Sheaves on Manifolds Chapter II の Exercise の解答

ゆじとも

2021 年 2 月 9 日

Sheaves on Manifolds [Chapter II, KS02] の Exercise の解答です。現時点 (=2021 年 2 月 9 日) で解いていない (≒ 解けていない) II 章の問題：問題 II.16 (2)、問題 II.21 以降。

- 解きっぱなしで見直してないのでいっぱいミスがあると思います。参考にする場合は注意してください。ミスを発見した方は指摘していただければ幸いです。
- 自然そうな仮定が本文中に書かれていないように見えた場合は、そのような仮定を置いた上で解いています。なので、その場合は問題文を少し変更して書いて、問題文の直後に Remark を置くようにしました。そのような問題であって、本文の指示通りの仮定で解くことができるものがあれば、指摘していただければ幸いです。
- 私はこの分野の専門家ではありませんので、重ねて申し上げますが、本当にヤバいミスをしたまま放置している可能性は十分あります。また、解答も「最適解」から程遠いものもたくさんあるかと思います。そのようなもののうち、あまりに目に余るものがあれば、指摘していただければ幸いです。

II Sheaves

本文では、局所コンパクト空間であるという場合には、ハウスドルフ性を常に仮定していることに注意しておく (cf. 本文 [Proposition 2.5.1, KS02] 直前の記述)。同様に、本文では、パラコンパクト空間であるという場合には、ハウスドルフ性を常に仮定している (cf. 本文 [Proposition 2.5.1, KS02] 直後の記述)。

問題 II.1. $\mathbb{N}$ を自然数の集合で、$\{0,\cdots,n\}, n \geq -1$ たちが開となる最も粗い位相を入れる。このとき、$\mathbb{N}$ 上の前層 F は各 n に対するアーベル群 $F_n :\overset{\text{def}}{=} F(\{0,\cdots,n\})$ と $n \geq m$ に対する開集合の包含 $\{0,\cdots,m\} \subset \{0,\cdots,n\}$ により引き起こされる制限写像 $F_n \to F_m$ の族に唯一のアーベル群 $F_\infty :\overset{\text{def}}{=} F(\mathbb{N})$ を添加したものと同一視される。

(0) 前層 F が層であるための必要十分条件は $\Gamma(\mathbb{N}, F) \cong \lim_n F_n$ であることを示せ。
(1) 各 $j \neq 0, 1$ に対して $H^j(\mathbb{N}, F) = 0$ であることを示せ。
(2) $H^1(\mathbb{N}, F) \cong (\prod_n F_n)/I$ であることを示せ。ただし I の定義は、$f_{i,j} : F_i \to F_j$ を層 F の制限写像とするとき、以下で定義される：

$$I :\overset{\text{def}}{=} \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_n F_n \,\middle|\, \forall n \in \mathbb{N}, \exists y_n \in F_n, x_n = y_n - f_{n+1,n}(y_{n+1}) \right\}.$$

証明. (0) は自明。(1) を示す。$G_n :\overset{\text{def}}{=} \prod_{i\leq n} F_i$ と置く。射影 $G_n \to G_{n-1}$ らにより定まる $\mathbb{N}$ 上の層を G と置くと、構成からただちに G が脆弱層であることがわかる。各 $n \geq i$ に対して制限写像 $F_n \to F_i$ の族が単射 $F_n \to \prod_{i\leq n} F_i = G_n$ を引き起こす。これは制限写像 $F_n \to F_{n-1}$ と射影 $G_n \to G_{n-1}$ と可換し、よって層の単射 $F \to G$ を得る。

層 G/F の構造を決定する。層 F の制限写像を $f_{i,j} : F_i \to F_j$ と置く。

$$\varphi_n((x_i)_{i\leq n}) :\overset{\text{def}}{=} (x_i - f_{n,i}(x_n))_{i<n}$$

で定まる射 $\varphi_n : G_n \to H_n :\overset{\text{def}}{=} \prod_{i<n} F_i$ は全射であり、核はちょうど $\mathrm{Im}(F_n \to G_n)$ である。また、$m \leq n$ に対して $h_{n,m} : H_n \to H_m$ を

$$h_{n,m}((x_i)_{i<n}) :\overset{\text{def}}{=} (x_i - f_{m,i}(x_m))_{i<m}$$

と定めれば、各 $i < m \leq n$ に対して

$$(x_i - f_{n,i}(x_n)) - (f_{m,i}(x_m - f_{n,m}(x_n)) = x_i - f_{m,i}(x_m)$$

となるので、図式

$$\begin{tikzcd} G_n \arrow[r, "\varphi_n"] \arrow[d, "\text{proj.}"'] & H_n \arrow[d, "h_{n,m}"] \\ G_m \arrow[r, "\varphi_m"] & H_m \end{tikzcd}$$

は可換である。これらの H_n により定まる層 H は G/F に他ならないが、各 $h_{n,m}$ は全射であるから、H は脆弱層である。以上より $\mathbb{N}$ 上の層の完全列

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow H \longrightarrow 0$$

で G, H が脆弱層となるものが構成できた。このことは $H^j(\mathbb{N}, F) = 0, j \geq 2$ を示している。以上で (1) の証明を完了する。

(2) を示す。(1) の証明中に得られた層 H の大域切断を決定する。それは $\lim_n H_n$ であるから、このアーベル群を計算する。$\lim_n H_n$ は $\prod_{n \in N} H_n$ の部分加群で、

$$\left\{ (x^n :\overset{\mathrm{def}}{=} (x_i^n)_{i<n})_{n \in N} \middle| x^n \in H_n, \forall (m \leq n), h_{n,m}(x^n) = x^m \right\}$$

となるものと自然に同型である。従って各 $i < m \leq n$ に対して $x_i^m = x_i^n - h_{m,i}(x_m^n)$ となる。従って、このような元の族 $x^n \in H_n$ は $x_{n-1}^n \in F_{n-1}$ によって $x_i^n = x_i^{n-1} + h_{n-1,i}(x_{n-1}^n)$ の形で一意的に決定される。すなわち、射影 $H_n \to F_{n-1}$ を並べて得られる射影 $\prod_{n \in \mathbb{N}} H_n \to \prod_{n \in \mathbb{N}_{\geq 1}} F_{n-1} = \prod_{n \in \mathbb{N}} F_n$ を $\lim_n H_n \subset \prod_{n \in \mathbb{N}} H_n$ へ制限すると同型射となる。従って $\Gamma(\mathbb{N}, H) \cong \prod_{n \in \mathbb{N}} F_n$ となる。以上より、アーベル群の完全列

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^0(\mathbb{N}, F) \longrightarrow \textstyle\prod_{n \in \mathbb{N}} F_n &\xrightarrow{\varphi} \textstyle\prod_{n \in \mathbb{N}} F_n \\ \longrightarrow H^1(\mathbb{N}, F) &\longrightarrow 0 \end{aligned}$$

を得る。問われていることは、φ の像を決定することである。各 n について、$\varphi_n : G_n \to H_n$ の像の F_{n-1} の成分を見ればそれは決定できる。$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Gamma(\mathbb{N}, G) \cong \prod_{n \in \mathbb{N}} F_n$ を任意にとると、$\varphi_n((x_i)_{i \leq n}) = (x_i - f_{n,i}(x_n))_{i<n}$ であるから、F_{n-1} の成分は $x_{n-1} - f_{n,n-1}(x_n)$ である。従って、

$$\varphi((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = (x_n - f_{n+1,n}(x_{n+1}))_{n \in \mathbb{N}}$$

となる。従って $\mathrm{Im}(\varphi) = I$ がわかる。よって $H^1(\mathbb{N}, F) \cong (\prod_{n \in \mathbb{N}} F_n)/I$ が示された。以上で解答を完了する。 □

問題 II.2. X を位相空間、$A, B \subset X$ を閉集合とし、$X = A \cup B$ であるとする。$F \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D}^+(X))$ に対して、自然に $(R\Gamma_B(F))_A \cong R\Gamma_B(F_A)$ となることを示せ。

証明. 函手 $(-)_{X \setminus A}$ は完全なので、自然に $R\Gamma_{X \setminus B}(-)_{X \setminus A} \cong R(\Gamma_{X \setminus B}(-)_{X \setminus A})$ が成り立つ。$(X \setminus A) \cap (X \setminus B) = \varnothing$ なので、$\Gamma_{X \setminus B}(-)_{X \setminus A} = 0$ が成り立ち、とくに $R\Gamma_{X \setminus B}(-)_{X \setminus A} = 0$ が成り立つ。F を X 上の層の上に有界な複体とする。完全三角 $R\Gamma_B(F) \to F \to R\Gamma_{X \setminus B}(F) \xrightarrow{+1}$ に $(-)_{X \setminus A}$ を施すことにより、$R\Gamma_B(F)_{X \setminus A} \xrightarrow{\sim} F_{X \setminus A}$ が従う。本文 [Proposition 2.4.10, KS02] の直前の記述にあるとおり、脆弱層のなす X の部分圏は $\Gamma_{X \setminus B}(-)$-injective である。また本文 [Proposition 2.4.6 (i), KS02] より、脆弱層に対して $(-)|_{X \setminus B}$ を施したものも脆弱層である。よって $i_B : X \setminus B \to X$ を包含射とすると、$R\Gamma_{X \setminus B} \cong Ri_{B,*} \circ i_B^{-1}$ が成り立つ。$i_B^{-1}((-)_{X \setminus A}) = 0$ であるから、任意の層に対して函手 $(-)_{X \setminus A}$ を施したものは $i_{B,*}$ に対して acyclic であり、よって自然に $R\Gamma_{X \setminus B}((-)_{X \setminus A}) \cong R(\Gamma_{X \setminus B}((-)_{X \setminus A}))$ が成り立つ。$(X \setminus A) \cap (X \setminus B) = \varnothing$ なので、$\Gamma_{X \setminus B}((-)_{X \setminus A}) = 0$ が成り立ち、とくに $R\Gamma_{X \setminus B}((-)_{X \setminus A}) = 0$ が成り立つ。三角形 $R\Gamma_B(F_{X \setminus A}) \to F_{X \setminus A} \to R\Gamma_{X \setminus B}(F_{X \setminus A}) \xrightarrow{+1}$ が完全であることから、$R\Gamma_B(F_{X \setminus A}) \xrightarrow{\sim} F_{X \setminus A}$ は同型である。また、二つの図式

$$\begin{array}{ccc} R\Gamma_B(F_{X \setminus A}) & \xrightarrow{\sim} & F_{X \setminus A} \\ \downarrow & & \downarrow \\ R\Gamma_B(F) & \longrightarrow & F \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} R\Gamma_B(F)_{X \setminus A} & \xrightarrow{\sim} & F_{X \setminus A} \\ \downarrow & & \downarrow \\ R\Gamma_B(F) & \longrightarrow & F \end{array}$$

が可換であることから、

$$\begin{array}{ccc} R\Gamma_B(F_{X\setminus A}) & \xrightarrow{\sim} & R\Gamma_B(F)_{X\setminus A} \\ \downarrow & & \downarrow \\ R\Gamma_B(F) & = & R\Gamma_B(F) \end{array}$$

も可換である (二つの同型射を逆に辿って得られる二つの射 $F_{X\setminus A} \to R\Gamma_B(F)$ の差が 0 射である)。従って完全三角の間の同型射

$$\begin{array}{ccccccc} R\Gamma_B(F_{X\setminus A}) & \longrightarrow & R\Gamma_B(F) & \longrightarrow & R\Gamma_B(F_A) & \xrightarrow{+1} & \\ \cong\downarrow & & \| & & \downarrow\cong & & \\ R\Gamma_B(F)_{X\setminus A} & \longrightarrow & R\Gamma_B(F) & \longrightarrow & R\Gamma_B(F)_A & \xrightarrow{+1} & \end{array}$$

を得る。以上で問題 II.2 の証明を完了する。 □

問題 II.3. (1) $U \subset X$ を開部分集合、$x \in \bar{U}\setminus U$ として、層 $\mathbb{Z}_U$ について考えることによって $\mathcal{H}om(F,G)_x \cong \mathrm{Hom}(F_x, G_x)$ は一般には正しくないことを示せ。

(2) 次を満たす X 上の層 F と閉部分集合 $Z \subset X$ と開部分集合 U の例を与えよ：$Z \cap U = \varnothing$ であり、$R\Gamma_Z(F_U) \neq 0$ である。$\Gamma_Z(F_U)$ であることを確認し、このことから、一般に合成函手の導来函手が導来函手の合成とは異なることを帰結せよ。

証明. (1) を示す。$F = \mathbb{Z}_U$ とおき、G は任意の層とする。$x \notin U$ なので $F_x = 0$ であり、従って、このとき、$\mathrm{Hom}(F_x, G_x) = 0$ が成り立つ。また、各開集合 $V \subset X$ に対して自然に

$$\mathcal{H}om(F,G)(V) = \mathcal{H}om(\mathbb{Z}_U, G)(V) = \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_U|_V, G|_V) = \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_{U\cap V}, G|_V) \cong G(U \cap V)$$

が成り立つので、$\mathcal{H}om(F,G) \cong \Gamma_U(G)$ が成り立つ。従って、たとえば $X = \mathbb{R}, U = \mathbb{R} \setminus \{0\}, x = 0, G = \mathbb{Z}$ とすると、

$$\mathcal{H}om(\mathbb{Z}_U, \mathbb{Z})_x \cong \Gamma_U(G)_x \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \neq 0 = \mathrm{Hom}(F_x, G_x)$$

である。以上で (1) の証明を完了する。

(2) を示す。まず一般に $Z \cap U = \varnothing$ であれば、F_U の各切断は U の中に台を持つので $\Gamma_Z(F_U) = 0$ が成り立つ。$X = \mathbb{R}_{\geq 0}, U = \mathbb{R}_{>0} \subset X, Z = \{0\}$ として $F = \mathbb{Z}_X$ を定数層とする。このとき、F は定数層なので、各開集合 $V \subset X$ に対して $s \in F(V)$ で Z の外で 0 となるものは 0 しかない ($0 \in V$ であり、$s_0 = n \neq 0$ であれば、0 を含む V の連結成分の上で $s = n$ である)。従って $\Gamma_Z(F) = 0$ である。完全列 $0 \to F_U \to F \to F_Z \to 0$ に函手 $\Gamma_Z(-)$ を施すことにより、同型射 $\mathbb{Z}_x \cong \Gamma_Z(F_Z) \xrightarrow{\sim} H^1_Z(F_U)$ を得る。従ってこれが所望の例を与える。以上で (2) の証明を完了し、問題 II.3 の解答を完了する。 □

