Sheaves on Manifolds Exercise II.4 の解答

ゆじとも

2021 年 2 月 9 日

Sheaves on Manifolds [Exercise II.4, KS02] の解答です。

II Sheaves

問題 II.4. 可縮な位相空間の上の局所定数層は定数層であることを示せ。

証明. X を可縮な位相空間、F_1 を X 上の局所定数層とする。$C(X)$ を X の錐とし、$i : X \to C(X)$ を包含射とする。X は可縮なので、ある $r : C(X) \to X$ が存在して、$r \circ i = \mathrm{id}_X$ となる。従って $i^{-1}(r^{-1}F_1) \cong F_1$ となる。よって $r^{-1}F_1$ が定数層であることを証明すれば良い。$v \in C(X)$ を錐の頂点とする。$p : F \to C(X)$ を層 $r^{-1}F_1$ のエタール空間 (cf. [Exercise 1.13, Har13]) とする。$r^{-1}F_1$ は局所定数層であるから、p は $C(X)$ の被覆空間である。$r^{-1}F_1$ が定数層であることを証明するためには、p が自明な被覆空間であることを証明すれば良い。

F の連結成分のなす集合を F_c とおき、F_c には離散位相を入れる。また、$F_v :\overset{\mathrm{def}}{=} p^{-1}(v)$ とおく。このとき、F_v の各点に対して、その点の属する連結成分を対応させることにより、写像 $F_v \to F_c$ を得る。各元 $[Y] \in F_c$ に対して $Y \subset F$ で対応する連結成分を表すとする。元 $[Y] \in F_c$ と点 $y \in Y$ に対して、$p(y)$ と v を結ぶ直線は F 内の path へと一意的にリフトする、すなわち、$C(X)$ 内の直線 $l : [0,1] \to C(X), l(0) = v, l(1) = p(y)$ に対して、ある path $l' : [0,1] \to F$ が一意的に存在して、$p \circ l' = l$ となる。l' の像は連結であり、$y \in Y$ であり、Y は連結成分であるから、l' は Y を一意的に経由する (これは $[0,1]$ 上の被覆空間が自明なものに限ることから従う)。従って、このことから、写像 $F_v \to F_c$ は全単射であり、さらに各元 $[Y] \in F_c$ に対して合成射 $Y \subset F \to C(X)$ は全単射であることが従う。

$F \to F_c$ を各点に対してその点の属する連結成分を対応させる (連続) 写像とすると、この (連続) 写像と $p : F \to C(X)$ によって、$C(X)$ 上の連続写像 $F \to F_c \times C(X)$ を得る。$F_v \to F_c$ が全単射であることと、各元 $[Y] \in F_c$ に対して合成射 $Y \subset F \to C(X)$ は全単射であることから、$F \to F_c \times C(X)$ は $C(X)$ 上の被覆空間の間の全単射であることが従う。とくに同相写像である。よって $p : F \to C(X)$ は自明な被覆空間である。以上で問題 II.4 の解答を完了する。 □

References

[Har13] R. Hartshorne. *Algebraic Geometry*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2013. ISBN: 9781475738490. URL: https://www.springer.com/jp/book/9780387902449.

[KS02] M. Kashiwara and P. Schapira. *Sheaves on Manifolds*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer Berlin Heidelberg, 2002. ISBN: 9783540518617. URL: https://www.springer.com/jp/book/9783540518617.