{P}(\omega) d\lambda \\
&= \int_\Omega \int_0^\infty X(\omega)\mathbf{1}_{Z>\lambda} d\lambda d\mathbf{P}(\omega) \\
&= \int_\Omega X(\omega) \int_0^\infty \mathbf{1}_{Z>\lambda} d\lambda d\mathbf{P}(\omega) \\
&= \int_\Omega X(\omega) Z(\omega) d\mathbf{P}(\omega) \\
&= \mathbb{E}[XZ] \\
&= \mathbb{E}[XY^p]
\end{aligned}$$

となる (Y のまま計算してもよかったかも)。

練習問題 2.5. $\mathcal{F}_\tau$ が σ-加法族であることを示せ。

解答. 定義を確認すると、

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F} | A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t, (t \in [0,\infty))\}$$

である。まず

- $\varnothing \cap \{\tau \leq t\} = \varnothing \in \mathcal{F}_t$
- $\Omega \cap \{\tau \leq t\} = \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$

なので σ-加法族であるための一つ目の条件は満たされる。$A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ と仮定する。このとき

$$(\Omega \setminus A) \cap \{\tau \leq t\} = \{\tau \leq t\} \setminus (\{\tau \leq t\} \cap A)$$

であるが、ここで $\{\tau \leq t\}$ と $\{\tau \leq t\} \cap A$ はともに $\mathcal{F}_t$ の元であるから $(\Omega \setminus A) \cap \{\tau \leq t\}$ も $\mathcal{F}_t$ の元となる。よって σ-加法族であるための二つ目の条件も成立する。$A_i \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ が $i = 1, 2, \cdots$ で成り立つとする。このとき

$$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \cap \{\tau \leq t\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \cap \{\tau \leq t\}) \in \mathcal{F}_t$$

となって σ-加法族であるための条件が全て確認できた。

練習問題 2.6. $T > 0$ とする。$M_t \in L^2(\mathbf{P}), (\forall t \leq T)$ となる連続マルチンゲール $\{M_t\}_{t \leq T}$ 全体を $\mathcal{M}_{c,T}^2$ とおく。また、$M \in \mathcal{M}_{c,T}^2$ に対して

$$|||M||| \stackrel{\text{def}}{:=} \|M_T\|_2$$

と定義する。$M^n \in \mathcal{M}_{c,T}^2$ をマルチンゲールの列とし、$|||M^n - M^m||| \to 0, (n, m \to \infty)$ とする。このとき、ある $M \in \mathcal{M}_{c,T}^2$ が存在して

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t \leq T} |M_t^n - M_t|^2\right] \to 0, \quad (n \to \infty)$$

となることを示せ。

解答. Doob の不等式 (定理 2.9) と仮定 $|||M^n - M^m||| \to 0$ より

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t \leq T} |M_t^n - M_t|^2\right] \leq 2^2 \mathbb{E}\left[(M_T^n - M_T^m)^2\right] \to 0, \quad (n, m \to \infty)$$

となる。よって命題 2.18(2) よりある連続な確率過程 M_t があって

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{E}\left[\sup_{t \leq T} (M_t^n - M_t)^2\right] = 0$$

となる。あとは M_t がマルチンゲールとなれば良いが、それは命題 2.8(4) より従う。

練習問題 2.7.

$$d(M, N) \stackrel{\text{def}}{:=} \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \left(\| \langle M - N \rangle_n \|_2 \wedge 1\right), \quad (M, N \in \mathcal{M}_c^2)$$

とおく。

(1)

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \left(\mathbb{E}\left[\sum_{t \leq n} |M_t - N_t|^2\right]\right)^{1/2} \wedge 1 \leq 4d(M, N)$$

を示せ。

(2) $\lim_{n,m\to\infty} d(M,N) = 0$ であるときあ r$M \in \mathcal{M}_c^2$ が存在して $\lim_{n\to\infty} d(M_n, M) = 0$ となることを示せ。

解答. (1)。

(2)。(1) より、すべての N に対して

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t\le N} |M_t^n - M_t^m|^2\right] \to 0, \quad (n,m\to\infty)$$

となる。すると命題 2.18(2) よりある連続確率過程 $M_t, t\ge 0$ があって

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t\le N} |M_t^n - M_t|^2\right] \to 0, \quad (n\to\infty)$$

となる。すると $\| \langle M^n - M\rangle_N \|_2 =$

練習問題 2.8.

3　ブラウン運動

練習問題 3.1. $X \sim N(\mu, \Sigma)$ であることは、任意の $f \in C_b(\mathbb{R}^N)$ に対して

$$\mathbb{E}\left[f(X)\right] = \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\mathfrak{g}_{N,\mu,\Sigma}(x)dx$$

が成り立つことと同値であることを示せ。

解答. f として定義関数 $\mathbf{1}_A$ をとることで、この等式が成り立てば $X \sim N(\mu, \Sigma)$ であることはわかる。逆を示すには、f が定義関数であるときにこの等式が成立することから、線形和をとることで単関数に対してこの等式が成立し、単関数の単調増加な列で有界非負可測関数を近似して単調収束定理を用いることで、任意の有界非負可測関数に対してこの等式が成立し、任意の有界可測関数を有界非負可測関数の差で表すことによりすべての $f \in C_b(\mathbb{R}^N)$ に対してこの等式が成立することがわかる。

練習問題 3.2.

(1) $\frac{\partial}{\partial t}\mathfrak{g}_N(t,x) = \frac{1}{2}\Delta\mathfrak{g}_N(t,x)$ となることを示せ。

(2) $f \in C_b(\mathbb{R}^N)$ に対して

$$u(t,x) \overset{\text{def}}{:=} \int_{\mathbb{R}^N} f(x+y)\mathfrak{g}_N(t,y)dy$$

とおく。$\frac{\partial}{\partial t}u = \frac{1}{2}\Delta u$ を示せ。

解答.

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x+y)\mathfrak{g}_N(t,y)dy = \int_{\mathbb{R}^N} f(y)\mathfrak{g}_N(t,x+y)dy$$

なので (1) がわかれば (2) は明らかである。(1) を示す。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\mathfrak{g}_N(t,x) &= \frac{\partial}{\partial t}\mathfrak{g}_{N,0,tI}(x) \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N t^N}}\exp\left(-\frac{1}{2t}\sum_\alpha (x^\alpha)^2\right)\right) \\
&= -\frac{N}{2}t^{-\frac{N}{2}-1}\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N}}\exp\left(-\frac{1}{2t}\sum (x^\alpha)^2\right) + \left(-\frac{1}{2}\sum_\alpha (x^\alpha)^2\right)\frac{1}{t^2}\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N t^N}}\exp\left(-\frac{1}{2t}\sum (x^\alpha)^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_\alpha\left(\frac{(x^\alpha)^2}{t^2} - \frac{1}{t}\right)\mathfrak{g}_N(t,x), \\
\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\mathfrak{g}_N(t,x) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi t)^N}}\left(-\frac{2x^\alpha}{2t}\right)\exp\left(-\frac{1}{2t}\sum_\alpha (x^\alpha)^2\right) \\
&= -\frac{x^\alpha}{t}\mathfrak{g}_N(t,x), \\
\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right)^2\mathfrak{g}_N(t,x) &= \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(-\frac{x^\alpha}{t}\mathfrak{g}_N(t,x)\right) \\
&= -\frac{1}{t}\left(\mathfrak{g}_N(t,x) + x^\alpha\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\mathfrak{g}_N(t,x)\right) \\
&= -\frac{1}{t}\left(\mathfrak{g}_N(t,x) - \frac{(x^\alpha)^2}{t}\mathfrak{g}_N(t,x)\right)
\end{aligned}$$

$$= \left(\frac{(x^\alpha)^2}{t} - \frac{1}{t} \right) \mathfrak{g}_N(t,x),$$

であるから、これらを比較すれば良い。

練習問題 3.3. B_t を d 次元ブラウン運動とする。

(1) $c > 0$ とし、$\tilde{B}_t :\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{c} B_{c^2 t}$ とおく。$\tilde{B}_t$ も d 次元ブラウン運動であることを示せ。

(2) $t_0 \geq 0$ とし、$\hat{B}_t :\stackrel{\text{def}}{=} B_{t+t_0} - B_{t_0}$ とおく。$\hat{B}_t$ も d 次元ブラウン運動であることを示せ。

(3) U を直交行列とする。UB_t も d 次元ブラウン運動であることを示せ。

解答. (1) と (2) では、3.2 節冒頭のブラウン運動の定義にある 4 つの条件を満たすことを確認する。

(1)。まず $\tilde{B}_0(\omega) = \frac{1}{c} B_0(\omega) = 0$ であるから $\tilde{B}_t$ は一つ目の条件を満たす。

また $t \mapsto c^2 t$ は連続関数であるから、任意の ω に対して $\tilde{B}_t(\omega) = \frac{1}{c} B_{c^2 t}(\omega)$ も t に関する連続関数となり、$\tilde{B}_t$ は二つ目の条件も満たす。

