Sheaves on Manifolds Exercise I.20 の解答

ゆじとも

2021 年 2 月 9 日

Sheaves on Manifolds [Exercise I.20, KS02] の解答です。

I Homological Algebra

問題 I.20. $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}$ をそれぞれアーベル圏として、$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}, G : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ を左完全函手とする。F-injective な $\mathcal{I} \subset \mathcal{C}$ と G-injective な $\mathcal{J} \subset \mathcal{D}$ が存在して、$F(\mathcal{I}) \subset \mathcal{J}$ となると仮定する (本文 [Proposition 1.8.7, KS02] の状況設定)。さらに、F はコホモロジー次元 $\leq r$ を持ち、G はコホモロジー次元 $\leq s$ を持つとする。このとき、$G \circ F$ はコホモロジー次元 $\leq r + s$ を持つことを示せ。

証明. $X \in \mathcal{C}$ を任意にとる。F はコホモロジー次元 $\leq r$ を持つので、ある擬同型 $X \xrightarrow{\text{qis.}} I$ で、各 k について I^k は F-acyclic であり、さらに $\tau^{\leq r}(I) = I$ となるものがある。このとき、$RF(X) \cong RF(I)$ であるが、本文 [Proposition 1.8.3, KS02] と [Exercise 1.19 (1), KS02] より、さらに $RF(I) \cong F(I)$ となる。ただしここで $F(I)$ は各 I^k を F で送ることによって得られる複体 (つまり $\mathsf{K}^+(F)(I)$) を表している。従って、本文 [Proposition 1.8.7, KS02] より、$R(G \circ F)(X) \cong RG(RF(X)) \cong RG(F(I))$ が従う。G のコホモロジー次元が $\leq s$ であることと、$\tau^{\leq r}(F(I)) = F(I)$ であることから、問題 I.20 を示すためには、次の主張を証明することが十分である：

(†) $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ をアーベル圏の間の左完全函手とする。F はコホモロジー次元 $\leq r$ を持ち、さらに F-injective な $\mathcal{I} \subset \mathcal{C}$ が存在すると仮定する。$n \geq 0$ を自然数とする。このとき、$\tau^{\leq n}(X) = X$ が成り立つ任意の $X \in \mathsf{Ch}^+(\mathcal{C})$ に対して、自然な射 $\tau^{\leq n+r}(RF(X)) \to RF(X)$ は同型射である。

n に関する帰納法により (†) を示す。$n = 0$ の場合は [Exercise 1.19 (2) (ii), KS02] より従う。$n - 1$ 以下で (†) が成立すると仮定する。$Y \overset{\text{def}}{:=} \tau^{\leq n-1}(X), Z \overset{\text{def}}{:=} \operatorname{coker}(d_X^{n-1}) \in \mathcal{C}$ と置く。このとき、$Y \to X$ の cone は $Z[n]$ と擬同型である。また、$\tau^{\leq n-1}(Y) = Y$ であるから、帰納法の仮定より $\tau^{\leq n-1+r}(RF(\tau^{\leq n-1}(X))) \cong RF(\tau^{\leq n-1}(X))$ であり、$\tau^{\leq 0}(Z) = Z$ であるから、すでに示されている $n = 0$ の場合より、$\tau^{\leq n+r}(RF(Z[n])) = \tau^{\leq r}(RF(Z))[n] cong RF(Z)[n] = RF(Z[n])$ である。完全三角 $Y \to X \to Z[n] \to Y[1]$ に RF を適用して得られる完全三角 $RF(Y) \to RF(X) \to RF(Z[n]) \to RF(Y[1])$ に $\tau^{\leq n+r}$ を適用すれば、完全三角

$$\tau^{\leq n+r}(RF(Y)) \to \tau^{\leq n+r}(RF(X)) \to \tau^{\leq n+r}(RF(Z[n])) \to \tau^{\leq n+r}(RF(Y[1]))$$

を得る。$\tau^{\leq n+r}(RF(Y)) \cong RF(Y), \tau^{\leq n+r}(RF(Z[n])) \cong RF(Z[n])$ より、完全三角

$$RF(Y) \to \tau^{\leq n+r}(RF(X)) \to Z[n] \to Y[1]$$

を得る。以上で (†) の証明を完了し、問題 I.20 の解答を完了する。 □

References

[KS02] M. Kashiwara and P. Schapira. *Sheaves on Manifolds*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer Berlin Heidelberg, 2002. ISBN: 9783540518617. URL: https://www.springer.com/jp/book/9783540518617.