問題 II.4. 可縮な位相空間の上の局所定数層は定数層であることを示せ。

証明. X を可縮な位相空間、F_1 を X 上の局所定数層とする。$C(X)$ を X の錐とし、$i : X \to C(X)$ を包含射とする。X は可縮なので、ある $r : C(X) \to X$ が存在して、$r \circ i = \mathrm{id}_X$ となる。従って $i^{-1}(r^{-1}F_1) \cong F_1$ となる。よって $r^{-1}F_1$ が定数層であることを証明すれば良い。$v \in C(X)$ を錐の頂点とする。$p : F \to C(X)$ を層 $r^{-1}F_1$ のエタール空間 (cf. [Exercise 1.13, Har13]) とする。$r^{-1}F_1$ は局所定数層であるから、p は $C(X)$ の被覆空間である。$r^{-1}F_1$ が定数層であることを証明するためには、p が自明な被覆空間であることを証明すれば良い。

F の連結成分のなす集合を F_c とおき、F_c には離散位相を入れる。また、$F_v :\overset{\text{def}}{=} p^{-1}(v)$ とおく。このとき、F_v の各点に対して、その点の属する連結成分を対応させることにより、写像 $F_v \to F_c$ を得る。各元 $[Y] \in F_c$ に対して $Y \subset F$ で対応する連結成分を表すとする。元 $[Y] \in F_c$ と点 $y \in Y$ に対して、$p(y)$ と v を結ぶ直線は F 内の path へと一意的にリフトする、すなわち、$C(X)$ 内の直線 $l : [0,1] \to C(X), l(0) = v, l(1) = p(y)$ に対して、ある path $l' : [0,1] \to F$ が一意的に存在して、$p \circ l' = l$ となる。l' の像は連結であり、$y \in Y$ であり、Y は連結成分であるから、l' は Y を一意的に経由する (これは $[0,1]$ 上の被覆空間が自明なものに限ることから従う)。従って、このことから、写像 $F_v \to F_c$ は全単射であり、さらに各元 $[Y] \in F_c$ に対して合成射 $Y \subset F \to C(X)$ は全単射であることが従う。

$F \to F_c$ を各点に対してその点の属する連結成分を対応させる (連続) 写像とすると、この (連続) 写像と $p : F \to C(X)$ によって、$C(X)$ 上の連続写像 $F \to F_c \times C(X)$ を得る。$F_v \to F_c$ が全単射であることと、各元 $[Y] \in F_c$ に対して合成射 $Y \subset F \to C(X)$ は全単射であることから、$F \to F_c \times C(X)$ は $C(X)$ 上の被覆空間の間の全単射であることが従う。とくに同相写像である。よって $p : F \to C(X)$ は自明な被覆空間である。以上で問題 II.4 の解答を完了する。 □

問題 II.5. X をパラコンパクトハウスドルフ空間とする。X 上の層 F が **soft** であるとは、任意の閉集合 $Z \subset X$ に対して $F(X) \to F(Z)$ が全射であることを言う。F が soft であるとき、任意の $i > 0$ に対して $H^i(X, F) = 0$ であることを示せ。

証明. 問題 II.5 を示すには、soft な層たちからなる $\mathsf{Ab}(X)$ の充満部分圏が $\Gamma(X, -)$-injective であることを示すこと、従って、次の事柄を示すことが十分である (cf. 本文 [Definition 1.8.2, KS02] の直後の記述)：

(1) 脆弱層は soft である (従って、とくに、任意の層 F に対して、F を部分層として含む soft な層 G が存在する)。
(2) $0 \to F \to G \to H \to 0$ が層の完全列であるとき、F, G が soft であるとすると、H も soft である。
(3) $0 \to F \to G \to H \to 0$ が層の完全列であるとき、F が soft であれば、次の列も完全である：

$$0 \to \Gamma(X, F) \to \Gamma(X, G) \to \Gamma(X, H) \to 0.$$

(1) は本文 [Proposition 2.5.1 (iii), KS02] よりただちに従う。(2) は、閉部分集合の上への制限をする函手が完全であること、soft な層の閉部分集合への制限が soft であること、(3)、へびの補題、より従う。残っているのは (3) を示すことである。

(3) を示す。$u \in \Gamma(X, H)$ を任意にとる。もとの層の列が完全であることから、u は局所的には G へと持ち上がる、すなわち、ある X の開被覆 $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ と各 U_i 上の G の切断 $t_i^1 \in \Gamma(U_i, G)$ が存在して、$t_i \mapsto u|_{U_i}$ となる。U_i を局所有限開被覆による細分でおきかえて、t_i を制限することを考えれば、(3) を示すためには、U_i は局所有限であると仮定しても一般性を失わない。本文 [Proposition 2.5.1, KS02] の主張が終わるところからその証明が始まる前までの記述にあるとおり、U_i の開被覆による細分 $(V_i)_{i \in I}$ であって、任意の $i \in I$ に対して $\bar{V}_i \subset U_i$ となるものが存在する。このとき、$(\bar{V}_i)_{i \in I}$ も局所有限である。$i \in I$ に対して $Z_i :\overset{\text{def}}{=} \bar{V}_i$ とおく。すると、$(Z_i)_{i \in I}$ が局所有限であることから、任意の $J \subset I$ に対して

$$Z_J :\overset{\text{def}}{=} \bigcup_{j \in J} Z_j = \overline{\bigcup_{j \in J} V_j} \subset X$$

である (とくに Z_J は閉である)。

$$\mathcal{S} :\overset{\text{def}}{=} \{(J, t) | J \subset I, t \in \Gamma(Z_J, G), \text{s.t.}, t|_{Z_J} \mapsto u|_{Z_J}\}$$

と定義して、

$$(J_1, t_1) \le (J_2, t_2) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} J_1 \subset J_2 \text{かつ } t_1 = t_2|_{Z_{J_1}}$$

と定義する。$\mathcal{T} \subset \mathcal{S}$ を全順序部分集合とする。$J_{\mathcal{T}} :\overset{\text{def}}{=} \bigcup_{(J,t_J)\in\mathcal{T}} J$ とおく。このとき、$Z_{J_{\mathcal{T}}} = \bigcup_{(J,t_J)\in\mathcal{T}} Z_J$ であるから、各 $(J, t_J) \in \mathcal{T}$ に対して層の全射 $G_{Z_{J_{\mathcal{T}}}} \to G_{Z_J}$ を得る。この全射は Z_J 上の各点の stalk の間で同型射であるから、自然な射 $G_{Z_{J_{\mathcal{T}}}} \xrightarrow{\sim} \lim_{J\in\mathcal{T}} G_{Z_J}$ は同型射となる。大域切断をとることにより、同型射 $\Gamma(Z_{J_{\mathcal{T}}}, G) \xrightarrow{\sim} \lim_{J\in\mathcal{T}} \Gamma(Z_J, G)$ を得る。従って、各切断 $t_J \in \Gamma(Z_J, G)$ は切断 $t \in \Gamma(Z_{J_{\mathcal{T}}}, G)$ を定め、$\mathcal{T}$ は上界 $(J_{\mathcal{T}}, t)$ を持つ。よって、Zorn の補題により、$\mathcal{S}$ には極大元 (J, t) が存在する。$J = I$ であることを証明できれば、$Z_J = X$ であるから、(3) の証明が完了する。よって、(3) が成り立つためには、$J = I$ であることが十分である。元 $i \in I \setminus J$ が存在することを仮定する。$t_i|_{Z_i\cap Z_J} - t|_{Z_i\cap Z_J} \mapsto 0$ であるから、$t_i|_{Z_i\cap Z_J} - t|_{Z_i\cap Z_J} \in F(Z_i \cap Z_J)$ である。F は soft であり、$Z_i \cap Z_J \subset X$ は閉であるから、ある $s \in \Gamma(X, F)$ が存在して、$s|_{Z_i\cap Z_J} = t_i|_{Z_i\cap Z_J} - t|_{Z_i\cap Z_J}$ となる。$t'_i :\overset{\text{def}}{=} t_i - s|_{U_i}$ と定義すると、s の定義より、$t'_i|_{Z_i\cap Z_J} = t|_{Z_i\cap Z_J}$ が成り立つ。従って、本文 [Proposition 2.3.6 (vi), KS02] より、$J' :\overset{\text{def}}{=} J \cup \{i\}$ とおけば、ある $t' \in G(Z_{J'})$ が存在して、$t'|_{Z_i} = t'_i$ かつ $t'|_{Z_J} = t$ となる。よって、再び本文 [Proposition 2.3.6 (vi), KS02] より、$t' \mapsto u|_{Z_{J'}}$ である。これは $(J, t) < (J', t')$ を意味し、(J, t) の極大性に反する。以上で $I = J$ が従い、(3) の証明を、従って、問題 II.5 の解答を、完了する。 □

問題 II.6. X を局所コンパクトハウスドルフ空間、F を X 上の層とする。

(1) F が c-soft であるための必要十分条件は任意の $i > 0$ と任意の開集合 U に対して $H^i_c(U, F) = 0$ となることである。ただしここで $H^i_c(U, F) :\overset{\text{def}}{=} H^i_c(U, F|_U)$ である。

(2) X が可算個のコンパクト部分集合の和集合として表すことができるとき、F が c-soft であれば soft であることを示せ。

(3) c-soft であるという性質は局所的な性質であることを示せ。

証明. (1) を示す。必要性を示す。F を c-soft であるとする。本文 [Proposition 2.5.7 (i), KS02] より $F|_U$ は c-soft である。すると U 上の c-soft な層たちは $\Gamma_c(U, -)$-injective な圏であるので、とくに c-soft な層は $\Gamma_c(U, -)$-acyclic である。よって、とくに、任意の $i > 0$ に対して $H^i_c(U, F|_U) = 0$ である。以上で必要性の証明を完了する。

十分性を示す。任意の $i > 0$ と任意の開集合 $U \subset X$ に対して $H^i_c(U, F) = 0$ と仮定する。$K \subset X$ をコンパクト部分集合とすれば、X はハウスドルフなので、$K \subset X$ は閉である。従って $U :\overset{\text{def}}{=} X \setminus K$ は開である。よって $H^1_c(U, F) = 0$ である。すると、本文 [Remark 2.6.10, KS02] の最後の完全系列より、射 $F(X) \to F(K)$ は全射である。以上で (1) の証明を完了する。

(2) を示す。F を X 上の c-soft な層であり、$Z \subset X$ を閉集合とする。$K_n \subset X, (n \in \mathbb{N})$ をコンパクト部分集合の族で、$K_n \subset \mathrm{Int}(K_{n+1})$ と $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ を満たすものとする。$Z_n :\overset{\text{def}}{=} Z \cap K_n$ とおくと、Z_n はコンパクトである。$U_n :\overset{\text{def}}{=} K_n \setminus Z_n$ とおくと、$U_n \subset X$ は局所閉集合である。F は c-soft なので、本文 [Proposition 2.5.7 (i), KS02] より $F|_{K_n}$ は K_n 上の c-soft な層であり、$F|_{U_n}$ は U_n 上の c-soft な層である。$K_n, Z_{n+1} \subset K_{n+1}$ はいずれもコンパクト部分集合であり、$F|_{K_{n+1}}$ は c-soft なので、可換図式

$$\begin{tikzcd} F(K_{n+1}) \arrow[r] \arrow[d] & F(Z_{n+1}) \arrow[d] \\ F(K_n) \arrow[r] & F(Z_n) \end{tikzcd}$$

において、いずれの射も全射である。K_n, Z_n はコンパクトであるから、$F(K_n) = \Gamma_c(K_n, F), F(Z_n) = \Gamma_c(Z_n, F)$ であることに注意する。K_n 上の層の完全列

$$0 \longrightarrow (F|_{K_n})_{U_n} \longrightarrow F|_{K_n} \longrightarrow (F|_{K_n})_{Z_n} \longrightarrow 0$$

に函手 $\Gamma_c(K_n, -)$ を施すことにより、

$$0 \longrightarrow \Gamma_c(U_n, F) \longrightarrow F(K_n) \longrightarrow F(Z_n) \longrightarrow 0$$

は完全であることが従うので、以上より、完全列の間の射

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Gamma_c(U_{n+1}, F) \arrow[r] \arrow[d] & F(K_{n+1}) \arrow[r] \arrow[d] & F(Z_{n+1}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Gamma_c(U_n, F) \arrow[r] & F(K_n) \arrow[r] & F(Z_n) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

を得る。ただしここで、真ん中と右側の縦向きの射は全射である。極限 $\lim_{n\in\mathbb{N}}$ をとると、完全列

$$0 \longrightarrow \lim_{n\in\mathbb{N}} \Gamma_c(U_n, F) \longrightarrow \lim_{n\in\mathbb{N}} F(K_n) \longrightarrow \lim_{n\in\mathbb{N}} F(Z_n)$$

を得る。$F(X) \xrightarrow{\sim} \lim_{n\in\mathbb{N}} F(K_n), F(Z) \xrightarrow{\sim} \lim_{n\in\mathbb{N}} F(Z_n)$ であるから、この完全列は完全列

$$0 \longrightarrow \lim_{n\in\mathbb{N}} \Gamma_c(U_n, F) \longrightarrow F(X) \longrightarrow F(Z)$$

と自然に同型である。従って、$F(X) \to F(Z)$ が全射であるためには、$(\Gamma_c(U_n, F))_{n\in\mathbb{N}}$ が Mittag-Leffler 条件を満たすことが十分である。$U_n \subset U_{n+1}$ は閉なので、U_{n+1} 上の層の列

$$0 \longrightarrow (F|_{U_{n+1}})_{U_{n+1}\setminus U_n} \longrightarrow F|_{U_{n+1}} \longrightarrow (F|_{U_{n+1}})_{U_n} \longrightarrow 0$$

は (本文 [Proposition 2.6.6 (v), KS02] より) 完全である。$F|_{U_{n+1}}$ は c-soft であるので、この完全列に函手 $\Gamma_c(U_{n+1}, -)$ を施すことにより、$\Gamma_c(U_{n+1}, F) \to \Gamma_c(U_n, F)$ は全射であることが従う。よって、逆系 $(\Gamma_c(U_n, F))_{n\in\mathbb{N}}$ は Mittag-Leffler 条件を満たす。従って、射 $F(X) \to F(Z)$ は全射であり、以上で (2) の証明を完了する。

(3) を示す。X の開被覆 $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ が存在して、各 i に対して $F|_{U_i}$ が U_i 上の c-soft な層であると仮定する。$j : U_i \to X$ を包含射とする。本文 [Proposition 2.5.4 (ii), KS02] より、$F_{U_i} = j_!(F|_{U_i})$ であるから、$F|_{U_i}$ が c-soft であることから、F_{U_i} も c-soft であることが従う。本文 [Proposition 2.3.6 (vii), KS02] の完全列

$$0 \longrightarrow F_{U_{i_1}\cap U_{i_2}} \longrightarrow F_{U_{i_1}} \oplus F_{U_{i_2}} \longrightarrow F_{U_{i_1}\cup U_{i_2}} \longrightarrow 0$$

において、左側と真ん中が c-soft なので、本文 [Corollary 2.5.9, KS02] より $F_{U_{i_1}\cup U_{i_2}}$ も c-soft である。従って、有限部分集合 $I_1 \subset I$ に対して $U_{I_1} :\overset{\mathrm{def}}{=} \bigcup_{i\in I_1} U_i$ とおけば、$F_{U_{I_1}}$ は c-soft である。任意にコンパクト集合 $K \subset X$ をとれば、ある有限部分集合 $I_1 \subset I$ が存在して $K \subset U_{I_1}$ となる。$F|_{U_{I_1}} = (F_{U_{I_1}})|_{U_{I_1}}$ は c-soft であるから、$\Gamma_c(U_{I_1}, F|_{U_{I_1}}) = \Gamma_c(X, F_{U_{I_1}}) \to \Gamma_c(K, F)$ は全射である。また、$F_{U_{I_1}}$ は F の部分層であるから、従って、$\Gamma_c(X, F) \to \Gamma_c(K, F)$ も全射である。さらに $\Gamma_c(X, F) \subset F(X)$ であり、$\Gamma_c(K, F) = F(K)$ であるので、よって $F(X) \to F(K)$ は全射である。以上で (3) の証明を完了し、問題 II.6 の解答を完了する。 □

問題 II.7. X を局所コンパクトハウスドルフ空間として、R を X 上の c-soft な環の層とする。このとき、任意の R-加群は c-soft であることを示せ。

注意. 本文では X に関する仮定が何も書かれていないが、c-soft な層に関する話は局所コンパクトハウスドルフ空間上で展開することが、本文では念頭に置かれているように思う。(もちろん、X が局所コンパクトでなくてもこの問題を解くことが可能かもしれないが...)

