# Sheaves on Manifolds Exercise II.2 の解答

ゆじとも

2021 年 2 月 9 日

Sheaves on Manifolds [Exercise II.2, KS02] の解答です。

## II Sheaves

**問題 II.2.** $X$ を位相空間、$A, B \subset X$ を閉集合とし、$X = A \cup B$ であるとする。$F \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D}^+(X))$ に対して、自然に $(R\Gamma_B(F))_A \cong R\Gamma_B(F_A)$ となることを示せ。

**証明.** 函手 $(-)_{X\setminus A}$ は完全なので、自然に $R\Gamma_{X\setminus B}(-)_{X\setminus A} \cong R(\Gamma_{X\setminus B}(-)_{X\setminus A})$ が成り立つ。$(X \setminus A) \cap (X \setminus B) = \varnothing$ なので、$\Gamma_{X\setminus B}(-)_{X\setminus A} = 0$ が成り立ち、とくに $R\Gamma_{X\setminus B}(-)_{X\setminus A} = 0$ が成り立つ。$F$ を $X$ 上の層の上に有界な複体とする。完全三角 $R\Gamma_B(F) \to F \to R\Gamma_{X\setminus B}(F) \xrightarrow{+1}$ に $(-)_{X\setminus A}$ を施すことにより、$R\Gamma_B(F)_{X\setminus A} \xrightarrow{\sim} F_{X\setminus A}$ が従う。本文 [Proposition 2.4.10, KS02] の直前の記述にあるとおり、脆弱層のなす $X$ の部分圏は $\Gamma_{X\setminus B}(-)$-injective である。また本文 [Proposition 2.4.6 (i), KS02] より、脆弱層に対して $(-)|_{X\setminus B}$ を施したものも脆弱層である。よって $i_B : X \setminus B \to X$ を包含射とすると、$R\Gamma_{X\setminus B} \cong Ri_{B,*} \circ i_B^{-1}$ が成り立つ。$i_B^{-1}((-)_{X\setminus A}) = 0$ であるから、任意の層に対して函手 $(-)_{X\setminus A}$ を施したものは $i_{B,*}$ に対して acyclic であり、よって自然に $R\Gamma_{X\setminus B}((-)_{X\setminus A}) \cong R(\Gamma_{X\setminus B}((-)_{X\setminus A}))$ が成り立つ。$(X \setminus A) \cap (X \setminus B) = \varnothing$ なので、$\Gamma_{X\setminus B}((-)_{X\setminus A}) = 0$ が成り立ち、とくに $R\Gamma_{X\setminus B}((-)_{X\setminus A}) = 0$ が成り立つ。三角形 $R\Gamma_B(F_{X\setminus A}) \to F_{X\setminus A} \to R\Gamma_{X\setminus B}(F_{X\setminus A}) \xrightarrow{+1}$ が完全であることから、$R\Gamma_B(F_{X\setminus A}) \xrightarrow{\sim} F_{X\setminus A}$ は同型である。また、二つの図式

$$
\begin{tikzcd}
R\Gamma_B(F_{X\setminus A}) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & F_{X\setminus A} \arrow[d] \\
R\Gamma_B(F) \arrow[r] & F
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
R\Gamma_B(F)_{X\setminus A} \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & F_{X\setminus A} \arrow[d] \\
R\Gamma_B(F) \arrow[r] & F
\end{tikzcd}
$$

が可換であることから、

$$
\begin{tikzcd}
R\Gamma_B(F_{X\setminus A}) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & R\Gamma_B(F)_{X\setminus A} \arrow[d] \\
R\Gamma_B(F) \arrow[r, equal] & R\Gamma_B(F)
\end{tikzcd}
$$

も可換である (二つの同型射を逆に辿って得られる二つの射 $F_{X\setminus A} \to R\Gamma_B(F)$ の差が 0 射である)。従って完全三角の間の同型射

$$
\begin{tikzcd}
R\Gamma_B(F_{X\setminus A}) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & R\Gamma_B(F) \arrow[r] \arrow[d, equal] & R\Gamma_B(F_A) \arrow[r, "+1"] \arrow[d, "\cong"] & {} \\
R\Gamma_B(F)_{X\setminus A} \arrow[r] & R\Gamma_B(F) \arrow[r] & R\Gamma_B(F)_A \arrow[r, "+1"] & {}
\end{tikzcd}
$$

を得る。以上で問題 II.2 の証明を完了する。 □

## References

[KS02] M. Kashiwara and P. Schapira. *Sheaves on Manifolds*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer Berlin Heidelberg, 2002. ISBN: 9783540518617. URL: https://www.springer.com/jp/book/9783540518617.