スキーム論速成コース

ゆじ

2021 年 7 月 5 日

1 定義周辺

1.1 最低限の可換環論

1.1.1 中山の補題

Lemma 1.1. M を有限生成 A-加群とすると、M は極大部分加群を持つ、すなわち、M/N が非自明な部分加群を持たないような部分加群 $N \subset M$ が存在する。とくに、環 A には極大イデアルが存在する。

Proof. 生成元を $m_1, \cdots, m_r \in M$ として部分加群の集合

$$\{N \subset M | \exists i, m_i \notin N\}$$

に Zorn の補題を使えば示せる。 ✎

Theorem 1.2 (中山の補題)**.** A を局所環、k を A の剰余体、M を有限生成 A-加群とする。このとき、$M = 0$ であるための必要十分条件は $M \otimes_A k = 0$ である。

Proof. 必要性は明らかである。十分性は極大部分加群の存在より従う。 ✎

Remark 1.3. M が有限生成でない場合は反例がある。たとえば A が DVR で $M = K$ が商体である場合、$K \otimes_A k = 0$ である。

Corollary 1.4. A を環、M を有限生成加群、$\mathfrak{p}$ を A の素イデアルとするとき、$\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(M)$ であるための必要十分条件は $M \otimes_A k(\mathfrak{p}) \neq 0$ である。

1.1.2 平坦性

Definition 1.5. A を環とする。

- A-加群 M が**平坦**であるとは、函手 $(-) \otimes_A M$ が完全函手であることを意味する。
- 環の射 $A \to B$ が**平坦**であるとは、B が A-加群として平坦であることを意味する。
- 環の射 $A \to B$ が**忠実平坦**であるとは、0 でない任意の A-加群 $M \neq 0$ に対し、$M \otimes_A B \neq 0$ となることを意味する。

Examplpe 1.6. A を環とする。

- 元 $f \in A$ での局所化 $A \to A_f$ や素イデアル $\mathfrak{p} \subset A$ での局所化 $A \to A_{\mathfrak{p}}$ は平坦である。
- 0 は平坦 A-加群である。
- 体の拡大は忠実平坦な環の射である。

Lemma 1.7. $\varphi : A \to B$ を環の射とする。

(i) φ が忠実平坦であるとする。$p : M \to N$ を A-加群の射とする。このとき、$p \otimes \mathrm{id} : M \otimes_A B \to N \otimes_A B$ が単射 (resp. 全射) であれば、p も単射 (resp. 全射) となる。とくに、A-加群の複体が完全であることの必要十分条件は、B への基底変換のあとで完全となることである。

(ii) φ が忠実平坦であるとする。このとき、φ は単射である。

(iii) φ が平坦であるとする。このとき、φ が忠実平坦であるための必要十分条件は、φ が引き起こす射 $f : \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ が全射となることである。

Proof. (i) を示す。φ は平坦であるから、自然な射 $\ker(p) \otimes_A B \xrightarrow{\sim} \ker(p \otimes \mathrm{id})$ (resp. $\mathrm{coker}(p \otimes \mathrm{id}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{coker}(p) \otimes_A B$) は同型射である。これと φ が忠実平坦であることから (i) が従う。

(ii) を示す。$\varphi \otimes \mathrm{id} : B \to B \otimes_A B$ は掛け算写像 $B \otimes_A B \to B$ というレトラクトを持つので単射である。従って、(i) より、φ は単射である。

(iii) を示す。必要性を示す。φ が忠実平坦であると仮定する。$\mathfrak{p}$ を A の素イデアルとすると、$k(\mathfrak{p}) \neq 0$ なので、φ が忠実平坦であることから、$k(\mathfrak{p}) \otimes_A B \neq 0$ となる。これは $f^{-1}(\mathfrak{p}) \neq \varnothing$、すなわち f の全射性を示している。以上で必要性の証明を完了する。十分性を示す。φ が平坦であり、さらに f が全射であると仮定する。$M \neq 0$ を 0 でない A-加群とする。φ が忠実平坦であることを示すためには、$M \otimes_A B \neq 0$ を示せばよい。$M \neq 0$ であるから、0 でない有限生成部分加群 $0 \neq N \subset M$ が存在する。$N \neq 0$ であるから、$\mathrm{Supp}(N) \neq \varnothing$ である。さらに、f は全射であるから、点 $\mathfrak{q} \in f^{-1}(\mathrm{Supp}(N)) \subset \mathrm{Spec}(B)$ が存在する。$\mathfrak{p} :\overset{\mathrm{def}}{=} f(\mathfrak{q}) \in \mathrm{Supp}(N)$ と書く。