証明. M を R-加群とする。X は局所コンパクト空間であるから、閉包がコンパクトであるような開集合たちの和集合である。従って、問題 II.6 (3) より、M が c-soft であることを示すためには、X をコンパクトハウスドルフ空間であると仮定しても一般性を失わない。このとき、c-soft であるという性質と soft であるという性質は同等であることに注意しておく。とくに、R は soft である。

コンパクト部分集合 $K \subset X$ と切断 $m_K \in \Gamma(K, M)$ を任意にとる。本文 [Proposition 2.5.1 (ii), KS02] より、ある開集合 $K \subset U \subset X$ とある切断 $m_U \in \Gamma(U, M)$ が存在して、$m_K = m_U|_K$ となる。$K \subset V \subset \bar{V} \subset U$ となる開集合 V を一つとる (X は局所コンパクトであり、K はコンパクトであるから、このような V が存在する)。R は soft であり、$K \cup (X \setminus V) \subset X$ は閉であるため、ある $f \in \Gamma(X, R)$ が存在して

$$f|_{K \cup (X\setminus V)} = (1|_K, 0_{X\setminus V}) \in \Gamma(K, R) \times \Gamma(X \setminus V, R) \cong \Gamma(K \cup (X \setminus V), R)$$

となる。$W :\overset{\text{def}}{=} X \setminus \bar{V}$ とおけば、$\bar{V} \subset U$ なので $W \cup U = X$ である。さらに $U \cap W \subset X \setminus V$ であるから、$f|_{U\cap W} = 0$ であり、とくに $f|_{U\cap W} \times m_U|_{U\cap W} = 0$ である。従って、M は層であるから、W 上での切断 $0 \in \Gamma(W, M)$ を考えることにより、ある $m \in \Gamma(X, M)$ が存在して $f|_U \times m_U = m|_U, m|_W = 0$ となる。$f|_K = 1$ なので、よって $m|_K = f|_K \times m_U|_K = m_U|_K = m_K$ が従う。以上より $\Gamma(X, M) \to \Gamma(K, M)$ は全射であり、問題 II.7 の証明を完了する。 $\square$

問題 II.8. X を局所コンパクトハウスドルフ空間として、可算個のコンパクト部分集合の和集合であるとする。X 上の層 F が**しなやか** (supple) であるとは、任意の開集合 $U \subset X$ と U の二つの閉部分集合 $Z_1, Z_2 \subset U$ に対して $\Gamma_{Z_1}(U, F) \oplus \Gamma_{Z_2}(U, F) \to \Gamma_{Z_1 \cup Z_2}(U, F)$ が全射であることを言う。

(1) 脆弱層はしなやかであることを示せ。
(2) 層 F がしなやかであれば、任意の閉部分集合 $Z \subset X$ に対して層 $\Gamma_Z(F)$ は c-soft であることを示せ。
(3) F を X 上の層とする。X のある開被覆 $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ が存在して、任意の i で $F|_{U_i}$ が U_i 上のしなやかな層であるとするとき、F もしなやかであることを示せ。

証明. (1) を示す。F を X 上の脆弱層とする。開集合 U と閉集合 $Z_1, Z_2 \subset U$ を任意にとる。$V_i :\overset{\text{def}}{=} U \setminus Z_i, (i = 1, 2)$ とすると、$V_1, V_2 \subset X$ は開である。F は脆弱であるから、可換図式

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \Gamma_{Z_1\cap Z_2}(U,F) & \longrightarrow & \Gamma_{Z_1}(U,F) \oplus \Gamma_{Z_2}(U,F) & \longrightarrow & \Gamma_{Z_1\cup Z_2}(U,F) & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & F(U) & \longrightarrow & F(U) \oplus F(U) & \longrightarrow & F(U) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & F(V_1 \cup V_2) & \longrightarrow & F(V_1) \oplus F(V_2) & \longrightarrow & F(V_1 \cap V_2) & &
\end{array}$$

において真ん中から下への縦向きの射はいずれも全射であり、さらに一番下の行は層であることの定義より完全である。蛇の補題を用いることで、$\Gamma_{Z_1}(U, F) \oplus \Gamma_{Z_2}(U, F) \to \Gamma_{Z_1 \cup Z_2}(U, F)$ が全射であることが従う。以上で (1) の証明を完了する。

(2) を示す。F を X 上のしなやかな層とする。まず、任意の閉部分集合 Z に対して $\Gamma_Z(F)$ が X 上のしなやかな層であることを示す。$U \subset X$ を開集合、$Z' \subset U$ を U の閉部分集合とする。F の U 上の section で

あって Z に台を持ち、さらに Z' にも台を持つものは $Z\cap Z'$ に台を持つので、

$$\Gamma_{Z'}(U,\Gamma_Z(F))=\Gamma_{Z'\cap Z}(U,F)$$

が成り立つ。二つの閉部分集合 $Z_1,Z_2\subset U$ に対して、$Z_1' :\overset{\text{def}}{=} Z_1\cap Z, Z_2' :\overset{\text{def}}{=} Z_2\cap Z$ とおけば、F がしなやかであることから、

$$\Gamma_{Z_1'}(U,F)\oplus\Gamma_{Z_2'}(U,F)\to\Gamma_{Z_1'\cup Z_2'}(U,F)$$

は全射である。$Z_1'\cup Z_2'=(Z_1\cup Z_2)\cap Z$ であるので、従って

$$\Gamma_{Z_1}(U,\Gamma_Z(F))\oplus\Gamma_{Z_2}(U,\Gamma_Z(F))\to\Gamma_{Z_1\cup Z_2}(U,\Gamma_Z(F))$$

も全射である。これは $\Gamma_Z(F)$ がしなやかであることを意味する。以上より、(2) を示すためには、任意のしなやかな層が c-soft であることを示すことが十分である。

F を X 上のしなやかな層として、$K\subset X$ をコンパクト部分集合とする。$t\in F(K)$ を一つとる。本文 [Proposition 2.5.1 (ii), KS02] より、ある開集合 $K\subset U\subset X$ と $t_U\in F(U)$ が存在して、$t_U|_K=t$ が成り立つ。$K\subset V,\bar{V}\subset U$ となる開集合 $V\subset X$ を一つとる。$Z :\overset{\text{def}}{=} \mathrm{Supp}(t_U)\setminus V$ とおくと、$t_U\in\Gamma_{Z\cup\bar{V}}(U,F)$ である。F はしなやかであり、$\bar{V},Z\subset U$ は閉集合であるから、ある $u\in\Gamma_Z(U,F),v\in\Gamma_{\bar{V}}(U,F)$ が存在して $t_U=u+v$ が成り立つ。$Z\cap K\subset Z\cap V=\varnothing$ であるから、$u|_K=0$ である。従って $t=t_U|_K=v|_K$ が成り立つ。$\bar{V}\subset U$ であるから、$\Gamma_{\bar{V}}(X,F)\xrightarrow{\sim}\Gamma_{\bar{V}}(U,F)$ は同型射である。従って $v\in\Gamma_{\bar{V}}(X,F)\subset F(X)$ とみなすことができる。よって $v|_K=t$ となる大域切断 $v\in F(X)$ が存在することが従い、F は c-soft であることが従う。以上で (2) の証明を完了する。

(3) を示す。まず以下の主張を証明する：

(†) X を位相空間、$Z\subset X$ を閉部分集合、$U\subset X$ を開集合、F を X 上の層として、$F|_U$ がしなやかであると仮定する。開集合 V と閉集合 C が $V\subset C\subset U$ を満たしているとする。このとき、任意の切断 $t\in\Gamma_Z(X,F)$ に対し、ある $u\in\Gamma_{Z\cap C}(X,F)$ と $v\in\Gamma_{Z\setminus V}(X,F)$ が存在して $t=u+v$ が成り立つ。

$t|_U\in\Gamma_{Z\cap U}(U,F)$ について考える。$F|_U$ はしなやかであり、$Z\cap U=(Z\cap U\cap C)\cup((Z\cap U)\setminus V)=(Z\cap C)\cup((Z\cap U)\setminus V)$ であるから、ある $u_1\in\Gamma_{Z\cap C}(U,F)$ と $v_1\in\Gamma_{(Z\cap U)\setminus V}(U,F)$ が存在して $t|_U=u_1+v_1$ が成り立つ。$Z\cap C$ は X の閉部分集合であるような U の部分集合であり、$u_1|_{U\setminus(Z\cap C)}=0$ であるから、$X\setminus(Z\cap C)$ 上の関数 0 と u_1 が貼り合い、$u|_U=u_1,\mathrm{Supp}(u)\subset Z\cap C$ となる大域切断 $u\in\Gamma_{Z\cap C}(X,F)$ が一意的に定義される。$v :\overset{\text{def}}{=} t-u$ とおけば、$u_1+v_1=t|_U=u|_U+v|_U=u_1+v|_U$ であるから $v_1=v|_U$ が成り立ち、従って $\mathrm{Supp}(v|_U)\subset(Z\cap U)\setminus V$ である。一方、$\mathrm{Supp}(u)\subset Z\cap C$ であるから、$v|_{X\setminus(Z\cap C)}=t|_{X\setminus(Z\cap C)}$ であり、従って $\mathrm{Supp}(v|_{X\setminus(Z\cap C)})\subset Z\cap(X\setminus(Z\cap C))=Z\setminus C$ が成り立つ。以上より

$$\mathrm{Supp}(v)\subset(Z\setminus C)\cup((Z\cap U)\setminus V)=Z\setminus V$$

が成り立ち、$v\in\Gamma_{Z\setminus V}(X,F)$ が成り立つ。以上で (†) の証明を完了する。

次に以下の主張を証明する：

(‡) X を位相空間、F を X 上の層として、$t_i\in\Gamma(X,F),(i\in I)$ を大域切断の族とする。閉集合族 $(\mathrm{Supp}(t_i))_{i\in I}$ が局所有限であるとき、ある大域切断 $t\in\Gamma(X,F)$ が存在して、任意の $x\in X$ で $t_x=\sum_{i\in I}t_{i,x}$ が成り立つ (各 $x\in X$ に対して stalk $t_{i,x}$ は有限個の $i\in I$ を除き 0 なので、右辺が well-defined であることに注意)。

各 $x \in X$ に対して $U(x) \cap \mathrm{Supp}(t_i) \neq \varnothing$ となる $i \in I$ が有限個となる開近傍 $x \in U(x)$ を一つずつ選び、$I(x) \overset{\mathrm{def}}{:=} \{i \in I | U(x) \cap \mathrm{Supp}(t_i) \neq \varnothing\}$ 定める。定義より $I(x)$ は有限集合である。$t(x) \overset{\mathrm{def}}{:=} (\sum_{i \in I(x)} t_i)|_{U(x)}$ と定義する ($I(x)$ が有限集合であることに注意)。このとき、$x, y \in X$ に対して $t(x)|_{U(x) \cap U(y)} = t(y)|_{U(x) \cap U(y)}$ が成り立つ (各 stalk ごとに、$U(x) \cap U(y)$ 上で 0 でない t_i たちの和と等しい)。F が層であることから、ある $t \in \Gamma(X, F)$ が存在して任意の $x \in X$ に対して $t|_{U(x)} = t(x)$ が成り立つ。$t(x)$ の定義より、この大域切断 t が所望の大域切断である。以上で (‡) の証明を完了する。

本題に入る。$(U_i)_{i \in I}$ を X の開被覆として、F を X 上の層とする。$F|_{U_i}$ が U_i 上のしなやかな層であるとする。各 $i \in I$ に対して、$F|_{U_i \cap U}$ は $U_i \cap U$ 上のしなやかな層であるから、(3) を示すためには、任意の閉集合 $Z_1, Z_2 \subset X$ に対して $\Gamma_{Z_1}(X, F) \oplus \Gamma_{Z_2}(X, F) \to \Gamma_{Z_1 \cup Z_2}(X, F)$ が全射であることを証明することが十分である。X は局所コンパクトであり可算個のコンパクト部分集合の和であるから、パラコンパクトである (cf. 本文 [Proposition 2.5.1, KS02] の段落)。従って、局所有限な開被覆による $(U_i)_{i \in I}$ の細分をとることによって、(3) を示すためには、$(U_i)_{i \in I}$ が局所有限であると仮定しても一般性を失わない。開集合 $V_i \subset U_i$ を $\bar{V}_i \subset U_i$ となるようにとると、閉被覆 $(\bar{V}_i)_{i \in I}$ も局所有限である。I に整列順序を入れて順序数とみなしたものを α とおき (整列可能定理)、各 $\beta < \alpha$ に対して対応するものを U_β, V_β などと表す。各 $\beta < \alpha$ に対して

$$U_{<\beta} \overset{\mathrm{def}}{:=} \bigcup_{\gamma < \beta} U_\gamma, \quad U_{\leq \beta} \overset{\mathrm{def}}{:=} U_{<\beta+1}, \quad V_{<\beta} \overset{\mathrm{def}}{:=} \bigcup_{\gamma < \beta} V_\gamma, \quad V_{\leq \beta} \overset{\mathrm{def}}{:=} V_{<\beta+1},$$

とおく (ただし $U_{<0} = V_{<0} = \varnothing$ と定義する)。このとき、任意の $\beta < \alpha$ に対して $\bar{V}_{<\beta} = \bigcup_{\gamma < \beta} \bar{V}_\gamma$ が成り立ち、また $V_{<\alpha} = U_{<\alpha} = X$ が成り立つ。

