Sheaves on Manifolds Exercise II.15 の解答

ゆじとも

2021 年 2 月 10 日

Sheaves on Manifolds [Exercise II.15, KS02] の解答です。

II Sheaves

問題 II.15. (1) $F^\bullet$ を下に有界な X 上の層の複体とする。自然な射 $H^j(\Gamma(X, F^\bullet)) \to H^j(R\Gamma(X, F^\bullet))$ を構成せよ。

(2) $\mathcal{U} = \{U_i\}_i$ を X の開被覆として、F を X 上の層とする。自然な射 $H^j(C^\bullet(\mathcal{U}, F)) \to H^j(X, F)$ を構成せよ。

証明. (1) を示す。入射的層からなる複体へのモノな擬同型 $F^\bullet \xrightarrow{\text{qis}} I^\bullet$ をとれば複体の射 $\Gamma(X, F^\bullet) \to \Gamma(X, I^\bullet) \cong R\Gamma(X, F^\bullet)$ $\Gamma(X, F^\bullet) \to \Gamma_(X, I^\bullet) \cong R\Gamma(X, F^\bullet)$ が得られるので、j 次コホモロジーをとることによって射 $H^j(\Gamma(X, F^\bullet)) \to H^j(R\Gamma(X, F^\bullet))$ を得る。以上で (1) の証明を完了する。

(2) を示す。F を 0 次だけが F で他が 0 である自明な複体とみなすと、本文 [Proposition 2.8.4, KS02] より、augmentation map $\delta : F \xrightarrow{\text{qis}} \mathcal{C}^\bullet(\mathcal{U}, F)$ は擬同型である。よって $\mathsf{D}^+(\mathsf{Ab}(X))$ の同型射 $R\Gamma(X, \delta) : R\Gamma(X, F) \xrightarrow{\sim} R\Gamma(X, \mathcal{C}^\bullet(\mathcal{U}, F))$ を得る。(1) を $F^\bullet = \mathcal{C}^\bullet(\mathcal{U}, F)$ に対して適用すると、$\Gamma(X, \mathcal{C}^\bullet(\mathcal{U}, F)) \cong C^\bullet(\mathcal{U}, F)$ であるので、射 $H^j(C^\bullet(\mathcal{U}, F)) \to H^j(R\Gamma(X, \mathcal{C}^\bullet(\mathcal{U}, F))$ を得る。これに $H^j(R\Gamma(X, \delta)^{-1})$ を合成することで射 $H^j(C^\bullet(\mathcal{U}, F)) \to H^j(X, F)$ を得る。以上で (2) の証明を完了し、問題 II.15 の解答を完了する。 □

References

[KS02] M. Kashiwara and P. Schapira. *Sheaves on Manifolds*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer Berlin Heidelberg, 2002. ISBN: 9783540518617. URL: https://www.springer.com/jp/book/9783540518617.