Sheaves on Manifolds Chapter I の Exercise の解答

ゆじとも

2021 年 2 月 17 日

Sheaves on Manifolds [Chapter I, KS02] の Exercise の解答です。現時点 (=2021 年 2 月 17 日) で解いていない (≒ 解けていない) I 章の問題：問題 I.30 (2)

- 解きっぱなしで見直してないのでいっぱいミスがあると思います。参考にする場合は注意してください。ミスを発見した方は指摘していただければ幸いです。
- 自然そうな仮定が本文中に書かれていないように見えた場合は、そのような仮定を置いた上で解いています。なので、その場合は問題文を少し変更して書いて、問題文の直後に Remark を置くようにしました。そのような問題であって、本文の指示通りの仮定で解くことができるものがあれば、指摘していただければ幸いです。
- 私はこの分野の専門家ではありませんので、重ねて申し上げますが、本当にヤバいミスをしたまま放置している可能性は十分あります。また、解答も「最適解」から程遠いものもたくさんあるかと思います。そのようなもののうち、あまりに目に余るものがあれば、指摘していただければ幸いです。

I Homological Algebra

問題 I.1. $\mathcal{C}$ を加法圏とする。このとき、合成が双線型となるような各 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}$ に入るアーベル群の構造は一意的であることを示せ。

証明. $\mathcal{C}$ の加法圏の定義による Hom の加法をたんに $+$ で表し、問いの性質を満たす加法を $+_1$ で表すことにする。$X, Y \in \mathcal{C}$ とする。合成 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,0) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(0,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ は $+_1$ に関して ($+$ に関しても) 双線型であるから、その像として定まる合成射 $X \to 0 \to Y$ は $+_1$ に関する (同様に、$+$ に関する) 単位元である。よって 0 は $+_1$ に関する単位元である。自然な同型と加法

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y \times Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \xrightarrow{+} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$$

により射 $m : Y \times Y \to Y$ を得る。二つの射 $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ に対して、$(f,g) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y \times Y)$ と m を合成すると、m の定義により $m \circ (f,g) = f + g$ である。一方、m を合成する射 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y \times Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ は、$+_1$ の定義により $+_1$ と可換する。0 が $+_1$ の単位元であることから、$(f,g) = (f,0) +_1 (0,g)$ であるので、従って、

$$f + g = m \circ (f,g) = m \circ [(f,0) +_1 (0,g)] = m \circ (f,0) +_1 m \circ (0,g) = f +_1 g$$

がわかる。以上で問題 I.1 の証明を完了する。 □

問題 I.2. $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ を二つの圏、$F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}', G : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ を二つの函手とする。

(1) 次の二つの条件は同値であることを示せ：
  (i) 函手の射 $\alpha : F \circ G \to \mathrm{id}_{\mathcal{C}'}, \beta : G \circ F \to \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ が存在して、任意の $X \in \mathcal{C}, Y \in \mathcal{C}'$ に対し

$$\mathrm{id}_{G(Y)} = G(\alpha_Y) \circ \beta_{G(Y)} \ , \ \mathrm{id}_{F(X)} = \alpha_{F(X)} \circ F(\beta_X)$$

  となる。
  (ii) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(-), ?), \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, G(?))$ は函手 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C}' \to \mathsf{Set}$ として同型である。

(2) 任意の函手 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ に対して、F の左 (または右) 随伴は、存在すれば、どの二つも函手として同型となる。

(3) 任意の函手 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ に対して、F の左 (または右) 随伴が存在するための必要十分条件は、任意の対象 $Y \in \mathcal{C}'$ に対して函手 $X \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(X), Y)$ (または $X \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(Y, F(X))$) が表現可能であることである。

証明. (1) を示す。(i) を仮定する。$F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ は函手なので、$\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C}$ から Set への二つの函手の間の射 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, ?) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(-), F(?))$ を引き起こす。これを $\bar{F}$ と書く。同じく $\bar{G}$ を定義する。函手の射

$$P : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(-), ?) \xrightarrow{\bar{G}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(G(F(-)), G(?)) \xrightarrow{(??) \circ \beta_{(-)}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, G(?))$$

$$Q : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, G(?)) \xrightarrow{\bar{F}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(-), F(G(?))) \xrightarrow{\alpha_{(?)} \circ (??)} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(-), ?)$$

を合成で定義する。すると、各対象 $(X, Y) \in \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C}'$ と $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(X), Y), g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y))$ に

対し、

$$
\begin{aligned}
Q_{(X,Y)}(P_{(X,Y)}(f)) &= \alpha_Y \circ F(G(f)\circ \beta_X)) \\
&= \alpha_Y \circ F(G(f)) \circ F(\beta_X) \\
&\overset{\bigstar}{=} f \circ \alpha_{F(X)} \circ F(\beta_X) \\
&\overset{*}{=} f \circ \mathrm{id}_{F(X)} \ = f,
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
P_{(X,Y)}(Q_{(X,Y)}(g)) &= G(\alpha_Y \circ F(g)) \circ \beta_X \\
&= G(\alpha_Y) \circ G(F(g)) \circ \beta_X \\
&\overset{\bigstar}{=} G(\alpha_Y) \circ \beta_{G(Y)} \circ g \\
&\overset{*}{=} \mathrm{id}_{G(Y)} \circ g \ = g
\end{aligned}
$$

となる。ただし、$\bigstar$ の箇所で α, β が自然変換であることを用い、$*$ の箇所で (i) で仮定されている条件を用いた。以上より P, Q は函手の同型射である。よって (ii) が示された。

逆に (ii) を仮定する。$P : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(-), ?) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, G(?))$ を函手の同型射として、$Q :\overset{\mathrm{def}}{=} P^{-1}$ と置く。P が函手の射であることは、各射 $[f : F(X) \to Y], [f' : F(X') \to Y] \in \mathcal{C}', [g : Y \to Y'] \in \mathcal{C}', [h : X \to X'] \in \mathcal{C}$ に対して $P_{(X,Y')}(g \circ f) = G(g) \circ P_{(X,Y)}(f), P_{(X',Y)}(f') \circ h = P_{(X,Y)}(f' \circ F(h))$ となることを意味する (以下の図式が可換である)：

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(X'), Y) \arrow[r, "(-)\circ F(h)"] \arrow[d, "P_{(X',Y)}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(X), Y) \arrow[r, "g\circ(-)"] \arrow[d, "P_{(X,Y)}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(X), Y') \arrow[d, "P_{(X,Y')}"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(X', G(Y)) \arrow[r, "(-)\circ h"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y)) \arrow[r, "G(g)\circ(-)"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y')).
\end{tikzcd}
$$

Q についても同様の等式が成立する (上の図式で縦向きの射が逆になったものが Q の場合)。次のように自然変換を定義する：

$$
\begin{aligned}
\alpha_{(?)} &:\overset{\mathrm{def}}{=} Q_{(G(?),?)}(\mathrm{id}_{G(?)}) : F(G(?)) \to (?), \\
\beta_{(-)} &:\overset{\mathrm{def}}{=} P_{(-,F(-))}(\mathrm{id}_{F(-)}) : (-) \to G(F(-)).
\end{aligned}
$$

すると各 $(X, Y) \in \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C}'$ に対して

$$
\begin{aligned}
\alpha_{F(X)} \circ F(\beta_X) &= Q_{(G(F(X)),F(X))}(\mathrm{id}_{G(F(X))}) \circ F(\beta_X) \\
&\overset{\bigstar_l}{=} Q_{(X,F(X))}(\mathrm{id}_{F(X)}) \circ \beta_X \\
&= Q_{(X,F(X))}(P_{(X,F(X))}(\mathrm{id}_{F(X)})) \ = \mathrm{id}_{F(X)} \\
G(\alpha_Y) \circ \beta_{G(Y)} &= G(\alpha_Y) \circ P_{(G(Y),F(G(Y)))}(\mathrm{id}_{F(G(Y))}) \\
&\overset{\bigstar_r}{=} P_{(G(Y),Y)}(\alpha_Y \circ \mathrm{id}_{F(G(Y))}) \\
&= P_{(G(Y),Y)}(Q_{(G(Y),Y)}(\mathrm{id}_{G(Y)})) \ = \mathrm{id}_{G(Y)}
\end{aligned}
$$

となる。ただし $\bigstar_l, \bigstar_r$ の箇所で上の図式の可換性を用いた (l は左、r は右側の四角形の可換性を用いている)。以上で (1) の証明を完了する。

(2) を示す。G, G' がどちらも F の右随伴であれば、(1) における函手の自然同型を用いて

$$
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, G(?)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(-), ?) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, G'(?))
$$

となるので、米田の補題によって $G \cong G'$ がわかる。左随伴についても同様である。

(3) を示す。各 $Y \in \mathcal{C}'$ について $X \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(X), Y)$ が表現可能であるとし、その表現対象を $G(Y)$ と置く。すると X について自然な同型 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(X), Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y))$ を得る。$g : Y \to Y'$ を任意の $\mathcal{C}'$ の射とする。すると g を合成することによって函手の射 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(-), Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(-), Y')$ を得る。

よって米田の補題によって一意的に射 $G(Y) \to G(Y')$ を得る。この射を $G(g)$ と書く。すると G は函手であり、X について自然な同型 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(X), Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y))$ は構成から Y についても自然である。これによって F の右随伴 G を得る。左随伴に関しても同様である。以上で問題 I.2 の解答を完了する。 □

問題 I.3. $\mathcal{C}$ を各 Hom がアーベル群の構造を持ち、0 対象を持ち、さらに任意の二つの対象に対する積を持つ圏とする (cf. [Definition 1.2.1 (i),(ii),(iii), KS02])。このとき、$Z \in \mathcal{C}$ が函手 $W \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, W) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, W)$ の表現対象であるための必要十分条件は、射 $i_1 : X \to Z, i_2 : Y \to Z, p_1 : Z \to X, p_2 : Z \to Y$ が存在し、

$$p_2 \circ i_1 = 0,\ p_1 \circ i_2 = 0,\ p_1 \circ i_1 = \mathrm{id}_X,\ p_2 \circ i_2 = \mathrm{id}_Y,\ i_1 \circ p_1 + i_2 \circ p_2 = \mathrm{id}_Z$$

となることである。

証明. 必要性を示す。$Z \in \mathcal{C}$ が函手 $W \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, W) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, W)$ の表現対象であると仮定する。自然な全単射 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, Z) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ による id_Z の送り先を (i_1, i_2) とする。自然な全単射 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ により $(\mathrm{id}_X, 0)$ へと写る射を $p_1 : Z \to X$ とし、自然な全単射 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Y)$ により $(0, \mathrm{id}_Y)$ へと写る射を $p_2 : Z \to Y$ とする。このとき、i_1, i_2, p_1, p_2 の定義より、

$$p_1 \circ i_1 = \mathrm{id}_X,\ p_1 \circ i_2 = 0,\ p_2 \circ i_1 = 0,\ p_2 \circ i_2 = \mathrm{id}_Y$$

であることがわかる。また、

$$\begin{aligned}(i_1 \circ p_1 + i_2 \circ p_2) \circ i_1 &= i_1 \circ p_1 \circ i_1 + i_2 \circ p_2 \circ i_1 = i_1 + 0 = i_1, \\ (i_1 \circ p_1 + i_2 \circ p_2) \circ i_2 &= i_1 \circ p_1 \circ i_2 + i_2 \circ p_2 \circ i_2 = 0 + i_2 = i_2\end{aligned}$$

であるが、このような性質を満たす射 $Z \to Z$ は Z の普遍性によって id_Z に限られる。従って $i_1 \circ p_1 + i_2 \circ p_2 = \mathrm{id}_Z$ もわかる。以上で必要性の証明を完了する。

十分性を示す。問いの条件を満たす射 i_1, i_2, p_1, p_2 が存在すると仮定する。i_1, i_2, p_1, p_2 を合成することにより、W について自然な射

$$\begin{aligned}&\varphi : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, W) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, W) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, W), && \varphi(f, g) :\overset{\mathrm{def}}{=} f \circ p_1 + g \circ p_2, \\ &\psi : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, W) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, W) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, W), && \psi(h) :\overset{\mathrm{def}}{=} (h \circ i_1, h \circ i_2)\end{aligned}$$

を得る。各 $f : X \to W, g : Y \to W, h : Z \to W$ について

$$\begin{aligned}\varphi(\psi(h)) &= \varphi(h \circ i_1, h \circ i_2) = h \circ i_1 \circ p_1 + h \circ i_2 \circ p_2 = h \circ (i_1 \circ p_1 + i_2 \circ p_2) = h \circ \mathrm{id}_Z = h \\ \psi(\varphi(f, g)) &= \psi(f \circ p_1 + g \circ p_2) = ((f \circ p_1 + g \circ p_2) \circ i_1, (f \circ p_1 + g \circ p_2) \circ i_2) \\ &= (f \circ p_1 \circ i_1 + g \circ p_2 \circ i_1, f \circ p_1 \circ i_2 + g \circ p_2 \circ i_2) = (f, g)\end{aligned}$$

となるので、φ, ψ は全単射である。これは Z が所望の表現対象であることを示している。以上で問題 I.3 の解答を完了する。 □

問題 I.4. $\mathcal{C}$ を加法圏、$X \to i_1 Z \to p_2 Y$ を射の列で、$p_2 \circ i_1 = 0$ を満たすとする。このとき、以下の条件が同値であることを示せ：

(1) 任意の対象 $W \in \mathcal{C}$ に対して次の列は完全である：

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W, X) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W, Z) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W, Y) \to 0.$$

(2) 任意の対象 $W \in \mathcal{C}$ に対して次の列は完全である：

$$0 \leftarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, W) \leftarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, W) \leftarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, W) \leftarrow 0.$$

(3) 射 $i_2 : Y \to Z$ と $p_1 : Z \to X$ が存在して、問題 I.3 の条件を満たす。

これらの条件が満たされるとき、

$$0 \to X \to i_1 Z \to p_2 Y \to 0$$

は**分裂する**と言い、X は Z の直和因子であると言う。

(†) $\mathcal{C}$ がアーベル圏または三角圏であるとする。$i_1 : X \to Z, p_1 : Z \to X$ が $p_1 \circ i_1 = \mathrm{id}_X$ を満たすとき、X は Z の直和因子となることを示せ。

証明. はじめに (1), (2), (3) が同値であることを確認する。(1) を仮定して (3) を証明する。$W = Y$ とすることで、(1) で仮定されている完全性 (のうちの右側の全射性) より、$p_2 \circ i_2 = \mathrm{id}_Y$ となる射 $i_2 : Y \to Z$ が存在することがわかる。$W = Z$ とすれば、$p_2 \circ (\mathrm{id}_Z - i_2 \circ p_2) = p_2 - p_2 = 0$ であることと、(1) で仮定されている完全性 (のうちの真ん中の完全性) より、$i_1 \circ p_1 = \mathrm{id}_Z - i_2 \circ p_2$ となる射 $p_1 : Z \to X$ が存在することがわかる。$W = X$ として $p_1 \circ i_1 : X \to X$ の行き先を見ると、それは

$$i_1 \circ p_1 \circ i_1 = i_1 - i_2 \circ p_2 \circ i_1 = i_1 = i_1 \circ \mathrm{id}_X$$

であるので、(1) で仮定されている完全性 (のうちの左側の単射性) より、$p_1 \circ i_1 = \mathrm{id}_X$ であることがわかる。$W = Y$ として $p_2 \circ i_1 : Y \to X$ の行き先を見ると、それは $i_1 \circ p_2 \circ i_1 = 0$ であるので、(1) で仮定されている完全性 (のうちの左側の単射性) より、$p_2 \circ i_1 = 0$ であることがわかる。以上で (1) から (3) が帰結することがわかった。

(2) を仮定すれば $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ において $Y \xrightarrow{p_2} Z \xrightarrow{i_1} X$ は条件 (1) を満たすので、すでに証明したことにより $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ においての条件 (3) が帰結するが、それは $\mathcal{C}$ においての条件 (3) を意味している。以上で (2) から (3) が帰結することがわかった。

(3) を仮定すると、$p_1 : Z \to X$ と $i_2 : Y \to Z$ を用いて各 W について函手的な直和分解

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W, Z) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W, X) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W, Y)$$

を得るので、これはどんな W についても (1) の列が分裂完全列であることを意味し、$\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ で考えることによって (2) の列が分裂完全列であることもわかる。以上で (1), (2), (3) が同値であることが示された。

$\mathcal{C}$ がアーベル圏であるときに (†) を証明する。任意の W に対して

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathrm{coker}(i_1), W) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, W) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, W)$$

は完全となるが、$p_1 \circ i_1$ であるから、i_1 を合成する射 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, W) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, W)$ は一番右の射の分裂を与え、これによって条件 (2) が満たされる。以上で $\mathcal{C}$ がアーベル圏である場合は証明された。

$\mathcal{C}$ が三角圏である場合に (†) を証明する。$i_1 : X \to Z$ を完全三角 $X \xrightarrow{i_1} Z \xrightarrow{p_2} Y \to X[1]$ に延長すると、任意の W について長い完全列

$$\begin{array}{cccccc} \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W, X) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W, Z) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W, Y) \\ \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W, X[1]) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W, X[1]) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

を得る ($\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W,-)$ はコホモロジー函手である：[Proposition 1.5.3 (ii), KS02])。$p_1 : Z \to X$ を (シフトしてから) 合成することで、$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W, X[i]) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W, Z[i])$ の単射性を得る。ここで上の長い列の完全性によって、$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W, Z) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W, Y)$ の全射性が従う。これによって条件 (1) が満たされる。以上で $\mathcal{C}$ が三角圏である場合も証明された。以上で問題 I.4 の解答を完了する。 □

問題 I.5. $\mathcal{C}$ をアーベル圏、$0 \to X \to Z \to Y \to 0$ を完全列とする。X が入射的、または Y が射影的であれば、この完全列は分裂する。

証明. id_X を延長するか、id_Y を持ち上げるか、をすれば良いだけ (本文の [Definition 1.2.8, KS02] の直後の主張を用いる)。 □

問題 I.6. $\mathcal{C}$ をアーベル圏とする。

(1) $f : X \to Z, g : Y \to Z$ を射とする。このとき、$\ker(X \oplus Y \to Z)$ は函手

$$W \mapsto \mathrm{Hom}(W, X) \times_{\mathrm{Hom}(W,Z)} \mathrm{Hom}(W, Y)$$

の表現対象であることを示せ。この対象を $X \times_Z Y$ と表す。
同様に、二つの射 $f : Z \to X, g : Z \to Y$ が与えられているとき、$\mathrm{coker}(Z \to X \oplus Y)$ は函手

$$W \mapsto \mathrm{Hom}(X, W) \times_{\mathrm{Hom}(Z,W)} \mathrm{Hom}(Y, W)$$

の表現対象であることを示せ。この対象を $X \coprod_Z Y$ と表す。

(2) (1) の状況下で、$f' : X \times_Z Y \to Y, g' : X \times_Z Y \to X$ を射影とするとき、自然な射 $\ker(f') \to \ker(f), \ker(g') \to \ker(g)$ が存在してそれぞれ同型であることを示せ。

(3)

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{f'} & Y' \\ {\scriptstyle g'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

を可換図式とする。このとき、以下の条件は同値であることを示せ：

(i) 自然な射 $X' \to X' \times_Y Y'$ はエピである。

(ii) $X \coprod_{X'} Y' \to Y$ はモノである。

(iii) 次はすべて完全である：

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \ker(f') \times_{X'} \ker(g') & \longrightarrow & \ker(g') & \longrightarrow & \ker(g) & \longrightarrow & 0, \\ 0 & \longrightarrow & \ker(f') \times_{X'} \ker(g') & \longrightarrow & \ker(f') & \longrightarrow & \ker(f) & \longrightarrow & 0, \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{coker}(f') & \longrightarrow & \mathrm{coker}(f) & \longrightarrow & \mathrm{coker}(f) \coprod_Y \mathrm{coker}(g) & \longrightarrow & 0, \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{coker}(g') & \longrightarrow & \mathrm{coker}(g) & \longrightarrow & \mathrm{coker}(f) \coprod_Y \mathrm{coker}(g) & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

(4) $f : X \to Y$ を $\mathsf{Ch}(\mathcal{C})$ の射とする。各 n について、可換図式

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{coker}(d_X^{n-1}) & \longrightarrow & X^{n+1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{coker}(d_Y^{n-1}) & \longrightarrow & Y^{n+1} \end{array}$$

が (3) の同値な条件を満たすとする。このとき f は擬同型であることを示せ。

証明. (1) は自明である。

(2) を f 側のみ示す。核の普遍性から自然な射 $\ker(f') \to \ker(f)$ が存在する。これが同型であることを示せば良い。まず $\mathcal{C}$ がアーベル群の圏である場合に自然な射 $\ker(f') \to \ker(f)$ が同型射であることを示す。$(x,y) \in X \times_Z Y$ が $f'(x,y) = 0$ を満たし、さらに $\ker(f)$ での像（これは x に等しい）が 0 であれば、$0 = f'(x,y) = y$ であるから $(x,y) = (0,0)$ がわかり、従って $\ker(f') \to \ker(f)$ は単射である。任意の $x \in \ker(f)$ に対して $(x,0) \in X \times Y$ は $X \times_Z Y$ に属しているので、$\ker(f') \to \ker(f)$ は全射である。以上より $\mathcal{C}$ がアーベル群の圏である場合には主張が示された。

一般のアーベル圏 $\mathcal{C}$ の場合に $\ker(f') \to \ker(f)$ が同型射であることを証明をする。W を任意にとり、$f_W : \mathrm{Hom}(W,X) \to \mathrm{Hom}(W,Z), f'_W : \mathrm{Hom}(W, X \times_Z Y) \to \mathrm{Hom}(W,Y)$ を f, f' を合成することにより得られる射とする。このとき $\mathrm{Hom}(W, X \times_Z Y) \cong \mathrm{Hom}(W,X) \times_{\mathrm{Hom}(W,Z)} \mathrm{Hom}(W,Y)$ であるから、$\mathcal{C}$ がアーベル群の場合の結果より、自然な射 $\ker(f'_W) \to \ker(f_W)$ は同型射である。従って、米田の補題により、$\ker(f') \to \ker(f)$ も同型射である。以上で一般のアーベル圏の場合も証明ができた。

(3) を証明する。まず (ii) を仮定して (i) を証明する。$Z :\overset{\mathrm{def}}{=} X \coprod_{X'} Y$ とおく。射 $Z \to Y \overset{g}{\leftarrow} Y'$ があるので、$Z' :\overset{\mathrm{def}}{=} Z \times_Y Y'$ ができる。このとき、pull-back の普遍性により、$Z' \times_Z X \cong X \times_Y Y'$ となる：

$$\begin{array}{ccccc} Z' \times_Z X & \longrightarrow & Z' & \longrightarrow & Y' \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & Y. \end{array}$$

上の可換図式の左側に (2) を用いることで、$\ker(Z' \to Y') \cong \ker(Z \to Y)$ であることがわかる。仮定より $\ker(Z \to Y) = 0$ であるから、$Z' \to Y'$ はモノ射である。$Z :\overset{\mathrm{def}}{=} X \coprod_{X'} Y'$ であるから、射 $Y' \to Z$ があり、これによって $Z' \to Y'$ のレトラクト $Y' \to Z'$ を得る (合成 $Y' \to Z' \to Y'$ は id)。$Z' \to Y'$ がモノ射であることから、レトラクトの存在より、$Z' \to Y'$ は同型射でなければならない。よって、射 $X' \to X \times_Y Y'$ がエピであることを示すためには、$X' \to X \times_Z Y'$ がエピであることを示すことが十分である。しかし、構成より、

$$X \times_Z Y \cong \ker(X \oplus Y \to Z) \cong \ker(X \oplus Y \to \mathrm{coker}(X' \to X \oplus Y)) \cong \mathrm{Im}(X' \to X \oplus Y)$$

となる。これは $X' \to X \oplus_Z Y$ がエピであることを示している。以上で (ii)⇒(i) が証明された。$\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ で考えることにより、(i)⇒(ii) がわかる。以上で (i)⇔(ii) がわかった。

(i) と (ii) を仮定して (iii) を証明する。$\varphi : X' \to X \times_Y Y'$ と置く。任意に射 $h : W \to X'$ をとる。$X \times_Y Y'$ の定義より、

$$\begin{aligned} & \varphi \circ h = 0. \\ \Leftrightarrow\ & f' \circ h = 0 \text{ かつ } g' \circ h = 0. \\ \Leftrightarrow\ & h \text{ は } \ker(f') \text{ と } \ker(g') \text{ の両方を経由する。} \\ \Leftrightarrow\ & h \text{ は } \ker(f') \times_{X'} \ker(g') \text{ を経由する。} \end{aligned}$$

となる。従って自然に $\ker(\varphi) \cong \ker(f') \times_{X'} \ker(g')$ となる。$\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ で考えることで、自然に $\mathrm{coker}(X \coprod_{X'} Y' \to Y) \cong \mathrm{coker}(f) \coprod_Y \mathrm{coker}(g)$ となることがわかる。

図式

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{\varphi} & X \times_Y Y' \\ {\scriptstyle g'}\downarrow & & \downarrow \\ X & = & X \end{array}$$

について考える。(2) を用いることで、$\ker(X \times_Y Y' \to X) \cong \ker(g)$ であることがわかる。二重に添字付けられた図式の極限が交換することにより、ker が交換して、

$$\ker(f') \times_{X'} \ker(g') \cong \ker(\varphi) \cong \ker(\ker(\varphi) \to 0) \cong \ker(\ker(g') \to \ker(g))$$

がわかる。f 側でも同じことをすることによって、

$$0 \longrightarrow \ker(f') \times_{X'} \ker(g') \longrightarrow \ker(g') \longrightarrow \ker(g),$$
$$0 \longrightarrow \ker(f') \times_{X'} \ker(g') \longrightarrow \ker(f') \longrightarrow \ker(f),$$

が完全であることがわかった。$\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ で考えることで、

$$\mathrm{coker}(f') \longrightarrow \mathrm{coker}(f) \longrightarrow \mathrm{coker}(f) \textstyle\coprod_Y \mathrm{coker}(g) \longrightarrow 0,$$
$$\mathrm{coker}(g') \longrightarrow \mathrm{coker}(g) \longrightarrow \mathrm{coker}(f) \textstyle\coprod_Y \mathrm{coker}(g) \longrightarrow 0,$$