$t \in \Gamma_{Z_1 \cup Z_2}(X, F)$ を任意にとる。各 $\beta \leq \alpha$ に対して、大域切断 $t_{i,<\beta} \in \Gamma_{Z_i \cap \bar{V}_{<\beta}}(X, F), (i = 1, 2)$ であって

$$t|_{V_{<\beta}} = (t_{1,<\beta} + t_{2,<\beta})|_{V_{<\beta}} \tag{★}$$

が成り立つものが存在することを示す。そのためには、超限帰納法により、$\beta \leq \alpha$ を任意にとり、任意の $\gamma < \beta$ に対してに対して等式 (★) を満たす $Z_i \cap \bar{V}_{<\gamma}$ に台を持つ大域切断 $t_{i,<\gamma}$ が存在すると仮定して、β に対して等式 (★) を満たす $Z_i \cap \bar{V}_{<\gamma}$ に台を持つ大域切断 $t_{i,<\gamma}$ が存在することを示すことが十分である。$\beta = 0$ に対しては $t_{1,<0} = t_{2,<0} = 0$ と定義すれば (★) が成り立つ。(そうでなくても、$V_{<0} = \varnothing$ なのでなんでも良い)。$\beta \leq \alpha$ を任意にとる。任意の $\gamma < \beta$ に対してに対して等式 (★) を満たす $Z_i \cap \bar{V}_{<\gamma}$ に台を持つ大域切断 $t_{i,<\gamma}$ が存在すると仮定する。$u_\gamma = t - (t_{1,<\gamma} + t_{2,<\gamma})$ とおく。$u_\gamma|_{V_{<\gamma}} = 0$ であり、t は $Z_1 \cup Z_2$ に台を持ち、$t_{i,<\gamma}$ は $Z_i \cap \bar{V}_{<\gamma}$ に台を持つので、u_γ は $(Z_1 \cup Z_2) \setminus V_{<\gamma}$ に台を持つ。β が極限順序数である場合は、各 $t_{i,<\gamma+1} - t_{i,<\gamma}$ は $\bar{V}_{\gamma+1} \setminus V_{<\gamma}$ に台を持ち、閉集合族 $(\bar{V}_{\gamma+1} \setminus V_{<\gamma})_{\gamma < \beta}$ は局所有限であるから、(‡) を用いて $t_{i,<\beta} \overset{\mathrm{def}}{:=} \sum_{\gamma < \beta} (t_{i,<\gamma+1} - t_{i,<\gamma})$ と定義することで所望の大域切断を得る。β が β^- の後続順序数である場合に所望の大域切断 $t_{i,<\beta}$ の存在を示すことが残っている。(†) を $U = U_{\beta^-}, Z = (Z_1 \cup Z_2) \setminus V_{<\beta^-}, C = \bar{V}_{\beta^-}, V = V_{\beta^-}$ に対して適用することにより、$(Z_1 \cup Z_2) \setminus V_{<\beta}$ に台を持つ大域切断 u'_β と $(Z_1 \cup Z_2) \cap \bar{V}_{\beta^-}$ に台を持つ大域切断 t_{β^-} が存在して、$u_{\beta^-} = u'_\beta + t_{\beta^-}$ が成り立つ。$F|_{U_{\beta^-}}$ はしなやかであるから、$i = 1, 2$ に対して $Z_i \cap \bar{V}_{\beta^-}$ に台を持つ U_{β^-} 上の大域切断 t_{i,β^-} が存在して $t_\beta|_{U_{\beta^-}} = (t_{1,\beta^-} + t_{2,\beta^-})|_{U_{\beta^-}}$ が成り立つ。$Z_i \cap \bar{V}_{\beta^-}, (i = 1, 2)$ は X の閉部分集合であるから、t_{i,β^-} は U_{β^-} の外で 0 とすることで大域切断に延長できる。よって、$i = 1, 2$ に対して $Z_i \cap \bar{V}_{\beta^-}$ に台を持つ大域切断 t_{i,β^-} が存在して $t_{\beta^-} = t_{1,\beta^-} + t_{2,\beta^-}$ が成り立つ。$t_{i,<\beta} \overset{\mathrm{def}}{:=} t_{i,<\beta^-} + t_{i,\beta^-}, (i = 1, 2)$ と定義すると、大域切断 $t_{i,<\beta}$

は $Z_i \cap \bar{V}_{<\beta}$ に台を持ち、さらに

$$\begin{aligned}
t|_{V_{<\beta}} &= (t_{1,<\beta-} + t_{2,<\beta-} + u_{\beta-})|_{V_{<\beta}} \\
&= (t_{1,<\beta-} + t_{2,<\beta-} + u'_{\beta} + t_{\beta-})|_{V_{<\beta}} \\
&= (t_{1,<\beta-} + t_{2,<\beta-} + u'_{\beta} + t_{1,\beta-} + t_{2,\beta-})|_{V_{<\beta}} \\
&= (t_{1,<\beta} + t_{2,<\beta} + u'_{\beta})|_{V_{<\beta}} \\
&= (t_{1,<\beta} + t_{2,<\beta})|_{V_{<\beta}} + u'_{\beta}|_{V_{<\beta}} \\
&= (t_{1,<\beta} + t_{2,<\beta})|_{V_{<\beta}}
\end{aligned}$$

が成り立つ。以上より、各 $\beta \leq \alpha$ に対して、$Z_i \cap \bar{V}_{<\beta}$ に台を持つ大域切断 $t_{i,<\beta}$ であって $t|_{V_{<\beta}} = (t_{1,<\beta} + t_{2,<\beta})|_{V_{<\beta}}$ を満たすものが存在することが示された。$\beta = \alpha$ とすることで (3) の証明が完了する。以上で問題 II.8 の解答を完了する。 □

感想. (3) を上手に示す方法を知っている (もしくは、上手に証明できた) 人は教えてください (上の証明はゴリ押し感が強いので)。本文で参照されている Bengal-Schapira はフランス語だったしどこにそれっぽい主張が書いてあるのかあんまりよくわからなかったのであんまり参考にしてません。(3) より (2) の方が難しくて苦労しました。慣れてなかっただけかもしれません。

注意. X がパラコンパクトであり F が X 上のしなやかな層であるとすると、(2) と同様の証明により、任意の閉部分集合 Z に対して $\Gamma_Z(F)$ は soft であることを示すことができる。

注意. X をハウスドルフとして、F を X 上のしなやかな層であるとする。$K \subset X$ を閉部分集合として、K がコンパクトであるか、または X がパラコンパクトであるとする。このとき、$F|_K$ は K 上のしなやかな層である。これを示す。明らかに F の開部分集合への制限はその開部分集合上しなやかな層となる。K の開部分集合は X の開集合 $W \subset X$ により $K \cap W$ と表すことができる。$Z_1, Z_2 \subset K \cap W$ を閉集合とする。このとき Z_1, Z_2 は W の閉集合である。$K \cap W \subset W' \subset W$ となる開集合 $W' \subset X$ の族を包含関係の逆順に関して有向集合とみなしてそれを I とし、$i \in I$ に対して対応する開集合を W_i と表す。各 $i \in I$ に対して $F|_{W_i}$ は W_i 上のしなやかな層であるから、

$$\Gamma_{Z_1}(W_i, F|_{W_i}) \oplus \Gamma_{Z_2}(W_i, F|_{W_i}) \to \Gamma_{Z_1 \cup Z_2}(W_i, F|_{W_i})$$

は全射である。$i \in I$ に渡って余極限をとると、本文 [Proposition 2.5.1, KS02] より、

$$\Gamma_{Z_1}(K \cap W, F|_{K\cap W}) \oplus \Gamma_{Z_2}(K \cap W, F|_{K\cap W}) \to \Gamma_{Z_1 \cup Z_2}(K \cap W, F|_{K\cap W})$$

が全射であることが従う。これは $F|_K$ がしなやかであることを意味する。

問題 II.9. X を位相空間とする。

(1) F を X 上の層として、$n \geq 0$ を自然数とする。以下の条件が同値であることを示せ：
   - (i) 完全列 $0 \to F \to F^0 \to \cdots \to F^n \to 0$ で各 $j = 0, \cdots, n$ に対して F^j が脆弱であるものが存在する。
   - (ii) $0 \to F \to F^0 \to \cdots \to F^n \to 0$ が完全であり、各 $j < n$ に対して F^j が脆弱であれば、F^n も脆弱である。
   - (iii) 任意の閉部分集合 $Z \subset X$ と任意の $k > n$ に対して $H^k_Z(X, F) = 0$ が成り立つ。
   - (iv) 任意の局所閉部分集合 $Z \subset X$ と任意の $k > n$ に対して $H^k_Z(X, F) = 0$ が成り立つ。

(v) 任意の閉部分集合 $Z \subset X$ と任意の $k > n$ に対して $H_Z^k(F) = 0$ が成り立つ。

(vi) 任意の局所閉部分集合 $Z \subset X$ と任意の $k > n$ に対して $H_Z^k(F) = 0$ が成り立つ。

これらの条件を満たす最小の $n \geq 0$ を F の**脆弱次元** (flabby dimension) と言い、X 上のすべての層 F の脆弱次元の sup を X の**脆弱次元**と言う。

(2) X を局所コンパクトハウスドルフであるとする。X 上の層 F の **c-soft dimension** を同様に定義して、この場合にも (1) の条件 (i) から (iv) に対応するものが同値であることを確認せよ。

(3) X を局所コンパクトハウスドルフであるとする。このとき、以下の不等式を証明せよ：

$$F \text{ の } c\text{-soft dimension} \leq F \text{ の脆弱次元} \leq F \text{ の } c\text{-soft dimension} + 1.$$

証明. (1) を示す。帰納法で証明する。$n = 0$ とする。条件 (i) と (ii) はどちらも「F は脆弱層である」と読むことができるので明らかに同値である。(iv) $\Rightarrow$ (iii) と (vi) $\Rightarrow$ (v) が成り立つことは明らかである。また脆弱層は函手 $\Gamma_Z(X, -)$ や $\Gamma_Z(-)$ に対して acyclic である (cf. 本文 [Proposition 2.4.10, KS02] の直前の記述) ので、(i) $\Rightarrow$ (iv), (v) が成り立つ。$U \subset X$ を任意の開集合として、$Z :\overset{\text{def}}{=} X \setminus U$ とおけば、

$$0 \to H_Z^0(X, F) \to F(X) \to F(U) \to H_Z^1(X, F),$$
$$0 \to H_Z^0(F) \to F \to \Gamma_U(F) \to H_Z^1(F)$$

は完全であるから、上の列が完全であることから (iii) $\Rightarrow$ (i) が成り立ち、下の列が完全であることと本文 [Proposition 2.4.10, KS02] の証明中で示されている主張 (2.4.1) より、(v) $\Rightarrow$ (i) が成り立つ。以上で $n = 0$ の場合に条件 (i) から (vi) が全て同値であることが示された。ある n で所望の同値性が示されていると仮定して、$n+1$ に対して所望の同値性を示す。(iv) $\Rightarrow$ (iii) と (vi) $\Rightarrow$ (v) はいつでも成立する。また、n 番目まで入射分解をとることによって、(ii) $\Rightarrow$ (i) が成り立つ。F が $n+1$ に対して (i) を満たすと仮定する。脆弱層への単射 $f : F \to F_0$ を任意にとる。$\mathrm{coker}(f)$ は n に対して (i) を満たすので、帰納法の仮定より、$\mathrm{coker}(f)$ は n に対して (ii) を満たす。f の取り方は任意だったので、これは F が $n+1$ に対して (ii) を満たすことを意味する。また、完全列 $0 \to F \to F_0 \to \mathrm{coker}(f) \to 0$ で局所コホモロジーをとると、F_0 が脆弱層であることから、任意の局所閉集合 $Z \subset X$ と $i \geq 1$ に対して同型射 $H_Z^i(X, \mathrm{coker}(f)) \xrightarrow{\sim} H_Z^{i+1}(X, F)$ と $H_Z^i(\mathrm{coker}(f)) \xrightarrow{\sim} H_Z^{i+1}(F)$ を得る。$\mathrm{coker}(f)$ は n に対して (i) を満たすので、帰納法の仮定より、$\mathrm{coker}(f)$ は n に対して (iv) と (vi) を満たす。よって、F が $n+1$ に対して (iv) と (vi) を満たすことが従う。F が $n+1$ に対して (iii) または (v) を満たすと仮定する。脆弱層への単射 $f : F \to F_0$ を任意にとれば、先ほどと同様にして、$\mathrm{coker}(f)$ が n に対して (iii) または (v) を満たすことが従う。帰納法の仮定より、$\mathrm{coker}(f)$ が n に対して (i) を満たすことが従い、よって F が n に対して (i) を満たすことが従う。以上で (1) の証明を完了する。

(2) を示す。X を局所コンパクトハウスドルフ空間とする。(1) の主張 (i) から (iv) に対応するのは以下の主張である (ほんまか??)：

(1) 完全列 $0 \to F \to F^0 \to \cdots \to F^n \to 0$ で各 $j = 0, \cdots, n$ に対して F^j が c-soft であるものが存在する。

(2) $0 \to F \to F^0 \to \cdots \to F^n \to 0$ が完全であり、各 $j < n$ に対して F^j が c-soft であれば、F^n も c-soft である。

(3) 任意の開集合 U と任意の $k > n$ に対して $H_c^k(U, F|_U) = 0$ が成り立つ。

(4) 任意の局所閉集合 U と任意の $k > n$ に対して $H_c^k(U, F|_U) = 0$ が成り立つ。

帰納法で証明する。まず $n=0$ の場合にこれらの主張が同値であることを示す。(1) と (2) が同値であることは明らかである。また、問題 II.6 (1) より、(1) と (3) も同値である。(4) から (3) が従うことは明らかである。さらに、c-soft な層の局所閉部分集合への制限はまた c-soft であるから、問題 II.6 (1) より、(1) と (2) と (3) のいずれかを仮定すれば (4) が導かれる。以上で $n=0$ の場合の証明を完了する。ある n で所望の同値性が示されていると仮定して、$n+1$ に対して所望の同値性を示す。(4) から (3) が従うことは明らかである。また、n 番目までの入射分解をとれば、入射的な層は脆弱層であり、脆弱層は c-soft であるから、これは n 番目までの c-soft 分解を与えるので、その余核を考えることによって、(2) から (1) が導かれる。F が $n+1$ に対して (1) を満たすとする。c-soft な層への単射 $f : F \to F_0$ を任意にとる。このとき、$\mathrm{coker}(f)$ は n に対して (1) を満たす。従って、帰納法の仮定より、$\mathrm{coker}(f)$ は n に対して (2) を満たす。f の取り方は任意だったので、これは F が $n+1$ に対して (2) を満たすことを意味する。さらに、帰納法の仮定より、$\mathrm{coker}(f)$ は n に対して (4) を満たす。任意に局所閉集合 U をとって、U に制限したあとでコンパクト台つきコホモロジーをとることにより、各 $i \geq 1$ に対して自然な同型射 $H^i_c(U, \mathrm{coker}(f)) \xrightarrow{\sim} H^{i+1}_c(U, F)$ を得る。$\mathrm{coker}(f)$ は n に対して (4) を満たすので、従って F は $n+1$ に対して (4) を満たす。F が $n+1$ に対して (3) を満たすと仮定する。c-soft な層への単射 $f : F \to F_0$ をとれば、各 $i \geq 1$ に対して自然な射 $H^i_c(U, \mathrm{coker}(f)) \xrightarrow{\sim} H^{i+1}_c(U, F)$ は同型射であるから、$\mathrm{coker}(f)$ は n に対して (3) を満たす。従って、帰納法の仮定より、$\mathrm{coker}(f)$ は n に対して (1) を満たす。(1) によって存在が要請される $\mathrm{coker}(f)$ の c-soft な層による長さ n の分解を f と繋げることにより、F の c-soft な層 による長さ $n+1$ の分解を得るので、F は $n+1$ に対して (1) を満たす。以上で (2) の証明を完了する。