- $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(N)$ なので、中山の補題より、$N \otimes_A k(\mathfrak{p}) \neq 0$ である。
- 体の拡大 $k(\mathfrak{p}) \subset k(\mathfrak{q})$ はいつでも忠実平坦なので、

$$N \otimes_A B \otimes_B k(\mathfrak{q}) \cong N \otimes_A k(\mathfrak{p}) \otimes_{k(\mathfrak{p})} k(\mathfrak{q}) \neq 0$$

  となる。
- とくに、$N \otimes_A B \neq 0$ である。

φ は平坦なので、射 $0 \neq N \otimes_A B \hookrightarrow M \otimes_A B$ は単射である。従って、$M \otimes_A B \neq 0$ となる。以上ですべての主張の証明が完了した。 ✎

Examplpe 1.8. A を環、$f_1, \cdots, f_r \in A$ を元とする。$\bigcup_{i=1}^r D(f_i) = \mathrm{Spec}(A)$ であると仮定する。このとき、$\mathrm{Spec}(\prod_{i=1}^r A_{f_i}) = \amalg_{i=1}^r \mathrm{Spec}(A_{f_i})$ であるので、Lemma 1.7 (iii) より、自然な射 $A \to \prod_{i=1}^r A_{f_i}$ は忠実平坦である。

Corollary 1.9. $\varphi : A \to B$ を忠実平坦な環の射とする。このとき、

$$M \xrightarrow{m \mapsto m \otimes 1} M \otimes_A B \underset{m \otimes b \mapsto m \otimes 1 \otimes b}{\overset{m \otimes b \mapsto m \otimes b \otimes 1}{\rightrightarrows}} M \otimes_A B \otimes_A B$$

はイコライザーの図式である。

Proof. Lemma 1.7 (i) より、主張を示すためには、

$$\begin{tikzcd} M \otimes_A B \arrow[r, "m\otimes b \mapsto m\otimes 1\otimes b"] & M \otimes_A B \otimes_A B \arrow[r, shift left, "m\otimes b_1\otimes b_2 \mapsto m\otimes b_1\otimes 1\otimes b_2"] \arrow[r, shift right, "m\otimes b_1\otimes b_2 \mapsto m\otimes 1\otimes b_1\otimes b_2"'] & M \otimes_A B \otimes_A B \otimes_A B \end{tikzcd}$$

がイコライザーの図式であることを示せば十分である。左側の射を f とおき、右上の射を f_1、右下の射を f_2 とおく。掛け算射を $\varphi : B \otimes_A B \to B$ とする。f は $\mathrm{id}_M \otimes \varphi$ というレトラクトを持つので単射である。$\psi :\overset{\text{def}}{=} \mathrm{id}_M \otimes \mathrm{id}_B \otimes \varphi$ とおくと、

$$\begin{aligned} \psi(f_1(m \otimes b_1 \otimes b_2)) &= \psi(m \otimes b_1 \otimes 1 \otimes b_2) = m \otimes b_1 \otimes b_2, \\ \psi(f_2(m \otimes b_1 \otimes b_2)) &= \psi(m \otimes 1 \otimes b_1 \otimes b_2)) = m \otimes 1 \otimes b_1 b_2 = f(m \otimes b_1 b_2) \end{aligned}$$

となるので、$f_1(m \otimes b_1 \otimes b_2) = f_2(m \otimes b_1 \otimes b_2)$ であれば、$m \otimes b_1 \otimes b_2 = f(m \otimes b_1 b_2)$ となる。以上より、上記の図式がイコライザーの図式であることが示された。

Corollary 1.10. A を環、$f_1, \cdots, f_r \in A$ を元とする。$\mathrm{Spec}(A) = \bigcup_{i=1}^r D(f_i)$ と仮定する。このとき、

