Sheaves on Manifolds Exercise I.27 の解答

ゆじとも

2021 年 2 月 9 日

Sheaves on Manifolds [Exercise I.27, KS02] の解答です。

I Homological Algebra

問題 I.27. $\mathcal{C}$ をアーベル圏 (resp. 三角圏) とする。

$$K(\mathcal{C}) :\overset{\text{def}}{=} \left(\bigoplus_{X \in \mathcal{C}} \mathbb{Z} \cdot [X] \right) / ([X] = [X'] + [X''])$$

と定義する。ただしここで $[X]$ は $\mathcal{C}$ の対象の同型類を表し、商はすべての完全列 $0 \to X' \to X \to X'' \to 0$ (resp. 完全三角 $X' \to X \to X'' \xrightarrow{+1}$) に渡ってとるものとする。$K(\mathcal{C})$ を $\mathcal{C}$ の **Grothendieck 群**と言う。$\mathcal{C}$ をアーベル圏とする。$i : \mathcal{C} \to \mathsf{D}^b(\mathcal{C})$ は群の同型 $K(\mathcal{C}) \xrightarrow{\sim} K(\mathsf{D}^b(X))$ を引き起こすことを示せ。また、逆射が $\varphi : X \mapsto \sum_j (-1)^j [H^j(X)]$ により与えられることを示せ。

証明. $\mathcal{C}$ の完全列 $0 \to X' \to X \to X'' \to 0$ を i で送れば $\mathsf{D}^b(\mathcal{C})$ の完全三角 $X' \to X \to X'' \xrightarrow{+1}$ を得るので、$[X] \mapsto [i(X)]$ によって $K(\mathcal{C}) \to K(\mathsf{D}^b(\mathcal{C}))$ が well-defined に定義される。さらに $X' \to X \to X'' \xrightarrow{+1}$ が $\mathsf{D}^b(\mathcal{C})$ の完全三角であれば、コホモロジーをとることで長い完全列

$$\cdots \to H^i(X') \to H^i(X) \to H^i(X'') \to \cdots$$

を得るので、従って $\sum_j (-1)^j [H^j(X)] = \sum_j (-1)^j [H^j(X')] + \sum_j (-1)^j [H^j(X'')]$ が従い、φ も well-defined である。$\varphi \circ i = \mathrm{id}_{K(\mathcal{C})}$ は明らかであるから、$i \circ \varphi = \mathrm{id}_{K(\mathsf{D}^b(\mathcal{C}))}$ であることを確認する。一般に、完全三角 $X' \to X \to X'' \xrightarrow{+1}$ に対して三角形 $X \to X'' \to X'[1] \xrightarrow{+1}$ も完全であることから $[X''] = [X] + [X'[1]]$ かつ $[X] = [X'] + [X'']$ であることが従い、$[X'[1]] = [X''] - [X] = -([X] - [X'']) = -[X']$ であることが従う。よって任意の $X \in \mathsf{D}^b(\mathcal{C})$ に対して $[X[1]] = -[X]$ である。ある n で $(i \circ \varphi)([\tau^{\leq n}(X)]) = [\tau^{\leq n}(X)]$ が成り立つと仮定する (これは十分小さい n に対して明らかに成り立つ)。三角形 $\tau^{\leq n}(X) \to \tau^{\leq n+1}(X) \to$

$H^{n+1}(X)[-n-1] \xrightarrow{+1}$ が完全であることから、

$$\begin{aligned}
[\tau^{\leq n+1}(X)] &= [i(H^{n+1}(X))[-n-1]] + [\tau^{\leq n}(X)] \\
&= (-1)^{n+1} i([H^{n+1}(X)]) + (i \circ \varphi)([\tau^{\leq n}(X)]) \\
&= (-1)^{n+1} i([H^{n+1}(X)]) + \sum_j (-1)^j i([H^j(\tau^{\leq n}(X))]) \\
&= (-1)^{n+1} i([H^{n+1}(X)]) + \sum_{j \leq n} (-1)^j i([H^j(X)]) \\
&= \sum_{j \leq n+1} (-1)^j i([H^j(X)]) \\
&= \sum_j (-1)^j i([H^j(\tau^{\leq n+1}(X))]) \\
&= (i \circ \varphi)([\tau^{\leq n+1}(X)])
\end{aligned}$$

が従う。帰納法により、任意の n で $(i \circ \varphi)([\tau^{\leq n}(X)]) = [X]$ であることが従う。$X \in \mathsf{D}^b(\mathcal{C})$ であるので、十分大きい n を考えることで $(i \circ \varphi)([X]) = [X]$ が従う。以上で $i \circ \varphi = \mathrm{id}_{K(\mathsf{D}^b(\mathcal{C}))}$ であることが従い、問題 I.27 の証明を完了する。 □

References

[KS02] M. Kashiwara and P. Schapira. *Sheaves on Manifolds*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer Berlin Heidelberg, 2002. ISBN: 9783540518617. URL: https://www.springer.com/jp/book/9783540518617.