(3) を示す。脆弱層が c-soft であることから、不等式 F の c-soft dimension $\leq$ F の脆弱次元 が従う。もう一つの不等式を証明する。F の c-soft dimension が n であるとする。完全列 $0 \to F \to F^0 \to \cdots \to F^n$ で各 j に対して F^j が脆弱層であるものをとる。F の c-soft dimension が n であることから、$\mathrm{Im}(F^{n-1} \to F^n)$ は c-soft である。従って、F の脆弱次元が $n+1$ 以下であることを示すためには、次を示すことが十分である：

(†) 局所コンパクトハウスドルフな位相空間 X 上の層の完全列 $0 \to F \to G \to H \to 0$ に対して、F が c-soft であり、G が脆弱層であるとき、H も脆弱層である。

X は局所コンパクトであるので、各 $x \in X$ に対して開近傍 $x \in V \subset X$ であって $\bar{V}$ がコンパクトとなるものが存在する。本文 [Proposition 2.4.10, KS02] の証明で示されている主張 (2.4.1) より、(†) を示すためには、$H|_V$ が脆弱であることを示すことが十分である。$Z \subset V$ を閉集合とする。$K :\overset{\mathrm{def}}{=} \bar{Z} \cup (\bar{V} \setminus V)$ とおく。これはコンパクト空間 $\bar{V}$ の閉部分空間であるからコンパクトである。F は c-soft であるから、問題 II.6 (1) より、$H^i_c(X, F) = H^i_c(X \setminus K, F) = 0, (\forall i > 0)$ が成り立つ。各 i に対して $H^i_c(X \setminus K, F) \to H^{i+1}_{c,K}(X, F) \to H^{i+1}_c(X, F)$ は完全であるので、$H^i_{c,K}(X, F) = 0, (\forall i \geq 2)$ が成り立つ。K はコンパクトであるので、$H^i_{c,K}(X, -) \cong H^i_K(X, -)$ が成り立つ。G は脆弱なので、$H^i_K(X, G) = 0, (\forall i > 0)$ が成り立ち、従って、完全列 $0 \to F \to G \to H \to 0$ に函手 $\Gamma_K(X, -)$ を適用すると、$H^i_K(X, H) = 0, (\forall i > 0)$ が成り立つ。$H(X) \to H(X \setminus K) \to H^1_K(X, H)$ は完全なので、従って、$H(X) \to H(X \setminus K)$ は全射である。$X \setminus K = (V \setminus Z) \cup (X \setminus \bar{V})$ なので、$H(X \setminus K) \cong H(V \setminus Z) \times H(X \setminus \bar{V})$ が成り立つ。よって $H(X) \to H(V \setminus Z)$ は全射であり、とくに $H(V) \to H(V \setminus Z)$ も全射である。以上より $H|_V$ は脆弱である。

以上で (3) の証明を完了し、問題 II.9 の解答を完了する。 □

問題 II.10. $\mathcal{R}$ を X 上の環の層として、M を $\mathcal{R}$ 加群とする。

(1) M が入射的であるための必要十分条件は、任意の部分 $\mathcal{R}$-加群 $\mathcal{I} \subset \mathcal{R}$ (これを $\mathcal{R}$ の**イデアル**という) に

対して

$$\Gamma(X,M)\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{R}}(\mathcal{R},M)\to \mathrm{Hom}_{\mathcal{R}}(\mathcal{I},M)$$

が全射となることである。これを示せ。

(2) A を体とする。A_X のイデアルはある開集合 $U\subset X$ を用いて A_U と表すことができる。このことから、A_X-加群 M が入射的であるための必要十分条件は M が脆弱層であることであることを帰結せよ。

証明. (1) を示す。必要性は明らかであるので十分性が問題である。$\mathcal{R}$-加群 F とその部分 $\mathcal{R}$-加群 $G\subset F$ と射 $g:G\to M$ を任意にとる。集合

$$S:\overset{\mathrm{def}}{=}\{(H,h)|G\subset H\subset F, h|_G=g\}$$

に

$$(H_0,H_0)\leq (H_1,h_1)\ \Leftrightarrow\ H_0\subset H_1\text{かつ } h_1|_{H_0}=h_0$$

で順序を入れる。全順序部分集合 $S_0\subset S$ に対して、$H_{S_0}:\overset{\mathrm{def}}{=}\bigcup_{H\in S_0}H$ と定めて $h_{S_0}:H_{S_0}\to M$ を余極限の普遍性により定まる自然な射とすると (H_{S_0},h_{S_0}) は S_0 の上界である。よって Zorn の補題より S には極大限 (H,h) が存在する。$H\neq F$ であるとする。このとき、開集合 $U\subset X$ と切断 $s\in F(U)\setminus H(U)$ が存在する。U 上の切断 s は $\mathcal{R}$-加群の射 $\mathcal{R}_U\to H$ と対応する。Fiber 積をとって $\mathcal{I}:\overset{\mathrm{def}}{=}\mathcal{R}_U\times_F H$ とおけば、$\mathcal{I}$ は $\mathcal{R}_U$ の部分 $\mathcal{R}$-加群である。ここで

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{R}}(\mathcal{R},M)\to \mathrm{Hom}_{\mathcal{R}}(\mathcal{R}_U,M)\to \mathrm{Hom}_{\mathcal{R}}(\mathcal{I},M)$$

の合成は全射であるから、$\mathrm{Hom}_{\mathcal{R}}(\mathcal{R}_U,M)\to \mathrm{Hom}_{\mathcal{R}}(\mathcal{I},M)$ も全射であり、従って、自然な射影と h の合成 $\mathcal{I}\to H\xrightarrow{h} M$ は射 $\mathcal{R}_U\to M$ へとリフトし、可換図式

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{I} & \xrightarrow{\subset} & \mathcal{R}_U\\ \downarrow & & \downarrow\\ H & \xrightarrow{h} & M\end{array}$$

を得る。Push-out をとることによって、射 $h':H':\overset{\mathrm{def}}{=}\mathcal{R}_U\coprod_{\mathcal{I}}H\to M$ を得る。一方、可換図式

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{I} & \xrightarrow{\subset} & \mathcal{R}_U\\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle s}\\ H & \xrightarrow{\subset} & F\end{array}$$

で push-out をとることにより、射 $H'\to F$ を得るが、$\mathcal{I}=\mathcal{R}_U\times_F H$ であることと [Exercise 1.6 (3), KS02] より、$H'\to F$ はモノ射である。従って $H'\subset F$ とみなせる。$s\notin H(U)$ なので $H\subsetneq H'$ である。これは $(H,h)<(H',h')$ を意味し、(H,h) の極大性に反する。この矛盾は $H\neq F$ と仮定したことにより引き起こされたので、$H=F$ であることが帰結し、以上で、$f|_G=g$ となる射 $f:F\to M$ の存在が示された。これは F が入射的層であることを示している。以上で (1) の証明を完了する。

(2) を示す。A を体、$\mathcal{I}\subset A_X$ をイデアルとする。各 $x\in X$ に対して $\mathcal{I}_x\subset A_{X,x}$ はイデアルであるが、$A_{X,x}$ は体なので、$\mathcal{I}_x$ は 0 か $A_{X,x}$ のいずれかである。

$$S:\overset{\mathrm{def}}{=}\{x\in X|\mathcal{I}_x=A_{X,x}\}$$

とおき、S が開であることを示す。$x \in S$ を任意にとる。$\mathcal{I}_x = A_{X,x}$ であるので、ある開近傍 $x \in U$ とある切断 $s \in \mathcal{I}(U)$ が存在して、任意の $y \in U$ に対して $s_y = 1$ が成り立つ。これから各 $y \in U$ で $\mathcal{I}_y \neq 0$ であることが従い、$\mathcal{I}_y$ は 0 か $A_{X,y}$ のいずれかであったので、$\mathcal{I}_y = A_{X,y}$ が従う。よって $U \subset S$ が従い、これは S が開であることを示している。最後の主張を示す。入射的ならば脆弱層であるため、A_X-加群 M が脆弱層である場合に M が入射的であることを示す。M が入射的であることを示すためには、(1) より、任意のイデアル層 $\mathcal{I} \subset A_X$ と任意の A_X-加群の射 $\mathcal{I} \to M$ に対し、それが $\mathcal{I} \subset A_X$ に沿ってリフトすることを示すことが十分である。既に証明したことにより、イデアル層 $\mathcal{I} \subset A_X$ に対してある開集合 $U \subset X$ が存在して $\mathcal{I} = A_U$ が成り立つ。A_X 加群の射 $A_U \to M$ は $M(U)$ の切断と対応し、M は脆弱層であるので、それは $M(X)$ の元に延長することができる。このことは射 $A_U = \mathcal{I} \to M$ が $A_U = \mathcal{I} \subset A_X$ に沿ってリフトすることを意味し、従って M は入射的である。以上で (2) の証明を完了し、問題 II.10 の解答を完了する。 □

問題 II.11. $f : Y \to X$ を局所コンパクトハウスドルフ空間の間の連続写像、G を Y 上の層とする。以下の主張が同値であることを示せ：

(1) 任意の $x \in X$ に対して $G|_{f^{-1}(x)}$ は c-soft である。
(2) 任意の開集合 $V \subset Y$ と任意の $j > 0$ に対して $R^j f_! G_V = 0$ である。

証明. (1) $\Rightarrow$ (2) を示す。任意の $x \in X$ に対して $G|_{f^{-1}(x)}$ は c-soft であると仮定する。開集合 $V \subset Y$ と点 $x \in X$ を任意にとる。本文 [Proposition 2.6.7, KS02] より、各点 $x \in X$ に対して自然に $(R^j f_! G_V)_x \cong H^j_c(f^{-1}(x) \cap V, G|_{f^{-1}(x)})$ が成り立つ。ここで $G|_{f^{-1}(x)}$ は c-soft であるので、問題 II.6 (1) より、$j > 0$ に対して $H^j_c(f^{-1}(x) \cap V, G|_{f^{-1}(x)}) = 0$ が成り立つ。よって層 $R^j f_! G_V$ の各点での stalk は 0 であり、従って $R^j f_! G_V = 0$ である。

(2) $\Rightarrow$ (1) を示す。任意の開集合 $V \subset Y$ と任意の $j > 0$ に対して $R^j f_! G_V = 0$ であると仮定する。点 $x \in X$ と開集合 $V_x \subset f^{-1}(x)$ を任意にとる。このとき、ある開集合 $V \subset Y$ が存在して $V_x = V \cap f^{-1}(x)$ が成り立つ。本文 [Proposition 2.6.7, KS02] より、各 $j > 0$ に対して自然に $H^j_c(V_x, G|_{f^{-1}(x)}) \cong (R^j f_! G_V)_x = 0$ が成り立つ。よって問題 II.6 (1) より、$G|_{f^{-1}(x)}$ は c-soft である。以上で問題 II.11 の解答を完了する。 □

問題 II.12. X を位相空間とする。

(1) $(F_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ を有向集合 Λ で添字づけられた X 上の層の順系とする。X がコンパクトハウスドルフであると仮定せよ。このとき、任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して $\operatorname{colim}_\lambda H^k(X, F_\lambda) \cong H^k(X, \operatorname{colim}_\lambda F_\lambda)$ が成り立つことを示せ。
(2) $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ を X 上の層の逆系で、**各 $F_{n+1} \to F_n$ は全射である**とする。$Z \subset X$ を局所閉部分集合とする。$\{H^{k-1}_Z(X, F_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ が Mittag-Leffler 条件を満たすと仮定せよ。このとき、自然な同型射 $H^k_Z(X, \lim_n F_n) \xrightarrow{\sim} \lim_n H^k_Z(X, F_n)$ が存在することを示せ。

注意. (2) は本文にはない仮定を置いている。本文を引用すると以下の通りである：

Let $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ be a projective system of sheaves on X and let Z be a locally closed subset of X. Assuming that $\{H^{k-1}_Z(X, F_n)\}_n$ satisfies the M-L condition, prove the isomorphism $H^k_Z(X, \lim_n F_n) \xrightarrow{\sim} \lim_n H^k_Z(X, F_n)$.