$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ をとる。B_t は d 次元ブラウン運動であるから、三つ目の条件より、$0 = c^2 t_0 < c^2 t_1 < \cdots < c^2 t_n$ に対して $B_{c^2 t_1} - B_{c^2 t_0}, \cdots, B_{c^2 t_n} - B_{c^2 t_{n-1}}$ は独立であり、従ってこれらを一斉に $\frac{1}{c}$ 倍した $\tilde{B}_{t_1} - \tilde{B}_{t_0}, \cdots, \tilde{B}_{t_n} - \tilde{B}_{t_{n-1}}$ も独立である。よって $\tilde{B}_t$ は三つ目の条件も満たす。

$X \sim N(0, tI)$ となるときに $cX \sim N(0, c^2 tI)$ となることに注意すれば $\tilde{B}_t$ が四つ目の条件を満たすことがわかる。以上で $\tilde{B}_t$ は d 次元ブラウン運動である。

(2)。まず $\hat{B}_0 = B_{t_0} - B_{t_0} = 0$ であるから $\hat{B}_t$ は一つ目の条件を満たす。

また $\hat{B}_t$ は連続な確率過程から確率変数を引いたものであるから連続な確率過程であり、とくに二つ目の条件を満たす。

さらに $0 = t'_0 < t'_1 < \cdots < t'_n$ に対して $t_i = t'_i + t_0, (i = 1, \cdots, n), t_{-1} = 0$ と置きなおすことで $B_{t_0} - B_{t_{-1}}, \cdots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ は独立となるが、ここで $\hat{B}_t = B_{t+t_0} - B_t$ であるから

$$\hat{B}_{t'_i} = B_{t_i} - B_{t_{i-1}} = \hat{B}_{t'_i} - \hat{B}_{t'_{i-1}}, (i = 0, \cdots, n)$$

となり、従って $\hat{B}_{t'_1} - \hat{B}_{t'_0}, \cdots, \hat{B}_{t'_n} - \hat{B}_{t'_{n-1}}$ も独立となる。これは $\hat{B}_t$ が三つ目の条件を満たすことを示している。

$0 \leq s < t$ を任意にとる。$\hat{B}_t - \hat{B}_s = B_{t+t_0} - B_{s+t_0} \sim N(0, (t + t_0 - s - t_0)I) = N(0, (t-s)I)$ なので $\hat{B}_t$ は四つ目の条件も満たす。

(3)。命題 3.5 を使う。$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ と $f \in C_b((\mathbb{R}^d)^n)$ を任意にとる。$g(x_1, \cdots, x_n) :\stackrel{\text{def}}{=} f(Ux_1, \cdots, Ux_n)$ とおく。すると $g \in C_b((\mathbb{R}^d)^n)$ である。従って、

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[f(UB_{t_1}, \cdots, UB_{t_n})] &= \mathbb{E}[g(B_{t_1}, \cdots, B_{t_n})] \\
&= \int_{(\mathbb{R}^d)^n} g(x_1, \cdots, x_n) \prod_{i=1}^n \mathfrak{g}_d(t_i - t_{i-1}, x_i - x_{i-1}) dx_1 \cdots dx_n \\
&= \int_{(\mathbb{R}^d)^n} f(Ux_1, \cdots, Ux_n) \prod_{i=1}^n \mathfrak{g}_d(t_i - t_{i-1}, x_i - x_{i-1}) dx_1 \cdots dx_n \\
&= \int_{(\mathbb{R}^d)^n} f(y_1, \cdots, y_n) \prod_{i=1}^n \mathfrak{g}_d(t_i - t_{i-1}, U^{-1}(y_i - y_{i-1}))(|\det U^{-1}|)^n dy_1 \cdots dy_n
\end{aligned}$$

$$
= \int_{(\mathbb{R}^d)^n} f(y_1, \cdots, y_n) \prod_{i=1}^{n} \mathfrak{g}_d(t_i - t_{i-1}, U^{-1}(y_i - y_{i-1})) dy_1 \cdots dy_n
$$

となる。ここで U が直交行列であることから、

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{g}_d(t, U^{-1}x) &= \frac{1}{(2\pi t)^d} \exp\left(-\frac{1}{2}\left\langle U^{-1}x, t^{-1}U^{-1}x\right\rangle\right) \\
&= \frac{1}{(2\pi t)^d} \exp\left(-\frac{1}{2}\left\langle x, t^{-1}x\right\rangle\right) \\
&= \mathfrak{g}_d(t, x)
\end{aligned}
$$

となることに注意すれば、

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[f(UB_{t_1}, \cdots, UB_{t_n})] &= \int_{(\mathbb{R}^d)^n} f(y_1, \cdots, y_n) \prod_{i=1}^{n} \mathfrak{g}_d(t_i - t_{i-1}, U^{-1}(y_i - y_{i-1})) dy_1 \cdots dy_n \\
&= \int_{(\mathbb{R}^d)^n} f(y_1, \cdots, y_n) \prod_{i=1}^{n} \mathfrak{g}_d(t_i - t_{i-1}, y_i - y_{i-1}) dy_1 \cdots dy_n
\end{aligned}
$$

となることがわかり、命題 3.5 より UB_t は d 次元ブラウン運動となる。

練習問題 3.4. B_t を 1 次元ブラウン運動とする。

(1) $\int_{\mathbb{R}} e^{-|x|} \mathfrak{g}_1(t, x) dx \leq 1 - \sqrt{\frac{2t}{\pi}} + \frac{t}{2}$ を示せ。
(2) $T > 0$ とし、$V_n :\overset{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{2^n-1} \left| B_{\frac{(k+1)T}{2^n}} - B_{\frac{kT}{2^n}} \right|$ とおく。$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[e^{-V_n}\right] = 0$ を示せ。
(3) $\mathbf{P}$-a.s. に写像 $t \mapsto B_t(\omega)$ は有界変動でないことを示せ。

解答. (1)。$\int_{\mathbb{R}} e^{-|x|} \mathfrak{g}_1(t^2, x) dx \leq 1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}} t + \frac{t^2}{2}$ を示せば良い。

$$
F(t) :\overset{\text{def}}{=} 1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}} t + \frac{t^2}{2} - \int_{\mathbb{R}} e^{-|x|} \mathfrak{g}_1(t^2, x) dx
$$

と置く。

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} e^{-|x|} \mathfrak{g}_1(t^2, x) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{-|x|} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{1}{2t^2}x^2} dx \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2t^2}x^2 - x} dx \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2 - tx} dx \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x+t)^2 + \frac{1}{2}t^2} dx \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}t^2} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x+t)^2} dx \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}t^2} \int_t^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \\
&= e^{\frac{1}{2}t^2} - \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}t^2} \int_0^{t} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx
\end{aligned}
$$

であるから、

$$F(t)=1-\sqrt{\frac{2}{\pi}}t+\frac{t^2}{2}-e^{\frac{1}{2}t^2}+\frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{1}{2}t^2}\int_0^t e^{-\frac{1}{2}x^2}dx$$

となる。従って $F(0)=0$ がわかる。よって $F'(t)\geq 0,(\forall t\geq 0)$ を証明すれば良い。また、

$$\begin{aligned}F'(t)&=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}+t-te^{\frac{1}{2}t^2}+\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left(te^{\frac{1}{2}t^2}\int_0^t e^{-\frac{1}{2}x^2}dx+1\right)\\&=t-te^{\frac{1}{2}t^2}+\frac{2}{\sqrt{2\pi}}te^{\frac{1}{2}t^2}\int_0^t e^{-\frac{1}{2}x^2}dx\\&=te^{\frac{1}{2}t^2}\left(+\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t e^{-\frac{1}{2}x^2}dx-1+e^{-\frac{1}{2}t^2}\right)\end{aligned}$$

となる。

$$G(t):\stackrel{\text{def}}{=}\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t e^{-\frac{1}{2}x^2}dx-1+e^{-\frac{1}{2}t^2}$$

とおく。$G(0)=0,\lim_{t\to\infty}G(t)=0$ は直ちにわかる。

$$\begin{aligned}G'(t)&=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}t^2}-te^{-\frac{1}{2}t^2}\\&=e^{-\frac{1}{2}t^2}\left(\frac{2}{\sqrt{2\pi}}-t\right)\end{aligned}$$

であるから、$0\leq t\leq\frac{2}{\sqrt{2\pi}}$ に対して $G'(t)\geq 0$ であり、$t\geq\frac{2}{\sqrt{2\pi}}$ に対して $G'(t)\leq 0$ である。ここで $G(0)=0,\lim_{t\to\infty}G(t)=0$ を考慮すれば $G(t)\geq 0,(\forall t\geq 0)$ がわかる。以上より $F'(t)\geq 0,(\forall t\geq 0)$ がわかり、$F(t)\geq 0,(\forall t\geq 0)$ がわかった。

(2)。B_t はブラウン運動なので、各 $k=0,\cdots,2^n-1$ に対して $B_{\frac{(k+1)T}{2^n}}-B_{\frac{kT}{2^n}}$ たちは独立である。従って、