が完全であることがわかる (ここまで (i) と (ii) を使っていない)。

$\ker(g') \to \ker(g)$ がエピであることを証明すれば、g と f を入れ替えることによって $\ker(f') \to \ker(f)$ がエピであることがわかり、$\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ で考えることで coker の方のモノ性も従う。なので $\ker(g') \to \ker(g)$ がエピであることを示すことが残っていることである。(2) より $\ker(g) \cong \ker(X \times_Y Y' \to X)$ であるから、$\ker(g') \to \ker(g)$ がエピであることを示すためには、可換図式

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r] \arrow[d, "g'"'] & X \times_Y Y' \arrow[d] \\
X \arrow[r, equal] & X
\end{tikzcd}$$

で $\ker(g') \to \ker(X \times_Y Y' \to X)$ が $\ker(g') \to \ker(g)$ がエピであることを示すことが十分である。よって $Y = X, f = \mathrm{id}_X$ であり、f' はエピであると仮定しても一般性を失わない。また、$\mathrm{Im}(g)$ をとっても ker は変わらないので、g もエピであると仮定しても一般性を失わない。このとき X' の部分対象として $\ker(f') \subset \ker(g')$ であるので、$X', \ker(g')$ を $\ker(f')$ で割ることによって、完全列の間の射

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \ker(g')/\ker(f') \arrow[r] \arrow[d] & X'/\ker(f') \arrow[r, "g'"] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \ker(g) \arrow[r] & Y' \arrow[r] & X \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

を得る。ここで真ん中の射 $X'/\ker(f') \to Y'$ は f' がエピであることによってエピ射である。従って縦向き真ん中の射と縦向き右端の射が同型であることがわかった。射の圏において同型な二つの射の核は当然同型であるから、縦向き左端の射が同型であることがわかる。これは $\ker(g') \to \ker(g)$ がエピであることを意味する。以上で (i) と (ii) を仮定することで (iii) が従うことがわかった。

(iii) を仮定して (i) を示す部分が残っている。(iii) を仮定する。$\ker(f') \times_{X'} \ker(g') \cong \ker(\varphi : X' \to X \times_Y Y')$ となることはすでに示している。$\ker(\varphi : X' \to X \times_Y Y')$ で X' を割ることで、$\ker(f') \times_{X'} \ker(g') = 0$ であると仮定しても一般性を失わない。$p : X \times_Y Y' \to Y'$ を自然な射影とする。可換図式

$$\begin{tikzcd}
X \times_Y Y' \arrow[r, "p"] \arrow[d] & Y' \arrow[d, "g"] \\
X \arrow[r, "f"] & Y
\end{tikzcd}$$

にすでに示した「(i)⇒(iii)」を適用することで、自然な射 $\mathrm{coker}(p) \to \mathrm{coker}(f)$ はモノ射であることがわかる。また、図式

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\varphi"'] & Y' \arrow[d, equal] \\ X \times_Y Y' \arrow[r, "p"] & Y' \end{tikzcd}$$

が可換であることから、

$$\mathrm{coker}(\mathrm{coker}(f') \to \mathrm{coker}(p)) \cong \mathrm{coker}(\mathrm{coker}(\varphi) \to \mathrm{coker}(\mathrm{id}_{Y'})) = 0$$

となるので、$\mathrm{coker}(f') \to \mathrm{coker}(p)$ はエピである。今 (iii) を仮定しているので、合成 $\mathrm{coker}(f') \to \mathrm{coker}(p) \to \mathrm{coker}(f)$ はモノ射であり、従ってとくに $\mathrm{coker}(f') \to \mathrm{coker}(p)$ もモノ射である。このことは、$\mathrm{coker}(f') \to \mathrm{coker}(p)$ が同型射であることを意味する。従って図式

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{coker}(f') \arrow[d, "\cong"] \\ Y' \arrow[r] & \mathrm{coker}(p) \end{tikzcd}$$

は Cartesian であり、(2) を適用することで、自然な射

$$\mathrm{Im}(f') = \ker(Y' \to \mathrm{coker}(f')) \xrightarrow{\sim} \ker(Y' \to \mathrm{coker}(p)) = \mathrm{Im}(p)$$

は同型射であることがわかる。(2) より、自然な射 $\ker(f) \xrightarrow{\sim} \ker(p)$ は同型であるので、以下の可換図式を得る：

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \ker(f') \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\cong"'] & X' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\varphi"'] & \mathrm{Im}(f') \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \ker(p) \arrow[r, "j"] & X \times_Y Y' \arrow[r, "p"] & \mathrm{Im}(p) \arrow[r] & 0, \end{tikzcd}$$

ただしここで横向きはすべて完全であり、$i : \ker(f') \to X', j : \ker(p) \to X \times_Y Y'$ は自然なモノ射である。$\bar{\varphi} : \mathrm{Im}(f') \xrightarrow{\sim} \mathrm{Im}(p)$ と置く。任意に射 $h : X \times_Y Y' \to Z$ を取って、$h \circ \varphi = 0$ であると仮定する。φ がエピであることを示すには、$h = 0$ を証明することが十分である。このとき $h \circ \varphi \circ i = 0$ であることと、$\ker(f') \cong \ker(p)$ であることと、上の図式が可換であることにより、$h \circ j = 0$ がわかる。従って $h = h' \circ p$ となる射 $h' : \mathrm{Im}(p) \to Z$ が存在する。$h' \circ \bar{\varphi} \circ f' = h' \circ p \circ \varphi = h \circ \varphi = 0$ であることと、f' がエピであることから、$h' \circ \bar{\varphi} = 0$ であるが、$\bar{\varphi}$ は同型射であるので、$h' = 0$ がわかる。以上より $h = h' \circ p = 0$ である。以上で (3) の証明を完了する。

(4) を示す。まず $\mathrm{coker}(d_X^{n-1}) \cong X^n / \mathrm{Im}(d_X^{n-1})$ であることから $H^n(X) \cong \ker(\mathrm{coker}(d_X^{n-1}) \to X^{n+1})$ である。可換図式

$$\begin{tikzcd} \mathrm{coker}(d_X^{n-1}) \arrow[r] \arrow[d] & X^{n+1} \arrow[d, "f^{n+1}"] \\ \mathrm{coker}(d_Y^{n-1}) \arrow[r] & Y^{n+1} \end{tikzcd}$$

に (3) (iii) を使うことで、$H^n(f) : H^n(X) \to H^n(Y)$ は各 n でエピであることがわかる。また、$\mathrm{coker}(\mathrm{coker}(d_X^{n-1}) \to X^{n+1}) \cong \mathrm{coker}(d_X^n)$ であるから、上の可換図式に再び (3) (iii) を使うことで、

$\mathrm{coker}(d_X^n) \to \mathrm{coker}(d_Y^n)$ は各 n でモノであることがわかる。特に $\mathrm{coker}(d_X^{n-1}) \to \mathrm{coker}(d_Y^{n-1})$ もモノであり、従って上の可換図式に再び (3) (iii) を使うと

$$\ker(H^n(f)) \cong \ker(\ker(\mathrm{coker}(d_X^{n-1}) \to \mathrm{coker}(d_Y^{n-1})) \to \ker(f^{n+1})) = 0$$

がわかる。以上より $H^n(f)$ は各 n でモノ射である。$H^n(f)$ はエピだったので、$H^n(f)$ は同型射となる。このことは f が擬同型であることを意味する。以上で問題 I.6 の証明を完了する。 □

問題 I.7. $\mathcal{C}$ をアーベル圏とする。

(1) $Z \in \mathcal{C}$ を対象とする。圏 $\mathcal{P}(Z)$ を次で定義する：
- 対象はエピ射 $f : X \to Z$ である。
- 二つの対象 $f : X \to Z$ と $g : Y \to Z$ の間の射 $(f : X \to Z) \to (g : Y \to Z)$ は $\mathcal{C}$ のエピ射 $h : X \to Y$ であって $f \circ h = g$ となるものである。
- 合成は $\mathcal{C}$ の合成によって定義する。

このとき、$\mathcal{P}(Z)$ は cofiltered であることを示せ。

(2) 対象 $X \in \mathcal{C}$ に対し、$\tilde{h}_Z(X) :\overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{colim}_{Z' \in \mathcal{P}(Z)} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z', X)$ とおく。以下を示せ：
  (i) 函手 $\tilde{h}_Z : \mathcal{C} \to \mathsf{Ab}$ は完全函手である。
  (ii) $f, f' \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X')$ を二つの射とする。任意の $Z \in \mathcal{C}$ に対して $\tilde{h}_Z(f) = \tilde{h}_Z(f')$ が成り立つとき、$f = f'$ である。
  (iii) すべての対象 $Z \in \mathcal{C}$ に対する $\tilde{h}_Z$ での像が Ab において完全であるような $\mathcal{C}$ の列は完全である。

注意. [, KS02] 第一版では、(1) の問題文は次のように表記されている (引用)：

For an object Z of $\mathcal{C}$, let $\mathscr{P}(Z)$ be the category whose objects are the epimorphisms $f : Z' \to Z$, a morphism $(f : Z' \to Z) \to (f' : Z'' \to Z)$ being defined by $h : Z' \to Z''$ with $f' \circ h = f$. Prove that $\mathscr{P}(Z)$ is cofiltrant, that is, $\mathscr{P}(Z)^\circ$ is filtrant.

この文章をそのまま読むと、圏 $\mathscr{P}(Z)$ は、Z への射がエピとなるものたちからなる圏 $\mathcal{C}_{/Z}$ の充満部分圏であると読める (というか、この文章は h もエピであることが想定されているようには読めないと思う)。しかし、このように読むと、$\mathscr{P}(Z)$ は cofiltered にはならない。たとえば、k を標数が 2 でない体、$\mathcal{C}$ を k-線形空間の圏、$Z = k$ として、$\mathcal{C}_{/k}$ の対象として $p :\overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{id}_k : X :\overset{\mathrm{def}}{=} k \to Z$ と $q :\overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{pr}_1 : Y :\overset{\mathrm{def}}{=} k \times k \to Z$ を考え、p, q の間の射として $f_1 : X \to Y$ を $f_1(a) = (a, a)$ で定め、$f_2 : X \to Y$ を $f_2(a) = (a, -a)$ で定める。このとき、線形空間 V と射 $g : V \to X$ が $f_1 \circ g = f_2 \circ g$ を満たせば、g が 0-射であることが容易に従う (標数が 2 でないことを用いる)。従って、とくに、g はエピとはならず、従って、$g : V \to k$ は $\mathscr{P}(Z)$ の対象となることは決してない。このことは $\mathscr{P}(Z)^{\mathrm{op}}$ が [Definition 1.11.2 (1.11.2), KS02] を満たさない (とくに cofiltered ではない) ことを示している。

証明. (1) を示す。$\mathcal{P}(Z)$ の図式 $h_1 : (f_1 : X_1 \to Z) \to (g : Y \to Z) \leftarrow (f_2 : X_2 \to Z) : h_2$ を任意にとって、fiber 積 $X_1 \times_Y X_2$ を考える。$p_i : X_1 \times_Y X_2 \to X_i, (i = 1, 2)$ を射影とする。このとき、$f_1 \circ p_1 = g \circ h_1 \circ p_1 = g \circ h_2 \circ p_2 = f_2 \circ p_2$ であるから、$f :\overset{\mathrm{def}}{=} f_1 \circ p_1$ とすれば、$f : X_1 \times_Y X_2 \to Z$ は圏 $\mathcal{C}_{/Z}$ における fiber 積となる。$\mathcal{P}(Z)$ は終対象 $\mathrm{id}_Z : Z \to Z$ を持つので、従って、$\mathcal{P}(Z)$ が cofiltered であることを示すためには、$f : X_1 \times_Y X_2 \to Z$ がエピ射であることを示すことが十分である。問題 I.6 (3) より、エピ射の pull-back はエピ射であるから、p_i はエピ射であり、エピ射の合成はエピ射であるから、$f = f_1 \circ p_1$ もエピ射である。以上で (1) の解答を完了する。

(2) (i) を示す。集合の間の写像の圏において、単射の filered colimit は単射である。従って $\tilde{h}_Z$ は左完全函手である。残っているのは $\tilde{h}_Z$ の右完全性を証明することである。$g : X_1 \to X_3$ を $\mathcal{C}$ のエピ射とし、$\tilde{r}_3 \in \tilde{h}_Z(X_3)$ を任意にとる。$\tilde{r}_3$ の代表元を $r_3 : Z_3 \to X_3$ とする。ここで Z_3 はある $\mathcal{P}(Z)$ の対象 $z_3 : Z_3 \to Z$ の domain であり、$r_3 : Z_3 \to X_3$ は $\mathcal{C}$ の射である。図式 $r_3 : Z_3 \to X_3 \leftarrow X_1 : g$ の fiber 積を Z_1 とし、射影を $h : Z_1 \to Z_3, r_1 : Z_1 \to X_1$ とする。エピ射の pull-back はエピ射であるから、h はエピである。従って、$z_1 \overset{\text{def}}{:=} z_3 \circ h : Z_1 \to Z$ は $\mathcal{P}(Z)$ の対象であり、h は $\mathcal{P}(Z)$ の射である。さらに、$g \circ r_1 = r_3 \circ h$ であるから、$r_1 : Z_1 \to X_1$ により代表される元 $\tilde{r}_1 \in \tilde{h}_Z(X_1)$ は射 $\tilde{h}_Z(X_1) \to \tilde{h}_Z(X_3)$ により $\tilde{r}_3$ へと写る。従って $\tilde{h}_Z(X_1) \to \tilde{h}_Z(X_3)$ は全射である。以上で (2) (i) の解答を完了する。

(2) (ii) を示す。$f, f' : X \to X'$ が任意の $Z \in \mathcal{C}$ に対して $\tilde{h}_Z(f) = \tilde{h}_Z(f')$ を満たしていると仮定する。$Z = X$ として、$\mathrm{id}_X : X \to X$ により代表される元を $\tilde{i} \in \tilde{h}_Z(X)$、$f, f' : X \to X'$ により代表される元を $\tilde{f}, \tilde{f}' \in \tilde{h}_Z(X')$ とする。このとき、

$$\tilde{f} = \tilde{h}_Z(f) \circ \tilde{i} = \tilde{h}_Z(f') \circ \tilde{i} = \tilde{f}'$$

となる。$\mathcal{P}(Z)$ の各射はエピなので、自然な射 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X) \to \tilde{h}_Z(X)$ は単射である。従って、等式 $\tilde{f} = \tilde{f}'$ は $f = f'$ であることを意味する。以上で (2) (ii) の解答を完了する。

(2) (iii) を示す。$\mathcal{C}$ を離散圏 (射が id しかない圏) とみなした圏を $\bar{\mathcal{C}}$ とおく。$\bar{\mathcal{C}}$ から Ab への (加法的とは限らない) 函手のなす圏 $[\bar{\mathcal{C}}, \mathsf{Ab}]$ はアーベル圏である。$\tilde{h} : \mathcal{C} \to [\bar{\mathcal{C}}, \mathsf{Ab}], X \mapsto [Z \mapsto \tilde{h}_Z(X)]$ はアーベル圏の間の加法的函手である。(2) (i) より、各 $\tilde{h}_Z$ は完全函手であるから、$\tilde{h}$ も完全函手である。(2) (ii) より $\tilde{h}$ は忠実である。従って、(2) (iii) を示すためには、アーベル圏の間の忠実な完全函手 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ と $\mathcal{C}$ の射の列 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ に対して、$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ が $\mathcal{C}$ で完全であることと $F(X) \xrightarrow{F(f)} F(Y) \xrightarrow{F(g)} F(Z)$ が $\mathcal{D}$ で完全であることが同値であることを証明することが十分である。F は忠実なので、$g \circ f = 0$ であることと $F(g) \circ F(f) = 0$ であることは同値である。F は完全函手なので、$\mathrm{Im}(F(f))$ と $F(\mathrm{Im}(f))$ は自然に同型であり、$\ker(F(g))$ と $F(\ker(g))$ も自然に同型である。さらに F は忠実なので、自然な射 $\mathrm{Im}(f) \to \ker(g)$ が同型であることは F での像 $F(\mathrm{Im}(f)) \to F(\ker(g))$ が同型であることと同値である。よって、$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ が $\mathcal{C}$ で完全であることと $F(X) \xrightarrow{F(f)} F(Y) \xrightarrow{F(g)} F(Z)$ が $\mathcal{D}$ で完全であることは同値である。以上で問題 I.7 の証明を完了する。 □

問題 I.8 (The Five Lemma)**.** $\mathcal{C}$ をアーベル圏とする。$\mathcal{C}$ の可換図式

$$\begin{tikzcd}
X^0 \arrow[r] \arrow[d, "f_0"'] & X^1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"'] & X^2 \arrow[r] \arrow[d, "f_2"'] & X^3 \arrow[r] \arrow[d, "f_3"'] & X^4 \arrow[d, "f_4"'] \\
Y^0 \arrow[r] & Y^1 \arrow[r] & Y^2 \arrow[r] & Y^3 \arrow[r] & Y^4
\end{tikzcd}$$

について以下の主張を証明せよ。ただし横向きは完全であるとする。

(1) f_0 がエピであり、f_1, f_3 がモノであれば、f_2 はモノである。
(2) f_4 がモノであり、f_1, f_3 がエピであれば、f_2 はエピである。

証明. 問題 I.7 によって Ab での主張と見做して良く、この場合、主張は初等的である。 □

問題 I.9. $\mathcal{C}$ をアーベル圏とする。

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & Z \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & X' \arrow[r, "f'"] & Y' \arrow[r, "g'"] & Z' & \end{tikzcd}$$

を $\mathcal{C}$ の可換図式で、横向きが完全であるものとする。

(1) 自然な射 $\varphi : \ker(\gamma) \to \operatorname{coker}(\alpha)$ が存在して、以下が完全となることを示せ：

$$\ker(\alpha) \to \ker(\beta) \to \ker(\gamma) \xrightarrow{\varphi} \operatorname{coker}(\alpha) \to \operatorname{coker}(\beta) \to \operatorname{coker}(\gamma).$$

(2) 以下の図式が可換であることを示せ：

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[r, "g"] & Z \\ Y \arrow[d] & \ker(\gamma \circ g) \arrow[l] \arrow[r] \arrow[u] \arrow[d] & \ker(\gamma) \arrow[u] \arrow[d, "\varphi"] \\ Y' & X' \arrow[l, "f'"'] \arrow[r] & \operatorname{coker}(\alpha). \end{tikzcd}$$

証明. φ の構成ができれば、問題 I.7 によって (1) は $\mathcal{C} = \mathsf{Ab}$ の場合に帰着され、この場合は図式追跡によって初等的に証明できる。従って、(1) を示すためには φ を構成することが十分である。以下、φ の構成と (2) の証明を同時に行う。

核の普遍性により、以下の図式を可換にするような射 $\psi_1 : \ker(\gamma \circ g) \to \ker(\gamma)$ が一意的に存在する：

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \ker(\gamma \circ g) \arrow[r] \arrow[d, "\psi_1"'] & Y \arrow[r, "\gamma \circ g"] \arrow[d, "g"] & Z' \arrow[d, equal] \\ 0 \arrow[r] & \ker(\gamma) \arrow[r] & Y' \arrow[r, "\gamma"] & Z'. \end{tikzcd}$$

これは (2) の図式の右上の四角形の可換性を示している。また、問題 I.8 (2) より、ψ_1 はエピである。核の普遍性により、以下の図式を可換にするような射 $\psi_2 : \ker(\gamma \circ g) \to X'$ が一意的に存在する：

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \ker(\gamma \circ g) \arrow[r] \arrow[d, "\psi_2"'] & Y \arrow[r, "\gamma \circ g"] \arrow[d, "\beta"] & Z' \arrow[d, equal] \\ 0 \arrow[r] & X' \arrow[r, "f'"] & Y' \arrow[r, "g'"] & Z'. \end{tikzcd}$$

これは (2) の図式の左下の四角形の可換性を示している。自然な射 $X' \to \operatorname{coker}(\alpha)$ と ψ_2 の合成を $\psi_3 : \ker(\gamma \circ g) \to \operatorname{coker}(\alpha)$ と置く。$\ker(\psi_1) \to \ker(\gamma \circ g) \xrightarrow{\psi_3} \operatorname{coker}(\alpha)$ の合成が 0-射であることが証明できれば、ψ_1 がエピであることから、ψ_3 は ψ_1 を一意的に経由して、図式

$$\begin{tikzcd} \ker(\gamma \circ g) \arrow[r, "\psi_1"] \arrow[d, "\psi_2"'] & \ker(\gamma) \arrow[d, "\varphi"] \\ X' \arrow[r] & \operatorname{coker}(\alpha) \end{tikzcd}$$

を可換にする射 φ の存在が従う ((2) の図式の右下の四角形の可換性の証明と φ の構成が同時に終わる)。

$p : X \to \mathrm{Im}(f)$ を自然なエピ射、$j_1 : \mathrm{Im}(f) \cong \ker(g) \to Y$ を自然なモノ射とする。このとき $f = j_1 \circ p$ である。核の普遍性により引き起こされる一意的な射を $\alpha' : \mathrm{Im}(f) \cong \ker(g) \to X'$ と置く。

$$f' \circ \alpha = \beta \circ f = \beta \circ j_1 \circ p = f' \circ \alpha' \circ p$$

であることと f' がモノであることから、$\alpha = \alpha' \circ p$ となる。$q : X' \to \mathrm{coker}(\alpha)$ を自然な射とすると、$q \circ \alpha' \circ p = q \circ \alpha = 0$ となるが、p がエピであることから、$q \circ \alpha' = 0$ となる。$T \overset{\mathrm{def}}{:=} \ker(\psi_1)$ とおき、$i : T \to \ker(\gamma \circ g)$ を自然な射、$j_2 : \ker(\gamma \circ g) \to Y$ を自然なモノ射とする。$\psi_1 \circ i = 0$ であるから、$g \circ j_2 \circ i = 0$ である。よって、核の普遍性により、一意的な射 $k : T \to \mathrm{Im}(f)$ が存在して、$j_1 \circ k = j_2 \circ i$ となる。以上より、

$$f' \circ \psi_2 \circ i = \beta \circ j_2 \circ i = \beta \circ j_1 \circ k = f' \circ \alpha' \circ k$$

となる。f' はモノなので $\psi_2 \circ i = \alpha' \circ k$ となる。従って、$q \circ \psi_2 \circ i = q \circ \alpha' \circ k = 0$ となって、示すべき等式を得る。以上で問題 I.9 の証明を完了する。 □

問題 I.10. $\mathcal{C}$ をアーベル圏とする。図式

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & M_0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r] & M_0' \arrow[r] & M_1' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

において、横向きは完全であり、M_0, M_0' はそれぞれ入射的であるとする。同型射 $M_0 \oplus M_1' \xrightarrow{\sim} M_0' \oplus M_1$ を構成せよ。

証明. $N \overset{\mathrm{def}}{:=} M_0 \coprod_M M_0'$ とおいて、$j : M_0 \to N \leftarrow M_0' : j'$ を自然な射とする。i, i' はモノ射であるから、問題 I.6 (3) より、その push-out である j, j' もそれぞれモノ射である。従って、M_0 が入射的であることから、ある射 $p : N \to M_0$ が存在して $p \circ j = \mathrm{id}_{M_0}$ となり、M_0' が入射的であることから、ある射 $p' : N \to M_0'$ が存在して $p' \circ j' = \mathrm{id}_{M_0'}$ となる。図式

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r] \arrow[d] & M_0 \arrow[r] \arrow[d, "j"'] & M_1 \arrow[d] \\
M_0' \arrow[r, "j'"] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d] & X \\
M_1' \arrow[r] & Y &
\end{tikzcd}$$

に $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ で問題 I.6 (2) を適用すると、射 $M_1 \to X$ と $M_1' \to Y$ はそれぞれ同型射であることがわかる。以上より、二つの完全列

$$0 \longrightarrow M_0 \xrightarrow{j} N \longrightarrow M_1' \longrightarrow 0$$
$$0 \longrightarrow M_0' \xrightarrow{j'} N \longrightarrow M_1 \longrightarrow 0$$

を得る。j, j' は分裂モノ射であるから、問題 I.4 より、同型射 $M_0 \oplus M_1' \cong N \cong M_0' \oplus M_1$ を得る。以上で問題 I.10 の証明を完了する。 □

問題 I.11. $\mathcal{C}$ をアーベル圏、$X \in \mathsf{Ch}(\mathcal{C})$ を複体であって、任意の $Y \in \mathcal{C}$ に対してアーベル群の複体 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ が完全であるものとする。このとき X は $\mathsf{K}(\mathcal{C})$ で 0 であることを示せ。

証明. $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,-)$ は左完全函手であるから、任意の n に対して、自然に

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,\ker(d_X^n)) \xrightarrow{\sim} \ker(d_X^n\circ(-):\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X^n)\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X^{n+1}))$$

となる。$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X)$ は完全であるから、任意の n に対して、自然に

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,\mathrm{Im}(d_X^n))\cong\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,\ker(d_X^{n+1}))\cong\ker(d_X^{n+1}\circ(-))\cong\mathrm{Im}(d_X^n\circ(-))$$

となる。従って、任意の n に対して、自然な射 $\mathrm{Im}(d_X^n\circ(-))\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,\mathrm{Im}(d_X^n))$ は同型射であり、任意の n に対して、完全列

$$0\longrightarrow\ker(d_X^n)\longrightarrow X^n\longrightarrow\mathrm{Im}(d_X^n)\longrightarrow 0$$

に $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,-)$ を施した後のアーベル群の列も完全である。よって問題 I.4 より、任意の n に対して、$X^n\cong\mathrm{Im}(d_X^n)\oplus\ker(d_X^n)$ となることが従う。

X が $\mathsf{K}(\mathcal{C})$ において 0 であるためには、$\mathrm{id}_X:X\to X$ が homotopic to zero であることが十分である。$s^n:X^n\to X^{n-1}$ を、$\ker(d_X^n)\to X^n$ の分裂 $p^n:X^n\to\ker(d_X^n)$ と、同型射 $l^n:\mathrm{Im}(d_X^{n-1})\xrightarrow{\sim}\ker(d_X^n)$ の逆射と、$X^{n-1}\to\mathrm{Im}(d_X^{n-1})$ の分裂 $i^{n-1}:\mathrm{Im}(d_X^{n-1})\to X^{n-1}$ の、三つの射の合成射として $s^n\overset{\mathrm{def}}{:=}i^{n-1}\circ(l^n)^{-1}\circ p^n$ と定める。このとき、$s^{n+1}\circ d_X^n:X^n\to X^n$ は自然なエピ射 $X^n\to\mathrm{Im}(d_X^n)$ と $i^n:\mathrm{Im}(d_X^n)\to X^n$ の合成射に等しく、$d_X^{n-1}\circ s^n:X^n\to X^n$ は $p^n:X^n\to\ker(d_X^n)$ と自然なモノ射 $\ker(d_X^n)\to X^n$ の合成射に等しい。従って $\mathrm{id}_{X^n}=s^{n+1}\circ d_X^n+d_X^{n-1}\circ s^n$ となり、id_X は homotopic to zero であることがわかる。以上で問題 I.11 の解答を完了する。 □

