Sheaves on Manifolds Exercise II.12 の解答

ゆじとも

2021 年 2 月 9 日

Sheaves on Manifolds [Exercise II.12, KS02] の解答です。

II Sheaves

問題 II.12. X を位相空間とする。

(1) $(F_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を有向集合 Λ で添字づけられた X 上の層の順系とする。X がコンパクトハウスドルフであると仮定せよ。このとき、任意の $k\in\mathbb{N}$ に対して $\mathrm{colim}_\lambda H^k(X,F_\lambda)\cong H^k(X,\mathrm{colim}_\lambda F_\lambda)$ が成り立つことを示せ。

(2) $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を X 上の層の逆系で、**各 $F_{n+1}\to F_n$ は全射である**とする。$Z\subset X$ を局所閉部分集合とする。$\{H_Z^{k-1}(X,F_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ が Mittag-Leffler 条件を満たすと仮定せよ。このとき、自然な同型射 $H_Z^k(X,\lim_n F_n)\xrightarrow{\sim}\lim_n H_Z^k(X,F_n)$ が存在することを示せ。

注意. (2) は本文にはない仮定を置いている。本文を引用すると以下の通りである：

Let $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be a projective system of sheaves on X and let Z be a locally closed subset of X. Assuming that $\{H_Z^{k-1}(X,F_n)\}_n$ satisfies the M-L condition, prove the isomorphism $H_Z^k(X,\lim_n F_n)\xrightarrow{\sim}\lim_n H_Z^k(X,F_n)$.

しかしこのままだと反例がある。$X=Z=[0,1]$ とする。$X=Z$ なので $H_Z^i(X,-)\cong H^i(X,-)$ である。$U_n=(1/2-1/(n+2),1/2)\cup(1/2,1/2+1/(n+2))$ とおき、$F_n:\overset{\mathrm{def}}{=}\mathbb{Z}_{U_n}$ と定める。$U_{n+1}\subset U_n$ であるから $F_{n+1}\subset F_n$ であり、これによって層の逆系 $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ができる。$k=1$ とする。定数層 $\mathbb{Z}_X$ の大域切断であって U_n に台を持つものは 0 しかないので $H_Z^0(X,F_n)=H^0(X,F_n)=0$ が成り立ち、従って $\{H_Z^0(X,F_n)\}_n$ は Mittag-Leffler 条件を満たす。$\bigcap_{n=0}^\infty U_n=\varnothing$ であるので、各 X の点で stalk をとることによって $\lim F_n=0$ が成り立つ。従って $H_Z^1(X,\lim F_n)=0$ である。さらに層の完全列

$$0\to\mathbb{Z}_{U_n}\to\mathbb{Z}_X\to\mathbb{Z}_{X\setminus U_n}\to 0$$

でコホモロジーをとる。$X=[0,1]$ なので、命題 2.7.3 (ii), (iii) より $H^1(X,\mathbb{Z}_X)=0$ である。$X\setminus U_n$ は連結成分が 3 つなので $H^0(X,\mathbb{Z}_{X\setminus U_n})=\mathbb{Z}^3$ である。よって完全列

$$0\to 0\to\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}^3\to H^1(X,F_n)\to 0$$

を得る。従って $H^1(X,F_n)\cong\mathbb{Z}^2$ が成り立つ。また、この同型射は $H^1(X,F_{n+1})\to H^1(X,F_n)$ と可換するので、よって $\lim H^1(X,F_n)\cong\mathbb{Z}^2$ が成り立つ。以上で $\{H_Z^0(X,F_n)=0\}_n$ が Mittag-Leffler 条件を満たすのにもかかわらず $0=H_Z^1(X,\lim F_n)\not\cong\mathbb{Z}^2\cong\lim H_Z^1(X,F_n)$ となる例が構成できた。

証明. (1) を示す。$X=\bigcup_{i=1}^r U_i$ を有限開被覆とする。Filtered colimit は有限極限と可換するので、

$$0 \longrightarrow (\operatorname{colim} F_\lambda)(X) \longrightarrow \prod_{i=1}^r (\operatorname{colim} F_\lambda)(U_i) \longrightarrow \prod_{i,j=1}^r (\operatorname{colim} F_\lambda)(U_i\cap U_j)$$

は完全である。$X=\bigcup_{i\in I} U_i$ を任意の開被覆とする。X はコンパクトであるから、

$$S :\overset{\mathrm{def}}{=} \left\{ I_0 \subset I \,\middle|\, X=\bigcup_{i\in I_0} U_i, |I_0|<\infty \right\}$$

は空でない有向集合である。各 $I_0\subset I_1, I_0, I_1 \in S$ に対して完全列の射

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & (\operatorname{colim} F_\lambda)(X) & \longrightarrow & \prod_{i\in I_1} (\operatorname{colim} F_\lambda)(U_i) & \longrightarrow & \prod_{i,j\in I_1} (\operatorname{colim} F_\lambda)(U_i\cap U_j) \\ & & \| & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & (\operatorname{colim} F_\lambda)(X) & \longrightarrow & \prod_{i\in I_0} (\operatorname{colim} F_\lambda)(U_i) & \longrightarrow & \prod_{i,j\in I_0} (\operatorname{colim} F_\lambda)(U_i\cap U_j) \end{array}$$