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[e^{-V_n}\right]&=\mathbb{E}\left[\prod_{k=0}^{2^n}\exp\left(-|B_{\frac{(k+1)T}{2^n}}-B_{\frac{kT}{2^n}}|\right)\right]\\&=\prod_{k=0}^{2^n}\mathbb{E}\left[\exp\left(-|B_{\frac{(k+1)T}{2^n}}-B_{\frac{kT}{2^n}}|\right)\right]\\&=\prod_{k=0}^{2^n}\int_{\mathbb{R}}e^{-|x|}\mathfrak{g}_1(\frac{(k+1)T}{2^n}-\frac{kT}{2^n},x)dx\\&=\prod_{k=0}^{2^n}\int_{\mathbb{R}}e^{-|x|}\mathfrak{g}_1(\frac{T}{2^n},x)dx\\&\stackrel{\bigstar}{\geq}\prod_{k=0}^{2^n}\left(1-\frac{T}{2^{n-1}\pi}+\frac{T}{2^{n+1}}\right)\\&=\left(1-\frac{T}{2^{n-1}\pi}+\frac{T}{2^{n+1}}\right)^{2^n}\\&\to 0,\quad(n\to\infty)\end{aligned}$$

となる。ただし ★ の箇所は (1) を用いた。

(3)。$\omega \in A$ に対して $t \mapsto B_t(\omega)$ が有界変動となるような $\mathbf{P}(A) \neq 0$ な集合 $A \subset \Omega$ が存在するとする。すると

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[e^{-V_n}\right] &= \mathbb{E}\left[e^{-V_n}; A\right] + \mathbb{E}\left[e^{-V_n}; \Omega \setminus A\right] \\ &= \mathbb{E}\left[e^{-V_n}; A\right]\end{aligned}$$

となる。ここで A は $t \mapsto B_t(\omega)$ が有界変動となるような ω たちからなるので、e^{-V_n} は各 $\omega \in A$ に対して 0 でない正の値をとるある確率変数に収束する。すなわち

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[e^{-V_n}; A\right] = \mathbb{E}\left[\lim_{n\to\infty} e^{-V_n}; A\right] \neq 0$$

となり、(2) の結果に反する。

練習問題 3.5. B_t を d 次元 $\mathcal{F}_t$-ブラウン運動とする。次を示せ。

(1) $B_t^\alpha, (\alpha = 1, \cdots, d)$ は $(\mathcal{F}_t)$-マルチンゲールである。
(2) $\left\{B_t^\alpha B_t^\beta - \delta_{\alpha\beta} t\right\}_t, (\alpha, \beta = 1, \cdots, d)$ は $(\mathcal{F}_t)$-マルチンゲールである。とくに $\left\langle B^\alpha, B^\beta \right\rangle_t = t, (\alpha \neq \beta, t \geq 0)$ となる。

解答. (1)。$0 \leq s < t$ をとる。B_t はブラウン運動なので、$B_t - B_s$ は B_s と独立であり、すなわち $\mathcal{F}_s$ と独立であるから、

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[B_t^\alpha | \mathcal{F}_s\right] &= B_s^\alpha + \mathbb{E}\left[B_t^\alpha - B_s^\alpha | \mathcal{F}_s\right] \\ &= B_s^\alpha + \mathbb{E}\left[B_t^\alpha - B_s^\alpha\right] \\ &= B_s^\alpha\end{aligned}$$

となる。これは B^α が $\mathcal{F}_t$-マルチンゲールであることを示している。

(2)。$0 \leq s < t$ をとる。$\alpha \neq \beta$ のときは、B^α, B^β は独立であるから、$B^\alpha B^\beta$ のマルチンゲール性は B^α のマルチンゲール性から従う。残っているのは $\alpha = \beta$ のときである。

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[(B_t^\alpha)^2 - t \middle| \mathcal{F}_s\right] &= (B_s^\alpha)^2 - t + \mathbb{E}\left[(B_t^\alpha)^2 - (B_s^\alpha)^2 \middle| \mathcal{F}_s\right] \\ &= (B_s^\alpha)^2 - t + \mathbb{E}\left[(B_t^\alpha - B_s^\alpha)^2 + 2B_s^\alpha(B_t^\alpha - B_s^\alpha) \middle| \mathcal{F}_s\right] \\ &= (B_s^\alpha)^2 - t + \mathbb{E}\left[(B_t^\alpha - B_s^\alpha)^2 \middle| \mathcal{F}_s\right] + \mathbb{E}\left[2B_s^\alpha(B_t^\alpha - B_s^\alpha) | \mathcal{F}_s\right] \\ &= (B_s^\alpha)^2 - t + \mathbb{E}\left[(B_t^\alpha - B_s^\alpha)^2\right] + 2B_s^\alpha \mathbb{E}\left[B_t^\alpha - B_s^\alpha\right] \\ &= (B_s^\alpha)^2 - t + t - s + 2B_s^\alpha \mathbb{E}\left[B_t^\alpha - B_s^\alpha\right] \\ &= (B_s^\alpha)^2 - s\end{aligned}$$

となるので $(B_t^\alpha)^2 - t$ は $(\mathcal{F}_t)$-マルチンゲールとなる。以上で示された。

練習問題 3.6. $0 = t_0 < t_1 < \cdots$ は $\lim_{i\to\infty} t_i = \infty$ を満たすとする。$\alpha = 1, \cdots, d, i = 0, 1, \cdots$ に対し、$f_{\alpha,i}$ は $\mathcal{F}_{t_i}$-可測であるとする。任意の $t \geq 0$ に対して

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{d}\sum_{i=0}^{\infty} f_{\alpha,i}^2 (t \wedge t_{i+1} - t \wedge t_i)\right)\right] < \infty$$

であるとする。このとき

$$
\begin{aligned}
M_t &\stackrel{\text{def}}{:=} \sum_{\alpha=1}^{d}\sum_{i=0}^{\infty} f_{\alpha,i}\left(B^{\alpha}_{t\wedge t_{i+1}} - B^{\alpha}_{t\wedge t_i}\right), \\
e_t &\stackrel{\text{def}}{:=} \exp\left(M_t - \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{d}\sum_{i=0}^{\infty} f^2_{\alpha,i}(t\wedge t_{i+1} - t\wedge t_i)\right),
\end{aligned}
$$

で定義される確率過程 e_t はマルチンゲールであることを示せ。

解答. 定理 3.10 より M_t はマルチンゲールである。また、定理 3.10 の証明と同様にして、$t_i \le s < t \le t_{i+1}$ となる場合に $\mathbb{E}\left[e_t \middle| \mathcal{F}_s\right] = e_s$ が証明できれば良い。さらに、$t_i < s < t \le t_{i+1}$ または $t_i \le s < t < t_{i+1}$ のそれぞれの場合で $\mathbb{E}\left[e_t \middle| \mathcal{F}_s\right] = e_s$ が証明できているとすると、$s = t_i, t = t_{i+1}$ の場合も

$$
\mathbb{E}\left[e_{t_{i+1}}\middle|\mathcal{F}_{t_i}\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[e_{t_{i+1}}\middle|\mathcal{F}_{\frac{t_{i+1}+t_i}{2}}\right]\middle|\mathcal{F}_{t_i}\right] = \mathbb{E}\left[e_{\frac{t_{i+1}+t_i}{2}}\middle|\mathcal{F}_{t_i}\right] = e_{t_i}
$$

が成り立つ。従って $t_i < s < t \le t_{i+1}$ と $t_i \le s < t < t_{i+1}$ のそれぞれの場合に $\mathbb{E}\left[e_t \middle| \mathcal{F}_s\right] = e_s$ が証明できれば良い。この場合は $0 < 1 - \frac{t_{i+1}-t_i}{t-s}$ となることに注意。

$0 < \varepsilon < 1 - \frac{t_{i+1}-t_i}{t-s}$ となる ε をとる。このとき $\frac{1}{1-\varepsilon} < \frac{t_{i+1}-t_i}{t-s}$ である。仮定より、

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2(1-\varepsilon)}\sum_{\alpha=1}^{d}\sum_{i=0}^{\infty} f^2_{\alpha,i}(t-s)\right)\right] \\
&< \mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{d}\sum_{i=0}^{\infty} f^2_{\alpha,i}(t_{i+1}-t_i)\right)\right] \\
&< \infty
\end{aligned}
$$

となることに注意。

相加相乗平均の関係より

$$
f_{\alpha,i}(B^{\alpha}_t - B^{\alpha}_s) \le \frac{1}{2(t-s)} f^2_{\alpha,i} + \frac{(1-\varepsilon)}{2(t-s)}(B^{\alpha}_t - B^{\alpha}_s)^2
$$