問題 I.12. $\mathcal{C}$ を三角圏とし、

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r] \arrow[d, equal] & Z \arrow[r] \arrow[d] & X[1] \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r] & Y \arrow[r] & Z' \arrow[r] & X[1]
\end{tikzcd}$$

を $\mathcal{C}$ の可換図式で、上の列が完全三角であるものとする。このとき、以下の条件のうちの一方が成り立つとき、下の列も完全三角であることを示せ：

(1) 任意の対象 $P\in\mathcal{C}$ に対して、以下の列は完全である：

$$\mathrm{Hom}(P,X)\to\mathrm{Hom}(P,Y)\to\mathrm{Hom}(P,Z')\to\mathrm{Hom}(P,X[1]).$$

(2) 任意の対象 $Q\in\mathcal{C}$ に対して、以下の列は完全である：

$$\mathrm{Hom}(X,Q)\leftarrow\mathrm{Hom}(Y,Q)\leftarrow\mathrm{Hom}(Z',Q)\leftarrow\mathrm{Hom}(X[1],Q).$$

証明. $\mathrm{Hom}(P,-)$ と $\mathrm{Hom}(-,Q)$ はそれぞれ cohomological functor であるから、(1) を仮定すれば、射 $\mathrm{Hom}(P,Z)\to\mathrm{Hom}(P,Z')$ は同型射であることが従い、(2) を仮定すれば、射 $\mathrm{Hom}(Z',Q)\to\mathrm{Hom}(Z,Q)$ は同型射であることが従う。すると、米田の補題より、(1) と (2) のいずれかを仮定すれば、射 $Z\to Z'$ は同型射であることが従う。$\mathcal{C}$ は三角圏なので、[Proposition 1.4.4 (TR0), KS02] を満たし、従って所望の完全性を得る。 □

問題 I.13. $\mathcal{C}$ を三角圏、$X_i\to Y_i\to Z_i\to X_i[1],(i=1,2)$ を $\mathcal{C}$ の二つの三角形とする。これら二つの三角形が完全三角であるためには、三角形

$$X_1\oplus X_2\to Y_1\oplus Y_2\to Z_1\oplus Z_2\to X_1[1]\oplus X_2[1]$$

が完全三角であることが必要十分である、ということを示せ。

証明. 必要性を証明する。二つの三角形 $X_i \to Y_i \to Z_i \to X_i[1], (i = 1, 2)$ が完全三角であるとする。$M :\overset{\mathrm{def}}{=} M(X_1 \oplus X_2 \to Y_1 \oplus Y_2)$ と置く (mapping cone)。自然な射 $X_1 \oplus X_2 \to X_i$ と $Y_1 \oplus Y_2 \to Y_i$ により可換図式

$$\begin{tikzcd} X_1 \oplus X_2 \arrow[r] \arrow[d] & Y_1 \oplus Y_2 \arrow[d] \\ X_i \arrow[r] & Y_i \end{tikzcd}$$

を得る。よって、(TR4) より、ある射 $M \to Z_i$ が存在して、これらが完全三角の間の射を形成する。二つの射 $M \to Z_1, M \to Z_2$ により、射 $M \to Z_1 \oplus Z_2$ ができて、可換図式

$$\begin{tikzcd} X_1 \oplus X_2 \arrow[r] \arrow[d, equal] & Y_1 \oplus Y_2 \arrow[r] \arrow[d, equal] & M \arrow[r] \arrow[d] & X_1[1] \oplus X_2[1] \arrow[d, equal] \\ X_1 \oplus X_2 \arrow[r] & Y_1 \oplus Y_2 \arrow[r] & Z_1 \oplus Z_2 \arrow[r] & X_1[1] \oplus X_2[1] \end{tikzcd}$$

を得る。任意に $P \in \mathcal{C}$ を取って、函手 $\mathrm{Hom}(P, -)$ を適用すると、各 $\mathrm{Hom}(P, X_i) \to \mathrm{Hom}(P, Y_i) \to \mathrm{Hom}(P, Z_i) \to \mathrm{Hom}(P, X_i[1])$ は完全であるから、

$$\mathrm{Hom}(P, X_1 \oplus X_2) \to \mathrm{Hom}(P, Y_1 \oplus Y_2) \to \mathrm{Hom}(P, Z_1 \oplus Z_2) \to \mathrm{Hom}(P, X_1[1] \oplus X_2[1])$$

も完全である。よって問題 I.12 より

$$X_1 \oplus X_2 \to Y_1 \oplus Y_2 \to Z_1 \oplus Z_2 \to X_1[1] \oplus X_2[1]$$

も完全三角であることが従う。以上で必要性の証明を完了する。

十分性を証明する。

$$X_1 \oplus X_2 \to Y_1 \oplus Y_2 \to Z_1 \oplus Z_2 \to X_1[1] \oplus X_2[1]$$

が完全三角であると仮定する。$M_i :\overset{\mathrm{def}}{=} M(X_i \to Y_i)$ と置く。自然な射 $X_i \to X_1 \oplus X_2$ と $Y_i \to Y_1 \oplus Y_2$ により可換図式

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[r] \arrow[d] & Y_i \arrow[d] \\ X_1 \oplus X_2 \arrow[r] & Y_1 \oplus Y_2 \end{tikzcd}$$

を得る。よって、(TR4) より、ある射 $M_i \to Z_1 \oplus Z_2$ が存在して、これらが完全三角の間の射を形成する。自然な射 $X_1 \oplus X_2 \to X_i, Y_1 \oplus Y_2 \to Y_i, Z_1 \oplus Z_2 \to Z_i$ と合成することで、可換図式

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[r] \arrow[d, equal] & Y_i \arrow[r] \arrow[d, equal] & M_i \arrow[r] \arrow[d] & X_i[1] \arrow[d, equal] \\ X_i \arrow[r] & Y_i \arrow[r] & Z_i \arrow[r] & X_i[1] \end{tikzcd}$$

を得る。任意に $P \in \mathcal{C}$ を取って函手 $\mathrm{Hom}(P, -)$ を適用する。

$$X_1 \oplus X_2 \to Y_1 \oplus Y_2 \to Z_1 \oplus Z_2 \to X_1[1] \oplus X_2[1]$$

が完全三角であることから、

$$\mathrm{Hom}(P, X_1 \oplus X_2) \to \mathrm{Hom}(P, Y_1 \oplus Y_2) \to \mathrm{Hom}(P, Z_1 \oplus Z_2) \to \mathrm{Hom}(P, X_1[1] \oplus X_2[1])$$

は完全であり、従って各 $i=1,2$ に対して

$$\mathrm{Hom}(P,X_i)\to\mathrm{Hom}(P,Y_i)\to\mathrm{Hom}(P,Z_i)\to\mathrm{Hom}(P,X_i[1])$$

も完全である。よって問題 I.12 より $X_i\to Y_i\to Z_i\to X_i[1]$ も完全三角であることが従う。以上で十分性の証明を完了し、問題 I.13 の解答を完了する。 □

問題 I.14. $\mathcal{C}$ を圏、S を積閉系とする。対象 $X\in\mathcal{C}$ に対して、圏 S_X を次で定義する：

- S_X の対象は S に属する射 $s:X'\to X$ である。
- 対象 $s:X'\to X$ から対象 $s':X''\to X$ への射は、$\mathcal{C}$ の射 $h:X''\to X'$ であって $s'=s\circ h$ となるものとして定義する ($\mathcal{C}$ の射の向きとは逆向きであることに注意)。

このとき、以下を証明せよ：

(1) S_X は filtered である。

(2) $X,Y\in\mathcal{C}$ を対象とする。このとき、以下が成り立つ：

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_S}(X,Y)=\mathrm{colim}_{X'\in S_X}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X',Y).$$

(3) 射を逆向きにすることで圏 S_Y^a を定義し、次が成り立つことを示せ：

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_S}(X,Y)=\mathrm{colim}_{Y'\in S_Y^a}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y').$$

注意. 第一版の本文では、(1) は、$(S_X)^{\mathrm{op}}$ が filtered であることを示す問題となっているが、これは誤植であると思われる。なお、$(S_X)^{\mathrm{op}}$ が filtered であることは、終対象 $\mathrm{id}_X:X\to X$ を持つことから自明である。

証明. (1) を示す。S_X^{op} が cofiltered であることを証明すれば良い。$[s_1:X_1\to X],[s_2:X_2\to X]$ を S_X^{op} の対象とする。すると本文 [Definition 1.6.1 (S3), KS02] より、ある S に属する射 $t:W\to X_1$ と $\mathcal{C}$ の射 $f:W\to X_2$ が存在して $s_1\circ t=s_2\circ f$ となる。$s_1,t\in S$ なので、本文 [Definition 1.6.1 (S2), KS02] より、$u:\overset{\mathrm{def}}{=}s_1\circ t\in S$ である。従って、$[u:W\to X]$ は S_X^{op} の対象であり、f,t は S_X^{op} の射である。よって S_X は本文の条件 [Definition 1.11.2 (1.11.1), KS02] を満たす。

次に、$[s_1:X_1\to X],[s_2:X_2\to X]$ を S_X^{op} の対象とし、$f_1,f_2:s_1\to s_2$ を S_X^{op} の二つの射とする。このとき、$s_2\circ f_1=s_2\circ f_2$ であるから、本文 [Definition 1.6.1 (S4), KS02] より、S に属するある射 $t:Y\to X_1$ が存在して、$f_1\circ t=f_2\circ t$ となる。$u:\overset{\mathrm{def}}{=}s_1\circ t$ とすれば、本文 [Definition 1.6.1 (S2), KS02] より $u\in S$ であるから、$[u:Y\to X]$ は S_X^{op} の対象であり、$t:u\to s_1$ は S_X^{op} の射である。よって S_X は本文の条件 [Definition 1.11.2 (1.11.2), KS02] を満たす。以上で (1) の証明を完了する。

(2) を示す。

$$T:\overset{\mathrm{def}}{=}\{(X',s,f)|X'\in\mathcal{C},[s:X'\to X]\in S,f:X'\to Y\}$$

と置く (本文 [Definition 1.6.2 (S3), KS02] の Hom 集合の定義式の割る前の集合) と、

$$T=\coprod_{[s:X'\to X]\in S_X}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X',Y)$$

である。また、$f\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X',Y),g\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X'',Y)$ に対して本文 [Definition 1.6.2, KS02] で定義されている関係は、ある S_X の射 $X'\to X'''\leftarrow X''$ が存在して、f,g は $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X''',Y)$ において等しい、とい

うことを意味している。従って、集合の圏における余極限の具体的な構成を思い出すと、$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_S}(X,Y) = \mathrm{colim}_{X'\in S_X} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X',Y)$ となることがわかる。以上で (2) の証明を完了する。

(3) を示す。$S_Y^a :\overset{\mathrm{def}}{=} ((S^{\mathrm{op}})_Y)^{\mathrm{op}}$ とおく。ただし S^{op} は S に対応する圏 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ の積閉系である。(1) より $(S^{\mathrm{op}})_Y$ は cofiltered であるから、$((S^{\mathrm{op}})_Y)^{\mathrm{op}}$ は filtered である。また (2) より

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}_{S^{\mathrm{op}}}}(Y,X) = \mathrm{colim}_{Y'\in(S^{\mathrm{op}})_Y} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(Y',X)$$

である。op をとれば、

$$\mathrm{Hom}_{(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}_{S^{\mathrm{op}}})^{\mathrm{op}}}(X,Y) = \mathrm{colim}_{Y'\in S_Y^a} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y')$$

であることが従う。$(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}_{S^{\mathrm{op}}})^{\mathrm{op}} = \mathcal{C}_S$ であること (cf. 本文 [Remark 1.6.4, KS02]) に注意すれば、所望の等式を得る。以上で (3) の証明を完了し、問題 I.14 の解答を完了する。 □

問題 I.15. $\mathcal{C}$ を圏とする。$c\in\mathcal{C}$ に対して、$h_c^{\mathcal{C}} :\overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,c)$ を米田埋め込み $\mathcal{C}\to\mathsf{Set}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}$ による $c\in\mathcal{C}$ の像とする ($\mathcal{C}$ が明らかな場合は上付き添字の $\mathcal{C}$ を省略してたんに h_c と表す)。$\mathrm{Ind}(\mathcal{C})$ を $\mathsf{Set}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}$ の充満部分圏であって、ある filtered diagram $F:\mathcal{I}\to\mathcal{C}$ に対する $\mathrm{colim}_{i\in\mathcal{I}} h_{F(i)}$ と同型な対象たちからなるものとする。

$\mathcal{C}$ をさらにアーベル圏であるとして、S_X を over category $\mathcal{C}_{X/}$ の充満部分圏であって、擬同型 $X\to X'$ たちからなるものとする。

(1) $\sigma(X) :\overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{colim}_{X'\in S_X} h_{X'}$ によって函手 $\sigma : \mathsf{D}^+(\mathcal{C})\to\mathrm{Ind}(\mathsf{K}^+(\mathcal{C}))$ が well-defined に定まることを示し、σ が忠実充満であることを示せ。
(2) $F:\mathcal{C}\to\mathcal{C}'$ をアーベル圏の間の左完全函手とする。$T(X) :\overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{colim}_{X'\in S_X} h^{\mathcal{C}'}_{F(X')}$ と定める。これによって函手 $T:\mathsf{D}^+(\mathcal{C})\to\mathrm{Ind}(\mathsf{K}^+(\mathcal{C}'))$ が well-defined に定まることを示せ。F が $X\in\mathsf{D}^+(\mathcal{C})$ で **derivable** であるということを、ある対象 $Y\in\mathsf{D}^+(\mathcal{C}')$ が存在して $T(X)\cong\sigma(Y)$ となることとして定義する。このような Y が (up to isom で) 一意的であることを示せ。また、F がすべての $X\in\mathsf{D}^+(\mathcal{C})$ で derivable であるときに、函手 $RF:\mathsf{D}^+(\mathcal{C})\to\mathsf{D}^+(\mathcal{C}')$ で $\sigma\circ RF\cong T$ となるものが (up to isom で) 一意的に存在することを示せ (すなわち、F は右導来函手 RF を admits する)。

証明. (1) の函手 σ の well-defined 性は (2) の函手 T の well-defined 性の特別な場合 ($F=\mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ の場合) であるので、まず (2) の函手 T が well-defined に定まることを示す。T は函手 $\mathsf{K}^+(\mathcal{C})\to\mathrm{Ind}(\mathsf{K}^+(\mathcal{C}'))$ としては well-defined に定まっている。$X\in\mathsf{K}^+(\mathcal{C})$ を 0 と擬同型な対象とする。このとき 0-射 $X\to 0$ は圏 S_X の終対象であるので、

$$T(X) = \mathrm{colim}_{X'\in S_X} h_{F(X)} = h_{F(0)} = h_0 \cong 0$$

となる。よって $\mathrm{Ind}(\mathsf{K}^+(\mathcal{C}'))$ において $T(X)\cong 0$ である。従って、本文 [Proposition1.6.9 (iii), KS02] より、函手 $T:\mathsf{D}^+(\mathcal{C})\to\mathrm{Ind}(\mathsf{K}^+(\mathcal{C}'))$ が well-defined に定まる。以上で T が (よって、σ も) well-defined に定まることがわかった。

函手 σ が忠実であることを示す。X,Y を $\mathsf{D}^+(\mathcal{C})$ の対象、$f:X\to Y$ を $\mathsf{D}^+(\mathcal{C})$ の射であって、$\sigma(f)=0$ であるとする。f は $\mathsf{K}^+(\mathcal{C})$ の図式 $X\xrightarrow{f'}Y'\xleftarrow{t}Y$ によって代表される。ここで t は擬同型である。$\sigma(f)=0$ であることと、$\sigma(t)$ が同型射であることから、$\sigma(f')$ は 0-射である。$\mathrm{id}_X\in h_X(X)$ により代表される元 $[\mathrm{id}_X]\in\sigma(X)(X)=\mathrm{colim}_{X'\in S_X} h_{X'}(X)$ の $\sigma(f')(X):\sigma(X)(X)\to\sigma(Y')(X)$ での行き先は $f':X\to Y'$ により代表される元 $[f']\in\sigma(Y')(X)=\mathrm{colim}_{Y''\in S_{Y'}} h_{Y'}(X)$ であるが、$\sigma(f')=0$ であるから、$[f']=0$ である。これは、ある $[t':Y'\to Y'']\in S_{Y'}$ が存在して $t'\circ f'=0$ となることを意味する。さらに $t'\circ f'=0$

は f' が $\mathsf{D}^+(\mathcal{C})$ において 0-射であることを意味する。よって f は $\mathsf{D}^+(\mathcal{C})$ において 0-射であることが従う。以上より σ は忠実である。

函手 σ が充満であることを示す。$f : \sigma(X) \to \sigma(Y)$ を $\mathrm{Ind}(\mathsf{K}^+(\mathcal{C}))$ の射とする。$\mathrm{id}_X : X \to X$ で代表される元 $[\mathrm{id}_X] \in \sigma(X)(X) = \mathrm{colim}_{X' \in S_X}(h_{X'}(X))$ の $f(X) : \sigma(X)(X) \to \sigma(Y)(X)$ での行き先を $[f] \in \sigma(Y)(X) = \mathrm{colim}_{Y' \in S_Y}(h_{Y'}(X))$ と置く。S_Y は filtered であるから、ある $[t : Y \to Y'] \in S_Y$ とある射 $f' : X \to Y'$ が存在して、$[f]$ は f' によって代表される。$\mathsf{K}^+(\mathcal{C})$ の図式 $X \xrightarrow{f'} Y' \xleftarrow{t} Y$ によって代表される $\mathsf{D}^+(\mathcal{C})$ の射を g と置くと、f' が $[f]$ を代表することから、$\sigma(g)([\mathrm{id}_X]) = [f] \in \sigma(Y)(X)$ がわかる。これは $\sigma(g) = f$ を意味する。以上より σ は充満であり、(1) の証明を完了する。

(2) を証明する。T が well-defined に定義されることは既に示している。Y の (up to isom での) 一意性は σ が忠実であることから従う。すべての $X \in \mathsf{D}^+(\mathcal{C})$ で F が derivable であれば、$F : \mathsf{D}^+(\mathcal{C}) \to \mathrm{Ind}(\mathsf{K}^+(\mathcal{C}'))$ は $\sigma : \mathsf{D}^+(\mathcal{C}') \to \mathrm{Ind}(\mathsf{K}^+(\mathcal{C}'))$ の本質的像を一意的に経由するため、σ が忠実充満であることから、右導来函手 $RF : \mathsf{D}^+(\mathcal{C}) \to \mathsf{D}^+(\mathcal{C}')$ であって $\sigma \circ RF \cong T$ となるものが (up to isom で) 一意的に存在する。以上で問題 I.15 の解答を完了する。 □

問題 I.16. $\mathcal{C}$ を加法圏とする。

(1) $X \in \mathsf{Ch}^-(\mathcal{C}), Y \in \mathsf{Ch}^+(\mathcal{C})$ とする。以下の等式を証明せよ：

$$\begin{aligned} Z^0(\mathrm{Tot}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y))) &= \mathrm{Hom}_{\mathsf{Ch}(\mathcal{C})}(X,Y), \\ B^0(\mathrm{Tot}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y))) &= \mathrm{Ht}(X,Y), \\ H^0(\mathrm{Tot}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y))) &= \mathrm{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{C})}(X,Y). \end{aligned}$$

ただしここで $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ は二重複体とみなしている。

(2) さらに $\mathcal{C}$ がアーベル圏であり、十分入射的対象を持つか、または十分射影的対象を持つと仮定する。$X \in \mathsf{D}^-(\mathcal{C}), Y \in \mathsf{D}^+(\mathcal{C})$ に対して、次の等式を示せ：

$$H^0(R\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)) = \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}(\mathcal{C})}(X,Y).$$

証明. (1) を示す。$H^{i,j} :\overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X^{-i}, Y^j)$ とおけば、$X \in \mathsf{Ch}^-(\mathcal{C}), Y \in \mathsf{Ch}^+(\mathcal{C})$ であることから、二重複体 $H^{i,j}$ は本文の条件 [(1.9.2), KS02] を満たし、$\mathsf{Ch}^2_f(\mathcal{C})$ に属する。$f : X \to Y$ を $\mathsf{Ch}(\mathcal{C})$ の射とすると、f は $\mathcal{C}$ の射の族 $f^n : X^n \to Y^n$ であって $f^n \circ d_X^{n-1} = d_Y^{n-1} \circ f^{n-1}$ を満たすものである。よって、とくに $f \in \bigoplus_{i+j=0} H^{i,j} = \mathrm{Tot}^0(H^{\bullet,\bullet})$ であり、等式 $f^n \circ d_X^{n-1} = d_Y^{n-1} \circ f^{n-1}$ はさらに f が $Z^0(\mathrm{Tot}(H^{\bullet,\bullet}))$ に属することを意味する。以上で (1) の一つ目の等式が従う。$f : X \to Y$ が homotopic to zero であるとする。このとき、ある $\mathcal{C}$ の射の族 $s^n : X^n \to Y^{n-1}$ が存在して $f^n = s^{n+1} \circ d_X^n + d_Y^{n-1} \circ s^n$ となる。射の族 $s = (s^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ は $\bigoplus_{i+j=-1} H^{i,j}$ に属し、等式 $f^n = s^{n+1} \circ d_X^n + d_Y^{n-1} \circ s^n$ は $\mathrm{Tot}^{-1}(H^{\bullet,\bullet}) \to \mathrm{Tot}^0(H^{\bullet,\bullet})$ での s の像が $f \in \mathrm{Tot}^0(H^{\bullet,\bullet})$ となることを意味する。以上で (1) の二つ目の等式が従う。(1) の三つ目の等式は (1) の一つ目と二つ目の等式より直ちに従う。以上で (1) の証明を完了する。

(2) を示す。$\mathcal{C}$ が十分射影的対象を持つ場合、$\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ を考えることによって、$\mathcal{C}$ が十分入射的対象を持つ場合に帰着される (cf. [Remark 1.10.10, KS02])。よって、(2) を示すためには、$\mathcal{C}$ が十分入射的対象を持つと仮定しても一般性を失わない。問題 I.15 の意味で S_Y という記号を用いる。$\mathcal{C}$ は十分入射的対象を持つので、問題 I.15 (1) より $\mathrm{Hom}_{\mathsf{D}(\mathcal{C})}(X,Y) \cong \mathrm{colim}_{Y' \in S_Y} \mathrm{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{C})}(X,Y')$ となり、また問題 I.15 (2) より $R\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \cong \mathrm{colim}_{Y' \in S_Y} \mathrm{Tot}(\mathrm{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{C})}(X,Y'))$ となる。H^0 を取ることで、

$$H^0(R\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)) \cong H^0(\mathrm{colim}_{Y' \in S_Y} \mathrm{Tot}(\mathrm{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{C})}(X,Y')))$$

が従うが、S_Y は filtered であるから、余極限は H^0 と可換して、

$$H^0(R\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)) \cong \mathrm{colim}_{Y'\in S_Y} H^0(\mathrm{Tot}(\mathrm{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{C})}(X,Y')))$$

が従う。よって、(1) の最後の等式で $Y' \in S_Y$ に渡り余極限をとれば、

$$\begin{aligned} H^0(R\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)) &\cong \mathrm{colim}_{Y'\in S_Y} H^0(\mathrm{Tot}(\mathrm{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{C})}(X,Y'))) \\ &\cong \mathrm{colim}_{Y'\in S_Y} \mathrm{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{C})}(X,Y') \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}(\mathcal{C})}(X,Y) \end{aligned}$$

が従う。以上で (2) の証明を完了し、問題 I.16 の解答を完了する。 □

問題 I.17. $\mathcal{C}$ をアーベル圏とする。$\mathcal{C}$ が**ホモロジー次元** $\le n$ **である**ということを、任意の $X,Y\in\mathcal{C}$ に対して $\mathrm{Ext}^i(X,Y)=0,(\forall i>n)$ となることによって定義する。ただし、ここで $\mathrm{Ext}^i(X,Y) :\overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}(\mathcal{C})}(X,Y[i])$ である。自然数 n であって、$\mathcal{C}$ がホモロジー次元 $\le n$ となるもののうち、最小のものを $\mathrm{hd}(\mathcal{C})$ と表し、$\mathcal{C}$ の**ホモロジー次元**と言う。

$\mathcal{C}$ は十分入射的対象を持つと仮定する。このとき、自然数 n に対して、以下の主張が同値であることを示せ：

(1) $\mathrm{hd}(\mathcal{C}) \le n$ である。
(2) 任意の対象 $X\in\mathcal{C}$ に対して、X の入射分解 $X\to I$ であって、$i>n$ に対して $I^i=0$ となるものが存在する。

証明. (1)⇒(2) を示す。$\mathrm{hd}(\mathcal{C})\le n$ であるとする。任意に対象 $X\in\mathcal{C}$ をとり、$X\to I$ を入射分解とする。$Y\in\mathcal{C}$ を任意の対象とすると、問題 I.16 (2) より、$H^i(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,I)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}(\mathcal{C})}(Y,X[i]) = \mathrm{Ext}^i(Y,X)$ である。$\mathrm{hd}(\mathcal{C})\le n$ なので、$H^{n+1}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,I))=0$ であり、従って

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,I^n)\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,I^{n+1})) &\cong \ker(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,I^{n+1})\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,I^{n+2})) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,\ker(d_I^{n+1})) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,\mathrm{Im}(d_I^n)) \end{aligned}$$

となる。よって、完全列

$$0 \longrightarrow \ker(d_I^n) \longrightarrow I^n \longrightarrow \mathrm{Im}(d_I^n) \longrightarrow 0$$

