Munford GIT ノート

ゆじ

2021 年 8 月 9 日

1 Definitions

Definition 1.1 (群スキーム)**.** S-スキーム G が**群スキーム**であるとは...

Definition 1.2 (代数群)**.** 体 k 上の代数多様体 G が**代数群**であるとは、k 上の群スキームであって、さらに滑らかな k-多様体であることを言う。

Definition 1.3 (群スキームの作用)**.** S 上の群スキーム G の S-スキーム X への**作用**とは...

Definition 1.4 (orbit)**.** S 上の群スキーム G が S-スキーム X に作用しているとする。T-値点 $T \to X$ の **orbit** とは... **stabilizer** とは...

Definition 1.5 (Categorical Quotient)**.** S 上の群スキーム G が S-スキーム X に作用しているとする。S-スキーム Y と射 $q : X \to Y$ のペア (Y, q) が **categorical quotient** であるとは、次を満たすことを言う：

(i) 以下の図式は可換である：

$$\begin{tikzcd} G \times X \arrow[r, "作用\sigma"] \arrow[d, "第二射影\ p_2"'] & X \arrow[d, "q"] \\ X \arrow[r, "q"] & Y \end{tikzcd}$$

(ii) 任意の S-スキーム Z と射 $r : X \to Z$ に対し、$r \circ p_2 = r \circ \sigma$ なら、一意的に $f : Y \to Z$ が存在して、$r = f \circ q$ が成り立つ。

Definition 1.6 (Geometric Quotient)**.** S 上の群スキーム G が S-スキーム X に作用しているとする。S-スキーム Y と射 $q : X \to Y$ のペア (Y, q) が **geometric quotient** であるとは、次を満たすことを言う：

(i) $q \circ p_2 = q \circ \sigma$ である。

(ii) q は全射であり、$(\sigma, p_2) : G \times_S X \to X \times_S X$ の像は $X \times_Y X$ となる。

(iii) q は **submersive** である。すなわち、$V \subset Y$ が開であることと $q^{-1}(Y) \subset X$ が開であることは同値である。

(iv) $q^{\#} : \mathcal{O}_Y \to q_*\mathcal{O}_X$ は単射であり、その像は $= (q_*\mathcal{O}_X)^G$ に等しい。

Remark. 最後の条件以外はどんな $Y' \to Y$ での基底変換のあとでも満たされる。最後の条件は開埋め込みでの基底変換 (Y の開部分集合の上への制限) のあとでは満たされる。

Definition 1.7 (Universal Categorical (Geometric) Quotient, Uniform Categorical (Geometric) Quotient)**.** $X \to Y$ は、任意の射 $Y' \to Y$ での基底変換 $X' \to Y'$ が categorical (geometric) quotient であるとき、**universal categorical (geometric) quotient** と言う。$X \to Y$ は、任意の平坦射 $Y' \to Y$ での基底変換 $X' \to Y'$ が categorical (geometric) quotient であるとき、**uniform categorical (geometric) quotient** と言う。

2 First Properties

Proposition 2.1 (Geom.⇒Cat.). σ を G/S の X/S への作用とする。$q : X \to Y$ が geometric quotient であるとき、それは categorical quotient である。さらに、q が universal geometric quotient であれば、それは universal categorical quotient である。

Proof. $r : X \to Z$ が $r \circ \sigma = r \circ p_2$ を満たすとする。Z のアフィン開集合 $W = \mathrm{Spec}(C) \subset Z$ を任意にとる。q は全射であり、$r^{-1}(W) \subset X$ は G-invariant なので、ある部分集合 $V \subset Y$ が存在して (集合として) $q^{-1}(V) = r^{-1}(W)$ となる。ここで $W \subset Z$ は開なので、$r^{-1}(W)$ も開である。q が submersive であることから、よって V は開となる。以上より、開部分スキーム $V \subset Y$ が存在して $U :\overset{\text{def}}{=} q^{-1}(V) = r^{-1}(W)$ が成り立つことがわかった。

次に環の図式

$$\begin{array}{ccc} C & & \Gamma(V, \mathcal{O}_V) \\ {\scriptstyle r^{\#}|_W}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q^{\#}|_V} \\ \Gamma(U, \mathcal{O}_U) & = & \Gamma(U, \mathcal{O}_U) \end{array}$$

について考える。q は geometric quotient なので、4 つめの条件より、$\mathrm{Im}(q^{\#}|_V) = \Gamma(U, \mathcal{O}_U)^G$ が成り立つ。仮定より、$r^{\#}|_W$ は G-不変部分を経由するので、以上より上の図式を可換にする射 $C \to \Gamma(V, \mathcal{O}_V)$ が一意的に存在する。これによって射 $V \to W$ を得る。

最後に W をより小さいアフィン開集合 W' へと制限することを考えると、上の $C \to \Gamma(V, \mathcal{O}_V)$ の一意性は、$V' \to W'$ が $V \to W$ の制限として得られることを示している。以上より、これら W 上で射が貼りあって $Y \to W$ を得る。 ✎

Remark.

Remark. この Remark に登場するスキームはすべてネーターであるとする。S が正規であると仮定しなさい。このとき、Chevalley の判定法により、G が S 上普遍開であることは、$G \to S$ が開写像であること、もしくは、$G \to S$ のすべての fiber の次元が等しいことと同値である。このことは、「$G \to S$ が開写像であって (Y, q) が geometric quotient であれば、q が普遍開写像となる」ということを imply する。それを見てみよう。

q が開であることを示すために、$U \subset X$ を任意の開集合とする。G は S 上普遍開であるので、$p_2 : G \times X \to X$ は普遍開である。さらに σ を

$$G \times X \xrightarrow{(p_1, \sigma)} G \times X \xrightarrow{p_2} X$$

と分解すると、(p_1, σ) は同型であるから、σ も普遍開であることが従う。$p_2(G \times U) \subset X$ は開であり、$q(U) = q(p_2(G \times U))$ となるが、$p_2(G \times U)$ は G-invariant であるので、$p_2(G \times U) = q^{-1}(q(U))$ が成り立つ。

q は submersive であるから、$q^{-1}(q(U)) = p_2(G \times U)$ が開であることは $q(U)$ が開であることを意味する。

Remark. 上の Remark に関連して、次元に関する別の帰結を述べる。

Proposition 2.2. X, Y を S-スキーム、$q : X \to Y$ を S-スキームの射、G を S 上の群スキームで $\sigma : G \times_S X \to X$ により作用しているとする。以下が成り立つことを仮定する：

(i) X, Y は正規既約ネータースキームであり、Y の生成点の商体は標数 0 である。
(ii) G は S 上有限型普遍開である。
(iii) q は支配的な有限型の射であって、$q \circ \sigma = q \circ p_2$ を満たす。
(iv) 任意の代数閉体 k と任意の k-valued point $\mathrm{Spec}(k) \to Y$ に対し、$\mathrm{Spec}(k)$ の fiber は高々一つの $G_k :\overset{\mathrm{def}}{=} G \times_S \mathrm{Spec}(k)$-orbit からなる。

このとき q は普遍開写像であり、$(\mathrm{Im}(q), q)$ は X の G による geometric quotient である。

Proof. ✎