Sheaves on Manifolds Exercise I.33 の解答

ゆじとも

2021 年 2 月 9 日

Sheaves on Manifolds [Exercise I.33, KS02] の解答です。

I　Homological Algebra

問題 I.33. k を体、V を k-線形空間とする。自己準同型 $u : V \to V$ が **trace class** であるとは、ある n に対して $\dim(u^n(V)) < \infty$ が成り立つことと定義する。$u : V \to V$ が trace class であるとき、$\mathrm{tr}(u) :\overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{tr}(u|_{u^n(V)})$ と定義する。

(1) $\mathrm{tr}(u)$ の定義は n に依存しないことを示せ。

(2) $V \xrightarrow{u} W \xrightarrow{v} V$ を k-線形空間の射の列とする。$u \circ v$ が trace class であることと $v \circ u$ が trace class であることは同値であることを示せ。さらにこのとき $\mathrm{tr}(u \circ v) = \mathrm{tr}(v \circ u)$ が成り立つことを示せ。

(3) k-線形空間の完全列の自己準同型

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & V_1 & \longrightarrow & V_2 & \longrightarrow & V_3 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle v_1} & & \downarrow{\scriptstyle v_2} & & \downarrow{\scriptstyle v_3} & & \\ 0 & \longrightarrow & V_1 & \longrightarrow & V_2 & \longrightarrow & V_3 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

について、v_2 が trace class であることと v_1, v_3 がどちらも trace class であることは同値であることを示せ。さらにこのとき、$\mathrm{tr}(v_2) = \mathrm{tr}(v_1) + \mathrm{tr}(v_3)$ が成り立つことを示せ。

証明. (1) を示す。まず $x \mapsto [u : V \to V]$ により V を $k[x]$-加群と考える。十分大きい n に対して $\dim(\mathrm{Im}(u^n)) < \infty$ であるので、$n \gg 0$ で $\mathrm{Im}(u^n) = \mathrm{Im}(u^{n+1})$ となる。従って、自然な射 $\mathrm{Im}(u^n) \subset V \to V \otimes_k k[x, 1/x]$ は $n \gg 0$ で同型射であり、とくに $V \otimes_k k[x, 1/x]$ は k-線形空間として有限次元である。u のトレースは k-線形空間 $V \otimes_k k[x, 1/x]$ 上への x の作用にしか依存しないため、n の取り方によらずに well-defined である。以上で (1) の証明を完了する。

(2) を示す。$v \circ (u \circ v)^n \circ u = (v \circ u)^{n+1}$ なので $u \circ v$ が trace class であることと $v \circ u$ が trace class であることは同値である。$v \circ u : V \to V$ と $u \circ v : W \to W$ によって V, W をそれぞれ $k[x]$-加群と考えたとき、$u : V \to W$ と $v : W \to V$ は $k[x]$-加群の射である。さらに、$u \circ v$ か $v \circ u$ の一方が trace class であれば、十分大きい n に対して $v \circ u : (v \circ u)^n(V) \to (v \circ u)^n(V)$ と $u \circ v : (u \circ v)^n(W) \to (u \circ v)^n(W)$ はいずれも全単射であり、とくに $k[x]$-加群の同型射である。これは $v \circ u$ と $u \circ v$ の固有値の和が等しいことを意味する。以上で (2) の証明を完了する。

(3) を示す。v_1, v_2, v_3 によって V_1, V_2, V_3 を $k[x]$-加群とみなす。v_1, v_2, v_3 が k-線形空間の完全列の射を成すことから、

$$0 \longrightarrow V_1 \longrightarrow V_2 \longrightarrow V_3 \longrightarrow 0$$

は $k[x]$-加群の完全列である。$k[x,1/x]$ をテンソルすると、$k[x,1/x]$ は $k[x]$ 上平坦であるから、$k[x,1/x]$-加群の完全列

$$0 \longrightarrow V_1 \otimes_{k[x]} k[x,1/x] \longrightarrow V_2 \otimes_{k[x]} k[x,1/x] \longrightarrow V_3 \otimes_{k[x]} k[x,1/x] \longrightarrow 0$$

を得る。v_i が trace class であることは、$V_i \otimes_{k[x]} k[x,1/x]$ が長さ有限であることと同値であるので、以上より v_2 が trace class であることと v_1, v_3 がどちらも trace class であることが同値であることが従う。v_i のトレースは $V_i \otimes_{k[x]} k[x,1/x]$ への v_i の作用 (つまり x の作用) のトレースであるから、$V_i \otimes_{k[x]} k[x,1/x]$ たちの成す短完全列を考えることによって、$\mathrm{tr}(v_2) = \mathrm{tr}(v_1) + \mathrm{tr}(v_3)$ であることが従う (cf. [Exercise 1.32 (2), KS02] の証明の一番最初の部分など)。以上で (3) の証明を完了し、問題 I.33 の解答を完了する。 □

References

[KS02] M. Kashiwara and P. Schapira. *Sheaves on Manifolds*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer Berlin Heidelberg, 2002. ISBN: 9783540518617. URL: https://www.springer.com/jp/book/9783540518617.