は任意の Y に対する $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,-)$ を適用したあとも完全である。従って、問題 I.4 より、$I^n\cong\ker(d_I^n)\oplus\mathrm{Im}(d_I^n)$ となることがわかる。I^n は入射的対象であるから、その直和因子である $\ker(d_I^n)$ も入射的対象である。従って、$X\to\tau^{\le n}(I)$ は長さが n 以下の入射分解となる。以上で (1)⇒(2) の証明を完了する。

(2)⇒(1) を示す。任意に対象 $X\in\mathcal{C}$ をとり、$X\to I$ を長さ n 以下の入射分解とする。$Y\in\mathcal{C}$ を任意の対象とすると、問題 I.16 (2) より、$H^i(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,I)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}(\mathcal{C})}(Y,X[i]) = \mathrm{Ext}^i(Y,X)$ であるので、$I^i=0,(i>n)$ より、$i>n$ に対して $\mathrm{Ext}^i(Y,X)=0$ となることがわかる。以上で問題 I.17 の解答を完了する。 □

問題 I.18. $\mathcal{C}$ を $\mathrm{hd}(\mathcal{C})\le 1$ のアーベル圏とする。$X\in\mathsf{D}^b(\mathcal{C})$ を複体とするとき、$\mathsf{D}^b(\mathcal{C})$ で

$$X \cong \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} H^k(X)[-k]$$

となることを示せ。

証明. シフトすることで、$X^i = 0, (\forall i < 0)$ と仮定しても一般性を失わない。$X^n \neq 0$ となる最大の n に関する帰納法で証明する。$n = 0$ であれば主張は自明であるので、ある $n = k$ に対して主張が成立するときに、$n = k+1$ の場合にも成立することを証明する。帰納法の仮定より、

$$\tau^{\leq n-1}(X) \cong \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} H^k(\tau^{\leq n-1}(X))[-k] \cong \bigoplus_{k\leq n-1} H^k(X)[-k]$$

である。従って、所望の同型を証明するためには、$n = 1$ の場合、さらに $d_X^0 : X^0 \to X^1$ がモノ射である場合に、$\mathsf{D}^b(\mathcal{C})$ で $X \cong \mathrm{coker}(d_X^0)[-1]$ となることを証明することが十分である。

$X \in \mathsf{D}^b(\mathcal{C})$ は $X^i = 0, (i \in (-\infty, 0] \cup (1, +\infty))$ であり、さらに $d_X^0 : X^0 \to X^1$ がモノ射であるとする。$X^1 \to I$ を入射的対象 I へのモノ射とすると、$\mathrm{hd}(\mathcal{C}) \leq 1$ であるから、$I/X^0, I/X^1$ はどちらも入射的対象となる。複体 J を $J^0 = J^1 = I, d_J^0 = \mathrm{id}_I$ で定義し、J_1 を $J_1^0 = I/X^0, J_1^1 = I/X^1$ で $d_{J_1}^0$ を自然な射として定義すると、J_1 は X^1/X^0 の入射分解であり、$0 \to X \to J \to J_1 \to 0$ は $\mathsf{Ch}(\mathcal{C})$ の完全列である。従って、$X \to J \to J_1 \to X[1]$ は $\mathsf{D}(\mathcal{C})$ の完全三角である。J_1 は X^1/X^0 の入射分解であるから、$\mathsf{D}(\mathcal{C})$ において $J_1 \cong X^1/X^0$ である。以上より、$\mathsf{D}(\mathcal{C})$ の完全三角 $X \to J \to X^1/X^0 \to X[1]$ を得る。さらに、定義より $\mathsf{D}(\mathcal{C})$ において $J \cong 0$ であるから、これは $\mathsf{D}(\mathcal{C})$ において $X \cong (X^1/X^0)[-1]$ となることを示している。以上で問題 I.18 の解答を完了する。 □

問題 I.19. $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ を二つのアーベル圏、$F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ を左完全函手とする。さらに $\mathcal{I} \subset \mathcal{C}$ を F-injective な部分圏とする。対象 $X \in \mathcal{C}$ が F**-acyclic** であるということを、任意の $k \neq 0$ に対して $R^kF(X) = 0$ となることとして定義する。$\mathcal{J} \subset \mathcal{C}$ を F-acyclic な対象からなる充満部分圏とする。

(1) $\mathcal{J}$ は F-injective であることを示せ。
(2) 任意の自然数 $n \geq 0$ に対して、以下の主張が同値であることを証明せよ：
  (i) 任意の $k > n$ と任意の対象 $X \in \mathcal{C}$ に対して $R^kF(X) = 0$ である。
  (ii) 任意の対象 $X \in \mathcal{C}$ に対して、完全列

$$0 \to X \to X^0 \to \cdots \to X^n \to 0$$

  で各 $0 \leq j \leq n$ に対して $X^j \in \mathcal{J}$ となるものが存在する。
  (iii) $X^0 \to \cdots X^n \to 0$ が完全であり、任意の $j < n$ に対して $X^j \in \mathcal{J}$ であるとき、$X^n \in \mathcal{J}$ である。

これらの同値な条件のうちのどれか一つが成立するとき、F は**コホモロジー次元** $\leq n$ **を持つ**と言う。

証明. (1) を示す。まず、F-injective な対象は F-acyclic なので (cf. 本文 [Proposition 1.8.3, KS02] とその直前の記述)、$\mathcal{I} \subset \mathcal{J}$ であり、従って $\mathcal{J}$ は本文条件 [Definition 1.8.2 (i), KS02] を満たす。また、$\mathcal{J}$ に属する対象はすべて F-acyclic であるから、$\mathcal{J}$ が本文条件 [Definition 1.8.2 (ii), KS02] を満たすことは明らかである。$X' \to X$ を $\mathcal{J}$ に属する対象の間のモノ射として $X'' :\overset{\mathrm{def}}{=} X/X'$ とすると、各 $i \geq 1$ に対して完全列 $R^iF(X) \to R^iF(X/X') \to R^{i+1}F(X')$ を得る。X, X' は F-acyclic であるから、$R^iF(X) = 0, R^{i+1}F(X') = 0$ であり、従って $R^iF(X/X') = 0$ もわかる。これは X/X' が F-acyclic であることを示していて、X/X' は $\mathcal{J}$ に属する。よって $\mathcal{J}$ は本文条件 [Definition 1.8.2 (ii), KS02] を満たし、$\mathcal{J}$ は F-injective である。以上で (1) の証明を完了する。

(2) を示す。(i)⇔(ii) を示す。(i)⇔(ii) を示すためには、対象 $X \in \mathcal{C}$ を固定して、次の二つの主張が同値であることを証明することが十分である：

(A) 任意の $k > n$ に対して $R^kF(X) = 0$ である。

(B) 完全列

$$0 \to X \to X^0 \to \cdots \to X^n \to 0$$

で各 $0 \leq j \leq n$ に対して $X^j \in \mathcal{J}$ となるものが存在する。

n に関する帰納法により (A)⇔(B) を示す。$n = 0$ に対して (A) が成り立つことは、X が F-acyclic であることと同値であり、さらにこれは $n = 0$ に対して (B) が成り立つことと同値である。よって $n = 0$ の場合は明らかに (A)⇔(B) が成り立つ。$n \geq 1$ として、n より小さいすべての自然数に対して (A)⇔(B) が成り立つと仮定する。$\mathcal{J}$ は本文条件 [Definition 1.8.2 (i), KS02] を満たすので、モノ射 $d : X \to X^0$ が存在する。X^0 は F-acyclic であるから、任意の $k > n$ に対して $R^{k-1}F(\mathrm{coker}(d)) \cong R^kF(X)$ となる。従ってとくに、X と n に対して (A) が成り立つことは、$X = \mathrm{coker}(d)$ と $n-1$ に対して (A) が成り立つことと同値である。帰納法の仮定により、これは $X = \mathrm{coker}(d)$ と $n-1$ に対して (B) が成り立つことと同値である。さらに $\mathrm{coker}(d)$ に対する (B) の完全列を $X^0 \to \mathrm{coker}(d)$ と繋ぐことを考えれば、$X = \mathrm{coker}(d)$ と $n-1$ に対して (B) が成り立つことは X と n に対して (B) が成り立つことと同値である。以上で (A)⇔(B) の証明を完了し、従って (i)⇒(ii) の証明を完了する。

(i)⇒(iii) を示すためには、各対象 $X \in \mathcal{C}$ に対して次の二つの主張が同値であることを証明することが十分である：

(C) 任意の $k > n$ に対して $R^kF(X) = 0$ である。

(D) 完全列

$$0 \to X \to X^0 \to \cdots \to X^n \to 0$$

が条件「各 $j < n$ に対して $X^j \in \mathcal{J}$ である」を満たせば、$X^n \in \mathcal{J}$ となる。

$n = 0$ に対して (C) が成り立つことは、X が F-acyclic であることと同値であり、これは $n = 0$ に対して (D) が成り立つことと同値である。よって $n = 0$ の場合は明らかに (C)⇔(D) が成り立つ。$n \geq 1$ として、n より小さいすべての自然数に対して (C)⇔(D) が成り立つと仮定する。

$$0 \to X \xrightarrow{d} X^0 \to \cdots \to X^n \to 0$$

を条件「各 $j < n$ に対して $X^j \in \mathcal{J}$ である」を満たす完全列とする。X^0 は F-acyclic であるから、任意の $k > n$ に対して $R^{k-1}F(\mathrm{coker}(d)) \cong R^kF(X)$ となる。よって、X と n に対して (C) が成り立つことは、$X = \mathrm{coker}(d)$ と $n-1$ に対して (C) が成り立つことと同値である。帰納法の仮定により、これは $X = \mathrm{coker}(d)$ と $n-1$ に対して (D) が成り立つことと同値である。一方これは明らかに X と n に対して (D) が成り立つことと同値であるから、よって (C)⇔(D) が従う。以上で (2) の証明を完了し、問題 I.19 の解答を完了する。 □

問題 I.20. $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}$ をそれぞれアーベル圏として、$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}, G : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ を左完全函手とする。F-injective な $\mathcal{I} \subset \mathcal{C}$ と G-injective な $\mathcal{J} \subset \mathcal{D}$ が存在して、$F(\mathcal{I}) \subset \mathcal{J}$ となると仮定する (本文 [Proposition 1.8.7, KS02] の状況設定)。さらに、F はコホモロジー次元 $\leq r$ を持ち、G はコホモロジー次元 $\leq s$ を持つとする。このとき、$G \circ F$ はコホモロジー次元 $\leq r + s$ を持つことを示せ。

証明. $X \in \mathcal{C}$ を任意にとる。F はコホモロジー次元 $\leq r$ を持つので、ある擬同型 $X \xrightarrow{\text{qis.}} I$ で、各 k について I^k は F-acyclic であり、さらに $\tau^{\leq r}(I) = I$ となるものがある。このとき、$RF(X) \cong RF(I)$ であるが、本文 [Proposition 1.8.3, KS02] と問題 I.19 (1) より、さらに $RF(I) \cong F(I)$ となる。ただしここで $F(I)$ は各 I^k

を F で送ることによって得られる複体 (つまり $\mathsf{K}^+(F)(I)$) を表している。従って、本文 [Proposition 1.8.7, KS02] より、$R(G\circ F)(X)\cong RG(RF(X))\cong RG(F(I))$ が従う。G のコホモロジー次元が $\leq s$ であることと、$\tau^{\leq r}(F(I))=F(I)$ であることから、問題 I.20 を示すためには、次の主張を証明することが十分である：

(†) $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ をアーベル圏の間の左完全函手とする。F はコホモロジー次元 $\leq r$ を持ち、さらに F-injective な $\mathcal{I}\subset\mathcal{C}$ が存在すると仮定する。$n\geq 0$ を自然数とする。このとき、$\tau^{\leq n}(X)=X$ が成り立つ任意の $X\in\mathsf{Ch}^+(\mathcal{C})$ に対して、自然な射 $\tau^{\leq n+r}(RF(X))\to RF(X)$ は同型射である。

n に関する帰納法により (†) を示す。$n=0$ の場合は問題 I.19 (2) (ii) より従う。$n-1$ 以下で (†) が成立すると仮定する。$Y\overset{\text{def}}{:=}\tau^{\leq n-1}(X), Z\overset{\text{def}}{:=}\operatorname{coker}(d_X^{n-1})\in\mathcal{C}$ と置く。このとき、$Y\to X$ の cone は $Z[n]$ と擬同型である。また、$\tau^{\leq n-1}(Y)=Y$ であるから、帰納法の仮定より $\tau^{\leq n-1+r}(RF(\tau^{\leq n-1}(X)))\cong RF(\tau^{\leq n-1}(X))$ であり、$\tau^{\leq 0}(Z)=Z$ であるから、すでに示されている $n=0$ の場合より、$\tau^{\leq n+r}(RF(Z[n]))=\tau^{\leq r}(RF(Z))[n]congRF(Z)[n]=RF(Z[n])$ である。完全三角 $Y\to X\to Z[n]\to Y[1]$ に RF を適用して得られる完全三角 $RF(Y)\to RF(X)\to RF(Z[n])\to RF(Y[1])$ に $\tau^{\leq n+r}$ を適用すれば、完全三角

$$\tau^{\leq n+r}(RF(Y))\to\tau^{\leq n+r}(RF(X))\to\tau^{\leq n+r}(RF(Z[n]))\to\tau^{\leq n+r}(RF(Y[1]))$$

を得る。$\tau^{\leq n+r}(RF(Y))\cong RF(Y), \tau^{\leq n+r}(RF(Z[n]))\cong RF(Z[n])$ より、完全三角

$$RF(Y)\to\tau^{\leq n+r}(RF(X))\to Z[n]\to Y[1]$$

を得る。以上で (†) の証明を完了し、問題 I.20 の解答を完了する。 □

問題 I.21. $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ をアーベル圏の間の左完全函手とする。F-injective な $\mathcal{I}\subset\mathcal{C}$ が存在すると仮定する。$X\in\mathsf{D}^+(\mathcal{C})$ は $i>0, j\leq j_0$ に対して $R^iF(H^j(X))=0$ を満たすとする。このとき、$j\leq j_0$ に対して $R^jF(X)\cong F(H^j(X))$ となることを示せ。

証明. $X\in\mathsf{D}^+(\mathcal{C})$ であるから、問題 I.21 を示すためには $j_0\geq 0$ であると仮定しても一般性を失わない。j_0 に関する帰納法で問題 I.21 を示す。$j_0=0$ の場合、$R^0F(X)\cong\ker(F(d_X^0))\cong F(\ker(d_X^0))=F(H^0(X))$ であるから主張は自明である。

j_0 未満で問題 I.21 が成り立つと仮定する。$Y\overset{\text{def}}{:=}\tau^{\leq j_0-1}(X), Z\overset{\text{def}}{:=}\tau^{\geq j_0}(X)$ とすると $Y\to X\to Z$ は完全三角であり、$Z[-j_0]\in\mathsf{D}^+(\mathcal{C})$ であり、帰納法の仮定より、$j\leq j_0-1$ に対して $R^jF(Y)\cong F(H^j(Y))$ であり、さらに $\tau^{\geq j_0}(Y)=0$ であるから $R^jF(Y)=0, (j\geq j_0)$ である。X が今の j_0 に対して問題 I.21 の仮定を満たすことから、$Z[-j_0]$ は $j_0=0$ に対して問題 I.21 の仮定を満たし、すでに示したことによって $R^0f(Z[-j_0])\cong F(H^0(Z[-j_0]))$ となる。従って、$R^jF(Z)=0, (j\leq j_0-1)$ かつ $R^{j_0}F(Z)\cong F(H^{j_0}(Z))$ である。$Z=\tau^{\geq j_0}(X)$ なので $H^{j_0}(Z)\cong H^{j_0}(X)$ であり、従って $R^{j_0}F(Z)\cong F(H^{j_0}(X))$ が従う。

完全三角 $Y\to X\to Z\to Y[1]$ に RF を適用して得られる完全三角 $RF(Y)\to RF(X)\to RF(Z)\to RF(Y)[1]$ のコホモロジーをとることで、長完全列

$$R^jF(Y)\to R^jF(X)\to R^jF(Z)\to R^{j+1}F(Y)$$

を得る。ここで $j\leq j_0-1$ に対して $R^jF(Y)\cong F(H^j(Y))$ であることと、$j\leq j_0-1$ に対して $R^jF(Z)=0$ であることから、$j\leq j_0-1$ に対して $R^jF(Y)\to R^jF(X)$ は同型射である。さらに、$\tau^{\leq j_0-1}(Y)=Y$ であるから、$R^{j_0}F(Y)=0$ である。従って、$R^{j_0}F(X)\to R^{j_0}F(Z)$ が同型射となる。よって $R^{j_0}F(X)\cong R^{j_0}F(Z)\cong F(H^{j_0}(X))$ が従う。以上で問題 I.21 の解答を完了する。 □

問題 I.22. $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}$ をそれぞれアーベル圏として、$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}, G : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ を左完全函手とする。F-injective な $\mathcal{I} \subset \mathcal{C}$ と G-injective な $\mathcal{J} \subset \mathcal{D}$ が存在して、$F(\mathcal{I}) \subset \mathcal{J}$ となると仮定する (本文 [Proposition 1.8.7, KS02] の状況設定)。$X \in \mathsf{D}^+(\mathcal{C})$ は $R^jF(X) = 0, (\forall j < n)$ を満たすと仮定する。$R^n(G \circ F)(X) \cong (G \circ R^nF)(X)$ を示せ。

証明. 本文 [Remark 1.8.6, KS02] を $RF(X)$ と G に対して適用することで、任意の $j < n$ に対して $R^jG(RF(X)) = 0$ であり、さらに $R^nG(RF(X)) \cong G(H^n(RF(X))) = G(R^nF(X))$ である。また、本文 [Proposition 1.8.7, KS02] より $R(G \circ F)(X) \cong RG(RF(X))$ であるので、n 番目のコホモロジーをとれば $R^n(G \circ F)(X) \cong R^nG(RF(X))$ が従う。よって $R^n(G \circ F)(X) \cong R^nG(RF(X)) \cong G(R^nF(X))$ となり、以上で問題 I.22 の解答を完了する。 □

問題 I.23. $\mathcal{C}$ をアーベル圏、$\mathcal{I} \subset \mathcal{C}$ を充満部分圏とする。$\mathcal{I}$ が本文の条件 [(1.7.5),(1.7.6), KS02] を満たすとし、さらに次を条件を満たすと仮定せよ：

(†) $0 \to X' \to X \to X'' \to 0$ を $\mathcal{C}$ の完全列であって、$X' \in \mathcal{I}$ であると仮定する。このとき、$X \in \mathcal{I}$ であることは $X'' \in \mathcal{I}$ であることと同値である。

$* = , b, -, +$ とする。

(1) 任意の対象 $X \in \mathsf{Ch}^*(\mathcal{C})$ はある $Y \in \mathsf{Ch}^*(\mathcal{I})$ と擬同型であることを示せ。
(2) $\mathcal{D}$ を別のアーベル圏、$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ を左完全函手とする。$\mathcal{I}$ が F-injective であると仮定する。このとき F の右導来函手 $RF : \mathsf{D}^*(\mathcal{C}) \to \mathsf{D}^*(\mathcal{D})$ が存在することを示せ。
(3) $\mathcal{E}$ をさらに別のアーベル圏、$G : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ を左完全な双函手とする。各 $Y \in \mathcal{D}$ に対して $\mathcal{I}$ は $G(-, Y)$-injective であるとし、さらに各 $I \in \mathcal{I}$ と 0 と擬同型な $Y \in \mathsf{Ch}^\star(\mathcal{D})$ に対して $G(I, Y)$ は 0 と擬同型であるとする。このとき、$(*, \star) = (-, -)$ の場合と $(*, \star) = (*, b)$ の場合で、G の右導来函手 $RG : \mathsf{D}^*(\mathcal{C}) \times \mathsf{D}^\star(\mathcal{D}) \to \mathsf{D}^*(\mathcal{E})$ が存在することを示せ。

注意. 少なくとも第一版では (3) の仮定に「各 $I \in \mathcal{I}$ と 0 と擬同型な $Y \in \mathsf{Ch}^\star(\mathcal{D})$ に対して $G(I, Y)$ は 0 と擬同型である」というものはなかった。なくても証明できるのか？本文 [Corollary 1.10.5, KS02] とパラレルであることを想定すればこの仮定がなければ微妙になると思うが...

証明. (1) を示す。$* = b$ の場合は本文 [Corollary 1.7.8, KS02] より、$* = +$ の場合は本文 [Corollary 1.7.7, KS02] より従う。$* = \varnothing$ の場合を証明すれば、本文 [Corollary 1.7.8, KS02] と全く同様の議論により、$* = -$ の場合が従う。残っているのは、$* = \varnothing$ の場合に (1) を示すことである。$* = +$ の場合の構成を詳細に見るため、$* = +$ の場合の証明を思い出す。$Z \in \mathsf{Ch}(\mathcal{C})$ に対して、複体 $\tilde{\tau}^{\leq n}(Z)$ を次で定義する：

$$\cdots \to Z^i \to \cdots \to Z^n \xrightarrow{d_Z^n} Z^{n+1} \to \operatorname{coker}(d_Z^n) \to 0 \to \cdots \to 0 \to \cdots.$$

このとき、自然な全射の列 $Z \to \tilde{\tau}^{\leq n}(Z) \to \tilde{\tau}^{\leq n-1}(Z)$ が存在して、合成 $\tau^{\leq n}(Z) \to Z \to \tilde{\tau}^{\leq n}(Z)$ は擬同型であり、さらに自然な射 $Z \xrightarrow{\sim} \lim_{n\to\infty} \tilde{\tau}^{\leq n}(Z)$ は同型射である (極限が存在することに注意)。また、$Z^{\leq n}$ を次で定義する ($Z^{\geq n}$ も同様に定義する)：

$$\cdots \to Z^i \to \cdots \to Z^n \to 0 \to \cdots \to 0 \to \cdots.$$

このとき、自然な複体のモノ射 $\tilde{\tau}^{\leq n-1}(Z) \to Z^{\leq n+1}$ が存在する。$X \in \mathsf{Ch}^+(\mathcal{C})$ とする。ある n に対して次の条件が成り立つと仮定する：任意の $m \leq n$ に対して、

- 複体 $I_m \in \mathsf{Ch}^+(\mathcal{I})$ であって $I_n = I_n^{\leq n}$ を満たすもの、
- 複体のモノ射 $f_m : X^{\leq m} \to I_m$ であって $\tilde{\tau}^{\leq m-1}(f_m) : \tilde{\tau}^{\leq m-1}(X) \to \tilde{\tau}^{\leq m-1}(I_m)$ がモノな擬同型となるもの、

が存在し、任意の $m_1 \leq m_2 \leq n$ に対して $I_{m_2}^{\leq m_1} = I_{m_1}, f_{m_1}^i = f_{m_2}^i, (\forall i \leq m_1)$ を満たすと仮定する。この条件は十分小さい $n \ll 0$ に対してはつねに満たされる ($n \ll 0$ に対しては $X^{\leq n} = 0$ なので $I_n = 0$ とすれば良い)。$Y_{n+1} :\overset{\mathrm{def}}{=} \tilde{\tau}^{\leq n-1}(I_n) \coprod_{\tilde{\tau}^{\leq n-1}(X)} X^{\leq n+1}$ とおくと、自然な射 $X^{\leq n+1} \to Y_{n+1}$ はモノな擬同型による push-out であるのでモノな擬同型である。さらに各 $i \leq n$ に対して $(\tilde{\tau}^{\leq n}(X))^i \to (X^{\leq n+1})^i$ は同型射なので、各 $i \leq n$ に対して $I_n^i \to Y_{n+1}^i$ も同型射である。$\mathcal{I}$ は本文の条件 [(1.7.5), KS02] を満たすので、あるモノ射 $Y_{n+1}^{n+1} \to J$ が存在する。複体 I_{n+1} を、各 $i \leq n$ に対して $I_{n+1}^i :\overset{\mathrm{def}}{=} Y_{n+1}^i \cong I_n^i$、$i > n+1$ に対して $I_{n+1} :\overset{\mathrm{def}}{=} 0$、$I_{n+1}^{n+1} :\overset{\mathrm{def}}{=} J$ と定めることで、モノ射の列 $X^{\leq n+1} \to Y_{n+1} \to I_{n+1}$ を得る。この合成を f_{n+1} とおく。すると構成より各 $i \leq n$ に対して $f_{n+1}^i = f_n$ である。また、図式

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\tau}^{\leq n-1}(X) & \longrightarrow & \tilde{\tau}^{\leq n-1}(I_n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ X^{\leq n+1} & \longrightarrow & I_{n+1} \end{array}$$

で問題 I.6 (3) (4) を用いることで $\tilde{\tau}^{\leq n}(f_{n+1})$ がモノな擬同型であることが従う。こうして任意の n に対してモノ射 $f_n : X^{\leq n} \to I_n, I_n = I_n^{\leq n} \in \mathsf{Ch}^+(\mathcal{I})$ であって $\tilde{\tau}^{\leq n-1}(f_n)$ がモノな擬同型となるものが存在することがわかったので、あとは $\lim_{n\to\infty} \tilde{\tau}^{\leq n}(f_n)$ をとれば所望の擬同型 $f : X \to I, I \in \mathsf{Ch}^+(\mathcal{I})$ を得る。構成から、f はモノ射であり、$X^i = 0$ なら $f^i = 0$、となるようにとれる。

$\mathcal{I}$ が自然数 $d \geq 0$ に対して本文の条件 [(1.7.6), KS02] を満たすとする。複体 Z と各 n に対して、モノな擬同型 $Z_{\geq n} \to I, (I \in \mathsf{Ch}(\mathcal{I}))$ をとって $Z_{\leq -n-1}$ と繋げることで、新しい複体 Z' とモノな擬同型 $f_0 : Z \to Z'$ であって $(Z')^i = Z^i, f_0^i = \mathrm{id}_{Z^i}, (\forall i < n)$ であり、さらに $(Z')^i \in \mathcal{I}, (\forall i \geq n)$ となるものが存在することが従う。この複体 Z' を $I_n(Z)$ で表す。

