Sheaves on Manifolds Exercise I.26 の解答

ゆじとも

2021 年 2 月 9 日

Sheaves on Manifolds [Exercise I.26, KS02] の解答です。

I Homological Algebra

問題 I.26. $\mathcal{C}$ をアーベル圏、X を $\mathcal{C}$ の複体で、各 n に対して $X^{p,q} \neq 0, p+q=n$ となる (p,q) は高々有限個であるとする。さらに $q_0 < q_1$ が存在して、$q \neq q_0, q_1$ に対して $\mathsf{D}(\mathcal{C})$ において $H^q_{II}(X) \cong 0$ であると仮定する。このとき次の三角形が完全であることを示せ：

$$H^{q_0}_{II}(X)[-q_0] \to \mathrm{Tot}(X) \to H^{q_1}_{II}[-q_1] \xrightarrow{+1} .$$

証明. [Exercise 1.25 (1), KS02] より、$n \neq q_0, q_1$ に対して $\mathrm{Tot}(\tau^{\leq n-1}_{II}(X)) \to \mathrm{Tot}(\tau^{\leq n}_{II}(X))$ と $\mathrm{Tot}(\tau^{\geq n}_{II}(X)) \to \mathrm{Tot}(\tau^{\geq n+1}_{II}(X))$ はどちらも擬同型である。従って、[Exercise 1.25 (3), KS02] より、任意の $n < q_0$ に対して $\mathsf{D}(\mathcal{C})$ において $\mathrm{Tot}(\tau^{\leq n}_{II}(X)) \cong 0$ であり、任意の $n > q_1$ に対して $\mathsf{D}(\mathcal{C})$ において $\mathrm{Tot}(\tau^{\geq n}_{II}(X)) \cong 0$ である。再び [Exercise 1.25 (1), KS02] を用いると、任意の $q_0 \leq n < q_1$ に対して $\mathsf{D}(\mathcal{C})$ において $\mathrm{Tot}(\tau^{\leq n}_{II}(X)) \cong H^{q_0}_{II}[-q_0]$ であり、任意の $q_0 < n \leq q_1$ に対して $\mathsf{D}(\mathcal{C})$ において $H^{q_1}_{II}[-q_1] \cong \mathrm{Tot}(\tau^{\geq n}_{II}(X))$ であることが従う。各 n に対して $\tau^{\leq n}_{II}(X) \to X \to \tau^{\geq n+1}_{II}(X) \xrightarrow{+1}$ は $\mathsf{D}(\mathsf{Ch}(\mathcal{C}))$ の完全三角なので、

$$\mathrm{Tot}(\tau^{\leq n}_{II}(X)) \to \mathrm{Tot}(X) \to \mathrm{Tot}(\tau^{\geq n+1}_{II}(X)) \xrightarrow{+1}$$

は $\mathsf{D}(\mathcal{C})$ の完全三角である。$n = q_0$ とすると、$n+1 \leq q_1$ であるので、従って

$$H^{q_0}_{II}[-q_0] \to \mathrm{Tot}(X) \to H^{q_1}_{II}[-q_1] \xrightarrow{+1}$$

は $\mathsf{D}(\mathcal{C})$ の完全三角である。以上で問題 I.26 の解答を完了する。 □

References

[KS02] M. Kashiwara and P. Schapira. *Sheaves on Manifolds*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer Berlin Heidelberg, 2002. ISBN: 9783540518617. URL: https://www.springer.com/jp/book/9783540518617.