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "m \mapsto m/1"] & \prod_{i=1}^r M_{f_i} \arrow[r, shift left, "m/f_i \mapsto m f_j/(f_i f_j)"] \arrow[r, shift right, "m/f_j \mapsto m f_i/(f_i f_j)"'] & \prod_{i,j} M_{f_i f_j} \end{tikzcd}$$

はイコライザーの図式である。

Proof. Examplpe 1.8と Corollary 1.9より従う。

2　スキームの定義と基本性質

2.1　スキームの定義

Lemma 2.1. X を位相空間、$\mathcal{B} :\overset{\text{def}}{=} \{B_i \subset X\}_{i \in I}$ を (有限交差で閉じる) 開基とする。$\mathcal{B}$ は包含関係によって圏とみなす。$F : \mathcal{B}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$ を函手とする。任意の $B \in \mathcal{B}$ と $\mathcal{B}$ の元による B の開被覆 $\{B_j \in \mathcal{B}\}_{j \in J}$ に対し、

$$\begin{tikzcd} F(B) \arrow[r] & \prod_j F(B_j) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \prod_{j_1, j_2} F(B_{j_1 j_2}) \end{tikzcd}$$

がイコライザーの図式であるとする。このとき、任意の開集合 $U \subset X$ に対して、U に属する $\mathcal{B}$ の元からなる $\mathcal{B}$ の充満部分圏を $\mathcal{B}|_U$ と表すとき、

$$\tilde{F}(U) :\overset{\text{def}}{=} \lim_{B \in \mathcal{B}|_U} F(B)$$

とおけば、$\tilde{F}$ は X 上の層となる。

Proof. 開集合の包含関係 $U_1 \supset U_2$ があれば、函手 $\mathcal{B}|_{U_2} \to \mathcal{B}|_{U_1}$ ができるので、これによって F は前層となる。極限どうしの順序交換によって層であることが確認できる。

Definition 2.2. A を環、M を A-加群とする。$\mathcal{B} :\overset{\text{def}}{=} \{D(f) | f \in A\}$ と置く。$f \in A$ に対して、$S_f :\overset{\text{def}}{=} \bigcap_{\mathfrak{p} \in D(f)} (A \setminus \mathfrak{p})$ とおくと、これは積閉集合である。また、S_f は開集合 $D(f)$ のみにより決定され、f のとり方によらない。$F(D(f)) :\overset{\text{def}}{=} (S_f)^{-1} M$ とするとき、F は Lemma 2.1の仮定を満たし、$\mathrm{Spec}(A)$ 上の層を定

める。とくに $M = A$ の場合、$\mathrm{Spec}(A)$ 上の環の層が定まる。これを**構造層**といい、$\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}$ で表す。一般の M に対して上の手続きにより構成される層を $\tilde{M}$ で表す。これは $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}$-加群である。

Remark 2.3.

- $(S_f)^{-1}M \cong M_f$ である。
- 構成より、$\tilde{M}(D(f)) \cong M_f$ である。とくに、$\Gamma(\mathrm{Spec}(A), \tilde{M}) \cong M$ である。
- 各点 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ に対して、stalk は $\tilde{M}_{\mathfrak{p}} \cong \mathrm{colim}_{\mathfrak{p} \in D(f)} M_f \cong M_{\mathfrak{p}}$ となる。特に、環つき空間 $(\mathrm{Spec}(A), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)})$ は局所環つき空間である。

Definition 2.4. $(\mathrm{Spec}(A), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)})$ と同型な局所環つき空間のことを**アフィンスキーム**という。局所環つき空間 $(X, \mathcal{O}_X)$ が**スキーム**であるとは、ある開被覆 $X = \bigcup_i U_i$ が存在し、$(U_i, \mathcal{O}_X|_{U_i})$ がアフィンスキームとなることを言う。スキーム X 上の $\mathcal{O}_X$-加群 F が**準連接層**であるとは、各アフィン開集合 $U \subset X$ に対して、ある $\mathcal{O}_X(U)$-加群 M が存在し、$F|_U \cong \tilde{M}$ となることを言う。さらにこの M がいつも有限表示となるとき、F は**連接層**であると言う。

2.2 スキームの張り合わせ