複体 Z が、ある i_0 以上の全ての $i \geq i_0$ に対して $Z^i \in \mathcal{I}$ を満たすと仮定する。$Z_1 :\overset{\mathrm{def}}{=} I_{i_0-1}(Z)$ とおくと、$C :\overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{coker}(Z \to Z_1)$ は完全であり、さらに $\mathcal{I}$ が条件 (†) を満たすことより、$C^i \in \mathcal{I}, (\forall i \geq i_0)$ である。また、C が完全であることと $\mathcal{I}$ が d に対して本文の条件 [(1.7.6), KS02] を満たすことより、各 $i \geq i_0 + d - 1$ に対して $\mathrm{Im}(d_C^i) \in \mathcal{I}$ である。従って、C が完全であることより、$\tau^{\leq i_0+d}(C)$ は任意の $i \geq i_0$ に対して $(\tau^{\leq i_0+d}(C))^i \in \mathcal{I}$ を満たす。$J_{i_0}(Z) :\overset{\mathrm{def}}{=} Z_1 \times_C \tau^{\leq i_0+d}(C)$ (複体の圏での fiber 積) とおくと、$Z \to Z_1$ がモノであることから、

$$0 \longrightarrow Z \longrightarrow J_{i_0}(Z) \longrightarrow \tau^{\leq i_0+d}(C) \longrightarrow 0$$

は (複体の圏で) 完全である。任意の $i \geq i_0$ に対して $(\tau^{\leq i_0+d}(C))^i \in \mathcal{I}$ を満たすことと $\mathcal{I}$ は条件 (†) を満たすことより、任意の $i \geq i_0$ に対して $(J_{i_0}(Z)^i \in \mathcal{I}$ である。さらに $i > i_0 + d$ に対して $(\tau^{\leq i_0+d}(C))^i = 0$ なので、$i > i_0 + d$ に対して $Z^i \xrightarrow{\sim} (J_{i_0}(Z))^i$ であり、$i < i_0 + d$ に対して $(\tau^{\leq i_0+d}(C))^i \xrightarrow{\sim} C^i$ なので、$i < i_0 + d$ に対して $(J_{i_0}(Z))^i \xrightarrow{\sim} Z_1^i$ である。従って、とくに $J_{i_0}(Z)^{i_0-1} \cong Z_1^{i_0-1} \in \mathcal{I}$ が従う。まとめると、モノな擬同型 $Z \to J_{i_0}(Z)$ であって、$i > i_0 + d$ に対して $Z^i \xrightarrow{\sim} (J_{i_0}(Z))^i$ であり、$i \geq i_0 - 1$ に対して $(J_{i_0}(Z))^i \in \mathcal{I}$ となるものが存在する。

I_0, J_n を用いて (1) の証明を行う。複体 $X \in \mathsf{Ch}(\mathcal{C})$ を任意にとる。$X_0 :\overset{\mathrm{def}}{=} I_0(X)$ とおく。各 $n < 0$ に対して、$X_n :\overset{\mathrm{def}}{=} J_{n+1}(X_{n+1})$ と定義して、モノな擬同型 $X_{n+1} \to X_n$ たちの余極限をとる。このとき、各 $i \geq n + d$ に対して $X_n^i \to X_{n-1}^i$ は同型射であるから、$Y :\overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{colim}_{n\to-\infty} X_n$ は圏 $\mathsf{Ch}(\mathcal{C})$ に存在して、各

$i \in \mathbb{Z}$ に対して $Y^i \cong X^i_{-|i|-d} \in \mathcal{I}$ となる。さらに各 $X_n \to X_{n-1}$ と $X \to X_0$ はすべて擬同型であるから、$X \to Y$ も擬同型である。よって所望の複体と擬同型が構成できた。以上で (1) の証明を完了する。

(2) を示す。$\mathcal{N}$ を $\mathsf{K}^*(\mathcal{C})$ の充満部分三角圏であって 0 と擬同型な複体すべてからなるものとする。$\mathcal{N}' :\stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{N} \cap \mathsf{K}^*(\mathcal{I})$ とおく。すると (1) より、自然な射 $\mathsf{K}^*(\mathcal{I})/\mathcal{N}' \to \mathsf{D}^*(\mathcal{C})$ は圏同値である。また、$\mathcal{I}$ が F-injective であることから、$\mathsf{K}^*(\mathcal{I})$ の 0 と擬同型な対象は F によって acyclic な対象へと写される。従って、$\mathsf{K}^*(\mathcal{I}) \subset \mathsf{K}^*(\mathcal{C})$ と $F : \mathsf{K}^*(\mathcal{C}) \to \mathsf{K}^*(\mathcal{D})$ の合成は $\mathsf{K}^*(\mathcal{I})/\mathcal{N}' \cong \mathsf{D}^*(\mathcal{C})$ を一意的に経由する。このことは右導来函手 RF が存在することを意味する。以上で (2) の証明を完了する。

(3) を示す。$(*, \star)$ は $(*, b)$ または $(-, -)$ を表すとする。$\mathcal{I}$ は各 $Y \in \mathcal{D}$ に対して $G(-, Y)$-injective であるから、$I \in \mathsf{Ch}^*(\mathcal{I})$ が完全な複体であれば、$Y \in \mathsf{Ch}^\star(\mathcal{D})$ と各 $i \in \mathbb{Z}$ に対して $G(I, Y^i) \in \mathsf{Ch}^*(\mathcal{E})$ も完全な複体であり、従って $G(I, Y)$ は一つ目の添字に関して完全な二重複体となる。よって本文 [Theorem 1.9.3, KS02] より、$Y \in \mathsf{Ch}^\star(\mathcal{D})$ と $I \in \mathsf{Ch}^*(\mathcal{I})$ の一方が 0 と擬同型 (完全) な複体であれば、$\mathrm{Tot}(G(I, Y))$ も 0 と擬同型となる。このことは、$\mathrm{Tot}(G(-, -)) : \mathsf{K}^*(\mathcal{I}) \times \mathsf{K}^\star(\mathcal{D}) \to \mathsf{D}^*(\mathcal{E})$ が $\mathsf{D}^*(\mathcal{I}) \times \mathsf{D}^\star(\mathcal{D})$ を一意的に経由することを意味する。従って三角函手 $\mathsf{D}^*(\mathcal{I}) \times \mathsf{D}^\star(\mathcal{D}) \to \mathsf{D}^*(\mathcal{E})$ を得る。ここで (1) より $\mathsf{D}^*(\mathcal{I}) \xrightarrow{\sim} \mathsf{D}^*(\mathcal{C})$ は圏同値であるので、こうして得られた三角函手 $\mathsf{D}^*(\mathcal{C}) \times \mathsf{D}^\star(\mathcal{D}) \to \mathsf{D}^*(\mathcal{E})$ は所望の右導来函手であることが従う。以上で問題 I.23 の解答を完了する。 □

問題 I.24.

(1) $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ をアーベル圏の間の左完全函手、$\mathcal{I} \subset \mathcal{C}$ を F-injective な充満部分圏として、$X \in \mathsf{D}^+(\mathcal{C})$ を対象とする。各 $j \in \mathbb{Z}$ に対して自然な射 $H^j(RF(X)) \to F(H^j(X))$ を構成せよ。

(2) $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}$ をアーベル圏、$F : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ を加法的な双函手、$X \in \mathsf{D}^*(\mathcal{C}), Y \in \mathsf{D}^*(\mathcal{D})$ を対象とする。ここで $*$ は $+$ か $-$ であるとする。

  (i) F が左完全で $* = +$ (resp. F が右完全で $* = -$) であるとせよ。各 $p, q \in \mathbb{Z}$ に対して自然な射 $H^{p+q}(RF(X, Y)) \to F(H^p(X), H^q(Y))$ (resp. $F(H^p(X), H^q(Y)) \to H^{p+q}(LF(X, Y))$ を構成せよ。

  (ii) F が完全であるとせよ。各 $n \in \mathbb{Z}$ に対して以下の同型を示せ：

$$H^n(F(X, Y)) \cong \bigoplus_{p+q=n} F(H^p(X), H^q(Y)).$$

注意. $\mathcal{I}$ のような部分圏の存在に関して本文中では全く仮定がなかったが、右導来函手の存在のみから証明できることなんだろうか。もしそうなら、問題 I.21 でも仮定する必要がなかったはずだけど...

証明. (1) を示す。余核の普遍性によって自然な射 $\mathrm{coker}(F(d^j_X)) \to F(\mathrm{coker}(d^j_X))$ を得る。さらに核の普遍性によって自然な射 $H^j(F(X)) \to \ker(F(\mathrm{coker}(d^{j-1}_X)) \to F(X^j))$ を得る。ここで F は左完全であるから、自然な同型 $\ker(F(\mathrm{coker}(d^{j-1}_X)) \to F(X^j)) \cong F(\ker(\mathrm{coker}(d^{j-1}_X) \to X^j)) \cong F(H^j(X))$ を得る。以上より、自然な射 $H^j(F(X)) \to F(H^j(X))$ を得る (自然、の意味は、複体 X に対して函手的、という意味。余核の間の射も核の間の射も核を F の中に入れる同型射もすべて X について函手的)。本文 [Proposition 1.7.7, KS02] または問題 I.23 (1) より、モノな擬同型 $X \to I, (I \in \mathsf{K}^+(\mathcal{I}))$ が存在する。$RF(I) \cong F(I)$ が成り立つので、自然な射

$$R^jF(X) \cong R^jF(I) \cong H^j(F(I)) \to F(H^j(I)) \cong F(H^j(X))$$

を得る。以上で (1) が示された。

(2) を示す。(i) を示す。$* = +$ で F が左完全である場合を証明できれば、$\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathcal{D}^{\mathrm{op}}$ を考えることによって $* = -$ で F が右完全である場合も正しいことが従う。よって、(i) を示すためには、$* = +$ で F が左完全であると仮定しても一般性を失わない。(1) の証明と同様に、各 Y^q について自然な $\mathcal{E}$ の射 $H^p_I(F(X, Y^q)) \to F(H^p(X), Y^q)$ を得る。これらを q に関する複体と考えることで、(1) の証明と同様に、各 p, q について自然な $\mathcal{E}$ の可換図式

$$\begin{tikzcd}
H^q(H^p_I(F(X,Y))) \arrow[r] \arrow[d] & H^q(F(H^p(X),Y)) \arrow[d] \\
H^p(F(X, H^q(Y))) \arrow[r] & F(H^p(X), H^q(Y))
\end{tikzcd}$$

を得る。$Z \in \mathsf{Ch}^{2,+}(\mathcal{E})$ を二重複体とする。複体の射 $\mathrm{Tot}(Z) \to Z^q_{II}[-p]$ で $n = p+q$ 次のコホモロジーをとれば $\mathcal{E}$ の射 $H^n(\mathrm{Tot}(Z)) \to H^p_I(Z)$ を得る。$H^p_I(Z^{\bullet,*})$ は $*$ に関して複体を成し、合成 $H^n(\mathrm{Tot}(Z)) \to H^p_I(Z^{\bullet,q}) \to H^p_I(Z^{\bullet,q+1})$ は 0-射である。従って、$\mathcal{E}$ の射 $H^n(\mathrm{Tot}(Z)) \to H^q(H^p_I(Z))$ を得る。よって、もとの二重複体 $F(X, Y)$ に対しても、$\mathcal{E}$ の射 $H^{p+q}(F(X,Y)) \to H^q(H^p_I(F(X,Y)))$ を得る。以上より自然な射 $H^{p+q}(F(X,Y)) \to F(H^p(X), H^q(Y))$ を得る。ここで擬同型 $X \to I, I \in \mathsf{K}^+(\mathcal{I})$ をとれば、$\mathsf{D}^+(\mathcal{E})$ において $RF(X,Y) \cong F(I, Y)$ であるため、よって自然な射

$$H^{p+q}(RF(X,Y)) \cong H^{p+q}(F(X,Y)) \to F(H^p(I), H^q(Y)) \cong F(H^p(X), H^q(Y))$$

を得る。以上で (i) の証明を完了する。

(ii) を示す。(i) の証明と同様にして、$H^q_{II}(H^p_I(F(X,Y))) \cong F(H^p(X), H^q(Y))$ であることが従うので、(ii) を示すためには、$\mathcal{E}$ の二重複体 Z であって $\tau_I^{\leq n}(Z) = \tau_{II}^{\leq n}(Z) = 0, (\forall n \ll 0)$ を満たすものに対して、$H^n(\mathrm{Tot}(Z)) \cong \bigoplus_{p+q=n} H^q_{II}(H^p_I(Z))$ であることを証明することが十分である。しかしこれは、Z として $\tau^{\leq n}(Z)$ をとることで任意の $n \ll 0$ に対して成立し、さらに問題 I.25 (1) を用いることで帰納的に任意の n に対する $\tau^{\leq n}(Z)$ に対して成立するので、$n \to \infty$ の極限をとることで Z に対して成立することが従う。以上で (ii) の証明を完了し、(2) の証明を完了し、問題 I.24 の解答を完了する。 □

問題 I.25. $\mathcal{C}$ をアーベル圏、X を $\mathcal{C}$ の複体で、各 n に対して $X^{p,q} \neq 0, p+q = n$ となる (p,q) は高々有限個であるとする。

(1) 以下の三角形が $\mathsf{D}(\mathcal{C})$ において完全であることを示せ：

$$\mathrm{Tot}(\tau_{II}^{\leq n-1}(X)) \to \mathrm{Tot}(\tau_{II}^{\leq n}(X)) \to H^n_{II}(X)[-n] \xrightarrow{+1},$$
$$H^n_{II}(X)[-n] \to \mathrm{Tot}(\tau_{II}^{\geq n}(X)) \to \mathrm{Tot}(\tau_{II}^{\geq n+1}(X)) \xrightarrow{+1},$$

(2) $k \in \mathbb{Z}$ を固定する。自然な射 $H^k(\mathrm{Tot}(\tau_{II}^{\leq n}(X))) \to H^k(\mathrm{Tot}(X))$ (resp. $H^k(\mathrm{Tot}(X)) \to H^k(\mathrm{Tot}(\tau_{II}^{\geq n}(X))))$ は $n \gg 0$ (resp. $n \ll 0$) に対して同型であることを示せ。

(3) $k \in \mathbb{Z}$ を固定する。$n \ll 0$ に対して $H^k(\mathrm{Tot}(\tau_{II}^{\leq n}(X))) = 0$ であることと、$n \gg 0$ に対して $H^k(\mathrm{Tot}(\tau_{II}^{\geq n}(X))) = 0$ であることを示せ。

証明. (1) を示す。自然な射 $\mathrm{coker}(\tau_{II}^{\leq n-1}(X) \to \tau_{II}^{\leq n}(X)) \to H^n_{II}(X)[-n]$ に本文 [Proposition 1.9.3, KS02] を用いることにより、$\mathrm{Tot}(\mathrm{coker}(\tau_{II}^{\leq n-1}(X) \to \tau_{II}^{\leq n}(X))) \to H^n_{II}(X)[-n]$ が擬同型であることが従い、これは一つ目の三角形が完全三角であることを示している。二つ目の三角形が完全三角であることは $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ において一つ目の三角形が完全三角であることより従う。以上で (1) の証明を完了する。

(2) を示す。$X^{p,q} \neq 0, p+q = k, k-1, k+1$ となる p が存在するような q のうち最大のものを n_0 とすれば、$n > n_0$ と $p+q = k, k-1, k+1$ を満たす任意の p, q に対して $(\tau_{II}^{\leq n}(X))^{p,q} = X^{p,q}$ となり、(2) はこれからただちに従う。以上で (2) の証明を完了する。

(3) を示す。$X^{p,q} \neq 0, p+q = k, k-1, k+1$ となる p が存在するような q のうち最小のものを n_0 とすれば、$n < n_0$ と $p+q = k, k-1, k+1$ を満たす任意の p, q に対して $(\tau_{II}^{\leq n}(X))^{p,q} = X^{p,q} = 0$ となり、(3) はこれからただちに従う。以上で (3) の証明を完了し、問題 I.25 の解答を完了する。 □

問題 I.26. $\mathcal{C}$ をアーベル圏、X を $\mathcal{C}$ の複体で、各 n に対して $X^{p,q} \neq 0, p+q = n$ となる (p,q) は高々有限個であるとする。さらに $q_0 < q_1$ が存在して、$q \neq q_0, q_1$ に対して $\mathsf{D}(\mathcal{C})$ において $H_{II}^q(X) \cong 0$ であると仮定する。このとき次の三角形が完全であることを示せ：

$$H_{II}^{q_0}(X)[-q_0] \to \mathrm{Tot}(X) \to H_{II}^{q_1}[-q_1] \xrightarrow{+1}.$$

証明. 問題 I.25 (1) より、$n \neq q_0, q_1$ に対して $\mathrm{Tot}(\tau_{II}^{\leq n-1}(X)) \to \mathrm{Tot}(\tau_{II}^{\leq n}(X))$ と $\mathrm{Tot}(\tau_{II}^{\geq n}(X)) \to \mathrm{Tot}(\tau_{II}^{\geq n+1}(X))$ はどちらも擬同型である。従って、問題 I.25 (3) より、任意の $n < q_0$ に対して $\mathsf{D}(\mathcal{C})$ において $\mathrm{Tot}(\tau_{II}^{\leq n}(X)) \cong 0$ であり、任意の $n > q_1$ に対して $\mathsf{D}(\mathcal{C})$ において $\mathrm{Tot}(\tau_{II}^{\geq n}(X)) \cong 0$ である。再び問題 I.25 (1) を用いると、任意の $q_0 \leq n < q_1$ に対して $\mathsf{D}(\mathcal{C})$ において $\mathrm{Tot}(\tau_{II}^{\leq n}(X)) \cong H_{II}^{q_0}[-q_0]$ であり、任意の $q_0 < n \leq q_1$ に対して $\mathsf{D}(\mathcal{C})$ において $H_{II}^{q_1}[-q_1] \cong \mathrm{Tot}(\tau_{II}^{\geq n}(X))$ であることが従う。各 n に対して $\tau_{II}^{\leq n}(X) \to X \to \tau_{II}^{\geq n+1}(X) \xrightarrow{+1}$ は $\mathsf{D}(\mathsf{Ch}(\mathcal{C}))$ の完全三角なので、

$$\mathrm{Tot}(\tau_{II}^{\leq n}(X)) \to \mathrm{Tot}(X) \to \mathrm{Tot}(\tau_{II}^{\geq n+1}(X)) \xrightarrow{+1}$$

は $\mathsf{D}(\mathcal{C})$ の完全三角である。$n = q_0$ とすると、$n+1 \leq q_1$ であるので、従って

$$H_{II}^{q_0}[-q_0] \to \mathrm{Tot}(X) \to H_{II}^{q_1}[-q_1] \xrightarrow{+1}$$

は $\mathsf{D}(\mathcal{C})$ の完全三角である。以上で問題 I.26 の解答を完了する。 □

問題 I.27. $\mathcal{C}$ をアーベル圏 (resp. 三角圏) とする。

$$K(\mathcal{C}) :\overset{\mathrm{def}}{=} \left(\bigoplus_{X \in \mathcal{C}} \mathbb{Z} \cdot [X] \right) / ([X] = [X'] + [X''])$$

と定義する。ただしここで $[X]$ は $\mathcal{C}$ の対象の同型類を表し、商はすべての完全列 $0 \to X' \to X \to X'' \to 0$ (resp. 完全三角 $X' \to X \to X'' \xrightarrow{+1}$) に渡ってとるものとする。$K(\mathcal{C})$ を $\mathcal{C}$ の **Grothendieck 群**と言う。$\mathcal{C}$ をアーベル圏とする。$i : \mathcal{C} \to \mathsf{D}^b(\mathcal{C})$ は群の同型 $K(\mathcal{C}) \xrightarrow{\sim} K(\mathsf{D}^b(X))$ を引き起こすことを示せ。また、逆射が $\varphi : X \mapsto \sum_j (-1)^j [H^j(X)]$ により与えられることを示せ。

証明. $\mathcal{C}$ の完全列 $0 \to X' \to X \to X'' \to 0$ を i で送れば $\mathsf{D}^b(\mathcal{C})$ の完全三角 $X' \to X \to X'' \xrightarrow{+1}$ を得るので、$[X] \mapsto [i(X)]$ によって $K(\mathcal{C}) \to K(\mathsf{D}^b(\mathcal{C}))$ が well-defined に定義される。さらに $X' \to X \to X'' \xrightarrow{+1}$ が $\mathsf{D}^b(\mathcal{C})$ の完全三角であれば、コホモロジーをとることで長い完全列

$$\cdots \to H^i(X') \to H^i(X) \to H^i(X'') \to \cdots$$

を得るので、従って $\sum_j (-1)^j [H^j(X)] = \sum_j (-1)^j [H^j(X')] + \sum_j (-1)^j [H^j(X'')]$ が従い、φ も well-defined である。$\varphi \circ i = \mathrm{id}_{K(\mathcal{C})}$ は明らかであるから、$i \circ \varphi = \mathrm{id}_{K(\mathsf{D}^b(\mathcal{C}))}$ であることを確認する。一般に、完全三角

$X' \to X \to X'' \xrightarrow{+1}$ に対して三角形 $X \to X'' \to X'[1] \xrightarrow{+1}$ も完全であることから $[X''] = [X] + [X'[1]]$ かつ $[X] = [X'] + [X'']$ であることが従い、$[X'[1]] = [X''] - [X] = -([X] - [X'']) = -[X']$ であることが従う。よって任意の $X \in \mathsf{D}^b(\mathcal{C})$ に対して $[X[1]] = -[X]$ である。ある n で $(i \circ \varphi)([\tau^{\leq n}(X)]) = [\tau^{\leq n}(X)]$ が成り立つと仮定する (これは十分小さい n に対して明らかに成り立つ)。三角形 $\tau^{\leq n}(X) \to \tau^{\leq n+1}(X) \to H^{n+1}(X)[-n-1] \xrightarrow{+1}$ が完全であることから、

$$
\begin{aligned}
[\tau^{\leq n+1}(X)] &= [i(H^{n+1}(X))[-n-1]] + [\tau^{\leq n}(X)] \\
&= (-1)^{n+1} i([H^{n+1}(X)]) + (i \circ \varphi)([\tau^{\leq n}(X)]) \\
&= (-1)^{n+1} i([H^{n+1}(X)]) + \sum_j (-1)^j i([H^j(\tau^{\leq n}(X))]) \\
&= (-1)^{n+1} i([H^{n+1}(X)]) + \sum_{j \leq n} (-1)^j i([H^j(X)]) \\
&= \sum_{j \leq n+1} (-1)^j i([H^j(X)]) \\
&= \sum_j (-1)^j i([H^j(\tau^{\leq n+1}(X))]) \\
&= (i \circ \varphi)([\tau^{\leq n+1}(X)])
\end{aligned}
$$

が従う。帰納法により、任意の n で $(i \circ \varphi)([\tau^{\leq n}(X)]) = [X]$ であることが従う。$X \in \mathsf{D}^b(\mathcal{C})$ であるので、十分大きい n を考えることで $(i \circ \varphi)([X]) = [X]$ が従う。以上で $i \circ \varphi = \mathrm{id}_{K(\mathsf{D}^b(\mathcal{C}))}$ であることが従い、問題 I.27 の証明を完了する。 □

問題 I.28. A を環とする。以下の条件が同値であることを証明せよ：

(1) $\mathsf{Mod}(A)$ はホモロジー次元 $\leq n$ を持つ。
(2) 任意の左 A-加群 M は長さ n 以下の入射分解を持つ。
(3) 任意の左 A-加群 M は長さ n 以下の射影分解を持つ。

$\mathsf{Mod}(A)$ のホモロジー次元か $\mathsf{Mod}(A^{\mathrm{op}})$ のホモロジー次元のうち大きい方を A の**大域ホモロジー次元** (global homological dimension) と言い、$\mathrm{gld}(A)$ と表す。

証明. 問題 I.17 (1) $\Leftrightarrow$ (2) より (1) $\Leftrightarrow$ (2) であることが従う。さらに $\mathcal{C}$ のホモロジー次元は定義より $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ のホモロジー次元と等しいので、$\mathsf{Mod}(A)^{\mathrm{op}}$ で考えると、再び問題 I.17 (1) $\Leftrightarrow$ (2) より (1) $\Leftrightarrow$ (3) であることが従う。以上で問題 I.28 の解答を完了する。 □

問題 I.29. A を環とする。

(1) 任意の自由加群は射影的であることを示せ。
(2) 任意の射影加群はある自由加群の直和因子であることを示せ。
(3) 射影加群は平坦加群であることを示せ。
(4) $n \geq 0$ を自然数とする。以下の条件が同値であることを示せ：
  (i) 任意の右 A-加群 N と任意の左 A-加群 M と任意の $j > n$ に対して $\mathrm{Tor}_j^A(N, M) = 0$ である。
  (ii) 任意の左 A-加群 M に対して完全列 $0 \to P^n \to \cdots \to P^0 \to M \to 0$ であって各 P^i が平坦加群となるものが存在する。
  (iii) 任意の右 A-加群 M に対して完全列 $0 \to P^n \to \cdots \to P^0 \to M \to 0$ であって各 P^i が平坦加群

となるものが存在する。

これらの同値な条件を満たす最小の $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ を $\mathrm{wgld}(A)$ と表し、A の**弱大域次元** (weak global dimension) という。

(5) $\mathrm{wgld}(A) \le \mathrm{gld}(A)$ であることを示せ。

証明. (1) は函手の同型 $\mathrm{Hom}_A(A^{\oplus I}, -) \cong \prod_I(-)$ より従う。

(2) を示す。P を射影加群として全射 $p : A^{\oplus I} \to P$ をとる。P が射影加群であることから射 $\mathrm{id}_P : P \to P$ がリフトして $p \circ s = \mathrm{id}_P$ となる $s : P \to A^{\oplus I}$ が存在する。よって問題 I.4 (†) より P は $A^{\oplus I}$ の直和因子である。以上で (2) の証明を完了する。

(3) を示す。P を射影加群として、P が直和因子となるように射 $i : P \to A^{\oplus I}$ をとる。$p : A^{\oplus I} \to P$ を i の左逆射、つまり $p \circ i = \mathrm{id}_P$ となる射とする。$f : M \to N$ を A-加群の単射とする。(3) を示すためには、$f \otimes_A \mathrm{id}_P$ が単射であることを示すことが十分である。可換図式

$$\begin{tikzcd}
M \otimes_A P \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes i"] \arrow[d, "f \otimes \mathrm{id}"'] & M \otimes_A A^{\oplus I} \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes p"] \arrow[d, "f \otimes \mathrm{id}"'] & M \otimes_A P \arrow[d, "f \otimes \mathrm{id}"] \\
N \otimes_A P \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes i"] & N \otimes_A A^{\oplus I} \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes p"] & N \otimes_A P
\end{tikzcd}$$