しかしこのままだと反例がある。$X = Z = [0, 1]$ とする。$X = Z$ なので $H^i_Z(X, -) \cong H^i(X, -)$ である。$U_n = (1/2 - 1/(n+2), 1/2) \cup (1/2, 1/2 + 1/(n+2))$ とおき、$F_n :\overset{\mathrm{def}}{=} \mathbb{Z}_{U_n}$ と定める。$U_{n+1} \subset U_n$ であるから $F_{n+1} \subset F_n$ であり、これによって層の逆系 $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ができる。$k = 1$ とする。定数層 $\mathbb{Z}_X$ の大域切断であっ

て U_n に台を持つものは 0 しかないので $H^0_Z(X, F_n) = H^0(X, F_n) = 0$ が成り立ち、従って $\{H^0_Z(X, F_n)\}_n$ は Mittag-Leffler 条件を満たす。$\bigcap_{n=0}^{\infty} U_n = \varnothing$ であるので、各 X の点で stalk をとることによって $\lim F_n = 0$ が成り立つ。従って $H^1_Z(X, \lim F_n) = 0$ である。さらに層の完全列

$$0 \to \mathbb{Z}_{U_n} \to \mathbb{Z}_X \to \mathbb{Z}_{X \setminus U_n} \to 0$$

でコホモロジーをとる。$X = [0, 1]$ なので、命題 2.7.3 (ii), (iii) より $H^1(X, \mathbb{Z}_X) = 0$ である。$X \setminus U_n$ は連結成分が 3 つなので $H^0(X, \mathbb{Z}_{X\setminus U_n}) = \mathbb{Z}^3$ である。よって完全列

$$0 \to 0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^3 \to H^1(X, F_n) \to 0$$

を得る。従って $H^1(X, F_n) \cong \mathbb{Z}^2$ が成り立つ。また、この同型射は $H^1(X, F_{n+1}) \to H^1(X, F_n)$ と可換するので、よって $\lim H^1(X, F_n) \cong \mathbb{Z}^2$ が成り立つ。以上で $\{H^0_Z(X, F_n) = 0\}_n$ が Mittag-Leffler 条件を満たすのにもかかわらず $0 = H^1_Z(X, \lim F_n) \not\cong \mathbb{Z}^2 \cong \lim H^1_Z(X, F_n)$ となる例が構成できた。

証明. (1) を示す。$X = \bigcup_{i=1}^r U_i$ を有限開被覆とする。Filtered colimit は有限極限と可換するので、

$$0 \longrightarrow (\operatorname{colim} F_\lambda)(X) \longrightarrow \prod_{i=1}^r (\operatorname{colim} F_\lambda)(U_i) \longrightarrow \prod_{i,j=1}^r (\operatorname{colim} F_\lambda)(U_i \cap U_j)$$

は完全である。$X = \bigcup_{i \in I} U_i$ を任意の開被覆とする。X はコンパクトであるから、

$$S :\overset{\text{def}}{=} \left\{ I_0 \subset I \,\middle|\, X = \bigcup_{i \in I_0} U_i, |I_0| < \infty \right\}$$

は空でない有向集合である。各 $I_0 \subset I_1, I_0, I_1 \in S$ に対して完全列の射

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (\operatorname{colim} F_\lambda)(X) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \prod_{i \in I_1} (\operatorname{colim} F_\lambda)(U_i) \arrow[r] \arrow[d] & \prod_{i,j \in I_1} (\operatorname{colim} F_\lambda)(U_i \cap U_j) \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & (\operatorname{colim} F_\lambda)(X) \arrow[r] & \prod_{i \in I_0} (\operatorname{colim} F_\lambda)(U_i) \arrow[r] & \prod_{i,j \in I_0} (\operatorname{colim} F_\lambda)(U_i \cap U_j)
\end{tikzcd}$$

ができるので、$I_0 \in S$ に渡って逆極限をとることにより、

$$0 \longrightarrow (\operatorname{colim} F_\lambda)(X) \longrightarrow \prod_{i \in I} (\operatorname{colim} F_\lambda)(U_i) \longrightarrow \prod_{i,j \in I} (\operatorname{colim} F_\lambda)(U_i \cap U_j)$$

が完全であることが従う。よって $\operatorname{colim}_\lambda H^0(X, F_\lambda) \cong H^0(X, \operatorname{colim}_\lambda F_\lambda)$ が成り立つ。

$(I_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ を函手圏 $[\Lambda, \mathsf{Ab}(X)]$ の入射的対象とする。任意の $0 \in \Lambda$ と任意の層の単射 $M \to N$ と任意の射 $f : M \to I_0$ に対し、M, N を 0 番目に配置して $\mathsf{Ab}(X)$ の図式と考えると、$(I_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ が函手圏で入射的対象であるので、λ に関して函手的に f のリフト $N_\lambda \to I_\lambda$ が得られるので、0 番目をみることで、f のリフト $N \to I_0$ を得る。従って、各 λ に対して I_λ は入射的層である。とくに (c-)soft である。$F \subset X$ を閉集合とすると、各 $I_\lambda(X) \to I_\lambda(F)$ は全射であるので、$\operatorname{colim}(I_\lambda(X)) \to \operatorname{colim}(I_\lambda(F))$ も全射であるが、ここで X, F はどちらもコンパクト (かつハウスドルフ) なので、すでに証明したことから、$\operatorname{colim}(I_\lambda(X)) \cong (\operatorname{colim} I_\lambda)(X), \operatorname{colim}(I_\lambda(F)) \cong (\operatorname{colim} I_\lambda)(F)$ が成り立つ。従って $\operatorname{colim} I_\lambda$ も (c-)soft であることが従う。X はコンパクトハウスドルフなので、従って $\operatorname{colim} I_\lambda$ は大域切断函手に対して acyclic である。Filtered colimit をとる函手 $\operatorname{colim} : [\Lambda, \mathsf{Ab}(X)] \to \mathsf{Ab}(X)$ は完全函手であるから、以上より、函手

$$[\Lambda, \mathsf{Ab}(X)] \to \mathsf{Ab}, \quad (F_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \mapsto \Gamma(X, \operatorname{colim} F_\lambda)$$

の右導来函手は $R\Gamma(X,-)\circ\mathrm{colim}$ と自然に同型である。同様に、$\mathrm{colim}:[\Lambda,\mathsf{Ab}]\to\mathsf{Ab}$ は完全函手なので、函手

$$[\Lambda,\mathsf{Ab}(X)]\to\mathsf{Ab},\quad (F_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\mapsto\mathrm{colim}\,\Gamma(X,F_\lambda)$$

の右導来函手は $\mathrm{colim}\circ R\Gamma(X,(-)_\lambda)$ と自然に同型である。ただし $R\Gamma(X,(-)_\lambda)$ は $\mathsf{D}^{\geq 0}([\Lambda,\mathsf{Ab}(X)])$ から $\mathsf{D}^{\geq 0}([\Lambda,\mathsf{Ab}])$ への函手である ($[\Lambda,\mathsf{D}^+(\mathsf{Ab})]$ に値を持つのではない！)。すでに証明した 0 次の場合より、自然に $\Gamma(X,\mathrm{colim}(-)_\lambda)\cong\mathrm{colim}\,\Gamma(X,(-)_\lambda)$ が成り立つので、これらの右導来函手も自然に同型であり、$R\Gamma(X,\mathrm{colim}(-)_\lambda)\cong\mathrm{colim}\,R\Gamma(X,(-)_\lambda)$ が成り立つ (右辺の colim は通常の余極限をとる函手の導来函手であり、$[\Lambda,\mathsf{D}^+(\mathsf{Ab})]$ における余極限とは異なる)。$(F_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を代入してコホモロジーをとると、余極限をとる函手が完全であることから

$$H^i(X,\mathrm{colim}\,F_\lambda)\cong H^i(\mathrm{colim}\,R\Gamma(X,F_\lambda))\cong\mathrm{colim}\,H^i(X,F_\lambda)$$

を得る。以上で (1) の証明を完了する。

(2) を示す。$(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を圏 $[\mathbb{N},\mathsf{Ab}(X)]$ の入射的対象とする。局所閉集合 $Z\subset X$ と n に対して切断 $s\in\Gamma_Z(X,I_n)$ を一つ選ぶと、s は層の射 $\mathbb{Z}_Z\to I_n$ を定める。n 番目以前が $\mathbb{Z}_Z$ でそれ以降 0 である逆系を $\mathbb{Z}_Z(n)$ とおくと、s は逆系の射 $\mathbb{Z}_Z(n)\to(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を定める。$(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は入射的なので、逆系の単射 $\mathbb{Z}_Z(n)\subset\mathbb{Z}_Z(n+1)$ に沿って $\mathbb{Z}_Z(n)\to(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ をリフトさせることにより、$\Gamma_Z(X,I_{n+1})\to\Gamma_Z(X,I_n)$ が全射であることが従う。特に、各開集合 $U\subset X$ に対して $(\Gamma_Z(X,I_n))_{n\in\mathbb{N}}$ は Mittag-Leffler 条件を満たす、すなわち、$\lim_n$ に対して acyclic である。よって $R(\lim_n\circ\Gamma_Z(X,-))\cong R\lim_n\circ R\Gamma_Z(X,-)$ が成り立ち、逆系 $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対してスペクトル系列

$$E_2^{p,q}=R^p\lim_n H^q_Z(X,F_n)\;\Rightarrow\;E^{p+q}=R^{p+q}(\lim_n\circ\Gamma_Z(X,-))(F_n)$$

を得る。$R^p\lim_n=0,(p\neq 0,1)$ であるので、完全列

$$0\to R^1\lim_n H^q_Z(X,F_n)\to E^{1+q}\to\lim_n H^{q+1}_Z(X,F_n)\to 0$$

を得る。$q=k-1$ とすれば、$(H^{k-1}_Z(X,F_n))_{n\in\mathbb{N}}$ が Mittag-Leffler 条件を満たすという仮定より、同型射 $E^k\xrightarrow{\sim}\lim_n H^{q+1}_Z(X,F_n)$ を得る。

次に、$(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を再び $[\mathbb{N},\mathsf{Ab}(X)]$ の入射的対象とし、$U\subset X$ を開集合として、切断 $s\in\lim_n I_n(U)$ を任意にとる。これは層の射 $\mathbb{Z}_U\to\lim_n I_n$ と対応するが、これは各番号に $\mathbb{Z}_U$ が対応している自明な逆系 $(\mathbb{Z}_U)_{n\in\mathbb{N}}$ からの逆系の射 $(\mathbb{Z}_U)_{n\in\mathbb{N}}\to(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ と対応する。これを単射 $(\mathbb{Z}_U)_{n\in\mathbb{N}}\to(\mathbb{Z}_X)_{n\in\mathbb{N}}$ に沿ってリフトさせることにより、$\lim_n I_n(X)\to\lim_n I_n(U)$ が全射であることが従う。従って $\lim_n I_n$ は脆弱層であり、とくに任意の局所閉集合 $Z\subset X$ に対する $\Gamma_Z(X,-)$ に対して acyclic である。よって $R(\Gamma_Z(X,-)\circ\lim_n)\cong R\Gamma_Z(X,-)\circ R\lim_n$ が成り立ち、逆系 $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対してスペクトル系列

$$\bar{E}_2^{p,q}=H^p_Z(X,R^q\lim_n F_n)\;\Rightarrow\;\bar{E}^{p+q}=R^{p+q}(\Gamma_Z(X,-)\circ\lim_n)(F_n)$$

を得る。$\Gamma_Z(X,-)\circ\lim_n\cong\lim_n\circ\Gamma_Z(X,-)$ であるので、自然に $\bar{E}^{p+q}\cong E^{p+q}$ である。また、$R^q\lim_n=0,(q=0,1)$ であるので、完全列

$$\cdots\to\bar{E}_2^{p-2,1}\to\bar{E}_2^{p,0}\to E^p\to\bar{E}_2^{p-1,1}\to\bar{E}_2^{p+1,0}\to E^{p+1}\to\cdots$$

を得る。ここで各 $F_{n+1}\to F_n$ が全射であるという仮定より、$R^1\lim_n F_n=0$ が成り立つので、$\bar{E}_2^{\bullet,1}=0$ が成り立つ。従って各 $\bar{E}_2^{p,0}\xrightarrow{\sim}E^p$ は同型射である、すなわち、各 p に対して $H^p_Z(X,\lim_n F_n)\xrightarrow{\sim}E^p$ は同型射

である。$p=k$ とすることにより、同型射

$$H^k_Z(X,\lim_n F_n)\xrightarrow{\sim} R^k(\lim_n\circ\Gamma_Z(X,-))(F_n)\xrightarrow{\sim}\lim_n H^k_Z(X,F_n)$$

を得る。以上で (2) の証明を完了し、問題 II.12 の解答を完了する。 □

問題 II.13. G を X 上の層として、$Z\subset X$ を局所閉集合とする。$j<n$ に対して $R^j\Gamma_Z(G)=0$ が成り立つと仮定せよ。このとき、前層 $U\mapsto H^n_Z(U,G)$ は層であり、さらにこれが $R^n\Gamma_Z(G)$ と等しいことを示せ。

証明. $R^n\Gamma_Z(G)$ は層なので、問題 II.13 を示すためには、開集合 $U\subset X$ に対して自然に $H^n_Z(U,G)\cong\Gamma(U,R^n\Gamma_Z(G))$ が成り立つことを証明することが十分である。$F=\Gamma_Z(-),F'=\Gamma(U,-)$ として [Exercise 1.22, KS02] を適用することにより、$R^n(\Gamma(U,\Gamma_Z(-)))(G)\cong\Gamma(U,R^n\Gamma_Z(G))$ が成り立つ。ここで $\Gamma(U,\Gamma_Z(-))\cong\Gamma_Z(U,-)$ であるので、よって $H^n_Z(U,G)\cong\Gamma(U,R^n\Gamma_Z(G))$ が成り立つ。以上で問題 II.13 の解答を完了する。 □

問題 II.14. $X=\bigcup_{i\in I}U_i$ を X の開被覆とする。各 $i\in I$ に対して F_i を U_i 上の層として、各 $(i,j)\in I^2$ に対して同型射 $\varphi_{ij}:F_j|_{U_i\cap U_j}\xrightarrow{\sim}F_i|_{U_i\cap U_j}$ が与えられているとする。$\varphi_{ii}=\mathrm{id}_{F_i}$ であり、さらに任意の $(i,j,k)\in I^3$ に対して $U_i\cap U_j\cap U_k$ 上で $\varphi_{ij}\circ\varphi_{jk}=\varphi_{ik}$ が成り立つと仮定せよ。このとき、X 上の層 F と各 $i\in I$ に対する同型射 $\varphi_i:F|_{U_i}\xrightarrow{\sim}F_i$ であって、任意の $(i,j)\in I^2$ に対して $U_i\cap U_j$ 上で $\varphi_{ij}=\varphi_i\circ\varphi_j^{-1}$ が成り立つもの、が up to isomorphism で一意的に存在することを示せ。

証明. 圏 $\mathcal{I}$ を次で定義する：

- 対象の集合は $\mathrm{Ob}(\mathcal{I})\overset{\mathrm{def}}{:=}I^3$.
- $\mathrm{Hom}_{\mathcal{I}}((i,j,k),(i',j',k'))$ は $\{i,j,k\}\supset\{i',j',k'\}$ である場合は一点集合で、そうでない場合は $\varnothing$ と定める。