であることに注意すると、

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\exp\left(\sum_{\alpha} f_{\alpha,i}(B^{\alpha}_t - B^{\alpha}_s)\right)\right] \\
&\le \mathbb{E}\left[\exp\left(\sum_{\alpha} \frac{1}{2(t-s)} f^2_{\alpha,i} + \frac{(1-\varepsilon)}{2(t-s)}(B^{\alpha}_t - B^{\alpha}_s)^2\right)\right] \\
&\stackrel{\bigstar}{=} \mathbb{E}\left[\exp\left(\sum_{\alpha} \frac{1}{2(t-s)} f^2_{\alpha,i}\right]\mathbb{E}\left[\frac{(1-\varepsilon)}{2(t-s)}(B^{\alpha}_t - B^{\alpha}_s)^2\right)\right] \\
&\stackrel{\spadesuit}{\le} \mathbb{E}\left[\exp\left(\sum_{\alpha} \frac{1}{2(t-s)} f^2_{\alpha,i}\right)\right] e\varepsilon^{-d/2} \\
&< \infty
\end{aligned}
$$

となる。ただし ★ の箇所は $f_{\alpha,i}$ が $\mathcal{F}_{t_i}$-可測であることと $B_t - B_s$ が $\mathcal{F}_s \supset \mathcal{F}_{t_i}$ と独立であることを使い、♠ の箇所は定理 3.11 を使った。以上で

$$\exp\left(\sum_{\alpha} f_{\alpha,i}(B_t^{\alpha} - B_s^{\alpha})\right) \in L^1(\mathbf{P})$$

がわかった。あとは定理 3.10 の証明と同様である。

練習問題 3.7. B_t を d 次元ブラウン運動、$\xi \in \mathbb{R}^d$ とする。このとき $\exp\left(i\left\langle \xi, B_t\right\rangle + \frac{|\xi|^2}{2}t\right)$ はマルチンゲールであることを示せ。

解答. $0 \le s < t$ をとる。

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\exp\left(i\left\langle \xi, B_t\right\rangle + \frac{|\xi|^2}{2}t\right)\middle|\mathcal{F}_s\right] \\
&= \exp\left(i\left\langle \xi, B_s\right\rangle + \frac{|\xi|^2}{2}t\right)\mathbb{E}\left[\exp\left(i\left\langle \xi, B_t - B_s\right\rangle\right)|\mathcal{F}_s\right] \\
&= \exp\left(i\left\langle \xi, B_s\right\rangle + \frac{|\xi|^2}{2}t\right)\mathbb{E}\left[\exp\left(i\left\langle \xi, B_t - B_s\right\rangle\right)\right] \\
&= \exp\left(i\left\langle \xi, B_s\right\rangle + \frac{|\xi|^2}{2}t\right)\int_{(\mathbb{R}^d)^2} e^{i\left\langle \xi, x_2 - x_1\right\rangle}\mathfrak{g}_d(s, x_1)\mathfrak{g}_d(t-s, x_2 - x_1)dx_1dx_2 \\
&= \exp\left(i\left\langle \xi, B_s\right\rangle + \frac{|\xi|^2}{2}t\right)\int_{\mathbb{R}^d} e^{i\left\langle \xi, x_2\right\rangle}\mathfrak{g}_d(t-s, x_2)dx_2\int_{\mathbb{R}^d}\mathfrak{g}_d(s, x_1)dx_1 \\
&= \exp\left(i\left\langle \xi, B_s\right\rangle + \frac{|\xi|^2}{2}t\right)\int_{\mathbb{R}^d} e^{i\left\langle \xi, x\right\rangle}\mathfrak{g}_d(t-s, x)dx \\
&\overset{\bigstar}{=} \exp\left(i\left\langle \xi, B_s\right\rangle + \frac{|\xi|^2}{2}t\right)\mathbb{E}\left[e^{i\left\langle \xi, N(0,(t-s)I)\right\rangle}\right] \\
&\overset{\spadesuit}{=} \exp\left(i\left\langle \xi, B_s\right\rangle + \frac{|\xi|^2}{2}t\right)e^{-\frac{1}{2}\left\langle \xi, (t-s)\xi\right\rangle} \\
&= \exp\left(i\left\langle \xi, B_s\right\rangle + \frac{|\xi|^2}{2}t - \frac{1}{2}|\xi|^2(t-s)\right) \\
&= \exp\left(i\left\langle \xi, B_s\right\rangle + \frac{|\xi|^2}{2}s\right)
\end{aligned}$$

となる。ただし ★ の箇所は式 (3.2) を用い、♠ の箇所はガウス分布 N の特性関数の表示 (命題 3.1(5)) を用いた。以上で所望の結果を得る。

練習問題 3.8. B_t を 1 次元ブラウン運動とする。$\tau :\overset{\mathrm{def}}{=} \inf\{t > 0 | B_t > 0\}$ とおく。

(1) $\{\tau = 0\} \in \mathcal{F}_0^*$ となることを示せ。
(2) $\mathbf{P}(\tau = 0) \ge \frac{1}{2}$ を示せ。
(3) $\mathbf{P}(\tau = 0) = 1$ を示せ。

解答. (1)。

$$\Omega \setminus \{\tau = 0\} = \{\tau > 0\}$$

$$
\begin{aligned}
&= \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \left\{\tau > \frac{1}{N}\right\} \\
&= \lim_{N\to\infty} \left\{\tau > \frac{1}{N}\right\} \\
&= \lim_{N\to\infty} \left\{\sup_{0\le t\le \frac{1}{N}} B_t \le 0\right\} \\
&\in \mathcal{F}^*_{1/N}, \quad (\forall N \in \mathbb{N})
\end{aligned}
$$

となるよって

$$
\{\tau = 0\} \in \bigcap_{N\in\mathbb{N}} \mathcal{F}^*_{1/N} \overset{\bigstar}{=} \mathcal{F}^*_0
$$

となる。ただし ★ の箇所は定理 3.17 を用いた。以上で示された。

(2)。$\{\tau = 0\} = \bigcap_{N\in\mathbb{N}} \left\{\tau \le \frac{1}{N}\right\}$ なので、定理 1.4(3) より

$$
\mathbf{P}(\tau = 0) = \lim_{N\to\infty} \mathbf{P}\left(\tau \le \frac{1}{N}\right)
$$

となる。一方、

$$
\left\{\tau \le \frac{1}{N}\right\} \supset \left\{B_{1/N} > 0\right\}
$$

であるから、

$$
\mathbf{P}\left(\tau \le \frac{1}{N}\right) \ge \mathbf{P}\left(B_{1/N} > 0\right) = \int_{x>0} \mathfrak{g}_1\left(\frac{1}{N}, x\right) dx = \frac{1}{2}
$$

となる。以上より

$$
\mathbf{P}(\tau = 0) = \lim_{N\to\infty} \mathbf{P}\left(\tau \le \frac{1}{N}\right) \ge \frac{1}{2}
$$

がわかる。

(3)。(1) より $\mathbf{P}(\tau = 0) = 0$ または $\mathbf{P}(\tau = 0) = 1$ である。一方 (2) より $\mathbf{P}(\tau = 0) \ge \frac{1}{2}$ である。以上より $\mathbf{P}(\tau = 0) = 1$ となる。

4　確率積分

練習問題 4.1. $f_t \in \mathcal{L}_0$ に対する確率積分は f_t の表示によらないことを示せ。

解答. f_t, g_s が同じ $\mathcal{L}_0$ の元を与えるとする。$0 = t_0 < t_1 < \cdots$ と $0 = s_0 < s_1 < \cdots$ を各 $[t_i, t_{i+1}), [s_i, s_{i+1})$ 上で f_t, g_t が一定 ($\omega \in \Omega$ には依存する) となるような時刻の列とする。f_t, g_s が同じ単関数の (異なるかもしれない) 表示であることから、ある $0 = u_0 < u_1 < \cdots$ と $i(n), j(n)$ が存在して、各 n について $t_{i(n)} = u_n = s_{j(n)}$ であり、また各 n に対して $s, t \in [u_n, u_{n+1})$ となるならば $f_t = f_{t_{i(n)}} = g_s = g_{s_{j(n)}}$ となる。このとき

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=i(n)}^{i(n+1)-1} f_{t_i}\left(B^\alpha_{t\wedge t_{i+1}} - B^\alpha_{t\wedge t_i}\right) \\
&\qquad\qquad = f_{t_{i(n)}} \sum_{i=i(n)}^{i(n+1)-1} \left(B^\alpha_{t\wedge t_{i+1}} - B^\alpha_{t\wedge t_i}\right) \\
&\qquad\qquad = f_{t_{i(n)}} \left(B^\alpha_{t\wedge t_{i(n+1)}} - B^\alpha_{t\wedge t_{i(n)}}\right) \\
&\qquad\qquad = f_{u_n} \left(B^\alpha_{t\wedge u_{n+1}} - B^\alpha_{t\wedge u_n}\right) \\
&\sum_{j=j(n)}^{j(n+1)-1} g_{s_j}\left(B^\alpha_{s\wedge s_{j+1}} - B^\alpha_{s\wedge s_j}\right) \\
&\qquad\qquad = g_{s_{j(n)}} \sum_{j=j(n)}^{j(n+1)-1} \left(B^\alpha_{s\wedge s_{j+1}} - B^\alpha_{s\wedge s_j}\right) \\
&\qquad\qquad = g_{u_n} \left(B^\alpha_{s\wedge u_{n+1}} - B^\alpha_{s\wedge u_n}\right),
\end{aligned}
$$

