Sheaves on Manifolds Exercise II.1 の解答

ゆじとも

2021 年 2 月 9 日

Sheaves on Manifolds [Exercise II.1, KS02] の解答です。

II Sheaves

問題 II.1. $\mathbb{N}$ を自然数の集合で、$\{0,\cdots,n\}, n \geq -1$ たちが開となる最も粗い位相を入れる。このとき、$\mathbb{N}$ 上の前層 F は各 n に対するアーベル群 $F_n \stackrel{\text{def}}{:=} F(\{0,\cdots,n\})$ と $n \geq m$ に対する開集合の包含 $\{0,\cdots,m\} \subset \{0,\cdots,n\}$ により引き起こされる制限写像 $F_n \to F_m$ の族に唯一のアーベル群 $F_\infty \stackrel{\text{def}}{:=} F(\mathbb{N})$ を添加したものと同一視される。

(0) 前層 F が層であるための必要十分条件は $\Gamma(\mathbb{N}, F) \cong \lim_n F_n$ であることを示せ。

(1) 各 $j \neq 0, 1$ に対して $H^j(\mathbb{N}, F) = 0$ であることを示せ。

(2) $H^1(\mathbb{N}, F) \cong (\prod_n F_n)/I$ であることを示せ。ただし I の定義は、$f_{i,j} : F_i \to F_j$ を層 F の制限写像とするとき、以下で定義される：

$$I \stackrel{\text{def}}{:=} \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_n F_n \middle| \forall n \in \mathbb{N}, \exists y_n \in F_n, x_n = y_n - f_{n+1,n}(y_{n+1}) \right\}.$$

証明. (0) は自明。(1) を示す。$G_n \stackrel{\text{def}}{:=} \prod_{i \leq n} F_i$ と置く。射影 $G_n \to G_{n-1}$ らにより定まる $\mathbb{N}$ 上の層を G と置くと、構成からただちに G が脆弱層であることがわかる。各 $n \geq i$ に対して制限写像 $F_n \to F_i$ の族が単射 $F_n \to \prod_{i \leq n} F_i = G_n$ を引き起こす。これは制限写像 $F_n \to F_{n-1}$ と射影 $G_n \to G_{n-1}$ と可換し、よって層の単射 $F \to G$ を得る。

層 G/F の構造を決定する。層 F の制限写像を $f_{i,j} : F_i \to F_j$ と置く。

$$\varphi_n((x_i)_{i \leq n}) \stackrel{\text{def}}{:=} (x_i - f_{n,i}(x_n))_{i<n}$$

で定まる射 $\varphi_n : G_n \to H_n \stackrel{\text{def}}{:=} \prod_{i<n} F_i$ は全射であり、核はちょうど $\mathrm{Im}(F_n \to G_n)$ である。また、$m \leq n$ に対して $h_{n,m} : H_n \to H_m$ を

$$h_{n,m}((x_i)_{i<n}) \stackrel{\text{def}}{:=} (x_i - f_{m,i}(x_m))_{i<m}$$

と定めれば、各 $i < m \leq n$ に対して

$$(x_i - f_{n,i}(x_n)) - (f_{m,i}(x_m - f_{n,m}(x_n)) = x_i - f_{m,i}(x_m)$$

となるので、図式

$$\begin{array}{ccc} G_n & \xrightarrow{\varphi_n} & H_n \\ {\scriptstyle \mathrm{proj.}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle h_{n,m}} \\ G_m & \xrightarrow{\varphi_m} & H_m \end{array}$$

は可換である。これらの H_n により定まる層 H は G/F に他ならないが、各 $h_{n,m}$ は全射であるから、H は脆弱層である。以上より $\mathbb{N}$ 上の層の完全列

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow H \longrightarrow 0$$

で G, H が脆弱層となるものが構成できた。このことは $H^j(\mathbb{N}, F) = 0, j \geq 2$ を示している。以上で (1) の証明を完了する。

(2) を示す。(1) の証明中に得られた層 H の大域切断を決定する。それは $\lim_n H_n$ であるから、このアーベル群を計算する。$\lim_n H_n$ は $\prod_{n\in N} H_n$ の部分加群で、

$$\left\{ (x^n \overset{\mathrm{def}}{:=} (x_i^n)_{i<n})_{n\in N} \middle| x^n \in H_n, \forall (m \leq n), h_{n,m}(x^n) = x^m \right\}$$

となるものと自然に同型である。従って各 $i < m \leq n$ に対して $x_i^m = x_i^n - h_{m,i}(x_m^n)$ となる。従って、このような元の族 $x^n \in H_n$ は $x_{n-1}^n \in F_{n-1}$ によって $x_i^n = x_i^{n-1} + h_{n-1,i}(x_{n-1}^n)$ の形で一意的に決定される。すなわち、射影 $H_n \to F_{n-1}$ を並べて得られる射影 $\prod_{n\in\mathbb{N}} H_n \to \prod_{n\in\mathbb{N}_{\geq 1}} F_{n-1} = \prod_{n\in\mathbb{N}} F_n$ を $\lim_n H_n \subset \prod_{n\in\mathbb{N}} H_n$ へ制限すると同型射となる。従って $\Gamma(\mathbb{N}, H) \cong \prod_{n\in\mathbb{N}} F_n$ となる。以上より、アーベル群の完全列

$$\begin{array}{l} 0 \longrightarrow H^0(\mathbb{N}, F) \longrightarrow \prod_{n\in\mathbb{N}} F_n \xrightarrow{\varphi} \prod_{n\in\mathbb{N}} F_n \\ \quad \longrightarrow H^1(\mathbb{N}, F) \longrightarrow 0 \end{array}$$

を得る。問われていることは、φ の像を決定することである。各 n について、$\varphi_n : G_n \to H_n$ の像の F_{n-1} の成分を見ればそれは決定できる。$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Gamma(\mathbb{N}, G) \cong \prod_{n\in\mathbb{N}} F_n$ を任意にとると、$\varphi_n((x_i)_{i\leq n}) = (x_i - f_{n,i}(x_n))_{i<n}$ であるから、F_{n-1} の成分は $x_{n-1} - f_{n,n-1}(x_n)$ である。従って、

$$\varphi((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (x_n - f_{n+1,n}(x_{n+1}))_{n\in\mathbb{N}}$$

となる。従って $\mathrm{Im}(\varphi) = I$ がわかる。よって $H^1(\mathbb{N}, F) \cong (\prod_{n\in\mathbb{N}} F_n)/I$ が示された。以上で解答を完了する。 □

References

[KS02] M. Kashiwara and P. Schapira. *Sheaves on Manifolds*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer Berlin Heidelberg, 2002. ISBN: 9783540518617. URL: https://www.springer.com/jp/book/9783540518617.