ができるので、$I_0\in S$ に渡って逆極限をとることにより、

$$0 \longrightarrow (\operatorname{colim} F_\lambda)(X) \longrightarrow \prod_{i\in I} (\operatorname{colim} F_\lambda)(U_i) \longrightarrow \prod_{i,j\in I} (\operatorname{colim} F_\lambda)(U_i\cap U_j)$$

が完全であることが従う。よって $\operatorname{colim}_\lambda H^0(X,F_\lambda)\cong H^0(X,\operatorname{colim}_\lambda F_\lambda)$ が成り立つ。

$(I_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を函手圏 $[\Lambda,\mathsf{Ab}(X)]$ の入射的対象とする。任意の $0\in\Lambda$ と任意の層の単射 $M\to N$ と任意の射 $f: M\to I_0$ に対し、M,N を 0 番目に配置して $\mathsf{Ab}(X)$ の図式と考えると、$(I_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が函手圏で入射的対象であるので、λ に関して函手的に f のリフト $N_\lambda\to I_\lambda$ が得られるので、0 番目をみることで、f のリフト $N\to I_0$ を得る。従って、各 λ に対して I_λ は入射的層である。とくに (c-)soft である。$F\subset X$ を閉集合とすると、各 $I_\lambda(X)\to I_\lambda(F)$ は全射であるので、$\operatorname{colim}(I_\lambda(X))\to\operatorname{colim}(I_\lambda(F))$ も全射であるが、ここで X,F はどちらもコンパクト (かつハウスドルフ) なので、すでに証明したことから、$\operatorname{colim}(I_\lambda(X))\cong(\operatorname{colim} I_\lambda)(X), \operatorname{colim}(I_\lambda(F))\cong(\operatorname{colim} I_\lambda)(F)$ が成り立つ。従って $\operatorname{colim} I_\lambda$ も (c-)soft であることが従う。X はコンパクトハウスドルフなので、従って $\operatorname{colim} I_\lambda$ は大域切断函手に対して acyclic である。Filtered colimit をとる函手 $\operatorname{colim}:[\Lambda,\mathsf{Ab}(X)]\to\mathsf{Ab}(X)$ は完全函手であるから、以上より、函手

$$[\Lambda,\mathsf{Ab}(X)]\to\mathsf{Ab},\quad (F_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\mapsto\Gamma(X,\operatorname{colim} F_\lambda)$$

の右導来函手は $R\Gamma(X,-)\circ\operatorname{colim}$ と自然に同型である。同様に、$\operatorname{colim}:[\Lambda,\mathsf{Ab}]\to\mathsf{Ab}$ は完全函手なので、函手

$$[\Lambda,\mathsf{Ab}(X)]\to\mathsf{Ab},\quad (F_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\mapsto\operatorname{colim}\Gamma(X,F_\lambda)$$

の右導来函手は $\operatorname{colim}\circ R\Gamma(X,(-)_\lambda)$ と自然に同型である。ただし $R\Gamma(X,(-)_\lambda)$ は $\mathsf{D}^{\geq 0}([\Lambda,\mathsf{Ab}(X)])$ から $\mathsf{D}^{\geq 0}([\Lambda,\mathsf{Ab}])$ への函手である ($[\Lambda,\mathsf{D}^+(\mathsf{Ab})]$ に値を持つのではない！)。すでに証明した 0 次の場合より、自然に $\Gamma(X,\operatorname{colim}(-)_\lambda)\cong\operatorname{colim}\Gamma(X,(-)_\lambda)$ が成り立つので、これらの右導来函手も自然に同型であり、$R\Gamma(X,\operatorname{colim}(-)_\lambda)\cong\operatorname{colim} R\Gamma(X,(-)_\lambda)$ が成り立つ (右辺の colim は通常の余極限をとる函手の導来函手であり、$[\Lambda,\mathsf{D}^+(\mathsf{Ab})]$ における余極限とは異なる)。$(F_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を代入してコホモロジーをとると、余極限をとる函手が完全であることから

$$H^i(X,\operatorname{colim} F_\lambda)\cong H^i(\operatorname{colim} R\Gamma(X,F_\lambda))\cong\operatorname{colim} H^i(X,F_\lambda)$$

