Sheaves on Manifolds Exercise I.21 の解答

ゆじとも

2021 年 2 月 9 日

Sheaves on Manifolds [Exercise I.21, KS02] の解答です。

I Homological Algebra

問題 I.21. $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ をアーベル圏の間の左完全函手とする。F-injective な $\mathcal{I} \subset \mathcal{C}$ が存在すると仮定する。$X \in \mathsf{D}^+(\mathcal{C})$ は $i > 0, j \leq j_0$ に対して $R^iF(H^j(X)) = 0$ を満たすとする。このとき、$j \leq j_0$ に対して $R^jF(X) \cong F(H^j(X))$ となることを示せ。

証明. $X \in \mathsf{D}^+(\mathcal{C})$ であるから、問題 I.21 を示すためには $j_0 \geq 0$ であると仮定しても一般性を失わない。j_0 に関する帰納法で問題 I.21 を示す。$j_0 = 0$ の場合、$R^0F(X) \cong \ker(F(d_X^0)) \cong F(\ker(d_X^0)) = F(H^0(X))$ であるから主張は自明である。

j_0 未満で問題 I.21 が成り立つと仮定する。$Y :\stackrel{\mathrm{def}}{=} \tau^{\leq j_0-1}(X), Z :\stackrel{\mathrm{def}}{=} \tau^{\geq j_0}(X)$ とすると $Y \to X \to Z$ は完全三角であり、$Z[-j_0] \in \mathsf{D}^+(\mathcal{C})$ であり、帰納法の仮定より、$j \leq j_0 - 1$ に対して $R^jF(Y) \cong F(H^j(Y))$ であり、さらに $\tau^{\geq j_0}(Y) = 0$ であるから $R^jF(Y) = 0, (j \geq j_0)$ である。X が今の j_0 に対して問題 I.21 の仮定を満たすことから、$Z[-j_0]$ は $j_0 = 0$ に対して問題 I.21 の仮定を満たし、すでに示したことによって $R^0f(Z[-j_0]) \cong F(H^0(Z[-j_0]))$ となる。従って、$R^jF(Z) = 0, (j \leq j_0 - 1)$ かつ $R^{j_0}F(Z) \cong F(H^{j_0}(Z))$ である。$Z = \tau^{\geq j_0}(X)$ なので $H^{j_0}(Z) \cong H^{j_0}(X)$ であり、従って $R^{j_0}F(Z) \cong F(H^{j_0}(X))$ が従う。

完全三角 $Y \to X \to Z \to Y[1]$ に RF を適用して得られる完全三角 $RF(Y) \to RF(X) \to RF(Z) \to RF(Y)[1]$ のコホモロジーをとることで、長完全列

$$R^jF(Y) \to R^jF(X) \to R^jF(Z) \to R^{j+1}F(Y)$$

を得る。ここで $j \leq j_0 - 1$ に対して $R^jF(Y) \cong F(H^j(Y))$ であることと、$j \leq j_0 - 1$ に対して $R^jF(Z) = 0$ であることから、$j \leq j_0 - 1$ に対して $R^jF(Y) \to R^jF(X)$ は同型射である。さらに、$\tau^{\leq j_0-1}(Y) = Y$ であるから、$R^{j_0}F(Y) = 0$ である。従って、$R^{j_0}F(X) \to R^{j_0}F(Z)$ が同型射となる。よって $R^{j_0}F(X) \cong R^{j_0}F(Z) \cong F(H^{j_0}(X))$ が従う。以上で問題 I.21 の解答を完了する。 $\square$

References

[KS02] M. Kashiwara and P. Schapira. *Sheaves on Manifolds*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer Berlin Heidelberg, 2002. ISBN: 9783540518617. URL: https://www.springer.com/jp/book/9783540518617.