Sheaves on Manifolds Exercise I.24 の解答

ゆじとも

2021 年 2 月 9 日

Sheaves on Manifolds [Exercise I.24, KS02] の解答です。

I Homological Algebra

問題 I.24.

(1) $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ をアーベル圏の間の左完全函手、$\mathcal{I}\subset\mathcal{C}$ を F-injective な充満部分圏として、$X\in\mathsf{D}^+(\mathcal{C})$ を対象とする。各 $j\in\mathbb{Z}$ に対して自然な射 $H^j(RF(X))\to F(H^j(X))$ を構成せよ。

(2) $\mathcal{C},\mathcal{D},\mathcal{E}$ をアーベル圏、$F:\mathcal{C}\times\mathcal{D}\to\mathcal{E}$ を加法的な双函手、$X\in\mathsf{D}^*(\mathcal{C}),Y\in\mathsf{D}^*(\mathcal{D})$ を対象とする。ここで $*$ は $+$ か $-$ であるとする。

  (i) F が左完全で $*=+$ (resp. F が右完全で $*=-$) であるとせよ。各 $p,q\in\mathbb{Z}$ に対して自然な射 $H^{p+q}(RF(X,Y))\to F(H^p(X),H^q(Y))$ (resp. $F(H^p(X),H^q(Y))\to H^{p+q}(LF(X,Y))$ を構成せよ。

  (ii) F が完全であるとせよ。各 $n\in\mathbb{Z}$ に対して以下の同型を示せ：

$$H^n(F(X,Y))\cong\bigoplus_{p+q=n}F(H^p(X),H^q(Y)).$$

注意. $\mathcal{I}$ のような部分圏の存在に関して本文中では全く仮定がなかったが、右導来函手の存在のみから証明できることなんだろうか。もしそうなら、[Exercise 1.21, KS02] でも仮定する必要がなかったはずだけど...

証明. (1) を示す。余核の普遍性によって自然な射 $\mathrm{coker}(F(d_X^j))\to F(\mathrm{coker}(d_X^j))$ を得る。さらに核の普遍性によって自然な射 $H^j(F(X))\to\ker(F(\mathrm{coker}(d_X^{j-1}))\to F(X^j))$ を得る。ここで F は左完全であるから、自然な同型 $\ker(F(\mathrm{coker}(d_X^{j-1}))\to F(X^j))\cong F(\ker(\mathrm{coker}(d_X^{j-1})\to X^j))\cong F(H^j(X))$ を得る。以上より、自然な射 $H^j(F(X))\to F(H^j(X))$ を得る (自然、の意味は、複体 X に対して函手的、という意味。余核の間の射も核の間の射も核を F の中に入れる同型射もすべて X について函手的)。本文 [Proposition 1.7.7, KS02] または [Exercise 1.23 (1), KS02] より、モノな擬同型 $X\to I,(I\in\mathsf{K}^+(\mathcal{I}))$ が存在する。$RF(I)\cong F(I)$ が成り立つので、自然な射

$$R^jF(X)\cong R^jF(I)\cong H^j(F(I))\to F(H^j(I))\cong F(H^j(X))$$

を得る。以上で (1) が示された。

(2) を示す。(i) を示す。$*=+$ で F が左完全である場合を証明できれば、$\mathcal{C}^{\mathrm{op}},\mathcal{D}^{\mathrm{op}}$ を考えることによって $*=-$ で F が右完全である場合も正しいことが従う。よって、(i) を示すためには、$*=+$ で F が左完全であると仮定しても一般性を失わない。(1) の証明と同様に、各 Y^q について自然な $\mathcal{E}$ の射

$H_I^p(F(X,Y^q)) \to F(H^p(X),Y^q)$ を得る。これらを q に関する複体と考えることで、(1) の証明と同様に、各 p,q について自然な $\mathcal{E}$ の可換図式

$$\begin{array}{ccc} H^q(H_I^p(F(X,Y))) & \longrightarrow & H^q(F(H^p(X),Y)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^p(F(X,H^q(Y))) & \longrightarrow & F(H^p(X),H^q(Y)) \end{array}$$

を得る。$Z \in \mathsf{Ch}^{2,+}(\mathcal{E})$ を二重複体とする。複体の射 $\mathrm{Tot}(Z) \to Z_{II}^q[-p]$ で $n = p+q$ 次のコホモロジーをとれば $\mathcal{E}$ の射 $H^n(\mathrm{Tot}(Z)) \to H_I^p(Z)$ を得る。$H_I^p(Z^{\bullet,*})$ は $*$ に関して複体を成し、合成 $H^n(\mathrm{Tot}(Z)) \to H_I^p(Z^{\bullet,q}) \to H_I^p(Z^{\bullet,q+1})$ は 0-射である。従って、$\mathcal{E}$ の射 $H^n(\mathrm{Tot}(Z)) \to H^q(H_I^p(Z))$ を得る。よって、もとの二重複体 $F(X,Y)$ に対しても、$\mathcal{E}$ の射 $H^{p+q}(F(X,Y)) \to H^q(H_I^p(F(X,Y)))$ を得る。以上より自然な射 $H^{p+q}(F(X,Y)) \to F(H^p(X),H^q(Y))$ を得る。ここで擬同型 $X \to I, I \in \mathsf{K}^+(\mathcal{I})$ をとれば、$\mathsf{D}^+(\mathcal{E})$ において $RF(X,Y) \cong F(I,Y)$ であるため、よって自然な射

$$H^{p+q}(RF(X,Y)) \cong H^{p+q}(F(X,Y)) \to F(H^p(I),H^q(Y)) \cong F(H^p(X),H^q(Y))$$

を得る。以上で (i) の証明を完了する。

(ii) を示す。(i) の証明と同様にして、$H_{II}^q(H_I^p(F(X,Y))) \cong F(H^p(X),H^q(Y))$ であることが従うので、(ii) を示すためには、$\mathcal{E}$ の二重複体 Z であって $\tau_I^{\leq n}(Z) = \tau_{II}^{\leq n}(Z) = 0, (\forall n \ll 0)$ を満たすものに対して、$H^n(\mathrm{Tot}(Z)) \cong \bigoplus_{p+q=n} H_{II}^q(H_I^p(Z))$ であることを証明することが十分である。しかしこれは、Z として $\tau^{\leq n}(Z)$ をとることで任意の $n \ll 0$ に対して成立し、さらに [Exercise 1.25 (1), KS02] を用いることで帰納的に任意の n に対する $\tau^{\leq n}(Z)$ に対して成立するので、$n \to \infty$ の極限をとることで Z に対して成立することが従う。以上で (ii) の証明を完了し、(2) の証明を完了し、問題 I.24 の解答を完了する。 □

References

[KS02] M. Kashiwara and P. Schapira. *Sheaves on Manifolds*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer Berlin Heidelberg, 2002. ISBN: 9783540518617. URL: https://www.springer.com/jp/book/9783540518617.