$\{i,j,k\}=\{i',j',k'\}$ である場合、またその場合に限り $(i,j,k)\to(i',j',k')$ は同型射である。

$U_{ij}\overset{\mathrm{def}}{:=}U_i\cap U_j,U_{ijk}\overset{\mathrm{def}}{:=}U_i\cap U_j\cap U_k$ とおき、$f_i:U_i\to X,f_{ij}:U_{ij}\to X,f_{ijk}:U_{ijk}\to X$ をそれぞれ包含射とする。各 $(i,j,k)\in\mathcal{I}$ に対して X 上の層 $F(i,j,k)$ を $P(i,j,k)\overset{\mathrm{def}}{:=}f_{ijk,!}(F_i|_{U_{ijk}})$ と定義する ($P(i,i,i)=f_{i!}F_i$ である)。各 $\mathcal{I}$ の射 $p:(i,j,k)\to(i',j',k')$ に対して $U_{ijk}\subset U_{i'j'k'}$ であるので、自然な包含射 $\psi(p)(-):f_{i'j'k',!}((-))|_{U_{ijk}})\subset f_{i'j'k',!}((-)|_{U_{i'j'k'}})$ がある。また、$i'\in\{i,j,k\}$ であるので $U_{ijk}\subset U_{ii'}$ である。$P(p)\overset{\mathrm{def}}{:=}\psi(p)(F_{i'})\circ f_{ijk,!}(\varphi_{i'i}|_{U_{ijk}})$ と定義する。この対応によって、$P:\mathcal{I}\to\mathsf{Ab}(X)$ は函手になる。それを確かめるために、$\mathcal{I}$ の射の列 $(i,j,k)\xrightarrow{p}(i',j',k')\xrightarrow{q}(i'',j'',k'')$ を任意にとる。P が函手であるためには、$P(q\circ p)=P(q)\circ P(p)$ が成り立つことが十分である。$i''\in\{i',j',k'\}\subset\{i,j,k\}$ であるので、$U_{ijk}\subset U_{ii'}\cap U_{i'i''}$ が成り立つ。従って

$$f_{ijk,!}(\varphi_{i''i}|_{U_{ijk}})=f_{ijk,!}(\varphi_{i''i'}|_{U_{ijk}}\circ\varphi_{i'i}|_{U_{ijk}})=f_{ijk,!}(\varphi_{i''i'}|_{U_{ijk}})\circ f_{ijk,!}(\varphi_{i'i}|_{U_{ijk}})$$

が成り立つ。また、定義より、函手の射として $\psi(q\circ p)=\psi(q)\circ\psi(p)$ が成り立つ。また、$\psi(p)$ が自然変換であることから、図式

$$\begin{tikzcd}
f_{ijk,!}(F_{i'}|_{U_{ijk}}) \arrow[r, "f_{ijk,!}(\varphi_{i''i'}|_{U_{ijk}})"] \arrow[d, "\psi(p)(F_{i'})"'] & f_{ijk,!}(F_{i''}|_{U_{ijk}}) \arrow[d, "\psi(p)(F_{i''})"] \\
f_{i'j'k',!}(F_{i'}|_{U_{i'j'k'}}) \arrow[r, "f_{i'j'k',!}(\varphi_{i''i'}|_{U_{i'j'k'}})"] & f_{i'j'k',!}(F_{i''}|_{U_{i'j'k'}})
\end{tikzcd}$$

は可換である。以上より、

$$\begin{aligned}
P(q \circ p) &= \psi(q \circ p)(F_{i''}) \circ f_{ijk,!}(\varphi_{i''i'}|_{U_{ijk}}) \\
&= \psi(q)(F_{i''}) \circ \psi(p)(F_{i''}) \circ f_{ijk,!}(\varphi_{i''i'}|_{U_{ijk}}) \circ f_{ijk,!}(\varphi_{i'i}|_{U_{ijk}}) \\
&= \psi(q)(F_{i''}) \circ f_{i'j'k',!}(\varphi_{i''i'}|_{U_{i'j'k'}}) \circ \psi(p)(F_{i'}) \circ f_{ijk,!}(\varphi_{i'i}|_{U_{ijk}}) \\
&= P(q) \circ P(p)
\end{aligned}$$

が成り立つ。よって $P : \mathcal{I} \to \mathsf{Ab}(X)$ は函手である。

$F \overset{\mathrm{def}}{:=} \operatorname{colim} P$ とおく。各 $x \in X$ で stalk をとると図式 P の射は 0 射と同型射の図式となる。従って、自然な射 $P_i : P(i,i,i) = f_{i,!}F_i \to F$ を U_i へと制限したものは層の同型射である。その逆射を $\varphi_i \overset{\mathrm{def}}{:=} P_i^{-1} : F|_{U_i} \to F_i$ とおく。図式

$$\begin{tikzcd}
P(j,j,i) \arrow[r] \arrow[d, "f_{ij,!}(\varphi_{ij})"'] & P(j,j,j) \arrow[r, "P_j"] & F \arrow[d, equal] \\
P(i,j,j) \arrow[r] & P(i,i,i) \arrow[r, "P_i"] & F
\end{tikzcd}$$

は可換であり、$P(j,j,i) \to P(j,j,j)$ と $P(i,j,j) \to P(i,i,i)$ を U_{ij} へと制限すると $\mathrm{id}_{F_j|_{U_{ij}}}$ と $\mathrm{id}_{F_i|_{U_{ij}}}$ になるので、従って U_{ij} 上で $\varphi_{ij} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ が成り立つ。

別の F' がこの性質を満たせば、余極限の普遍性により射 $F \to F'$ が得られ、これは各点の stalk で同型射であるので、このような F は up to isom. で一意的に存在する。以上で問題 II.14 の証明を完了する。 □

問題 II.15. (1) $F^\bullet$ を下に有界な X 上の層の複体とする。自然な射 $H^j(\Gamma(X, F^\bullet)) \to H^j(R\Gamma(X, F^\bullet))$ を構成せよ。

(2) $\mathcal{U} = \{U_i\}_i$ を X の開被覆として、F を X 上の層とする。自然な射 $H^j(C^\bullet(\mathcal{U}, F)) \to H^j(X, F)$ を構成せよ。

証明. (1) を示す。入射的層からなる複体へのモノな擬同型 $F^\bullet \xrightarrow{\mathrm{qis}} I^\bullet$ をとれば複体の射 $\Gamma(X, F^\bullet) \to \Gamma_(X, I^\bullet) \cong R\Gamma(X, F^\bullet)$ が得られるので、j 次コホモロジーをとることによって射 $H^j(\Gamma(X, F^\bullet)) \to H^j(R\Gamma(X, F^\bullet))$ を得る。以上で (1) の証明を完了する。

(2) を示す。F を 0 次だけが F で他が 0 である自明な複体とみなすと、本文 [Proposition 2.8.4, KS02] より、augmentation map $\delta : F \xrightarrow{\mathrm{qis}} \mathcal{C}^\bullet(\mathcal{U}, F)$ は擬同型である。よって $\mathsf{D}^+(\mathsf{Ab}(X))$ の同型射 $R\Gamma(X, \delta) : R\Gamma(X, F) \xrightarrow{\sim} R\Gamma(X, \mathcal{C}^\bullet(\mathcal{U}, F))$ を得る。(1) を $F^\bullet = \mathcal{C}^\bullet(\mathcal{U}, F)$ に対して適用すると、$\Gamma(X, \mathcal{C}^\bullet(\mathcal{U}, F)) \cong C^\bullet(\mathcal{U}, F)$ であるので、射 $H^j(C^\bullet(\mathcal{U}, F)) \to H^j(R\Gamma(X, \mathcal{C}^\bullet(\mathcal{U}, F)))$ を得る。これに $H^j(R\Gamma(X, \delta)^{-1})$ を合成することで射 $H^j(C^\bullet(\mathcal{U}, F)) \to H^j(X, F)$ を得る。以上で (2) の証明を完了し、問題 II.15 の解答を完了する。 □

問題 II.16. A を可換環、$A^\times$ を単元のなす群とする。X を位相空間、$\mathcal{U} = \{U_i\}_i$ を X の開被覆として、$c \in C^2(\mathcal{U}, A_X^\times)$ を $\delta c = 0$ となる元とする。c' を c の $H^2(C^\bullet(\mathcal{U}, A_X^\times))$ での剰余類として、c'' を c' の $H^2(X, A_X^\times)$ での像とする (cf. 問題 II.15 (2))。圏 $\mathsf{Sh}(X, c)$ を次によって定義する：

- 対象は A_{U_i}-加群 F_i と同型射 $\rho_{ij} : F_j|_{U_i \cap U_j} \xrightarrow{\sim} F_i|_{U_i \cap U_j}$ の族 $\{F_i, \rho_{ij}\}$ で、任意の i, j, k に対して

  $$\rho_{ij}\rho_{jk}\rho_{ki} = c_{ijk} \, \mathrm{id}_{F_i|_{U_i \cap U_j \cap U_k}}$$

  を満たすものとする。

- 射 $f:\{F_i,\rho_{ij}\}\to\{F'_i,\rho_{ij}\}$ は U_i 上の射の族 $f_i:F_i\to F'_i$ で $U_i\cap U_j$ 上で $\rho'_{ij}\circ f_j=f_i\circ\rho_{ij}$ を満たすものとする。

以下を示せ：

(1) $\mathsf{Sh}(X,c)$ はアーベル圏であることを証明せよ。

(2) $\tilde{c}\in C^2(\mathcal{U},A_X^\times)$ を別の元で $\tilde{c}''=c''$ を満たすものとする。$\mathsf{Sh}(X,c)$ と $\mathsf{Sh}(X,\tilde{c})$ の間の圏同値が存在することを示せ。

証明. (1) を示す。$\mathsf{Sh}(X,c)$ は明らかな 0-対象を持つ (各 U_i 上で 0 であるもの)。また、明らかに、二つの対象 $\{F_i,\rho_{ij}\},\{F'_i,\rho'_{ij}\}$ に対して $\{F_i\oplus F'_i,\rho ij\oplus\rho'_{ij}\}$ は $\mathsf{Sh}(X,c)$ の対象である。さらに、二つの対象の間の射 $f=(f_i):\{F_i,\rho_{ij}\}\to\{F'_i,\rho'_{ij}\}$ に対し、各 i ごとに $\ker(f_i)$ をとり、$\rho_{ij}^{\ker(f)}:\overset{\mathrm{def}}{=}\rho_{ij}|_{\ker(f_i)|_{U_i\cap U_j}}$ と定めることにより、明らかに $\{\ker(f_i),\rho_{ij}^{\ker(f)}\}$ は $\mathsf{Sh}(X,c)$ の対象となる。余核についても同様である。核と余核が各 i ごとに定義されるので、余像と像は一致し、これにより $\mathsf{Sh}(X,c)$ がアーベル圏であることが従う。以上で (1) の証明を完了する。

(2) を示す。$\{F_i,\rho_{ij}\}$ を $\mathsf{Sh}(X,c)$ の対象とする。$\bar{c}:\overset{\mathrm{def}}{=}c-\tilde{c}$ とおく。このとき $\bar{c}''=0$ である。本文 [Proposition 2.8.4, KS02] より、augmentation map $\delta:F\xrightarrow{\mathrm{qis}}\mathcal{C}^\bullet(\mathcal{U},F)$ は擬同型であるので、$H^2(R\Gamma(X,\mathcal{C}^\bullet(\mathcal{U},A_X^\times)))$ での $\bar{c}''$ の像は 0 である。 □

問題 II.17. X を局所コンパクト空間、$\mathcal{R}$ を X 上の (可換) 環の層で $\mathrm{wgld}(\mathcal{R})<\infty$ であるものとし、$Z_1,Z_2\subset X$ を局所閉部分集合とする。

(1) $F_1,F_2\in\mathsf{D}^+(\mathcal{R})$ に対し、自然な射

$$R\Gamma_{Z_1}(F_1)\otimes^L_{\mathcal{R}}R\Gamma_{Z_2}(F_2)\to R\Gamma_{Z_1\cap Z_2}(F_1\otimes^L_{\mathcal{R}}F_2)$$

を構成せよ。

(2) A を可換環として、$\mathcal{R}=A_X$ であると仮定せよ。$F_1,F_2\in\mathsf{D}^+(\mathcal{R})$ に対し、自然な射

$$R\Gamma_{Z_1}(X,F_1)\otimes^L_A R\Gamma_{Z_2}(X,F_2)\to R\Gamma_{Z_1\cap Z_2}(X,F_1\otimes^L_A F_2)$$

を構成し、各 $p,q\in\mathbb{Z}$ に対して

$$H^p_{Z_1}(X,F_1)\otimes_A H^q_{Z_2}(X,F_2)\to H^{p+q}_{Z_1\cap Z_2}(X,F_1\otimes^L_A F_2)$$

を構成せよ。最後の射は **cup 積**と呼ばれる。

証明. (1) を示す。本文 [同型 (2.6.9), KS02] より、自然に $R\Gamma_{Z_i}(F_i)\cong R\mathcal{H}om_{\mathcal{R}}(\mathcal{R}_{Z_i},F_i)$ が成り立つ。また、本文 [射 (2.6.11), KS02] より、自然な射

$$\begin{aligned}R\mathcal{H}om_{\mathcal{R}}(\mathcal{R}_{Z_1},F_1)\otimes^L_{\mathcal{R}}R\mathcal{H}om_{\mathcal{R}}(\mathcal{R}_{Z_2},F_2)&\to R\mathcal{H}om_{\mathcal{R}}(\mathcal{R}_{Z_1},F_1\otimes^L_{\mathcal{R}}R\mathcal{H}om_{\mathcal{R}}(\mathcal{R}_{Z_2},F_2))\\&\to R\mathcal{H}om_{\mathcal{R}}(\mathcal{R}_{Z_1},R\mathcal{H}om_{\mathcal{R}}(\mathcal{R}_{Z_2},F_1\otimes^L_{\mathcal{R}}F_2))\end{aligned}$$

を得る。さらに本文 [Proposition 2.6.3 (ii), KS02] より、自然な同型

$$R\mathcal{H}om_{\mathcal{R}}(\mathcal{R}_{Z_1},R\mathcal{H}om_{\mathcal{R}}(\mathcal{R}_{Z_2},F_1\otimes^L_{\mathcal{R}}F_2))\cong R\mathcal{H}om_{\mathcal{R}}(\mathcal{R}_{Z_1}\otimes^L_{\mathcal{R}}\mathcal{R}_{Z_2},F_1\otimes^L_{\mathcal{R}}F_2))$$

を得る。ここで $\mathcal{R}_{Z_i}$ は $\mathcal{R}$-flat であるので、自然に $\mathcal{R}_{Z_1} \otimes^L_{\mathcal{R}} \mathcal{R}_{Z_2} \cong \mathcal{R}_{Z_1} \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{R}_{Z_2} \cong \mathcal{R}_{Z_1 \cap Z_2}$ が成り立つ。再び本文 [同型 (2.6.9), KS02] を用いることで、自然に $R\Gamma_{Z_1\cap Z_2}(F_1 \otimes^L_{\mathcal{R}} F_2) \cong R\mathcal{H}om_{\mathcal{R}}(\mathcal{R}_{Z_1\cap Z_2}, F_1 \otimes^L_{\mathcal{R}} F_2)$ が成り立つので、これらを組み合わせることによって所望の射を得る。以上で (1) の証明を完了する。

(2) を示す。$f : X \to \{\mathrm{pt}\}$ を自明な射とする。まず、$Z_1 = Z_2 = X$ の場合に証明する。この場合、$R\Gamma_{Z_i}(X, -) \cong Rf_*(-)$ が成り立つ。今、$\mathcal{R} = A_X = f^{-1}A$ は定数層であるので、従って、本文 [Proposition 2.6.4 (ii), KS02] より、自然に

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{D}^+(A)}(Rf_*F_1 \otimes^L_A Rf_*F_2, Rf_*(F_1 \otimes^L_{A_X} F_2)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}^+(A_X)}(f^{-1}(Rf_*F_1 \otimes^L_A Rf_*F_2), F_1 \otimes^L_{A_X} F_2)$$