において、上と下の合成は id であり、$M \otimes_A A^{\oplus I} \cong M^{\oplus I}$ より真ん中は単射である。従って両端も単射であることが従う。以上で (3) の証明を完了する。

(4) を示す。(i) ⇔ (ii) を示すことができれば、A^{op} に対して (i) ⇔ (ii) を適用することで (i) ⇔ (iii) が従う。残っているのは (i) ⇔ (ii) を示すことである。

(i) が成り立つと仮定する。自由分解 $\cdots \to P^n \xrightarrow{d_P^n} \cdots \to P^0 \xrightarrow{d_P^0} M \to 0$ を一つとる。任意の N と $j > n$ に対して $\mathrm{Tor}_j^A(N, M) = 0$ が成り立つので、とくに任意の N と $j > n-1$ に対して $\mathrm{Tor}_j^A(N, \ker(d_P^0)) = 0$ が成り立つ。$\ker(d_P^0) \cong \mathrm{Im}(d_P^1)$ に注意して繰り返すと、繰り返して、任意の N と任意の $j > 0$ に対して $\mathrm{Tor}_j^A(N, \ker(d_P^{n-1})) = 0$ が成り立つ。このことは $\ker(d_P^{n-1})$ が平坦であることを意味していて、完全列 $0 \to \ker(d_P^{n-1}) \to P^{n-1} \to \cdots \to P^0 \to M \to 0$ は M の長さ n 以下の平坦分解である。以上で (i) ⇒ (ii) が示された。

(ii) が成り立つと仮定する。任意に左 A-加群 M と右 A-加群 N と $j > n$ をとる。仮定より M の平坦分解 $0 \to P^n \xrightarrow{d_P^n} \cdots \to P^0 \xrightarrow{d_P^0} M \to 0$ が存在する。P^n, P^{n-1} は平坦であるから、完全列 $0 \to P^n \to P^{n-1} \to \mathrm{Im}(d_P^{n-1}) \to 0$ に $N \otimes_A (-)$ を施すことで、任意の $j > 1$ に対して $\mathrm{Tor}_j^A(N, \mathrm{Im}(d_P^{n-1})) = 0$ であることが従う。完全列 $0 \to \mathrm{Im}(d_P^{n-1}) \to P^{n-2} \to \mathrm{Im}(d_P^{n-2}) \to 0$ に $N \otimes_A (-)$ を施すことで、任意の $j > 2$ に対して $\mathrm{Tor}_j^A(N, \mathrm{Im}(d_P^{n-2})) = 0$ であることが従う。帰納的に、任意の $j > k$ に対して $\mathrm{Tor}_j^A(N, \mathrm{Im}(d_P^{n-k})) = 0$ であることが従う。$n = k$ とすれば所望の結論を得る。以上で (ii) ⇒ (i) が示され、(4) の証明を完了する。

(5) は問題 I.28 (1) ⇔ (3) と (3) より従う。以上で問題 I.29 の解答を完了する。 □

問題 I.30. A を可換環とする。$X \in \mathsf{D}^b(\mathsf{Mod}(A))$ が **perfect** であるとは、有限生成射影加群からなる有界な複体と擬同型であることを言う。

(1) $X \to Y \to Z \xrightarrow{+1}$ が $\mathsf{D}^b(\mathsf{Mod}(A))$ の完全三角であるとする。X, Y が perfect であるとき、Z も perfect であることを示せ。

(2) P が perfect であるとき、P の直和因子も perfect であることを示せ。

(3) $X \in \mathsf{D}^b(\mathsf{Mod}(A))$ が perfect であるとする。$X^* \overset{\mathrm{def}}{:=} R\mathrm{Hom}(X, A)$ とおくと、X^* も perfect であり、

自然な射 $X \to X^{**}$ は同型射であることを示せ。

(4) A をネーター環で $\mathrm{gld}(A) < \infty$ と仮定する。$\mathsf{Mod}^f(A)$ を有限生成 A-加群のなすアーベル圏とする。$\mathsf{D}^b(\mathsf{Mod}^f(A))$ の任意の対象は perfect であることを示せ。

(5) A をネーター環で $\mathrm{gld}(A) < \infty$ と仮定する。すべてのコホモロジーが $\mathsf{Mod}^f(A)$ に属する複体からなる充満部分圏を $\mathsf{D}^b_f(\mathsf{Mod}(A)) \subset \mathsf{D}^b(\mathsf{Mod}(A))$ で表す。このとき自然な射 $\mathsf{D}^b(\mathsf{Mod}^f(A)) \to \mathsf{D}^b_f(\mathsf{Mod}(A))$ は圏同値であることを示せ。

証明. (1) を示す。X, Y は perfect なので、(1) を示すためには、X, Y はどちらも有限生成射影加群からなる有界複体であると仮定しても一般性を失わない。このとき Z は i 次が $Y^i \oplus X^{i+1}$ である複体と擬同型であり、Y^i, X^{i+1} はどちらも有限生成射影加群なので $Y^i \oplus X^{i+1}$ も有限生成射影加群である。従って、Z も perfect である。以上で (1) の証明を完了する。

(2) より先に (3) を示す。X は perfect であるから、(3) を示すためには、各 i に対して X^i は有限生成射影加群であり、$X^i = 0, (|i| \gg 0)$ であると仮定しても一般性を失わない。このとき本文 [Proposition 1.10.4, KS02] より、$\mathsf{D}^b(\mathsf{Mod}(A))$ において $R\mathrm{Hom}(X, A) \cong \mathrm{Hom}(X, A)$ である。各 i に対して $\mathrm{Hom}(X, A)^i = \mathrm{Hom}(X^{-i}, A)$ は射影加群であり、$|i| \gg 0$ となる i に対して $\mathrm{Hom}(X, A)^i = \mathrm{Hom}(X^{-i}, A) = 0$ であるから、$\mathrm{Hom}(X, A)$ は perfect であり、従って $R\mathrm{Hom}(X, A)$ も perfect である。有限生成射影加群 X に対して自然な射 $X \to \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(X, A), A)$ が同型射であることから自然な射 $X \to \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(X, A), A)$ は複体の同型射であり、従って $\mathsf{D}^b(\mathsf{Mod}(A))$ においても同型射である。$\mathrm{Hom}(X, A) \cong R\mathrm{Hom}(X, A)$ は perfect であるので、$X^{**} \cong \mathrm{Hom}(X^*, A) \cong \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(X, A), A)$ であり、従って自然な射 $X \to X^{**}$ は同型射である。以上で (3) の証明を完了する。

(4) を示す。任意の有限生成加群は有限生成自由加群のある商と同型であるから、アーベル圏 $\mathsf{Mod}^f(A)^{\mathrm{op}}$ は $\mathcal{I}$ を有限生成射影加群からなる充満部分圏とするときに本文の条件 [(1.7.5), KS02] を満たす。また $\mathrm{gld}(A) < \infty$ であるから、問題 I.28 より、アーベル圏 $\mathsf{Mod}^f(A)^{\mathrm{op}}$ は同じ $\mathcal{I}$ に対して本文の条件 [(1.7.6), KS02] を満たす。従って本文の [Corollary 1.7.8, KS02] より (4) が従う。以上で (4) の証明を完了する。

(5) は $\mathsf{Mod}(A)^{\mathrm{op}}$ とその thick full abelian subcategory $\mathsf{Mod}^f(A)^{\mathrm{op}} \subset \mathsf{Mod}(A)^{\mathrm{op}}$ に対して本文 [Proposition 1.7.11, KS02] を適用することにより直ちに従う ($\mathsf{Mod}^f(A)^{\mathrm{op}}$ が本文 [Proposition 1.7.11, KS02] の条件を満たすことは容易に確認できる)。 □

問題 I.31. $M \in \mathsf{D}^b(\mathsf{Ab})$ とする。

(1) $M^* = R\mathrm{Hom}(M, \mathbb{Z}) = 0$ であるとき、$M = 0$ であることを示せ。

(2) $M^* \in \mathsf{D}^b_f(\mathsf{Ab})$ であるとき、$M \in \mathsf{D}^b_f(\mathsf{Ab})$ であることを示せ。

注意. (2) は $M^* \in \mathsf{D}^b(\mathsf{Mod}^f(\mathbb{Z}))$ という仮定のもとで $M \in \mathsf{D}^b(\mathsf{Mod}^f(\mathbb{Z}))$ を示す問題であったが、$\mathsf{D}^b(\mathsf{Mod}^f(\mathbb{Z}))$ は $\mathsf{D}^b(\mathsf{Ab})$ の部分圏として同型で閉じていないので、これはかなり微妙な問題設定であり (成り立たないかもしれない)、上記の設定がより適切であると思われる。

証明. (1) を示す。まず $M \in \mathsf{Ab}$ である場合に (1) を証明する。$R\mathrm{Hom}(M\mathbb{Z}) = 0$ は $\mathrm{Hom}(M, \mathbb{Z}) = \mathrm{Ext}^1(M, \mathbb{Z}) = 0$ を意味する。このときに $M = 0$ を示す。単射 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to M$ を任意にとると $0 = \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Z}) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ は全射となるので $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = 0$ となって $n = 1$ となる。従って M はねじれなし群である。$n \neq 0, 1, -1$ とすれば M/nM はねじれ群であるが、完全列 $0 \to M \xrightarrow{n} M \to M/nM \to 0$ に函手 $R\mathrm{Hom}(-, \mathbb{Z})$ を施すことによって $R\mathrm{Hom}(M/nM, \mathbb{Z}) = 0$ が従

い、よって M/nM はねじれなし群でもある。これは $M/nM=0$ を意味し、従って M は可除である。M はねじれがないので $M\to M\otimes\mathbb{Q}$ は単射であり、M は可除なのでこれは全射でもある。従って $M\cong M\otimes\mathbb{Q}$ である。もし $M\neq 0$ なら、M は $\mathbb{Q}$ を直和因子として持つ。一方、完全列 $0\to\mathbb{Z}\to\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}/\mathbb{Z}\to 0$ に $\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z},-)$ を適用することにより、$\hat{\mathbb{Z}}\cong\mathrm{End}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})\xrightarrow{\sim}\mathrm{Ext}^1(\mathbb{Q}/\mathbb{Z},\mathbb{Z})$ を得るので、同じ完全列に $\mathrm{Hom}(-,\mathbb{Z})$ を適用することで $\mathrm{Ext}^1(\mathbb{Q},\mathbb{Z})\cong\mathrm{coker}(\mathrm{Hom}(\mathbb{Z},\mathbb{Z})\to\mathrm{Ext}^1(\mathbb{Q}/\mathbb{Z},\mathbb{Z}))\cong\hat{\mathbb{Z}}/\mathbb{Z}\neq 0$ が従い、これは $\mathrm{Ext}^1(M,\mathbb{Z})=0$ に反する。以上で $M\in\mathsf{Ab}$ の場合に示された。

一般の $M\in\mathsf{D}^b(\mathsf{Ab})$ に対して (1) を示す。$H^n(M)\neq 0$ となる最大の n をとる。このとき $\tau^{\leq n-1}(M)\to M\to H^n(M)[-n]\xrightarrow{+1}$ は完全三角である。$R\mathrm{Hom}(-,\mathbb{Z})$ を適用してコホモロジーをとることで、アーベル群の完全列

$$\begin{aligned}0\longrightarrow\mathrm{Hom}(H^n(M),\mathbb{Z})&\longrightarrow H^n(R\mathrm{Hom}(M,\mathbb{Z}))\longrightarrow H^n(R\mathrm{Hom}(\tau^{\leq n-1}(M),\mathbb{Z}))\\ \longrightarrow\mathrm{Ext}^1(H^n(M),\mathbb{Z})&\longrightarrow H^{n+1}(R\mathrm{Hom}(M,\mathbb{Z}))\longrightarrow\cdots\end{aligned}$$

を得る。ここで、$R\mathrm{Hom}(M,\mathbb{Z})=0$ であるから、$H^n(R\mathrm{Hom}(M,\mathbb{Z}))=0, H^{n+1}(R\mathrm{Hom}(M,\mathbb{Z}))=0$ が成り立つ。さらに、問題 I.21 を $\tau^{\leq n-1}(M)$ と $R\mathrm{Hom}(-,\mathbb{Z})$ に対して適用することによって、$H^n(R\mathrm{Hom}(\tau^{\leq n-1}(M),\mathbb{Z}))=0$ であることが従う。従って $\mathrm{Hom}(H^n(M),\mathbb{Z})=\mathrm{Ext}^1(H^n(M),\mathbb{Z})=0$ が成り立つ。すでに示している $M\in\mathsf{Ab}$ の場合により $H^n(M)=0$ が従い、これは $H^n(M)\neq 0$ に矛盾する。以上で (1) の証明を完了する。

(2) を示す。(1) の証明と同様に、$H^n(M)\neq 0$ となる最大の n をとり、アーベル群の完全列

$$\begin{aligned}0\longrightarrow\mathrm{Hom}(H^n(M),\mathbb{Z})&\longrightarrow H^n(R\mathrm{Hom}(M,\mathbb{Z}))\longrightarrow H^n(R\mathrm{Hom}(\tau^{\leq n-1}(M),\mathbb{Z}))\\ \longrightarrow\mathrm{Ext}^1(H^n(M),\mathbb{Z})&\longrightarrow H^{n+1}(R\mathrm{Hom}(M,\mathbb{Z}))\longrightarrow H^{n+1}(R\mathrm{Hom}(\tau^{\leq n-1}(M),\mathbb{Z}))\\ \longrightarrow 0&\end{aligned}$$

について考える ($\mathrm{Ext}^2(H^n(M),\mathbb{Z})=0$ であることに注意)。問題 I.21 を $\tau^{\leq n-1}(M)$ と $R\mathrm{Hom}(-,\mathbb{Z})$ に適用することにより、$H^n(R\mathrm{Hom}(\tau^{\leq n-1}(M),\mathbb{Z}))=0$ である。また、$R\mathrm{Hom}(M,\mathbb{Z})\in\mathsf{D}^b_f(\mathsf{Mod}(\mathbb{Z}))$ であるので、$H^n(R\mathrm{Hom}(M,\mathbb{Z})),H^{n+1}(R\mathrm{Hom}(M,\mathbb{Z}))\in\mathsf{Mod}^f(\mathbb{Z})$ である。従って、

$$\mathrm{Hom}(H^n(M),\mathbb{Z}),\ \mathrm{Ext}^1(H^n(M),\mathbb{Z}),\ H^{n+1}(R\mathrm{Hom}(\tau^{\leq n-1}(M),\mathbb{Z}))\ \in\mathsf{Mod}^f(\mathbb{Z})$$

である。さらに、n より大きい部分のコホモロジーを見れば、

$$H^m(R\mathrm{Hom}(\tau^{\leq n-1}(M),\mathbb{Z}))\cong H^m(R\mathrm{Hom}(M,\mathbb{Z})),\ (\forall m>n+1)$$

であるので、$R\mathrm{Hom}(\tau^{\leq n-1}(M),\mathbb{Z})\in\mathsf{Mod}^f(\mathbb{Z})$ が従う。以上より、帰納的に、(2) を示すためには、アーベル群 M が $\mathrm{Hom}(M,\mathbb{Z}),\mathrm{Ext}^1(M,\mathbb{Z})\in\mathsf{Mod}^f(\mathbb{Z})$ を満たすとき $M\in\mathsf{Mod}^f(\mathbb{Z})$ であることを示すことが十分である。

M をアーベル群であって $\mathrm{Hom}(M,\mathbb{Z})$ と $\mathrm{Ext}^1(M,\mathbb{Z})$ がどちらも有限生成であると仮定する。ねじれ部分を $T(M)\subset M$ として、$F(M):\overset{\mathrm{def}}{=}M/T(M)$ とおく。完全列 $0\to T(M)\to M\to F(M)\to 0$ に $\mathrm{Hom}(-,\mathbb{Z})$ を適用することにより、全射 $\mathrm{Ext}^1(M,\mathbb{Z})\to\mathrm{Ext}^1(T(M),\mathbb{Z})$ を得る。従って、$\mathrm{Ext}^1(T(M),\mathbb{Z})$ は有限生成アーベル群である。完全列 $0\to\mathbb{Z}\to\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}/\mathbb{Z}\to 0$ に $\mathrm{Hom}(T(M),-)$ を適用することにより、自然な同型 $\mathrm{Hom}(T(M),\mathbb{Q}/\mathbb{Z})\xrightarrow{\sim}\mathrm{Ext}^1(T(M),\mathbb{Z})$ を得る。$T(M)$ に離散位相を入れて $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ に $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ の双対位相を入れることにより、$\mathrm{Hom}(T(M),\mathbb{Q}/\mathbb{Z})=\mathrm{Hom}_{\mathrm{cont.}}(T(M),\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ を連続準同型のなす位相群とみなすと、$\mathrm{Hom}_{\mathrm{cont.}}(T(M),\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ は副有限アーベル群である。とくにコンパクトハウスドルフである。一方、

$\mathrm{Ext}^1(T(M),\mathbb{Z})\cong \mathrm{Hom}(T(M),\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ はアーベル群として有限生成であるので、$\mathrm{Hom}_{\mathrm{cont.}}(T(M),\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ は有限アーベル群であることが従う。Pontryagin 双対より、$T(M)\cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont.}}(\mathrm{Hom}_{\mathrm{cont.}}(T(M),\mathbb{Q}/\mathbb{Z}),\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(T(M),\mathbb{Q}/\mathbb{Z}),\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ が成り立つ。以上より、$T(M)$ は有限生成ねじれアーベル群である。

n 倍写像 $n: F(M)\to F(M)$ を考えると、$F(M)$ はねじれなし群なので、これは単射である。従って、n 倍写像

$$\mathrm{Ext}^1(F(M),\mathbb{Z})\xrightarrow{n}\mathrm{Ext}^1(F(M),\mathbb{Z})$$

は全射であり、$\mathrm{Ext}^1(F(M),\mathbb{Z})$ が可除群であることが従う。n-倍写像 $n: M\to M$ を考えると、完全列

$$0\to \mathrm{Hom}(M/nM,\mathbb{Z})\to \mathrm{Hom}(M,\mathbb{Z})\xrightarrow{n}\mathrm{Hom}(M,\mathbb{Z})$$

を得る。M/nM はねじれ群なので $\mathrm{Hom}(M/nM,\mathbb{Z})=0$ であり、従って $\mathrm{Hom}(M,\mathbb{Z})$ はねじれなし群である。仮定より、$\mathrm{Hom}(M,\mathbb{Z})$ は有限生成なので、従って自由アーベル群である。ランクを $r=\mathrm{rank}(\mathrm{Hom}(M,\mathbb{Z}))$ と置く。r に関する帰納法により M の有限生成性を証明する。

まず $r=0$ の場合について考える。このとき、$\mathrm{Hom}(M,\mathbb{Z})=0$ であり、$\mathrm{Ext}^1(M,\mathbb{Z})$ は有限生成である。完全列

$$0\to T(M)\to M\to F(M)\to 0$$

により得られる完全列

$$\begin{aligned}0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(F(M),\mathbb{Z}) &\longrightarrow \mathrm{Hom}(M,\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(T(M),\mathbb{Z})\\ \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(F(M),\mathbb{Z}) &\longrightarrow \mathrm{Ext}^1(M,\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(T(M),\mathbb{Z}) \longrightarrow 0\end{aligned}$$

について考える。$T(M)$ はねじれ群なので、$\mathrm{Hom}(T(M),\mathbb{Z})=0$ が成り立つ。よって $\mathrm{Ext}^1(F(M),\mathbb{Z})\to \mathrm{Ext}^1(M,\mathbb{Z})$ は単射である。$\mathrm{Ext}^1(M,\mathbb{Z})$ は有限生成なので、$\mathrm{Ext}^1(F(M),\mathbb{Z})$ も有限生成である。一方、$\mathrm{Ext}^1(F(M),\mathbb{Z})$ は可除群なので、従って $\mathrm{Ext}^1(F(M),\mathbb{Z})=0$ が成り立つ。さらに、$r=0$ であるという仮定より、$\mathrm{Hom}(M,\mathbb{Z})=0$ であるので、$\mathrm{Hom}(F(M),\mathbb{Z})=0$ が成り立つ。ここで (1) より、$F(M)=0$ が従う。よって $T(M)\xrightarrow{\sim} M$ は同型射であり、既に示した $T(M)$ の有限生成性より、M も有限生成である。以上で $r=0$ の場合の証明を完了する。

$r>0$ とする。$\mathrm{Hom}(M,\mathbb{Z})$ のランクが $r-1$ 以下であるような任意の M について主張が成り立つと仮定する。この仮定のもとで、$\mathrm{Hom}(M,\mathbb{Z})$ のランクが r であるような任意の M に対して主張を示す。$\mathrm{Hom}(M,\mathbb{Z})$ のランクが r であるとする。$\mathrm{Hom}(M,\mathbb{Z})\neq 0$ であるので、0 でない射 $f: M\to\mathbb{Z}$ が存在する. $f\neq 0$ なので、ある $m\in M$ が存在して $f(m)\neq 0$ が成り立つ。ここで $1\mapsto m$ により定義される射 $\mathbb{Z}\to M$ を考えると、任意の 0 でない $n\in\mathbb{Z}$ に対して $f(nm)=nf(m)\neq 0$ であることから、$\mathbb{Z}\to M$ は単射である。この単射の余核を M_1 として、完全列

$$0\longrightarrow \mathbb{Z}\xrightarrow{1\mapsto m} M\longrightarrow M_1\longrightarrow 0$$

により得られる完全列

$$\begin{aligned}0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(M_1,\mathbb{Z}) &\longrightarrow \mathrm{Hom}(M,\mathbb{Z}) \xrightarrow{f\mapsto f(m)} \mathrm{Hom}(\mathbb{Z},\mathbb{Z})\\ \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(M_1,\mathbb{Z}) &\longrightarrow \mathrm{Ext}^1(M,\mathbb{Z}) \longrightarrow 0\end{aligned}$$

を考える。$\mathrm{Hom}(M,\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}^r$ であるので、$\mathrm{Hom}(M_1,\mathbb{Z})$ はねじれなしであり、従って自由アーベル群である。また、$f(m)\neq 0$ であるので、$\mathrm{Hom}(M_1,\mathbb{Z})$ のランクは $r-1$ 以下である。さらに、$\mathrm{Ext}^1(M,\mathbb{Z})$ は有限生成であるので、$\mathrm{Ext}^1(M_1,\mathbb{Z})$ も有限生成である。ここで帰納法の仮定より、M_1 が有限生成であることが従う。よって M も有限生成である。以上で (2) の証明を完了し問題 I.31 の解答を完了する。 □

問題 I.32. k を体、$X \in \mathsf{D}^b(\mathsf{Mod}(k))$ とする。$X^* :\overset{\text{def}}{=} R\operatorname{Hom}(X,k)$ とおく (微分が本文 [Remark 1.8.11, KS02] で与えられることを思い出そう)。

(1) $X \in \mathsf{D}^b_f(\mathsf{Mod}(k))$ と仮定する。以下の自然な同型が存在することを示せ：

$$X \xrightarrow{\sim} X^{**} \quad , \quad X^* \otimes X \xrightarrow{\sim} R\operatorname{Hom}(X,X).$$

さらに、$(X^n)^* \otimes X^n \to k$ の直和として射 $X^* \otimes X \to k$ を構成せよ。

(2) $X \in \mathsf{D}^b_f(\mathsf{Mod}(k))$ と $v \in \operatorname{Hom}(X,X)$ に対して

$$\operatorname{tr}(v) :\overset{\text{def}}{=} \sum_j (-1)^j \operatorname{tr}(H^j(v))$$

と定義する。ここで $\operatorname{tr}(H^j(v))$ は自己準同型 $H^j(v) : H^j(X) \to H^j(X)$ のトレースである。$Y \in \mathsf{K}^b(\mathsf{Mod}^f(k))$ として、$v \in \operatorname{Hom}_{\mathsf{K}^b(\mathsf{Mod}^f(k))}(Y,Y)$ とする。以下の等式を示せ：

$$\operatorname{tr}(v) = \sum_j (-1)^j \operatorname{tr}(v^j).$$

(3) $\mathsf{D}^b_f(\mathsf{Mod}(k))$ の完全三角の間の自己射

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r] \arrow[d, "v'"'] & X \arrow[r] \arrow[d, "v"'] & X'' \arrow[r] \arrow[d, "v''"'] & {} \\
X' \arrow[r] & X \arrow[r] & X'' \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

に対して、$\operatorname{tr}(v) = \operatorname{tr}(v') + \operatorname{tr}(v'')$ が成り立つことを示せ。

(4) (2) の状況設定において、$\operatorname{tr}(v)$ が v の

$$H^0(R\operatorname{Hom}(X,X)) \cong H^0(X^* \otimes X) \to k$$

による像と一致することを示せ。$X \in \mathsf{D}^b_f(\mathsf{Mod}(k))$ に対して

$$\chi(X) :\overset{\text{def}}{=} \sum_j (-1)^j \dim H^j(X)$$

とおく。k において $\chi(X) = \operatorname{tr}(\mathrm{id}_X)$ が成り立つ。

証明. (1) を示す。k は体なので、問題 I.30 (5) より X は perfect であり、従って、一つ目の同型は問題 I.30 (3) より従う。自然な同型射 $(X^{-m})^* \otimes X^n \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}(X^{-m}, X^n)$ を並べることによって、二重複体の同型射 $X^* \otimes X \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}(X,X)$ を得る。Tot を取ることによって複体の同型射 $X^* \otimes X \xrightarrow{\sim} R\operatorname{Hom}(X,X)$ を得る。これが二つ目の同型である。最後の自然な射を構成する。0 次の部分は各 $n \in \mathbb{Z}$ に対して自然な射 $(X^*)^{-n} \otimes X^n = (X^n)^* \otimes X^n \to k$ を直和することにより得られる射 $(X^* \otimes X)^0 \to k$ で、他の次数は 0 射とすることにより、複体の射 $X^* \otimes X \to k$ が well-defined に定義されることを示す。そのためには、これらの射が複体 $X^* \otimes X$ と k (これは 0 次部分のみに k があり他で 0 となる複体を表す) の微分と可換することを示すことが十分である。射

$$\begin{aligned}
(X^*)^{-n} \otimes X^{n-1} &\to (X^*)^{-n} \otimes X^n \to k \\
(X^*)^{-n} \otimes X^{n-1} &\to (X^*)^{-n+1} \otimes X^{n-1} \to k
\end{aligned}$$