となる。これらは変数 s, t の表記の違い以外に異なる点はない。以上を足し合わせることで確率積分が表記によらないことがわかる。

練習問題 4.2. $0 = t_0 < t_1 < \cdots, \lim_{n\to\infty} t_n = \infty$ とする。$f_i : \Omega \to \mathbb{R}$ を $\mathcal{F}_{t_i}$-可測関数として、

$$
f_t :\overset{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^{\infty} f_i \mathbf{1}_{[0,t_i)}(t)
$$

と定義する。このとき、$f_t \in \mathcal{L}^2_{\text{loc}}$ であり、さらに

$$
\int_0^t f_s dB^\alpha_s = \sum_{i=0}^{\infty} f_i \left(B^\alpha_{t\wedge t_{i+1}} - B^\alpha_{t\wedge t_i}\right)
$$

となることを示せ。

解答. この問題は f_t の定義を間違えていると思う。なぜなら各 t について f_t の定義式の右辺は無限和になっていて、たとえば関数 f_i として $f_i = i$ のような定数関数をとってくると右辺は発散してしまう。これは $f_t \in \mathcal{L}^2_{\text{loc}}$ どころの話ではないと思われる。たぶん、定義関数が $\mathbf{1}_{[t_i,t_{i+1})}$ なんじゃないか？

定義関数が $\mathbf{1}_{[t_i,t_{i+1})}$ だと思って問題を解く。明らかに f_t は $\mathcal{F}_t$-発展的可測である。任意に t をとる。$t_n \le t < t_{n+1}$ となる n をとると、

$$\int_0^t f_s^2 ds = \int_0^t \sum_{i=0}^{\infty} f_i \mathbf{1}_{[t_i,t_{i+1})}(s) ds = \sum_{i=0}^{n-1} f_i^2 (t_{i+1} - t_i) + f_n^2 (t - t_n) < \infty$$

であるので、$f_t \in \mathcal{L}^2_{\text{loc}}$ である。

最後の等式を証明する。まず、(有界とは限らない!) 可測関数 $f : \Omega \to \mathbb{R}$ により、$f_t = f\mathbf{1}_{[0,u)}(t)$ とかけている場合に最後の等式を示す。可測関数 f が有界であれば、定義より、$u \ge t$ なら

$$\int_0^t f_s dB_s^\alpha = f B_t^\alpha$$

であり $u \le t$ なら

$$\int_0^t f_s dB_s^\alpha = f B_u^\alpha$$

となる。とくに

$$\int_0^t f_s dB_s^\alpha = f B_{t\wedge u}^\alpha$$

となる。次に f が非負の場合、$f^n \overset{\text{def}}{:=} f \wedge n$ とおけば $f^n \mathbf{1}_{[0,u)}(t) \to f\mathbf{1}_{[0,u)}(t), (n \to \infty, \forall \omega, t)$ であり、従って $\mathcal{L}^2_{\text{loc}}$ の関数に対する確率積分の定義より、$u \ge t$ なら

$$\int_0^t f_s dB_s^\alpha = \lim_{n\to\infty} \int_0^t f_s^n dB_s^\alpha = \lim_{n\to\infty} f^n B_t^\alpha = f B_t^\alpha$$

となり $u \le t$ なら

$$\int_0^t f_s dB_s^\alpha = \lim_{n\to\infty} \int_0^t f_s^n dB_s^\alpha = \lim_{n\to\infty} f^n B_u^\alpha = f B_u^\alpha$$

となる。とくに

$$\int_0^t f_s dB_s^\alpha = f B_{t\wedge u}^\alpha$$

となる。最後に f が任意の場合、$f = f_+ - f_-$ として確率積分の加法性より $u \ge t$ なら

$$\begin{aligned}
\int_0^t f_s dB_s^\alpha &= \int_0^t (f_+ \mathbf{1}_{[0,u)}(s) - f_- \mathbf{1}_{[0,u)}(s)) dB_s^\alpha \\
&= \int_0^t f_+ \mathbf{1}_{[0,u)}(s) dB_s^\alpha - \int_0^t f_- \mathbf{1}_{[0,u)}(s) dB_s^\alpha \\
&= f_+ B_t^\alpha - f_- B_t^\alpha \\
&= f B_t^\alpha
\end{aligned}$$

となり $u \le t$ なら

$$\begin{aligned}
\int_0^t f_s dB_s^\alpha &= \int_0^t (f_+ \mathbf{1}_{[0,u)}(s) - f_- \mathbf{1}_{[0,u)}(s)) dB_s^\alpha \\
&= \int_0^t f_+ \mathbf{1}_{[0,u)}(s) dB_s^\alpha - \int_0^t f_- \mathbf{1}_{[0,u)}(s) dB_s^\alpha \\
&= f_+ B_u^\alpha - f_- B_u^\alpha \\
&= f B_u^\alpha
\end{aligned}$$

となる。とくに

$$\int_0^t f_s dB_s^\alpha = fB_{t\wedge u}^\alpha$$

となる。

$f_t = f\mathbf{1}_{[u_1,u_2)}(t)$ に対しては、$f_t = f\mathbf{1}_{[0,u_2)}(t) - f\mathbf{1}_{[0,u_1)}(t)$ であるから、確率積分の加法性より、$t \leq u_1$ なら

$$\begin{aligned}\int_0^t f_s dB_s^\alpha &= \int_0^t (f\mathbf{1}_{[0,u_2)}(s) - f\mathbf{1}_{[0,u_1)}(s))dB_s^\alpha \\ &= \int_0^t f\mathbf{1}_{[0,u_2)}(s)dB_s^\alpha - \int_0^t f\mathbf{1}_{[0,u_1)}(s)dB_s^\alpha \\ &= fB_t^\alpha - fB_t^\alpha \\ &= 0\end{aligned}$$

であり、$u_1 \leq t \leq u_2$ なら

$$\begin{aligned}\int_0^t f_s dB_s^\alpha &= \int_0^t (f\mathbf{1}_{[0,u_2)}(s) - f\mathbf{1}_{[0,u_1)}(s))dB_s^\alpha \\ &= \int_0^t f\mathbf{1}_{[0,u_2)}(s)dB_s^\alpha - \int_0^t f\mathbf{1}_{[0,u_1)}(s)dB_s^\alpha \\ &= fB_t^\alpha - fB_{u_1}^\alpha \\ &= f(B_t^\alpha - B_{u_1}^\alpha)\end{aligned}$$

であり、$t \geq u_2$ なら

$$\begin{aligned}\int_0^t f_s dB_s^\alpha &= \int_0^t (f\mathbf{1}_{[0,u_2)}(s) - f\mathbf{1}_{[0,u_1)}(s))dB_s^\alpha \\ &= \int_0^t f\mathbf{1}_{[0,u_2)}(s)dB_s^\alpha - \int_0^t f\mathbf{1}_{[0,u_1)}(s)dB_s^\alpha \\ &= fB_{u_2}^\alpha - fB_{u_1}^\alpha \\ &= f(B_{u_2}^\alpha - B_{u_1}^\alpha)\end{aligned}$$

である。とくに、

$$\int_0^t f_s dB_s^\alpha = f(B_{t\wedge u_2} - B_{t\wedge u_1})$$

となる。

この問題で考えられている一般の f_t に対して最後の等式を証明する。$t_n \leq t < t_{n+1}$ となる n をとれば、確率積分の加法性とこれまでに得られた結果から、

$$\begin{aligned}\int_0^t f_s dB_s^\alpha &= \int_0^t \sum_{i=0}^\infty f_i\mathbf{1}_{[t_i,t_{i+1})}(s)dB_s^\alpha \\ &= \sum_{i=0}^\infty \int_0^t f_i\mathbf{1}_{[t_i,t_{i+1})}(s)dB_s^\alpha \\ &= \sum_{i=0}^\infty f_i(B_{t\wedge t_{i+1}} - B_{t\wedge t_i})\end{aligned}$$

となる。ただし和は実際には有限和であることから積分と交換した。以上で所望の等式が証明できた。

練習問題 4.3. $\phi : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ を連続関数とする。$\phi_n(t) :\overset{\text{def}}{=} \phi\left(\frac{[2^n t]}{2^n}\right)$ とおく。次を示せ：

(1) $\int_0^t \phi_n(s)dB_s^\alpha \sim N\left(0, \int_0^t \phi_n^2(s)ds\right)$
(2) $\int_0^t \phi(s)dB_s^\alpha \sim N\left(0, \int_0^t \phi^2(s)ds\right)$

