

Sheaves on Manifolds Exercise I.28 の解答

ゆじとも

2021 年 2 月 9 日

Sheaves on Manifolds [Exercise I.28, [KS02](#)] の解答です。

I Homological Algebra

問題 I.28. A を環とする。以下の条件が同値であることを証明せよ：

- (1) $\text{Mod}(A)$ はホモロジー次元 $\leq n$ を持つ。
- (2) 任意の左 A -加群 M は長さ n 以下の入射分解を持つ。
- (3) 任意の左 A -加群 M は長さ n 以下の射影分解を持つ。

$\text{Mod}(A)$ のホモロジー次元か $\text{Mod}(A^{\text{op}})$ のホモロジー次元のうち大きい方を A の大域ホモロジー次元 (global homological dimension) と言い、 $\text{gld}(A)$ と表す。

証明. [Exercise 1.17 (1) \Leftrightarrow (2), [KS02](#)] より (1) \Leftrightarrow (2) であることが従う。さらに \mathcal{C} のホモロジー次元は定義より \mathcal{C}^{op} のホモロジー次元と等しいので、 $\text{Mod}(A)^{\text{op}}$ で考えると、再び [Exercise 1.17 (1) \Leftrightarrow (2), [KS02](#)] より (1) \Leftrightarrow (3) であることが従う。以上で問題 I.28 の解答を完了する。 \square

References

- [KS02] M. Kashiwara and P. Schapira. *Sheaves on Manifolds*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer Berlin Heidelberg, 2002. ISBN: 9783540518617. URL: <https://www.springer.com/jp/book/9783540518617>.