について考える。ただしここで、最後の k への射は $(f,x)\mapsto f(x)$ により与えられる自然な射 $((X^*)^{-n}=(X^n)^*$ に注意せよ) であり、はじめの射は本文 [式 (1.9.3), KS02] により定義される、Tot の微分を与える射である。上の二つの射の合成は $(f,x)\in(X^*)^{-n}\otimes X^{n-1}$ が

$$(f,x)\mapsto(f,(-1)^{-n}d^{n-1}(x))\mapsto(-1)^n f(d^{n-1}(x))$$

と写る射である。微分 $(X^*)^{-n}\to(X^*)^{-n+1}$ は $(-1)^{n-1}d^{n-1}:X^{n-1}\to X^n$ を合成することにより与えられているので (cf. 本文 [Remark 1.8.11, KS02])、下の二つの射の合成は $(f,x)\in(X^*)^{-n}\otimes X^{n-1}$ が

$$(f,x)\mapsto((-1)^{n-1}(f\circ d^{n-1}),x)\mapsto(-1)^{n-1}f(d^{n-1}(x))$$

と写る射である。$(-1)^n f(d^{n-1}(x))+(-1)^{n-1}f(d^{n-1}(x))=0$ であるため、従って、$X^*\otimes X\to k$ は複体の射である。以上で (1) の証明を完了する。

(2) を示す。有限次元 k-線形空間の完全列の自己準同型

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & V_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"'] & V_2 \arrow[r] \arrow[d, "f_2"'] & V_3 \arrow[r] \arrow[d, "f_3"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & V_1 \arrow[r] & V_2 \arrow[r] & V_3 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

があると、f_1,f_3 の上三角化を与える V_1,V_3 の基底により f_2 の上三角化が与えられる。従って $\mathrm{tr}(f_2)=\mathrm{tr}(f_1)+\mathrm{tr}(f_3)$ が成り立つ。完全列の射

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^n(Y) \arrow[r] \arrow[d, "H^n(v)"'] & \mathrm{coker}(d_Y^{n-1}) \arrow[r] \arrow[d, "C^{n-1}(v)"'] & \ker(d_Y^{n+1}) \arrow[r] \arrow[d, "Z^{n+1}(v)"] & H^{n+1}(Y) \arrow[r] \arrow[d, "H^{n+1}(v)"] & 0 \\
0 \arrow[r] & H^n(Y) \arrow[r] & \mathrm{coker}(d_Y^{n-1}) \arrow[r] & \ker(d_Y^{n+1}) \arrow[r] & H^{n+1}(Y) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

にこれを適用することで、$\mathrm{tr}(C^{n-1}(v))-\mathrm{tr}(H^n(v))=\mathrm{tr}(Z^{n+1}(v))-\mathrm{tr}(H^{n+1}(v))$ を得る。ただし $C^n(v)$ は余核の間に引き起こされる自然な射である。完全列の間の射

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Z_Y^n \arrow[r] \arrow[d, "Z^n(v)"'] & Y^n \arrow[r] \arrow[d, "v^n"'] & \mathrm{Im}(d_Y^n) \arrow[r] \arrow[d, "B^n(v)"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z_Y^n \arrow[r] & Y^n \arrow[r] & \mathrm{Im}(d_Y^n) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

に適用することにより、$\mathrm{tr}(B^n(v))+\mathrm{tr}(Z^n(v))=\mathrm{tr}(v^n)$ を得る。完全列の間の射

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^n(Y) \arrow[r] \arrow[d, "H^n(v)"'] & \mathrm{coker}(d_Y^{n-1}) \arrow[r] \arrow[d, "C^{n-1}(v)"'] & \mathrm{Im}(d_Y^n) \arrow[r] \arrow[d, "B^n(v)"] & 0 \\
0 \arrow[r] & H^n(Y) \arrow[r] & \mathrm{coker}(d_Y^{n-1}) \arrow[r] & \mathrm{Im}(d_Y^n) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

に適用することにより、$\mathrm{tr}(B^n(v))=\mathrm{tr}(C^{n-1}(v))-\mathrm{tr}(H^n(v))$ を得る。ただし $C^n(v)$ は余核の間に引き起こ

される自然な射である。従って、

$$\begin{aligned}\sum_j(-1)^j\operatorname{tr}(v^j) &= \sum_j(-1)^j\left(\operatorname{tr}(B^j(v))+\operatorname{tr}(Z^j(v))\right)\\ &= \sum_j(-1)^j\left(\operatorname{tr}(C^{j-1}(v))-\operatorname{tr}(H^j(v))+\operatorname{tr}(Z^j(v))\right)\\ &= \sum_j(-1)^j\left(\operatorname{tr}(C^{j-1}(v))+\operatorname{tr}(C^{j-2}(v))-\operatorname{tr}(H^{j-1}(v))\right)\\ &= \sum_j(-1)^{j+1}\operatorname{tr}(H^{j-1}(v))\\ &= \sum_j(-1)^j\operatorname{tr}(H^j(v))=\operatorname{tr}(v)\end{aligned}$$

が成り立つ。以上で (2) の証明を完了する。

(3) はコホモロジーをとることによって得られる長完全列を短完全列に分解して (2) の証明の最初で示した等式を用いると証明できる。

(4) を示す。$f : X \to Y$ の定める $H^0(R\operatorname{Hom}(X,Y))$ の元は、各 i について $f^i : X^i \to Y^i$ の定める $\operatorname{Hom}(X^i, Y^i)$ の元を $((-1)^i f^i) \in \bigoplus_i \operatorname{Hom}(X^i, Y^i)$ と並べた元である。実際、$R\operatorname{Hom}(X,Y)$ の微分は、第一変数に関しては $(-1)^i d_X^i$ を合成することによって与えられるので、$d_Y^i \circ ((-1)^i f^i = f^{i+1} \circ ((-1)^i d_X^i)$ が成り立ち、$((-1)^i f^i)$ は $H^0(R\operatorname{Hom}(X,Y))$ の元を定める。$v : X \to X$ を複体の自己射とする。各 j に対する $v^j : X^j \to X^j$ のトレースは $\operatorname{Hom}(X^j, X^j) \cong (X^j)^* \otimes X^j \to k$ による v^j の像が定める k の元と一致する。従って、v の定める $H^0(R\operatorname{Hom}(X,X))$ の元、すなわち $((-1)^i v^i) \in \bigoplus_i \operatorname{Hom}(X,X)$ の自然な射 $H^0(R\operatorname{Hom}(X,X)) \to k$ による像は $\sum_j (-1)^j \operatorname{tr}(v^j)$ に他ならない。よって (4) の最初の主張が従う。また、$\dim(V) = \operatorname{tr}(\mathrm{id}_V)$ であるので、(2) より $\chi(X) = \sum_j (-1)^j \dim(H^j(X))$ が従う。以上で (4) の証明を完了し、問題 I.32 の解答を完了する。 □

問題 I.33. k を体、V を k-線形空間とする。自己準同型 $u : V \to V$ が **trace class** であるとは、ある n に対して $\dim(u^n(V)) < \infty$ が成り立つことと定義する。$u : V \to V$ が trace class であるとき、$\operatorname{tr}(u) :\overset{\mathrm{def}}{=} \operatorname{tr}(u|_{u^n(V)})$ と定義する。

(1) $\operatorname{tr}(u)$ の定義は n に依存しないことを示せ。
(2) $V \xrightarrow{u} W \xrightarrow{v} V$ を k-線形空間の射の列とする。$u \circ v$ が trace class であることと $v \circ u$ が trace class であることは同値であることを示せ。さらにこのとき $\operatorname{tr}(u \circ v) = \operatorname{tr}(v \circ u)$ が成り立つことを示せ。
(3) k-線形空間の完全列の自己準同型

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & V_1 & \longrightarrow & V_2 & \longrightarrow & V_3 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle v_1} & & \downarrow{\scriptstyle v_2} & & \downarrow{\scriptstyle v_3} & & \\ 0 & \longrightarrow & V_1 & \longrightarrow & V_2 & \longrightarrow & V_3 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

について、v_2 が trace class であることと v_1, v_3 がどちらも trace class であることは同値であることを示せ。さらにこのとき、$\operatorname{tr}(v_2) = \operatorname{tr}(v_1) + \operatorname{tr}(v_3)$ が成り立つことを示せ。

証明. (1) を示す。まず $x \mapsto [u : V \to V]$ により V を $k[x]$-加群と考える。十分大きい n に対して $\dim(\operatorname{Im}(u^n)) < \infty$ であるので、$n \gg 0$ で $\operatorname{Im}(u^n) = \operatorname{Im}(u^{n+1})$ となる。従って、自然な射 $\operatorname{Im}(u^n) \subset V \to V \otimes_k k[x, 1/x]$ は $n \gg 0$ で同型射であり、とくに $V \otimes_k k[x, 1/x]$ は k-線形空間として有限次元であ

る。u のトレースは k-線形空間 $V \otimes_k k[x, 1/x]$ 上への x の作用にしか依存しないため、n の取り方によらずに well-defined である。以上で (1) の証明を完了する。

(2) を示す。$v \circ (u \circ v)^n \circ u = (v \circ u)^{n+1}$ なので $u \circ v$ が trace class であることと $v \circ u$ が trace class であることは同値である。$v \circ u : V \to V$ と $u \circ v : W \to W$ によって V, W をそれぞれ $k[x]$-加群と考えたとき、$u : V \to W$ と $v : W \to V$ は $k[x]$-加群の射である。さらに、$u \circ v$ か $v \circ u$ の一方が trace class であれば、十分大きい n に対して $v \circ u : (v \circ u)^n(V) \to (v \circ u)^n(V)$ と $u \circ v : (u \circ v)^n(W) \to (u \circ v)^n(W)$ はいずれも全単射であり、とくに $k[x]$-加群の同型射である。これは $v \circ u$ と $u \circ v$ の固有値の和が等しいことを意味する。以上で (2) の証明を完了する。

(3) を示す。v_1, v_2, v_3 によって V_1, V_2, V_3 を $k[x]$-加群とみなす。v_1, v_2, v_3 が k-線形空間の完全列の射を成すことから、

$$0 \longrightarrow V_1 \longrightarrow V_2 \longrightarrow V_3 \longrightarrow 0$$

は $k[x]$-加群の完全列である。$k[x, 1/x]$ をテンソルすると、$k[x, 1/x]$ は $k[x]$ 上平坦であるから、$k[x, 1/x]$-加群の完全列

$$0 \longrightarrow V_1 \otimes_{k[x]} k[x, 1/x] \longrightarrow V_2 \otimes_{k[x]} k[x, 1/x] \longrightarrow V_3 \otimes_{k[x]} k[x, 1/x] \longrightarrow 0$$

を得る。v_i が trace class であることは、$V_i \otimes_{k[x]} k[x, 1/x]$ が長さ有限であることと同値であるので、以上より v_2 が trace class であることと v_1, v_3 がどちらも trace class であることが同値であることが従う。v_i のトレースは $V_i \otimes_{k[x]} k[x, 1/x]$ への v_i の作用 (つまり x の作用) のトレースであるから、$V_i \otimes_{k[x]} k[x, 1/x]$ たちの成す短完全列を考えることによって、$\mathrm{tr}(v_2) = \mathrm{tr}(v_1) + \mathrm{tr}(v_3)$ であることが従う (cf. 問題 I.32 (2) の証明の一番最初の部分など)。以上で (3) の証明を完了し、問題 I.33 の解答を完了する。 □

問題 I.34. k を体、$X \in \mathsf{D}^b_f(\mathsf{Mod}(k))$ とする。

$$b_i(X) :\overset{\text{def}}{=} \dim(H^i(X)), \quad b_i^*(X) :\overset{\text{def}}{=} (-1)^i \sum_{j \le i} (-1)^j b_j(X)$$

とおく。$Y \to X \to Z \xrightarrow{+1}$ を $\mathsf{D}^b_f(\mathsf{Mod}(k))$ の完全三角とする。以下の式を示せ ($\chi(X)$ の定義については問題 I.32 (4) を参照)：

$$\chi(X) = \chi(Y) + \chi(Z),$$
$$b_i^*(X) \le b_i^*(Y) + b_i^*(Z).$$

証明. 一つ目の等式は問題 I.32 (3) (4) より直ちに従う。二つ目の不等式を示す。コホモロジーをとると、長完全列

$$\begin{aligned} &\xrightarrow{\delta^{i-1}} H^{i-1}(Y) \longrightarrow H^{i-1}(X) \longrightarrow H^{i-1}(Z) \\ &\xrightarrow{\delta^{i}} H^{i}(Y) \longrightarrow H^{i}(X) \longrightarrow H^{i}(Z) \\ &\xrightarrow{\delta^{i+1}} \cdots \end{aligned}$$

を得る。従って、とくに

$$\begin{aligned} 0 &\le \dim(\mathrm{Im}(\delta^{i+1})) \\ &= b_i(Z) - b_i(X) + b_i(Y) - b_{i-1}(Z) + \cdots \\ &= \sum_{j \le i} (-1)^{i-j} b_j(Z) - \sum_{j \le i} (-1)^{i-j} b_j(X) + \sum_{j \le i} (-1)^{i-j} b_j(Y) \\ &= b_i^*(Z) - b_i^*(X) + b_i^*(Y) \end{aligned}$$

を得る。よって二つ目の不等式が従う。以上で問題 I.34 の解答を完了する。 □

問題 I.35. $\hat{\mathcal{C}} = \mathsf{Set}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}$ を前層圏とする。

(1) I を有向集合、X_i を I で添字付けられた圏 $\mathcal{C}$ の図式とする。$X \mapsto \mathrm{colim}_{i\in I}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X_i)$ により定まる $\hat{\mathcal{C}}$ の対象 "colim"$_{i\in I}X_i$ (この記号の定義は [Definition 1.11.4, KS02] を参照) は I で添字付けられた図式 $h_{X_i} \in \hat{\mathcal{C}}$ の余極限であることを示せ。より詳しく、$F \in \hat{\mathcal{C}}$ に対して以下の自然な同型を示せ：

$$\mathrm{Hom}_{\hat{\mathcal{C}}}(\text{“colim”}_{i\in I}X_i, F) \cong \mathrm{colim}_{i\in I} F(X_i).$$

(2) $Y_j \in \mathcal{C}$ を有向集合 J で添字付けられた図式とする。以下の自然な同型を示せ：

$$\mathrm{Hom}_{\hat{\mathcal{C}}}(\text{“colim”}_{i\in I}X_i, \text{“colim”}_{j\in J}Y_j) \cong \lim_{i\in I}\mathrm{colim}_{j\in J}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_i, Y_j).$$

注意. 本文では (2) の左辺の右側の "colim" がたんに colim と表記されていたが、これは “” をつけ忘れた？

証明. (1) を示す。函手圏の余極限は各点ごとに計算されるので "colim"$_{i\in I}X_i \cong \mathrm{colim}_{i\in I} h_{X_i}$ が従う。さらにこれがわかると、余極限の定義と米田の補題より、

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\hat{\mathcal{C}}}(\text{“colim”}_{i\in I}X_i, F) &\cong \mathrm{Hom}_{\hat{\mathcal{C}}}(\mathrm{colim}_{i\in I} X_i, F)\\ &\cong \lim_{i\in I}\mathrm{Hom}_{\hat{\mathcal{C}}}(h_{X_i}, F)\\ &\cong \lim_{i\in I} F(X_i)\end{aligned}$$

が従う。以上で (1) の証明を完了する。

(2) を示す。素直に計算すると、

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\hat{\mathcal{C}}}(\text{“colim”}_{i\in I}X_i, \text{“colim”}_{j\in J}h_{Y_j}) &\overset{\star}{\cong} \mathrm{Hom}_{\hat{\mathcal{C}}}(\mathrm{colim}_{i\in I} h_{X_i}, \mathrm{colim}_{j\in J} h_{Y_j})\\ &\overset{*}{\cong} \lim_{i\in I}\mathrm{Hom}_{\hat{\mathcal{C}}}(h_{X_i}, \mathrm{colim}_{j\in J} h_{Y_j})\\ &\overset{\spadesuit}{\cong} \lim_{i\in I}(\mathrm{colim}_{j\in J} h_{Y_j})(X_i)\\ &\overset{\clubsuit}{\cong} \lim_{i\in I}\mathrm{colim}_{j\in J}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_i, Y_j)\end{aligned}$$

となる。ただしここで、$\star$ の部分に (1) を用い、$*$ の部分に余極限の定義を用い、$\spadesuit$ の部分に米田の補題を用い、$\clubsuit$ の部分に函手圏での余極限が各点ごとに計算されることを用いた。以上で (2) の証明を完了し、問題 I.35 の解答を完了する。 □

問題 I.36. A をネーター環、$\mathsf{Mod}^f(A)$ を有限生成 A-加群の圏とする。(X_i, ρ_{ij}) を有向集合で添字付けられた $\mathsf{Mod}^f(A)$ の図式とする。$\mathsf{Mod}(A)$ での余極限 $\mathrm{colim}_{i\in I} X_i$ が $\mathsf{Mod}^f(A)$ に属すると仮定すると、それは "colim"$_{i\in I}X_i$ の表現対象であることを示せ。

注意. もとの文を引用するとこうである (第一版)：

Let A be a Noetherian ring, and let $\mathfrak{Mod}^f(A)$ be the category of finitely generated A-modules. Let $\{X_i, \rho_{i,j}\}$ be an inductive system in this category, indexed by a directed ordered set I. Prove that if $\varinjlim_j X_j$ exists in $\mathfrak{Mod}^f(A)$, then it represents "$\varinjlim_j$"X_j.

これをそのまま読むと、仮定されていることは「$\mathsf{Mod}^f(A)$ で余極限 $\mathrm{colim}_{i\in I} X_i$ が存在する」ということである。しかし、だとすると、問題 I.36 は本当に正しいだろうか。たとえば $A = \mathbb{Z}$ として、有向集合とし

て $\mathbb{Z}$ のイデアルのなす集合を包含関係の逆向きで順序を入れたものを考え、$X_i :\overset{\text{def}}{=} (\frac{1}{n}\mathbb{Z})/\mathbb{Z}$ と定義して、$\rho_{n,nm}$ を自然な包含射とする。M を有限生成加群、$f_n : X_n \to M$ を $\rho_{n,nm}$ たちと両立的な射とする。このとき、$f_n(1/n)$ は M の可除元を与える。M は有限生成加群であるから、従って $f_n(1/n) = 0$ である。これは $f_n = 0$ を意味する。従って、どのような $\rho_{n,nm}$ たちと両立的な射の族 $f_n : X_n \to M$ も 0 を一意的に経由する。これは $\mathsf{Mod}^f(A)$ における図式 X_n の余極限が 0 であることを意味している。とくに $\mathsf{Mod}^f(A)$ における図式 X_n には余極限が存在する。一方で "colim"$_n X_n$ は自明な前層ではないので 0 はその表現対象ではない。これは問われていることに反する。従って、本当に仮定すべきことは、「$\mathsf{Mod}(A)$ における余極限が $\mathsf{Mod}^f(A)$ に属する」ということであろう。実際には、(ここで示すように) $\mathsf{Mod}(A)$ における余極限を X としたとき、$\mathsf{Mod}^f(A)$ 上の前層として "colim"$_j X_j \cong \mathrm{Hom}_A(-, X)$ が成り立つ (標語的に言えば、有限表示加群は加群の圏のコンパクト対象である、ということ)。

証明. $X :\overset{\text{def}}{=} \mathrm{colim}_{i\in I} X_i$ ($\mathsf{Mod}(A)$ における余極限) とおいて、$\rho_i : X_i \to X$ を自然な射とする。問題 I.36 を示すためには、M を有限生成 A-加群として、自然な射 $\varphi : \mathrm{colim}_{i\in I} \mathrm{Hom}_A(M, X_i) \to \mathrm{Hom}_A(M, X)$ が全単射であることを示すことが十分である。

まず φ が単射であることを示す。φ で送って 0 である $\mathrm{colim}_{i\in I} \mathrm{Hom}_A(M, X_i)$ の元をとり、$f_i : M \to X_i$ を、その元を代表する射とする。φ で送って 0 であるので、$\rho_i \circ f_i = 0$ である。M は有限生成なので、有限個の $m_1, \cdots, m_r \in M$ によって生成される。$f_i(m_k) \in X_i, (k = 1, \cdots r)$ は ρ_i で送って 0 になるので、ある $i_k \geq i$ が存在して X_{i_k} において $\rho_{i,i_k}(f_i(m_k)) = 0$ である。I は有向集合であるから、$i_1, \cdots, i_r$ の上界 j が存在する。このとき $\rho_{i,j}(f_i(m_k)) = 0, (\forall k = 1, \cdots, r)$ であるので、$\rho_{i,j} \circ f_i = 0$ である。$f_i : M \to X_i$ によって代表される $\mathrm{colim}_{i\in I} \mathrm{Hom}_A(M, X_i)$ の元は $\rho_{i,j} \circ f_i : M \to X_j$ によって代表される元でもあるので、これは 0 である。以上より φ が単射であることが従う (ここまで A のネーター性は必要ない)。

φ が全射であることを示す。$f : M \to X$ を A-加群の射とする。全射 $p : A^r \to M$ を一つとる。A はネーターであるので、$\ker(p)$ は有限生成である (ネーター性が本質的に必要なのはこの部分、すなわち、有限生成加群が有限表示であるという部分)。$e_k \in A^r$ を k 番目の座標のみ 1 で他が 0 となる元とする。X は X_i たちの filtered colimit であるから、$f(p(e_k)) \in X$ に対してある $i_k \in I$ が存在して $f(p(e_k)) \in \rho_{i_k}(X_{i_k})$ が成り立つ。I は有向集合であるので、$i_1, \cdots, i_r \leq j$ となる $j \in I$ が存在する。このとき $f(p(A^r)) \subset \rho_j(X_j)$ が成り立つ。A^r は射影加群であるから、全射 $\rho_j : X_j \to \rho_j(X_j)$ に沿って $f \circ p : A^r \to \rho_j(X_j)$ がリフトして、$f \circ p = \rho_j \circ g$ となる射 $g : A^r \to X_j$ が存在する。$\ker(p)$ の生成元を $a_1, \cdots, a_s \in \ker(p)$ とする。$a_k \in \ker(p)$ であるから、$\rho_j(g(a_k)) = f(p(a_k)) = f(0) = 0$ が成り立つ。従って、各 $k = 1, \cdots, s$ に対してある $i'_k \geq j$ が存在して、$X_{i'_k}$ で $\rho_{j,i'_k}(g(a_k)) = 0$ が成り立つ。I は有向集合であるので、$i'_1, \cdots, i'_s \leq j'$ となる $j' \in I$ が存在する。このとき $\rho_{j,j'}(g(a_k)) = 0, (\forall k = 1, \cdots, s)$ が成り立つ。従って、$\rho_{j,j'} \circ g : A^r \to X_{j'}$ は $p : A^r \to M$ を一意的に経由して、$\rho_{j,j'} \circ g = h \circ p$ となる射 $h : M \to X_{j'}$ を引き起こす。このとき

$$\rho_{j'} \circ h \circ p = \rho_{j'} \circ \rho_{j,j'} \circ g = \rho_j \circ g = f \circ p$$

が成り立つ。p はエピなので、$\rho_{j'} \circ h = f$ が成り立つ。従って、h により代表される $\mathrm{colim}_{i\in I} \mathrm{Hom}_A(M, X_i)$ の元を $[h]$ と書けば、$\varphi([h]) = f$ が成り立つ。以上で φ が全射であることの証明を完了し、問題 I.36 の解答を完了する。 □

問題 I.37. $\mathcal{C}$ を加法圏とする。$\mathrm{End}(\mathcal{C})$ を $\mathrm{id}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ の自己射のなす集合とする。すなわち、$\mathrm{End}(\mathcal{C}) :\overset{\text{def}}{=} \mathrm{Hom}_{[\mathcal{C},\mathcal{C}]}(\mathrm{id}_{\mathcal{C}})$ とする。

(1) $\mathrm{End}(\mathcal{C})$ は可換環であることを示せ。

(2) A を環とする。$\mathrm{End}(\mathsf{Mod}(A))$ は A の中心 $Z(A)$ と同型であることを示せ。

(3) A を可換環として、環準同型 $A \to \mathrm{End}(\mathcal{C})$ が与えられているとする。このとき加法圏 $\mathcal{C}$ を A **上の加法圏**という。$\mathcal{C}$ が A 上の加法圏であるとき、$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ は合成が双線型となるような A-加群の構造を持つことを示せ。

(4) A をネーター環、$\mathcal{C}$ を A 上の**アーベル**圏とする。

　(i) $M \in \mathsf{Mod}^f(A)$ と $X \in \mathcal{C}$ に対して函手 $Y \mapsto \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)), (Y \in \mathcal{C})$ は表現可能であることを示せ。この表現対象を $X \otimes_A M$ と書く。

　(ii) $\otimes_A : \mathcal{C} \times \mathsf{Mod}^f(A) \to \mathcal{C}$ は右完全な双函手であることを示せ。

　(iii) $\otimes_A$ は左導来函手 $\otimes_A^L : \mathsf{D}^-(\mathcal{C}) \times \mathsf{D}^-(\mathsf{Mod}^f(A)) \to \mathsf{D}^-(\mathcal{C})$ を持つことを示せ。

　(iv) $\mathrm{Hom}_A(-,-) : \mathsf{Mod}^f(A)^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ についても同様の議論を行え。

証明. (1) を示す。$f : \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \to \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ は各 $M \in \mathcal{C}$ に対する自己射 $f_M : M \to M$ の族で $g : M \to N$ に対して $g \circ f_M = f_N \circ g$ を満たすものである。従って、二つの $f^1, f^2 : \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \to \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ に対して族 $(f^1_M + f^2_M)_{M \in \mathcal{C}}$ は $\mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ の自己射となるので、これによって加法が定義される。乗法を合成によって定義すると、$\mathcal{C}$ が加法圏であること、すなわち合成が双線型であることから、$\mathrm{End}(\mathcal{C})$ は環の公理を満たす。可換であることを示すことが残っている。$f, g : \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \to \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ と $M \in \mathcal{C}$ を任意にとると、g が自然変換であることから、射 $f_M : M \to M$ に対して等式 $f_M \circ g_M = g_M \circ f_M$ を満たす。従って $f \circ g = g \circ f$ が成り立ち、$\mathrm{End}(\mathcal{C})$ は合成を乗法として可換である。以上で (1) の証明を完了する。