解答. (1)。より一般に、$0 = t_0 < t_1 < \cdots, \lim_{n\to\infty} t_n = \infty$ となる時刻の列が存在して各 $t \in [t_i, t_{i+1})$ に対して ω, t によらずに一定の値 f_t をとる確率過程 $f_t \in \mathcal{L}_0$ に対して同様の事実を証明する。$t \geq 0$ をとる。$t_m \leq t < t_{m+1}$ となる m をとると、

$$
\begin{aligned}
\int_0^t f_s dB_s^\alpha &= \sum_{i=0}^{\infty} f_{t_i}\left(B_{t\wedge t_{i+1}}^\alpha - B_{t\wedge t_i}^\alpha\right) \\
&= \sum_{i=0}^{m-1} f_{t_i}\left(B_{t_{i+1}}^\alpha - B_{t_i}^\alpha\right) + f_{t_m}\left(B_t^\alpha - B_{t_m}^\alpha\right) \\
&\overset{\bigstar}{\sim} N\left(0, \sum_{i=0}^{m-1} f_{t_i}^2(t_{i+1}-t_i) + f_{t_m}^2(t-t_m)\right) \\
&= N\left(0, \int_0^t f_s^2 ds\right)
\end{aligned}
$$

となる。ただし $\bigstar$ の箇所は命題 3.2(2) を用いた。

(2)。まず ϕ_n が補題 4.5 の条件を満たすことを示す。任意に $t \geq 0$ と $\varepsilon > 0$ をとる。区間 $[0,t]$ はコンパクトなので、ϕ は $[0,t]$ 上では一様連続である。従って、ある $\delta > 0$ が存在して $|x-y| < \delta, x, y \in [0,t]$ に対して $|\phi(x) - \phi(y)| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{t}}$ となる。ここで $t2^{-N} < \delta$ となる十分大きい N をとれば、$n \geq N$ と $s \in [0,t]$ に対して $\left|s - \frac{[2^n s]}{2^n}\right| < \frac{t}{2^n} < \delta$ となるから、とくに $n \geq N$ と $s \in [0,t]$ に対して

$$
|\phi_n(s) - \phi(s)| = \left|\phi(\frac{[2^n s]}{2^n}) - \phi(s)\right| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{t}}
$$

となる。以上より、$n \geq N$ に対して

$$
\int_0^t |\phi_n(s) - \phi(s)|^2 ds < \int_0^t \frac{\varepsilon}{t} ds = \varepsilon
$$

となる。これは

$$
\int_0^t |\phi_n(s) - \phi(s)|^2 ds \to 0, \quad (n \to \infty)
$$

を示している。よって補題 4.6 より、ϕ の確率積分 $\int_0^t \phi(s)dB_s^\alpha$ は確率過程 $\int_0^t \phi_n(s)dB_s^\alpha$ の極限となる。

次に、各 t に対して二つの確率変数 $\int_0^t \phi_n(s)dB_s^\alpha$ と $\int_0^t \phi_m(s)dB_s^\alpha$ の差を考える。これらは (1) よりガウス分布であることに注意。$\phi_n(s) - \phi_m(s)$ は $[i/2^N, (i+1)/2^N)$ の形の区間上で ω にも s にもよらない定数であるから、(1) でより一般的に証明した事実から、

$$
\int_0^t (\phi_n(s) - \phi_m(s))\, dB_s^\alpha \sim N\left(0, \int_0^t (\phi_n(s) - \phi_m(s))^2 ds\right)
$$

となる。従って、

$$\begin{aligned}\left\|\int_0^t \phi_n(s)dB_s^\alpha - \int_0^t \phi_m(s)dB_s^\alpha\right\|_2 &= \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \phi_n(s)dB_s^\alpha - \int_0^t \phi_m(s)dB_s^\alpha\right)^2\right] \\ &= \mathbb{E}\left[N\left(0, \int_0^t \left(\phi_n(s) - \phi_m(s)\right)^2 ds\right)\right] \\ &= \int_0^t \left(\phi_n(s) - \phi_m(s)\right)^2 ds\end{aligned}$$

となる。ここで既に示したことから、十分おおきい n, m に対しては、任意の s について

$$|\phi_n(s) - \phi_m(s)|^2 \le |\phi_n(s) - \phi(s)|^2 + |\phi_m(s) - \phi(s)|^2 < 2\varepsilon$$

となるから、

$$\int_0^t \left(\phi_n(s) - \phi_m(s)\right)^2 ds \to 0, \quad (n, m \to \infty)$$

となる。よって定理 1.13 より、ガウス分布の族 $\int_0^t \phi_n(s)dB_s^\alpha$ は確率変数 $\int_0^t \phi(s)dB_s^\alpha$ に L^2 収束する。よって命題 3.2(5) より $\int_0^t \phi(s)dB_s^\alpha$ もガウス分布であり、

$$\int_0^t \phi_n^2(s)ds \to \int_0^t \phi^2(s)ds, \quad (n \to \infty)$$

であることから

$$\int_0^t \phi(s)dB_s^\alpha \sim N\left(0, \int_0^t \phi^2(s)ds\right)$$

がわかる。

練習問題 4.4. $T \in (0, \infty]$ とする。$\phi : [0, T) \to (0, \infty)$ は $\int_0^T \phi^2(s)ds = \infty$ を満たすとする。$\Phi(t) :\overset{\text{def}}{=} \int_0^t \phi^2(s)ds$ とおくとこれは単調増加である。ψ を Φ の逆関数とする。このとき

$$b_t :\overset{\text{def}}{=} \int_0^{\psi(t)} \phi(s)dB_s^\alpha$$

で定まる確率過程はブラウン運動であることを示せ。

解答. $c_t :\overset{\text{def}}{=} b_{\Phi(t)} = \int_0^t \phi(s)dB_s^\alpha$ とおく。任意に $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ をとる。伊藤の公式より

$$\begin{aligned}f(b_t) - f(b_0) &= f(c_{\psi(t)}) - f(0) \\ &= \int_0^{\psi(t)} f'(c_s)\phi(s)dB_s^\alpha + \frac{1}{2}\int_0^{\psi(t)} f''(c_s)\phi^2(s)ds \\ &= \int_0^{\psi(t)} f'(c_s)\phi(s)dB_s^\alpha + \frac{1}{2}\int_0^t f''(c_{\psi(s)})\phi^2(\psi(s))d\psi(s) \\ &\overset{\bigstar}{=} \int_0^{\psi(t)} f'(c_s)\phi(s)dB_s^\alpha + \frac{1}{2}\int_0^t f''(b_s)ds\end{aligned}$$

となる。ただし ★ の箇所は $\psi^{-1}(s) = \Phi(s) = \int_0^s \phi^2(u)du$ を用いて

$$ds = d\left(\Phi(\psi(s))\right) = \psi'(s)\Phi'(\psi(s))ds = \phi^2(\psi(s))d(\psi(s))$$

と計算した。とくに、定理 4.9(4) より

$$f(b_t) - f(b_0) - \frac{1}{2}\int_0^t f''(b_s)ds = \int_0^{\psi(t)} f'(c_s)\phi(s)dB_s^\alpha$$

はマルチンゲールであり、定理 3.12 より b_t はブラウン運動となる。

別解答。定理 4.9(4) より c_t はマルチンゲールであり、その二次変分は $\Phi(t) = \int_0^t \phi^2(s)ds$ である。従ってとくに b_t もマルチンゲールであり、その二次変分は $\Phi(\psi(t)) = t$ である。注意 4.18 にあるレヴィの定理を用いることで b_t がブラウン運動であることがわかる。

練習問題 4.5. 伊藤過程 X_t と $f \in C^2(\mathbb{R})$ に対し、

$$d(f(X_t)) = \sum_{i=1}^N f_i^{(1)}(X_t) \circ dX_t^i$$

を示せ。ただし $\circ$ は Stratonovich 積分である。

解答. 添字は縮約記法で表記する。$dX_t^i = \alpha_j^i dB_t^j + b_t^i dt$ とおく。

$$dX_t^i \cdot dX_t^j = \alpha_k^i \alpha_l^j dB_t^k dB_t^l = \alpha_k^i \alpha_l^j \delta^{kl} dt = \sum_k \alpha_k^i \alpha_k^j dt$$

となる。伊藤の公式から

$$\begin{aligned}
d(f(X_t)) &= f_i^{(1)}(X_t)dX_t^i + \frac{1}{2} f_{ij}^{(2)} dX_t^i \cdot dX_t^j \\
&= f_i^{(1)}(X_t)dX_t^i + \frac{1}{2}\sum_k f_{ij}^{(2)} \alpha_k^i \alpha_k^j dt, \\
d(f_i^{(1)}(X_t)) \cdot dX_t^i &= f_{ij}^{(2)}(X_t)dX_t^j \cdot dX_t^i + \frac{1}{2} f_{ijk}^{(3)}(X_t)dX_t^j \cdot dX_t^i \cdot dX_t^k \\
&= f_{ij}^{(2)}(X_t)dX_t^i \cdot dX_t^j \\
&= \sum_k f_{ij}^{(2)}(X_t)\alpha_k^i \alpha_k^j dt
\end{aligned}$$