を得る。以上で (1) の証明を完了する。

(2) を示す。$(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を圏 $[\mathbb{N}, \mathsf{Ab}(X)]$ の入射的対象とする。局所閉集合 $Z \subset X$ と n に対して切断 $s \in \Gamma_Z(X, I_n)$ を一つ選ぶと、s は層の射 $\mathbb{Z}_Z \to I_n$ を定める。n 番目以前が $\mathbb{Z}_Z$ でそれ以降 0 である逆系を $\mathbb{Z}_Z(n)$ とおくと、s は逆系の射 $\mathbb{Z}_Z(n) \to (I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を定める。$(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は入射的なので、逆系の単射 $\mathbb{Z}_Z(n) \subset \mathbb{Z}_Z(n+1)$ に沿って $\mathbb{Z}_Z(n) \to (I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ をリフトさせることにより、$\Gamma_Z(X, I_{n+1}) \to \Gamma_Z(X, I_n)$ が全射であることが従う。特に、各開集合 $U \subset X$ に対して $(\Gamma_Z(X, I_n))_{n\in\mathbb{N}}$ は Mittag-Leffler 条件を満たす、すなわち、$\lim_n$ に対して acyclic である。よって $R(\lim_n \circ \Gamma_Z(X, -)) \cong R\lim_n \circ R\Gamma_Z(X, -)$ が成り立ち、逆系 $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対してスペクトル系列

$$E_2^{p,q} = R^p \lim_n H_Z^q(X, F_n) \ \Rightarrow\ E^{p+q} = R^{p+q}(\lim_n \circ \Gamma_Z(X, -))(F_n)$$

を得る。$R^p \lim_n = 0, (p \neq 0, 1)$ であるので、完全列

$$0 \to R^1 \lim_n H_Z^q(X, F_n) \to E^{1+q} \to \lim_n H_Z^{q+1}(X, F_n) \to 0$$

を得る。$q = k-1$ とすれば、$(H_Z^{k-1}(X, F_n))_{n\in\mathbb{N}}$ が Mittag-Leffler 条件を満たすという仮定より、同型射 $E^k \xrightarrow{\sim} \lim_n H_Z^{q+1}(X, F_n)$ を得る。

次に、$(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を再び $[\mathbb{N}, \mathsf{Ab}(X)]$ の入射的対象とし、$U \subset X$ を開集合として、切断 $s \in \lim_n I_n(U)$ を任意にとる。これは層の射 $\mathbb{Z}_U \to \lim_n I_n$ と対応するが、これは各番号に $\mathbb{Z}_U$ が対応している自明な逆系 $(\mathbb{Z}_U)_{n\in\mathbb{N}}$ からの逆系の射 $(\mathbb{Z}_U)_{n\in\mathbb{N}} \to (I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ と対応する。これを単射 $(\mathbb{Z}_U)_{n\in\mathbb{N}} \to (\mathbb{Z}_X)_{n\in\mathbb{N}}$ に沿ってリフトさせることにより、$\lim_n I_n(X) \to \lim_n I_n(U)$ が全射であることが従う。従って $\lim_n I_n$ は脆弱層であり、とくに任意の局所閉集合 $Z \subset X$ に対する $\Gamma_Z(X, -)$ に対して acyclic である。よって $R(\Gamma_Z(X, -) \circ \lim_n) \cong R\Gamma_Z(X, -) \circ R\lim_n$ が成り立ち、逆系 $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対してスペクトル系列

$$\bar{E}_2^{p,q} = H_Z^p(X, R^q \lim_n F_n) \ \Rightarrow\ \bar{E}^{p+q} = R^{p+q}(\Gamma_Z(X, -) \circ \lim_n)(F_n)$$

を得る。$\Gamma_Z(X, -) \circ \lim_n \cong \lim_n \circ \Gamma_Z(X, -)$ であるので、自然に $\bar{E}^{p+q} \cong E^{p+q}$ である。また、$R^q \lim_n = 0, (q = 0, 1)$ であるので、完全列

$$\cdots \to \bar{E}_2^{p-2,1} \to \bar{E}_2^{p,0} \to E^p \to \bar{E}_2^{p-1,1} \to \bar{E}_2^{p+1,0} \to E^{p+1} \to \cdots$$

を得る。ここで各 $F_{n+1} \to F_n$ が全射であるという仮定より、$R^1 \lim_n F_n = 0$ が成り立つので、$\bar{E}_2^{\bullet,1} = 0$ が成り立つ。従って各 $\bar{E}_2^{p,0} \xrightarrow{\sim} E^p$ は同型射である、すなわち、各 p に対して $H_Z^p(X, \lim_n F_n) \xrightarrow{\sim} E^p$ は同型射である。$p = k$ とすることにより、同型射

$$H_Z^k(X, \lim_n F_n) \xrightarrow{\sim} R^k(\lim_n \circ \Gamma_Z(X, -))(F_n) \xrightarrow{\sim} \lim_n H_Z^k(X, F_n)$$

を得る。以上で (2) の証明を完了し、問題 II.12 の解答を完了する。 □

References

[KS02] M. Kashiwara and P. Schapira. *Sheaves on Manifolds*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer Berlin Heidelberg, 2002. ISBN: 9783540518617. URL: https://www.springer.com/jp/book/9783540518617.