(2) を示す。$a \in Z(A)$ に対して、一斉に a 倍をする射 $M \to M$ は任意の $g : M \to N$ と $m \in M$ に対して $g(am) = ag(m)$ を満たすので $\mathrm{End}(\mathsf{Mod}(A))$ の元を定める。こうして写像 $Z(A) \to \mathrm{End}(\mathsf{Mod}(A))$ ができる。この写像は明らかに環準同型である。単射であることを示すために、$a \in Z(A)$ が $\mathrm{End}(\mathsf{Mod}(A))$ で 0 であると仮定する。すると a 倍写像 $A \to A$ が 0 射であるため、$a = 0$ が従う。よって $Z(A) \to \mathrm{End}(\mathsf{Mod}(A))$ は単射である。全射であることを示すために、$f : \mathrm{id}_{\mathsf{Mod}(A)} \to \mathrm{id}_{\mathsf{Mod}(A)}$ を任意にとる。$f_A : A \to A$ によって $a :\stackrel{\mathrm{def}}{=} f_A(1)$ とおく。f_M が a 倍写像であることを示せば、$Z(A) \to \mathrm{End}(\mathsf{Mod}(A))$ が全射であることが従う。$M \in \mathsf{Mod}(A)$ を任意にとる。全射 $p : A^{\oplus I} \to M$ をひとつ選ぶ。$f : \mathrm{id}_{\mathsf{Mod}(A)} \to \mathrm{id}_{\mathsf{Mod}(A)}$ が自然変換であることから、$f_{A^{\oplus I}}$ は各座標ごとに f_A が並んでいる射であり、それは a 倍写像に他ならない。また $f_M \circ p = p \circ f_{A^{\oplus I}} = p(a\ 倍) = ap$ が成り立つ。ここで p はエピなので、f_M も a-倍写像であることが従う。以上で $Z(A) \to \mathrm{End}(\mathsf{Mod}(A))$ が全射であることが従い、(2) の証明を完了する。

(3) を示す。$\varphi : A \to \mathrm{End}(\mathcal{C})$ を環準同型とする。$a \in A$ に対して自然変換 $\varphi(a) : \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \to \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ が対応している。$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ に $\varphi(a)_Y : Y \to Y$ を合成することによって A-加群の構造を入れる (これが $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ の加法と両立的であることは明らかである)。このとき、$f : X \to Y$ に対して $f \circ \varphi(a)_X = \varphi(a)_Y \circ f$ であるから、この A-加群の構造は $\varphi(a)_X : X \to X$ を合成することによる A-加群の構造と等しい。また、$X, Y, Z \in \mathcal{C}$ と $a \in A, f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y), g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z)$ に対して、

$$g \circ (a \cdot f) = g \circ (f \circ \varphi(a)_X) = (g \circ f) \circ \varphi(a)_X = a \cdot (g \circ f)$$

が成り立つので、g を合成する射 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z)$ は A-加群の構造と両立的である。同じく

$$(a \cdot g) \circ f = (\varphi(a)_Z \circ g) \circ f = \varphi(a)_Z \circ (g \circ f) = a \cdot (g \circ f)$$

が成り立つので、f を合成する射 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z)$ は A-加群の構造と両立的である。以上より $\mathcal{C}$ の合成は A-双線型であり、(3) の証明を完了する。

(4) を示す。(i) を示す。$M = A$ のときは自然に $\mathrm{Hom}_A(A, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ であるから明らかにこの函手が表現可能であり $X \otimes_A A \cong X$ が成り立つ。M が A の有限直和の場合も同様にして $\mathrm{Hom}_A(A^n, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)^n \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X^n,Y)$ が成り立つので、この函手は表現可能であり $X \otimes_A A^n \cong X^n$ が成り立つ。一般の有限生成加群 M に対して、所望の表現可能性を証明する。A はネーターであるから、完全列 $A^n \to A^m \to M \to 0$ が存在する。このとき

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)) \to \mathrm{Hom}_A(A^m, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)) \to \mathrm{Hom}_A(A^n, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y))$$

も完全である。Y に関して函手的に $\mathrm{Hom}_A(A^m, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X^m,Y)$ が成り立つので、A-加群の完全列

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X^m,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X^n,Y)$$

を得る。従って Y に関して函手的に $\mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathrm{coker}(X^m \to X^n), Y)$ が成り立つ。よって $Y \mapsto \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y))$ は表現可能であることが従う。以上で (i) の証明を完了する。

(ii) を示す。M, X に関しての双函手

$$\mathcal{C} \times \mathsf{Mod}^f(A) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{C}, \mathsf{Mod}(A)), \quad (X, M) \mapsto [Y \mapsto \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y))]$$

の表現対象として $X \otimes_A M$ が定義されているので、米田の補題より $\otimes_A : \mathcal{C} \times \mathsf{Mod}^f(A) \to \mathcal{C}$ は双函手である。さらに $\mathrm{Hom}_A(-,*)$ が左完全であることと $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,Y)$ が左完全であることから、$\otimes_A$ はいずれの成分についても右完全であることが従う。以上で (ii) の証明を完了する。

(iii) を示す。$\mathcal{P} \subset \mathsf{Mod}^f(A)^{\mathrm{op}}$ を射影加群からなる部分圏とする。$X \in \mathcal{C}$ とする。$\mathcal{P}$ が $(X \otimes_A (-))^{\mathrm{op}} : \mathsf{Mod}^f(A)^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ に対して injective であることを示す。まず $\mathcal{P} \subset \mathsf{Mod}^f(A)^{\mathrm{op}}$ は明らかに本文の条件 [(1.7.5), KS02] (=本文 [Definition 1.8.2 (i), KS02]) を満たす。次に有限生成加群の完全列 $0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$ で M_2, M_3 が射影加群であるとき、この完全列は分裂して M_1 は射影加群 M_2 の直和因子となるので M_1 も射影加群である。従って $\mathcal{P}$ は本文 [Definition 1.8.2 (ii), KS02] を満たす。$0 \to P_1 \to P_2 \to P_3 \to 0$ を射影加群の完全列とする。これは分裂するので、各 Y に対して

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(P_3, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)) \to \mathrm{Hom}_A(P_2, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)) \to \mathrm{Hom}_A(P_1, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)) \to 0$$

も分裂完全列である。従って、

$$0 \to X \otimes_A P_1 \to X \otimes_A P_2 \to X \otimes_A P_3 \to 0$$

も分裂完全列であり、$\mathcal{P}$ は本文 [Definition 1.8.2 (iii), KS02] を満たす。以上より $\mathcal{P}$ は $(X \otimes_A (-))^{\mathrm{op}} : \mathsf{Mod}^f(A)^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ に対して injective な $\mathsf{Mod}^f(A)$ の部分圏である。$X \in \mathsf{Ch}^-(\mathcal{C})$ を 0 と擬同型な複体、P を射影加群とする。P は A^n の直和因子であるとする。すると $X \otimes_A P$ は X^n の直和因子であるから、X が 0 と擬同型であることから、$X \otimes_A P$ も 0 と擬同型である。従って、函手 $(\otimes_A)^{\mathrm{op}} : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathsf{Mod}^f(A)^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ の引き起こす三角函手 $\mathsf{K}^+(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}) \times \mathsf{K}^+(\mathsf{Mod}^f(A)^{\mathrm{op}}) \to \mathsf{K}^+(\mathcal{C}^{\mathrm{op}})$ と $\mathcal{I} = \mathsf{K}^+(\mathcal{P}) \subset \mathsf{K}^+(\mathsf{Mod}^f(A)^{\mathrm{op}})$ に対して本文 [Corollary 1.10.5, KS02] を用いることにより、$(\otimes_A)^{\mathrm{op}}$ の右導来函手 $\mathsf{D}^+(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}) \times \mathsf{D}^+(\mathsf{Mod}^f(A)^{\mathrm{op}}) \to \mathsf{D}^+(\mathcal{C}^{\mathrm{op}})$ が存在することが従う。よって $\otimes_A$ の左導来函手 $\otimes_A^L : \mathsf{D}^-(\mathcal{C}) \times \mathsf{D}^-(\mathsf{Mod}^f(A)) \to \mathsf{D}^-(\mathcal{C})$ が存在することが従い、(iii) の証明を完了する。

(iv) を示す。$M \in \mathsf{Mod}^f(A)^{\mathrm{op}}$ と $X \in \mathcal{C}$ に対して $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Mod}(A), Y \mapsto \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X))$ が表現可能であることを示す。まず $M = A$ のときは明らかに X が表現対象であり、$M = A^n$ の場合も明らかに X^n が表現対象である。一般の M に対して完全列 $A^n \to A^m \to M \to 0$ をとって完全列

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X)) \to \mathrm{Hom}_A(A^m, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X)) \to \mathrm{Hom}_A(A^n, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X))$$

作ると、完全列

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X^m) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X^n)$$

を得るので、Hom の左完全性より Y についての自然な同型 $\mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, \ker(X^m \to X^n))$ を得る。従って $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Mod}(A), Y \mapsto \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X))$ は表現可能函手である。この表現対象を $\mathrm{Hom}_A(M, X)$ と表す。X, Y, M についての自然な同型 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X \otimes_A M, Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \mathrm{Hom}_A(M, Y))$ が存在するので、$\mathrm{Hom}_A(M, -)$ は $(-) \otimes_A M$ の右随伴函手であり、従って左完全である。また X, Y についての自然な同型 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \mathrm{Hom}_A(-, Y)) \cong \mathrm{Hom}_A(-, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y))$ は $\mathrm{Hom}_A(-, Y)$ の左完全性を示している。従って $\mathrm{Hom}_A(-, -)$ は左完全な双函手である。射影加群のなす部分圏 $\mathcal{P} \subset \mathsf{Mod}^f(A)^{\mathrm{op}}$ が本文 [Definition 1.8.2 (i) (ii), KS02] を満たすことはすでに (iii) の証明の中で確認している。射影加群の完全列は分裂するので、それを $\mathrm{Hom}_A(-, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y))$ に入れて得られる列も分裂完全列である。従って $\mathrm{Hom}_A(-, Y)$ に射影加群の完全列を入れると分裂完全列が得られる。このことは $\mathcal{P}$ が本文 [Definition 1.8.2 (iii), KS02] を $\mathrm{Hom}_A(-, Y)$ に対して満たすことを意味している。従って $\mathcal{P} \subset \mathsf{Mod}^f(A)^{\mathrm{op}}$ は $\mathrm{Hom}_A(-, Y)$-injective である。さらに Y が 0 と擬同型で P が射影加群であるとき、$P \subset A^n$ が直和因子であるとすれば、$\mathrm{Hom}_A(P, Y) \subset Y^n$ も直和因子であるから、Y が 0 と擬同型であることから、$\mathrm{Hom}_A(P, Y)$ も 0 と擬同型であることが従う。よって本文 [Corollary 1.10.5, KS02] を適用することで、$\mathrm{Hom}_A(-, -)$ の右導来函手 $R\,\mathrm{Hom}_A(-, -)$ が存在することが従う。以上で (iv) の証明を完了し、(4) の証明を完了し、問題 I.37 の解答を完了する。 □

問題 I.38. I, I' を filtered な圏として、$\varphi : I \to I'$ を函手とする。φ が **cofinal** であるとは、以下の条件を満たすことを言う：

(1) 任意の $i' \in I'$ に対してある $i \in I$ と射 $i' \to \varphi(i)$ が存在する。
(2) 任意の $i \in I$ と $i' \in I'$ と射 $(f : \varphi(i) \to i') \in I'$ に対してある射 $(g : i \to i_1) \in I$ と $(h : i' \to \varphi(i_1)) \in I'$ が存在して $h \circ f = g$ となる。

$\mathcal{C}$ を圏、I, I_1 を filtered な圏、$F : I \to \mathcal{C}, G : I^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}$ を函手、$\varphi : I_1 \to I$ を cofinal とする。自然な射

$$\mathrm{colim}(F \circ \varphi) \to \mathrm{colim}\, F, \quad \text{“colim”}(F \circ \varphi) \to \text{“colim”} F, \quad \lim G \to \lim(G \circ \varphi), \quad \text{“lim”} G \to \text{“lim”}(G \circ \varphi)$$

はいずれも同型射であることを示せ。

証明. $\mathrm{colim}(F \circ \varphi) \to \mathrm{colim}\, F$ が同型射であることがわかれば、$\mathcal{C} \to \hat{\mathcal{C}} = \mathsf{Set}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}$ を合成して函手 $I \to \hat{\mathcal{C}}$ に対してその事実を適用することにより “colim”$(F \circ \varphi) \to$ “colim”F が同型射であることが従う。lim に関しても同様である。さらに $\mathrm{colim}(F \circ \varphi) \to \mathrm{colim}\, F$ が同型射であることがわかれば、$G^{\mathrm{op}} : I \to \mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ に対してその事実を適用することにより $\lim G \to \lim(G \circ \varphi)$ が同型射であることが従う。以上より、問題 I.38 を示すためには、$\mathrm{colim}(F \circ \varphi) \to \mathrm{colim}\, F$ が同型射であることを示すことが十分である。

$X \in \mathcal{C}$ を任意にとる。$\mathrm{colim}(F \circ \varphi) \to \mathrm{colim}\, F$ が同型射であることを示すためには、米田の補題より、自然な射 $\Psi : \lim_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(F(i), X) \to \lim_{i_1 \in I_1} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(F(\varphi(i_1)), X)$ が全単射であることを示すことが十分である。$(f_i), (g_i) \in \lim_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(F(i), X)$ が $\Psi((f_i)) = \Psi((g_i))$ を満たすとする。このとき、各 $i_1 \in I_1$ に対して $f_{\varphi(i_1)} = g_{\varphi(i_1)}$ が成り立つ。$i \in I$ を任意にとる。$\varphi : I_1 \to I$ は cofinal であるから、一つめの条件より、ある $i_1 \in I_1$ と射 $p : i \to \varphi(i_1)$ が存在する。$(f_i), (g_i)$ はそれぞれ $\lim_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(F(i), X)$ の元であるから、$f_{\varphi(i_1)} \circ F(p) = f_i, g_{\varphi(i_1)} \circ F(p) = g_i$ を満たす。$f_{\varphi(i_1)} = g_{\varphi(i_1)}$ であるので、従って $f_i = g_i$ が成り立つ。これは $(f_i) = (g_i)$ を意味し、よって Ψ は単射である。

Ψ が全射であることを示す。$(h_{\varphi(i_1)})_{i_1\in I_1} \in \lim_{i_1\in I_1}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(F(\varphi(i_1)), X)$ を任意にとる。各 $i \in I$ に対して一つ $i_1 \in I_1$ と射 $p_1 : i \to \varphi(i_1)$ を選ぶ (φ が cofinal であることの一つめの条件を用いる)。$h_i :\overset{\mathrm{def}}{=} h_{i_1} \circ F(p_1)$ と定義する。まずこれが i_1, p_1 の取り方に依存しないことを示す。そのためには、別の $p_2 : i \to \varphi(i_2)$ に対して $h_{i_1} \circ F(p_1) = h_{i_2} \circ F(p_2)$ が成り立つことが十分である。I_1 は filtered であるから、$i_3 \in I_1$ と $a_1 : i_1 \to i_3, a_2 : i_2 \to i_3$ が存在する。I は filtered であるから、二つの並行な射 $\varphi(a_1)\circ p_1, \varphi(a_2)\circ p_2 : i \to \varphi(i_3)$ に対してある射 $g : \varphi(i_3) \to i'$ が存在して $g\circ\varphi(a_1)\circ p_1 = g\circ\varphi(a_2)\circ p_2$ が成り立つ。さらに φ は cofinal であるから、$g : \varphi(i_3) \to i'$ に二つめの条件を用いることで、ある $(b : i_3 \to i_4) \in I_1$ と $(g' : i' \to \varphi(i_4)) \in I$ が存在して $g' \circ g = \varphi(b)$ が成り立つ。このとき

$$\varphi(b\circ a_1)\circ p_1 = g'\circ g\circ\varphi(a_1)\circ p_1 = g'\circ g\circ\varphi(a_2)\circ p_2 = \varphi(b\circ a_2)\circ p_2$$

が成り立つ。$p_4 :\overset{\mathrm{def}}{=} \varphi(b\circ a_1)\circ p_1$ とおけば、

$$h_{i_1}\circ F(p_1) = h_{i_4}\circ F(\varphi(b\circ a_1)\circ p_1) = h_{i_4}\circ F(\varphi(b\circ a_2)\circ p_2) = h_{i_2}\circ F(p_2)$$

が成り立つ。以上で h_i の定義が $p_1 : i \to \varphi(i_1)$ の取り方に依存しないことが示された。次に $(h_i)_{i\in I}$ が $\lim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(F(i), X)$ の元を定めることを示す。射 $(p : i \to i') \in I$ を任意にとる。$q : i' \to \varphi(i_1)$ を一つ選べば、h_i の定義が $p_1 : i \to \varphi(i_1)$ の取り方に依存しないことから、

$$h_i = h_{i_1}\circ F(q\circ p) = h_{i_1}\circ F(q)\circ F(p) = h_{i'}\circ F(p)$$

が成り立つ。これは $(h_i)_{i\in I}$ が $F(p)$ たちと両立的であることを意味し、従って $(h_i)_{i\in I}$ は $\lim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(F(i), X)$ の元を定める。各 $i_1 \in I$ に対して $h_{\varphi(i_1)} = h_{i_1}$ であるから、$\Psi((h_i)_{i\in I}) = (h_{i_1})_{i_1\in I_1}$ が成り立つ。よって Ψ は全射である。以上で Ψ が全単射であることが従い、問題 I.38 の証明を完了する。 □

問題 I.39. $\mathcal{C}$ をアーベル圏とする。$X, Y \in \mathsf{D}^b(\mathcal{C})$ に対して $\mathrm{Ext}^j(X, Y) :\overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}(\mathcal{C})}(X, Y[j])$ とおく。

(1) $X, Y \in \mathcal{C}$ として $n \geq 1$ とする。完全列

$$E : 0 \to Y \to Z_n \to Z_{n-1} \to \cdots \to Z_1 \to X \to 0$$

が元 $C(E) \in \mathrm{Ext}^n(X, Y)$ を定めることを示せ。この完全列を X **の** Y **による** n**-拡大**という。

(2) 任意の $\mathrm{Ext}^n(X, Y)$ の元は $C(E)$ の形で表すことができることを示せ。

(3) $E' : 0 \to Y \to Z'_n \to \cdots \to Z'_1 \to X \to 0$ を別の拡大とする。$C(E) = C(E')$ であるための必要十分条件は、ある拡大 $E'' : 0 \to Y \to Z''_n \to \cdots \to Z''_1 \to X \to 0$ と以下の可換図式が存在することであるということを示せ：

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r] \arrow[d, equal] & Z_n \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & Z_1 \arrow[r] & X \arrow[d, equal] \\
Y \arrow[r] \arrow[d, equal] & Z''_n \arrow[r] \arrow[u] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & Z''_1 \arrow[r] \arrow[u] \arrow[d] & X \arrow[d, equal] \\
Y \arrow[r] & Z'_n \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & Z'_1 \arrow[r] & X.
\end{tikzcd}$$

$\mathrm{Ext}^n(X, Y)$ をしばしば **Yoneda extension** という。

証明. (1) を示す。$Z^i :\overset{\mathrm{def}}{=} Z_{-i+1}$ と定義して、完全列 E から X, Y を取り除いた複体を

$$Z = (\cdots 0 \to Z^{-n+1} \to \cdots \to Z^0 \to 0 \to \cdots)$$

と表す。このとき $\tau^{\leq n-1}(Z) = Y[n-1]$ であり、$\tau^{\geq 0}(Z) = X$ である。また、Z は $-(n-2)$ 次から -1 次で完全なので、$Y[n-1] \to Z \to X \xrightarrow{+1}$ は完全三角である。これに函手 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{D}(\mathcal{C})}(X, -)$ を適用することにより、射 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{D}(\mathcal{C})}(X, X) \to \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}(\mathcal{C})}(X, Y[n]) = \mathrm{Ext}^n(X, Y)$ を得る。id_X の行き先を $C(E)$ とすれば良い。以上で (1) の証明を完了する。

(2) を示す。$f \in \mathrm{Ext}^n(X, Y)$ を一つとる。定義より $\mathrm{Ext}^n(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}(\mathcal{C})}(X, Y[n])$ であるので、f は $\mathsf{D}(\mathcal{C})$ の射 $f : X \to Y[n]$ とみなせる。f を $\mathsf{D}(\mathcal{C})$ の完全三角 $X \xrightarrow{f} Y[n] \to Z \xrightarrow{+1}$ に伸ばす。このとき $Y[n-1] \to Z[-1] \to X \xrightarrow{+1}$ も完全三角である。コホモロジーをとれば、$H^i(Z[-1])$ は $n-1$ 次で $H^{n-1}(Z[-1]) \cong Y$、0 次で $H^0(Z[-1]) \cong X$、他は 0 である。従って

$$E : 0 \to [Y \cong H^n(Z)] \to Z^{-n} \to \cdots \to Z^{-1} \to [X \cong H^{-1}(Z)] \to 0$$

は完全である。完全三角 $Y[n-1] \to Z[-1] \to X \xrightarrow{+1}$ は $X \xrightarrow{f} Y[n] \to Z \xrightarrow{+1}$ を -1 方向に二つずらした完全三角なので、$\mathrm{Hom}_{\mathsf{D}(\mathcal{C})}(X, -)$ に入れると id_X の行き先は $f : X \to Y[n]$ に他ならない。このことは $f = C(E)$ を意味している。以上で (2) の証明を完了する。

(3) を示す。E, E' から (1) のように定義した複体をそれぞれ Z, Z' と表す。十分性を示す。E'' から (1) のように定義した複体を Z'' と表す。(1) の証明より、$\mathsf{D}(\mathcal{C})$ の完全三角とその間の射

$$\begin{tikzcd}
Y[n-1] \arrow[r] \arrow[d, equal] & Z \arrow[r] & X \arrow[r, "+1"] \arrow[d, equal] & {} \\
Y[n-1] \arrow[r] \arrow[d, equal] & Z'' \arrow[r] \arrow[u] \arrow[d] & X \arrow[r, "+1"] \arrow[d, equal] & {} \\
Y[n-1] \arrow[r] & Z' \arrow[r] & X \arrow[r, "+1"] & {}
\end{tikzcd}$$

を得る。これを $\mathrm{Hom}_{\mathsf{D}(\mathcal{C})}(X, -)$ に入れると、アーベル群の可換図式

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathsf{D}(\mathcal{C})}(X, X) \arrow[r, equal] \arrow[d, "\delta"'] & \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}(\mathcal{C})}(X, X) \arrow[r, equal] \arrow[d, "\delta''"'] & \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}(\mathcal{C})}(X, X) \arrow[d, "\delta'"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathsf{D}(\mathcal{C})}(X, Y[n]) \arrow[r, equal] & \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}(\mathcal{C})}(X, Y[n]) \arrow[r, equal] & \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}(\mathcal{C})}(X, Y[n])
\end{tikzcd}$$

を得る。ここで定義より $C(E) = \delta(\mathrm{id}_X), C(E') = \delta'(\mathrm{id}_X)$ であるが、上の図式が可換であることは $\delta = \delta'' = \delta'$ を意味するので、よって $C(E) = \delta(\mathrm{id}_X) = \delta'(\mathrm{id}_X) = C(E')$ が成り立つ。以上で十分性の証明を完了する。

必要性を示す。$f = C(E) = C(E') \in \mathrm{Ext}^n(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}(\mathcal{C})}(X, Y[n])$ とおく。$f : X \to Y[n]$ を $\mathsf{D}(\mathcal{C})$ の完全三角 $X \xrightarrow{f} Y[n] \to Z'' \xrightarrow{+1}$ に伸ばす。(2) の証明と同様に、このとき

$$0 \to Y \to Z''^{-n} \to \cdots \to Z''^{-1} \to X \to 0$$

は完全である。Z'' の $-n-1$ 次以下と 0 次以上を 0 で置き直した複体を再び Z'' で表す。すると上の完全列により $Y[n-1] \to Z''[-1] \to X \xrightarrow{+1}$ が $\mathsf{K}(\mathcal{C})$ の完全三角であることが従う。$f = C(E)$ であるから、三角圏の公理 (本文 [Proposition 1.4.4 (TR4), KS02]) より $\mathsf{K}(\mathcal{C})$ の射 $Z'' \to Z$ が存在して、$\mathrm{id}_X, \mathrm{id}_{Y[n]}$ によって $X \xrightarrow{f} Y[n] \to Z'' \xrightarrow{+1}$ から $X \xrightarrow{f} Y[n] \to Z \xrightarrow{+1}$ への完全三角の射を形成する。同様に、$f = C(E')$ であるから、完全三角の射を形成するような $Z'' \to Z'$ も存在する。よって $\mathsf{K}(\mathcal{C})$ の擬同型からなる図式 $Z \leftarrow Z'' \to Z$ を得る。これらの射を代表する $\mathsf{Ch}(\mathcal{C})$ の擬同型からなる図式 $Z \leftarrow Z'' \to Z$ を $\mathcal{C}$ の図式として書き直すと、

可換図式

$$
\begin{array}{ccccccccc}
H^{-n}(Z) & \longrightarrow & Z^{-n} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & Z^{-1} & \longrightarrow & H^{-1}(Z) \\
\uparrow & & \uparrow & & & & \uparrow & & \uparrow \\
H^{-n}(Z'') & \longrightarrow & Z''^{-n} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & Z''^{-1} & \longrightarrow & H^{-1}(Z'') \\
\downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow \\
H^{-n}(Z') & \longrightarrow & Z'^{-n} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & Z'^{-1} & \longrightarrow & H^{-1}(Z').
\end{array}
$$

を得る。$H^{-n}(Z) \cong H^{-n}(Z'') \cong H^{-n}(Z') \cong Y$ と $H^{-1}(Z) \cong H^{-1}(Z'') \cong H^{-1}(Z') \cong X$ に注意すれば所望の可換図式を得る。以上で必要性の証明を完了し、(3) の証明を完了し、問題 I.39 の解答を完了する。 □

References

[KS02] M. Kashiwara and P. Schapira. *Sheaves on Manifolds*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer Berlin Heidelberg, 2002. ISBN: 9783540518617. URL: https://www.springer.com/jp/book/9783540518617.