となるので、

$$\begin{aligned}
d(f(X_t)) &= f_i^{(1)}(X_t)dX_t^i + \frac{1}{2}\sum_k f_{ij}^{(2)} \alpha_k^i \alpha_k^j dt \\
&= f_i^{(1)}(X_t)dX_t^i + \frac{1}{2} d(f_i^{(1)}(X_t)) \cdot dX_t^i \\
&= f_i^{(1)}(X_t) \circ dX_t^i
\end{aligned}$$

となる。これは所望の等式である。

練習問題 4.6. 確率変数 X は $e^{aX} \in L^1(\mathbf{P}), (\forall a \in \mathbb{R})$ を満たすとする。

(1) $e^{|X|} \in L^p(\mathbf{P}), (\forall p \geq 1)$ を示せ。
(2) $G \in L^p(\mathbf{P}), (p > 1)$ に対し、$\mathbb{C}$ 上の写像 $\zeta \mapsto \mathbb{E}\left[Ge^{\zeta X}\right]$ は正則関数となることを示せ。

解答. (1)。$e^{a|x|} \leq e^{ax} + e^{-ax}$ であるから、任意の a で $e^{aX} \in L^1(\mathbf{P})$ であることより、$\mathbb{E}[e^{a|X|}] \leq \mathbb{E}[e^{aX}] + \mathbb{E}[e^{-aX}] < \infty$ となって $e^{a|X|} \in L^1(\mathbf{P}), (\forall a \in \mathbb{R})$ がわかる。また、$\mathbb{E}[(e^{a|X|})^p] = \mathbb{E}[e^{ap|X|}] < \infty$ であるから、$e^{a|X|} \in L^p(\mathbf{P}), (\forall a \in R, \forall p \geq 1)$ もわかる。

(2)。$\zeta \in \mathbb{C}$ を任意にとり、ζ の近傍での微分可能性を示せば良い。十分大きい定数 $A > |\zeta|$ を一つ選ぶ ($A > \mathrm{Re}(\zeta)$ である)。このとき

$$\mathbb{E}\left[\left|XGe^{\zeta X}\right|\right] = \mathbb{E}\left[|XG|e^{|\mathrm{Re}(\zeta)X|}\right] < \mathbb{E}\left[|XG|e^{|AX|}\right]$$

である。$X < e^X$ であるから、任意の q に対して $X \in L^q(\mathbf{P})$ であることに注意すると、$G \in L^p(\mathbf{P})$ と任意の q に対して $X, e^{|AX|} \in L^q(\mathbf{P})$ であることから、ヘルダーの不等式より $|XG|e^{|AX|} \in L^1(\mathbf{P})$ がわかる。$Y \overset{\mathrm{def}}{:=} |XG|e^{|AX|}$ とおく。ζ に収束する点列 ζ_n を $|\zeta_n| < A$ となるようにとり、$X_n \overset{\mathrm{def}}{:=} \frac{Ge^{\zeta_n X} - Ge^{\zeta X}}{\zeta_n - \zeta}$ と定める。平均値の定理より、$\theta_n \in \mathbb{C}$ であって $|\zeta - \theta_n| < |\zeta - \zeta_n|$ となるものが存在し、$X_n = XGe^{\theta_n X}$ となる。$\theta_n \to \zeta, (n \to \infty)$ と $|X_n| \leq Y$ に注意して、優収束定理により

$$\mathbb{E}\left[X_n\right] \to \mathbb{E}\left[XGe^{\zeta X}\right], (n \to \infty)$$

となる。とくに ζ_n の取り方によらずに同一の極限 $\mathbb{E}\left[XGe^{\zeta X}\right]$ を持つことから、$\zeta \mapsto \mathbb{E}\left[Ge^{\zeta X}\right]$ は正則であることがわかる。

練習問題 4.7. $p \geq 2$ とする。$f_t \in \mathcal{L}^2$ は任意の $T \geq 0$ に対して $\mathbb{E}\left[\int_0^T |f_t|^p dt\right] < \infty$ を満たすとする。このとき

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0 \leq t \leq T}\left|\int_0^t f_s dB_s^\alpha - \int_0^t f_s^n dB_s^\alpha\right|^p\right] \to 0, \quad (n \to \infty), (\forall T \geq 0)$$

を満たす $f_t^n \in \mathcal{L}_0$ が存在することを示せ。

解答. 証明の方針は以下の通り：

(1) まず補題 4.5 と同じ議論により、$\mathbb{E}\left[\int_0^T |f_t - f_t^n|^p dt\right] \to 0, (n \to \infty)$ となる $f_t^n \in \mathcal{L}_0$ をとってくる。
(2) 次にモーメント不等式 (定理 4.27) を使って極限を評価する。

(1) を実行する。$g_t^n \overset{\mathrm{def}}{:=} (-n) \vee (f_t \wedge n)$ とおく。すると各 t, ω に対して $|g_t^n| \leq |f_t|$ であるから、とくに $g_t^n \in \mathcal{L}^2$ であり、さらに任意の $T \geq 0$ に対して $\mathbb{E}\left[\int_0^T |g_t^n|^p dt\right] < \infty$ を満たす。ここで優収束定理により $\mathbb{E}\left[\int_0^T |f_t - g_t^n|^p dt\right] \to 0$ であることに注意すると、L^p-ノルムが三角不等式を満たすことから、g_n^t に対する所望の近似を求めることで f_t に対する所望の近似を得ることができる。よって、所望の近似を得るには、f_t は有界であると仮定して良い。

f_t は有界であると仮定する。$h_t^n \overset{\mathrm{def}}{:=} n\int_{(t-\frac{1}{n})\vee 0}^t f_s ds$ とおくと h_t^n は有界かつ連続であり、$\forall \omega$ に対してほとんど全ての t で $\lim_{n\to\infty} h_t^n(\omega) = f_t(\omega)$ である。有界収束定理により $\mathbb{E}\left[\int_0^T |f_t - h_t^n|^p dt\right] \to 0$ であることに注意して、前段落と同じ理由により f_t を有界かつ連続と仮定しても良い。

f_t は有界かつ連続であると仮定する。$f_t^n \overset{\mathrm{def}}{:=} f_{k/n}, t \in [k/n, (k+1)/n)$ と定めると、連続性により $f_t^n(\omega) \to f_t(\omega), (\forall t, \forall \omega)$ であるので、有界収束定理により $\mathbb{E}\left[\int_0^T |f_t - f_t^n|^p dt\right] \to 0$ となる。$f_t^n \in \mathcal{L}_0$ であるから、所望の近似を得ることができた。

(2) を実行する。今、$\mathbb{E}\left[\int_0^T |f_t - f_t^n|^p dt\right] \to 0$ となる $f_t^n \in \mathcal{L}_0$ が存在することがわかっている。$X_t \overset{\mathrm{def}}{:=}$

$\int_0^t (f_s - f_s^n)\, dB_s^\alpha$ と置くと、

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^t f_s dB_s^\alpha - \int_0^t f_s^n dB_s^\alpha\right|^p\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T}|X_t|^p\right] \\
&\overset{\bigstar}{\le} A_p \mathbb{E}\left[\left(\int_0^T (f_s - f_s^n)^2\, dt\right)^{p/2}\right] \\
&\overset{\spadesuit}{\le} A_p T^{p-1}\mathbb{E}\left[\int_0^T |f_s - f_s^n|^p\, dt\right] \\
&\to 0, \quad (n\to\infty)
\end{aligned}
$$

となる。ただし $\bigstar$ の箇所はモーメント不等式 (定理 4.27) を用い、$\spadesuit$ の箇所はヘルダーの不等式 (例 1.14) を用いた。また、A_p は p のみに依存する定数である。以上で示された。

練習問題 4.8. B_t を 1 次元ブラウン運動とし、$T>0$ とする。

(1) $(T-t)B_t = \int_0^t (T-s)dB_s - \int_0^t B_s ds$ を示せ。
(2) $B_T^3 = \int_0^T f_t dB_t$ を満たす確率過程 $f_t \in \mathcal{L}^2$ を求めよ。

解答. (1)。$\int_0^t T dB_s = TB_t$ であるから、$tB_t = \int_0^t s dB_s + \int_0^t B_s ds$ を示せば良い。すなわち $d(sB_s) = sdB_s + B_s ds$ を示せば良いが、これは伊藤の積の公式 (例 4.16 (3)) より明らかである。

(2)。まず $d((B_t)^3) = 3B_t^2 dB_t + 3B_t dt$ であるから、

$$B_T^3 = \int_0^T (3B_s^2)dB_s + 3\int_0^T B_s ds$$

となる。(1) の等式に $t=T$ を代入すると、

$$\int_0^T B_s ds = \int_0^T (T-s)dB_s$$

がわかる。これを代入して、

$$B_T^3 = \int_0^T (3B_s^2)dB_s + 3\int_0^T B_s ds = \int_0^T (3B_s^2 + 3(T-s))dB_s$$

を得る。よって求める f_t は $f_t = 3B_t^2 + 3(T-t)$ である。

5　確率微分方程式 (I)

