Sheaves on Manifolds Exercise I.17 の解答

ゆじとも

2021 年 2 月 9 日

Sheaves on Manifolds [Exercise I.17, KS02] の解答です。

I Homological Algebra

問題 I.17. $\mathcal{C}$ をアーベル圏とする。$\mathcal{C}$ が**ホモロジー次元** $\leq n$ **である**ということを、任意の $X, Y \in \mathcal{C}$ に対して $\mathrm{Ext}^i(X, Y) = 0, (\forall i > n)$ となることによって定義する。ただし、ここで $\mathrm{Ext}^i(X, Y) :\stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}(\mathcal{C})}(X, Y[i])$ である。自然数 n であって、$\mathcal{C}$ がホモロジー次元 $\leq n$ となるもののうち、最小のものを $\mathrm{hd}(\mathcal{C})$ と表し、$\mathcal{C}$ の**ホモロジー次元**と言う。

$\mathcal{C}$ は十分入射的対象を持つと仮定する。このとき、自然数 n に対して、以下の主張が同値であることを示せ：

(1) $\mathrm{hd}(\mathcal{C}) \leq n$ である。

(2) 任意の対象 $X \in \mathcal{C}$ に対して、X の入射分解 $X \to I$ であって、$i > n$ に対して $I^i = 0$ となるものが存在する。

証明. (1)⇒(2) を示す。$\mathrm{hd}(\mathcal{C}) \leq n$ であるとする。任意に対象 $X \in \mathcal{C}$ をとり、$X \to I$ を入射分解とする。$Y \in \mathcal{C}$ を任意の対象とすると、[Exercise 1.16 (2), KS02] より、$H^i(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, I)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}(\mathcal{C})}(Y, X[i]) = \mathrm{Ext}^i(Y, X)$ である。$\mathrm{hd}(\mathcal{C}) \leq n$ なので、$H^{n+1}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, I)) = 0$ であり、従って

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, I^n) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, I^{n+1})) &\cong \ker(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, I^{n+1}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, I^{n+2})) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, \ker(d_I^{n+1})) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, \mathrm{Im}(d_I^n))
\end{aligned}$$

となる。よって、完全列

$$0 \longrightarrow \ker(d_I^n) \longrightarrow I^n \longrightarrow \mathrm{Im}(d_I^n) \longrightarrow 0$$

は任意の Y に対する $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, -)$ を適用したあとも完全である。従って、[Exercise 1.4, KS02] より、$I^n \cong \ker(d_I^n) \oplus \mathrm{Im}(d_I^n)$ となることがわかる。I^n は入射的対象であるから、その直和因子である $\ker(d_I^n)$ も入射的対象である。従って、$X \to \tau^{\leq n}(I)$ は長さが n 以下の入射分解となる。以上で (1)⇒(2) の証明を完了する。

(2)⇒(1) を示す。任意に対象 $X \in \mathcal{C}$ をとり、$X \to I$ を長さ n 以下の入射分解とする。$Y \in \mathcal{C}$ を任意の対象とすると、[Exercise 1.16 (2), KS02] より、$H^i(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, I)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}(\mathcal{C})}(Y, X[i]) = \mathrm{Ext}^i(Y, X)$ であるので、$I^i = 0, (i > n)$ より、$i > n$ に対して $\mathrm{Ext}^i(Y, X) = 0$ となることがわかる。以上で問題 I.17 の解答を完了する。 □

References

[KS02] M. Kashiwara and P. Schapira. *Sheaves on Manifolds*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer Berlin Heidelberg, 2002. ISBN: 9783540518617. URL: https://www.springer.com/jp/book/9783540518617.