Sheaves on Manifolds Exercise I.1 の解答

ゆじとも

2021 年 2 月 9 日

Sheaves on Manifolds [Exercise I.1, KS02] の解答です。

I Homological Algebra

問題 I.1. $\mathcal{C}$ を加法圏とする。このとき、合成が双線型となるような各 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}$ に入るアーベル群の構造は一意的であることを示せ。

証明. $\mathcal{C}$ の加法圏の定義による Hom の加法をたんに $+$ で表し、問いの性質を満たす加法を $+_1$ で表すことにする。$X, Y \in \mathcal{C}$ とする。合成 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, 0) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(0, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ は $+_1$ に関して ($+$ に関しても) 双線型であるから、その像として定まる合成射 $X \to 0 \to Y$ は $+_1$ に関する (同様に、$+$ に関する) 単位元である。よって 0 は $+_1$ に関する単位元である。自然な同型と加法

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y \times Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \xrightarrow{+} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$$

により射 $m : Y \times Y \to Y$ を得る。二つの射 $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ に対して、$(f, g) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y \times Y)$ と m を合成すると、m の定義により $m \circ (f, g) = f + g$ である。一方、m を合成する射 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y \times Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ は、$+_1$ の定義により $+_1$ と可換する。0 が $+_1$ の単位元であることから、$(f, g) = (f, 0) +_1 (0, g)$ であるので、従って、

$$f + g = m \circ (f, g) = m \circ [(f, 0) +_1 (0, g)] = m \circ (f, 0) +_1 m \circ (0, g) = f +_1 g$$

がわかる。以上で問題 I.1 の証明を完了する。 □

References

[KS02] M. Kashiwara and P. Schapira. *Sheaves on Manifolds*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer Berlin Heidelberg, 2002. ISBN: 9783540518617. URL: https://www.springer.com/jp/book/9783540518617.