練習問題 5.1. $a \le 0 \le b, k \in \mathbb{N}$ とする。

$$\varphi(x) \overset{\text{def}}{:=} \begin{cases} (x-a)^{2k+1}, & (x < a), \\ 0, & (a \le x \le b), \\ (x-b)^{2k+1}, & (x > b), \end{cases}$$

と定義する。B_t を 1 次元ブラウン運動とし、$X_t \overset{\text{def}}{:=} \varphi(B_t)$ とおく。このとき X_t は次の確率微分方程式の解であることを示せ：

$$dX_t = (2k+1)X_t^{\frac{2k}{2k+1}} dB_t + k(2k+1)X_t^{\frac{2k-1}{2k+1}} dt.$$

解答. もとの問題文では $X_t \overset{\text{def}}{:=} \varphi(X_t)$ となっていたけどこれはたぶん間違いだと思う。

まず $\varphi(x)$ の二階微分を計算する。

$$\varphi'(x) = \begin{cases} (2k+1)(x-a)^{2k}, & (x < a), \\ 0, & (a \le x \le b), \\ (2k+1)(x-b)^{2k}, & (x > b), \end{cases}$$

であるから、とくに $\varphi'(x) = (2k+1)\varphi(x)^{\frac{2k}{2k+1}}$ である。また

$$\varphi''(x) = \begin{cases} 2k(2k+1)(x-a)^{2k-1}, & (x < a), \\ 0, & (a \le x \le b), \\ 2k(2k+1)(x-b)^{2k-1}, & (x > b), \end{cases}$$

であるから、とくに $\varphi''(x) = 2k(2k+1)\varphi(x)^{\frac{2k-1}{2k+1}}$ である。以上で φ は C^2-級である。ブラウン運動 B_t は定義から伊藤過程であるから、伊藤の公式より

$$\begin{aligned} dX_t &= d\varphi(B_t) \\ &= \varphi'(B_t)dB_t + \frac{1}{2}\varphi''(B_t)dt \\ &= (2k+1)\varphi(B_t)^{\frac{2k}{2k+1}} dB_t + k(2k+1)\varphi(B_t)^{\frac{2k-1}{2k+1}} dt \\ &= (2k+1)X_t^{\frac{2k}{2k+1}} dB_t + k(2k+1)X_t^{\frac{2k-1}{2k+1}} dt \end{aligned}$$

となる。これは所望の結果である。

練習問題 5.2. $n \in \mathbb{N}$ とする。もし 1 次元確率微分方程式

$$dX_t = \frac{1}{n}X_t^{n+1}dB_t + \frac{n+1}{2n^2}X_t^{2n+1}dt$$

の解 $X_t, t \ge 0$ が存在するならば

$$X_t = (1 - B_t)^{-\frac{1}{n}}, (t < \tau_1)$$

となることを示せ。ただし $\tau_1 \overset{\text{def}}{:=} \{t \ge 0 | B_t = 1\}$ である。これから上の確率微分方程式に解が存在しないことを導け。

解答. $t < \tau_1$ に対して X_t が上のように求まれば、$X_t, t \geq 0$ が連続 (かつ $\mathcal{F}_t$-発展的可測) な確率過程であることに反する ($t = \tau_1(\omega)$ で連続でない)。すなわちはじめの確率微分方程式に解が存在しないことになる。よって、はじめの確率微分方程式に解が存在すると仮定した上で、$t < \tau_1$ に対して X_t を求めれば良い。

仮定より、X_t は伊藤過程である。また、$(dX_t)^2 = \frac{1}{n^2} X_t^{2n+2} dt$ である。$Y_t :\overset{\text{def}}{=} X_t^n$ とおけば、伊藤の公式より

$$\begin{aligned}
dY_t &= d(X_t^n) \\
&= nX_t^{n-1} dX_t + \frac{1}{2} n(n-1) X_t^{n-2} (dX_t)^2 \\
&= nX_t^{n-1} \left(\frac{1}{n} X_t^{n+1} dB_t + \frac{n+1}{2n^2} X_t^{2n+1} dt \right) + \frac{1}{2} n(n-1) X_t^{n-2} \frac{1}{n^2} X_t^{2n+2} dt \\
&= X_t^{2n} dB_t + \frac{n+1}{2n} X_t^{3n} dt + \frac{n-1}{2n} X_t^{3n} dt \\
&= X_t^{2n} dB_t + X_t^{3n} dt \\
&= Y_t^2 dB_t + Y_t^3 dt
\end{aligned}$$

となる。とくに $(dY_t)^2 = Y_t^4 dt$ である。$Z_t :\overset{\text{def}}{=} \frac{1}{Y_t}$ とおけば、伊藤の公式より

$$\begin{aligned}
dZ_t &= d\left(\frac{1}{Y_t} \right) \\
&= -\frac{1}{Y_t^2} dY_t + \frac{1}{Y_t^3} (dY_t)^2 \\
&= -(dB_t + Y_t dt) + Y_t dt \\
&= -dB_t
\end{aligned}$$

となる。また、初期条件 $X_0 = 1$ より $Z_0 = 1$ であるから、$\int_0^t$ で積分することで

$$Z_t = 1 - B_t$$

を得る。以上より $t < \tau_1$ に対して

$$X_t = Y_t^{\frac{1}{n}} = Z_t^{-\frac{1}{n}} = (1 - B_t)^{-\frac{1}{n}}$$

となることがわかった。

練習問題 5.3.

練習問題 5.4. $d = N = 1, V \in C_d^\infty(\mathbb{R})$ とする。C^∞-級関数 $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ は微分方程式

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}(x, \xi) = V(\varphi(x, \xi)), \varphi(x, 0) = x$$

を満たすとする。

(1) $X_t^x :\overset{\text{def}}{=} \varphi(x, B_t)$ の満たす Stratonovich 型の確率微分方程式を求めよ。
(2) $J_t^x :\overset{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial x} X_t^x = \exp\left(\int_0^{B_t} V'(\varphi(x, \eta)) d\eta \right)$ を示せ。

解答. 解答に入る前に Stratonovich 積分に関するちょっとした注意をする。Stratonovich 積分の定義と伊藤の公式から、

$$f'(X_t) \circ dX_t = f'(X_t) dX_t + \frac{1}{2} d\left(f'(X_t)\right) dX_t = f'(X_t) dX_t + \frac{1}{2} f''(X_t) (dX_t)^2 = d\left(f(X_t)\right)$$

となる。従って、これを積分することで、

$$\int_{t_1}^{t_2} f'(X_t) \circ dX_t = f(X_{t_2}) - f(X_{t_1})$$

を得る。とくに f は原始関数 $\int_0^t f(u)du$ の t での微分として表示できることから、

$$\int_{t_1}^{t_2} f(X_t) \circ dX_t = \int_{X_{t_1}}^{X_{t_2}} f(t)dt$$

となる (変数変換公式のような感じ？)。また、$YdZ + \frac{1}{2}dYdZ = Y \circ dZ = dW$ となる W があれば、

$$\begin{aligned}
X \circ (Y \circ dZ) &= X \circ dW = XdW + \frac{1}{2}dXdW \\
&= XYdZ + \frac{1}{2}XdYdZ + \frac{1}{2}YdXdZ + \frac{1}{4}dXdYdZ \\
&= XYdZ + \frac{1}{2}XdYdZ + \frac{1}{2}YdXdZ \\
&= XYdZ + \frac{1}{2}(d(XY)dZ) - \frac{1}{2}dXdYdZ \\
&= XYdZ + \frac{1}{2}(d(XY)dZ) \\
&= (XY) \circ dZ
\end{aligned}$$

となる。

(1)。x を定数と考えて普通に X_t^x を微分する。Stratonovich 積分で書けば、

$$\begin{aligned}
d(X_t^x) &= d\left(\varphi(x, B_t)\right) \\
&= \left.\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}(x, \xi)\right|_{\xi = B_t} \circ dB_t \\
&= V(\varphi(x, B_t)) \circ dB_t \\
&= V(X_t^x) \circ dB_t
\end{aligned}$$

となる。

(2)。J_t^x は定理 5.16 より

$$dJ_t^x = V'(X_t^x)J_t^x \circ dB_t = J_t^x \circ (V'(X_t^x) \circ dB_t)$$

を満たすので、

$$\begin{aligned}
d\left(\log(J_t^x)\right) &= \frac{1}{J_t^x} \circ dJ_t^x \\
&= \frac{1}{J_t^x} \circ (J_t^x \circ (V'(X_t^x) \circ dB_t)) \\
&= V'(X_t^x) \circ dB_t \\
&= V'(\varphi(x, B_t)) \circ dB_t
\end{aligned}$$

となる。これを $\int_0^t$ で積分すれば、定理 5.16 より $J_0^x = 1$ なので、

$$\log J_t^x = \int_0^t V'(\varphi(x, B_t)) \circ dB_t = \int_0^{B_t} V'(\varphi(x, \eta))d\eta$$

となる。これは所望の結果である。