が成り立つ。また、本文 [Proposition 2.6.5, KS02] より、自然に $f^{-1}(Rf_*F_1 \otimes^L_A Rf_*F_2) \cong (f^{-1}Rf_*F_1) \otimes^L_{A_X} (f^{-1}Rf_*F_2)$ が成り立つ。本文 [射 (2.6.17), KS02] より、自然な射 $(f^{-1}Rf_*F_1) \otimes^L_{A_X} (f^{-1}Rf_*F_2) \to F_1 \otimes^L_{A_X} F_2$ があり、以上より射

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathsf{D}^+(A_X)}(F_1 \otimes^L_{A_X} F_2, F_1 \otimes^L_{A_X} F_2) &\to \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}^+(A_X)}((f^{-1}Rf_*F_1) \otimes^L_{A_X} (f^{-1}Rf_*F_2), F_1 \otimes^L_{A_X} F_2)\\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}^+(A_X)}(f^{-1}(Rf_*F_1 \otimes^L_A Rf_*F_2), F_1 \otimes^L_{A_X} F_2)\\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}^+(A)}(Rf_*F_1 \otimes^L_A Rf_*F_2, Rf_*(F_1 \otimes^L_{A_X} F_2))\end{aligned}$$

を得る。id の行き先が射 $Rf_*F_1 \otimes^L_A Rf_*F_2 \to Rf_*(F_1 \otimes^L_{A_X} F_2)$ を与える。以上で $Z_1 = Z_2 = X$ の場合の 1 つ目の射の構成を完了する。一般の場合、(1) の自然な射に対して $R\Gamma(X, -)$ を適用し、$Z_1 = Z_2 = X$ の場合に得られた射と合成することによって、射

$$\begin{aligned}R\Gamma_{Z_1}(X, F_1) \otimes^L_A R\Gamma_{Z_2}(X, F_2) &\cong R\Gamma(X, R\Gamma_{Z_1}(F_1)) \otimes^L_A R\Gamma(X, R\Gamma_{Z_2}(F_2))\\ &\to R\Gamma(X, R\Gamma_{Z_1}(F_1) \otimes^L_{A_X} R\Gamma_{Z_2}(F_2))\\ &\to R\Gamma(X, R\Gamma_{Z_1\cap Z_2}(F_1 \otimes^L_{A_X} F_2))\\ &\cong R\Gamma_{Z_1\cap Z_2}(X, F_1 \otimes^L_{A_X} F_2)\end{aligned}$$

を得る。以上で一般の場合の 1 つ目の射の構成を完了する。二つ目の射は、[Exercise 1.24 (1), KS02] で $F = \otimes_A, X = R\Gamma_{Z_1}(X, F_1), Y = R\Gamma_{Z_2}(X, F_2)$ とすることにより、自然な射

$$\begin{aligned}H^p_{Z_1}(X, F_1) \otimes_A H^q_{Z_2}(X, F_2) &\to H^{p+q}(R\Gamma_{Z_1}(X, F_1) \otimes^L_A R\Gamma_{Z_2}(X, F_2))\\ &\to H^{p+q}(R\Gamma_{Z_1\cap Z_2}(X, F_1 \otimes^L_{A_X} F_2))\end{aligned}$$

を得る。これが所望の射である。以上で (2) の証明を完了し、問題 II.17 の解答を完了する。 □

問題 II.18. S を位相空間、X_1, X_2, Y_1, Y_2 を S 上の局所コンパクトハウスドルフ空間、$f_i : Y_i \to X_i, (i = 1, 2)$ を S 上の射とする。$p_{Y_i} : Y_i \to S$ を構造射として、$f = f_1 \times_S f_2 : Y_1 \times_S Y_2 \to X_1 \times_S X_2$ とおく。$\mathcal{R}$ を S 上の可換環の層で、$\mathrm{wgld}(\mathcal{R}) < \infty$ と仮定する。$G_i \in \mathsf{D}^+(p_{Y_i}^{-1}\mathcal{R})$ とする。

(1) 以下の同型射の存在を示せ：

$$Rf_{1!}G_1 \boxtimes^L_{S,\mathcal{R}} Rf_{2!}G_2 \xrightarrow{\sim} Rf_!(G_1 \boxtimes^L_{S,\mathcal{R}} G_2).$$

この同型射は **Künneth の公式**として知られている。

(2) $S = X_1 = X_2 = \{\mathrm{pt}\}$ として、$\mathcal{R}$ を体とする。以下を示せ：

$$H^n_c(Y_1 \times Y_2, G_1 \boxtimes G_2) \cong \bigoplus_{p+q=n} (H^p_c(Y_1, G_1) \otimes H^q_c(Y_2, G_2)).$$

証明. (1) を示す。以下のように射に名前をつける (それぞれの四角形は Cartesian である)：

$$
\begin{tikzcd}
Y_1 \times_S Y_2 \arrow[r, "f_1''"] \arrow[d, "f_2''"'] & X_1 \times_S Y_2 \arrow[r, "q_2'"] \arrow[d, "f_2'"] & Y_2 \arrow[d, "f_2"] \\
Y_1 \times_S X_2 \arrow[r, "f_1'"] \arrow[d, "q_1'"'] & X_1 \times_S X_2 \arrow[r, "q_2'"] \arrow[d, "q_1"] & X_2 \arrow[d] \\
Y_1 \arrow[r, "f_1"] & X_1 \arrow[r] & S.
\end{tikzcd}
$$

また、$r_1 :\overset{\mathrm{def}}{=} q_1' \circ f_2'', r_2 :\overset{\mathrm{def}}{=} q_2' \circ f_1''$ とおき、$X_1 \times_S X_2 \to S$ を g とおいて、$h :\overset{\mathrm{def}}{=} g \circ f$ とおく。示すべきことは、自然な同型射

$$q_1^{-1} Rf_{1!} G_1 \otimes^L_{g^{-1}\mathcal{R}} q_2^{-1} Rf_{2!} G_2 \xrightarrow{\sim} Rf_!(r_1^{-1} G_1 \otimes^L_{h^{-1}\mathcal{R}} r_2^{-1} G_2)$$

の存在であるが、それは以下のように示される：

$$
\begin{aligned}
q_1^{-1} Rf_{1!} G_1 \otimes^L_{g^{-1}\mathcal{R}} q_2^{-1} Rf_{2!} G_2 &\xrightarrow{\sim} Rf'_{1!} {q'_1}^{-1} G_1 \otimes^L_{g^{-1}\mathcal{R}} Rf'_{2!} {q'_2}^{-1} G_2 && (1)\\
&\xrightarrow{\sim} Rf'_{1!}({q'_1}^{-1} G_1 \otimes^L_{{f'_1}^{-1} g^{-1}\mathcal{R}} {f'_1}^{-1} Rf'_{2!} {q'_2}^{-1} G_2) && (2)\\
&\xrightarrow{\sim} Rf'_{1!}({q'_1}^{-1} G_1 \otimes^L_{{f'_1}^{-1} g^{-1}\mathcal{R}} Rf''_{2!} {f''_1}^{-1} {q'_2}^{-1} G_2) && (3)\\
&= Rf'_{1!}({q'_1}^{-1} G_1 \otimes^L_{{f'_1}^{-1} g^{-1}\mathcal{R}} Rf''_{2!} r_2^{-1} G_2) && (4)\\
&\xrightarrow{\sim} Rf'_{1!} Rf''_{2!}({f''_2}^{-1} {q'_1}^{-1} G_1 \otimes^L_{{f''_2}^{-1} {f'_1}^{-1} g^{-1}\mathcal{R}} r_2^{-1} G_2) && (5)\\
&\xrightarrow{\sim} Rf_!(r_1^{-1} G_1 \otimes^L_{h^{-1}\mathcal{R}} r_2^{-1} G_2), && (6)
\end{aligned}
$$

ただしここで、(1) の部分に本文 [Proposition 2.6.7, KS02] を用い、(2) の部分に本文 [Proposition 2.6.6, KS02] を用い、(3) の部分に本文 [Proposition 2.6.7, KS02] を用い、(4) の部分に等式 $r_2 = q_2' \circ f_1''$ を用い、(5) の部分に本文 [Proposition 2.6.6, KS02] を用い、(6) の部分に等式 $f = f_1' \circ f_2'', r_1 = q_1' \circ f_2'', h = g \circ f_1' \circ f_2''$ を用いた。以上で (1) の証明を完了する。

(2) を示す。$\mathcal{R}$ は体なので、任意の $\mathcal{R}$-加群 ($f^{-1}\mathcal{R}$-加群) は平坦であり、従って $\otimes^L \cong \otimes, \boxtimes^L \cong \boxtimes$ が成り立つ。また、(1) で $S = X_1 = X_2 = \{\mathrm{pt}\}$ とすることで、同型射

$$R\Gamma_c(X, G_1) \otimes R\Gamma_c(X, G_2) \xrightarrow{\sim} R\Gamma_c(X, G_1 \boxtimes G_2)$$

を得る。ここで [Exercise 1.24 (2), KS02] を $F = \otimes, X = R\Gamma_c(X, G_1), Y = R\Gamma_c(X, G_2)$ として適用することにより、

$$\bigoplus_{p+q=n} (H^p_c(X, G_1) \otimes H^q_c(X, G_2)) \cong H^n(R\Gamma_c(X, G_1) \otimes R\Gamma_c(X, G_2)) \xrightarrow{\sim} H^n_c(X, G_1 \boxtimes G_2)$$

を得る。以上で (2) の証明を完了し、問題 II.18 の解答を完了する。 □

感想. (1) の本文のヒント、何あれ??

問題 II.19. X を局所コンパクト空間として、A を可換環で $\mathrm{wgld}(A) < \infty$ であるものとする。$F \in \mathsf{D}^+(A_X)$

として、$\Omega, Z \subset X$ をそれぞれ開集合と閉集合とする。a_X を一意的な射 $X \to \{\mathrm{pt}\}$ とする。以下を示せ：

$$R\Gamma(\Omega, F) \cong Ra_{X*}R\mathcal{H}om(A_\Omega, F), \tag{7}$$
$$R\Gamma_c(\Omega, F) \cong Ra_{X!}(A_\Omega \otimes^L F), \tag{8}$$
$$R\Gamma_Z(X, F) \cong Ra_{X*}R\mathcal{H}om(A_Z, F), \tag{9}$$
$$R\Gamma_c(Z, F) \cong Ra_{X!}(A_Z \otimes^L F). \tag{10}$$

証明. (7) と (9) を示す。F を入射的とすると、本文 [Proposition 2.4.6 (vii), KS02] より、$\mathcal{H}om(-, F)$ は脆弱層である。従って、$a_{X*} = \Gamma(X, -)$ に関して acyclic である。よって

$$R(a_{X*} \circ \mathcal{H}om(A_\Omega, -)) \cong Ra_{X*} \circ R\mathcal{H}om(A_\Omega, -), \quad R(a_{X*} \circ \mathcal{H}om(A_Z, -)) \cong Ra_{X*} \circ R\mathcal{H}om(A_Z, -),$$

が成り立つ。ここで $\Omega \subset X$ は開であるので、$a_{X*} \circ \mathcal{H}om(A_\Omega, -) \cong \Gamma(\Omega, -)$ が成り立ち、$Z \subset X$ は閉であるので、$a_{X*} \circ \mathcal{H}om(A_Z, -) \cong \Gamma_Z(X, -)$ が成り立つ。よって

$$R\Gamma(\Omega, -) \cong Ra_{X*} \circ R\mathcal{H}om(A_\Omega, -), \quad R\Gamma_Z(X, -) \cong Ra_{X*} \circ R\mathcal{H}om(A_Z, -),$$

が成り立つ。以上で (7) と (9) の証明を完了する。

(8) と (10) を示す。Z を局所閉集合とする。A_Z は A_X-flat なので、$A_Z \otimes^L (-) \cong A_Z \otimes (-)$ が成り立つ。また、本文 [Proposition 2.3.10, KS02] より、$A_Z \otimes (-) \cong (-)_Z$ が成り立つ。さらに、$(-)_Z$ は完全函手であるので、従って、

$$Ra_{X!} \circ (-)_Z \cong R(a_{X!} \circ (-)_Z) \cong R\Gamma_c(Z, -)$$

が成り立つ。Z を開または閉とすることにより、(8) と (10) が従う。以上で問題 II.19 の解答を完了する。 □

問題 II.20. A を可換環で、$\mathrm{wgld}(A) < \infty$ であるものとする。E を有限次元実線形空間とする。$s : E \times E \to E$ を足し算写像とし、$F, G \in \mathsf{D}^+(A_E)$ に対して $F * G :\overset{\mathrm{def}}{=} Rs_!(F \boxtimes^L G)$ と定める。これを $\mathsf{D}^+(A_E)$ 上の **convolution 作用素**という。

(1) $F, G, H \in \mathsf{D}^+(A_E)$ に対し、$F * G \cong G * F, F * (G * H) \cong (F * G) * H, A_{\{0\}} * F \cong F$ が成り立つことを示せ。
(2) $Z_1, Z_2 \subset E$ をコンパクト凸集合とする。$A_{Z_1} * A_{Z_2} \cong A_{Z_1 + Z_2}$ であることを示せ。
(3) γ を proper closed convex cone とするとき、$A_\gamma * A_{\mathrm{Int}(\gamma)} = 0$ であることを示せ。
(4) $E = \mathbb{R}^n$ であると仮定せよ。$Z_1 :\overset{\mathrm{def}}{=} [-1, 1]^n, Z_2 :\overset{\mathrm{def}}{=} (-1, 1)^n$ とする。$A_{Z_1} * A_{Z_2} \cong A_{\{0\}}[-n-1]$ であることを示せ。

注意. (3) で「proper cone」の意味がよくわからなかった (本文に定義書いてましたっけ…) ので Wikipedia を参考にして次の性質を満たす錐 γ のことと解釈しました:

- $\mathrm{Int}(\gamma) \neq \varnothing$ である。
- $\{x, -x\} \in \gamma$ ならば $x = 0$ である (つまり Wikipedia で**突錐**と呼ばれているものである)。

以下の解答ではこれら二つの条件はどちらも (3) を解くのに用いられますが、別の解法で突錐であることを仮定せずとも (3) が解けるのであれば、気になります。

注意. (4) は本文ではシフトが $-n$ になっていたけど、$-n-1$ な気がします。気のせいでしょうか。

証明. (1) を示す。$p_1, p_2 : E \times E \to E$ を第一射影、第二射影として、$p : E \times E \xrightarrow{E} \times E$ を成分を入れ替えることによって得られる同相写像とする。まず $F * G \cong G * F$ を示す。p は同相写像であるので、$Rp_! \cong Rp_* \cong p^{-1}$ が成り立つ。$s = s \circ p, p_2 = p_1 \circ p, p_1 = p_2 \circ p$ であるので、従って、

$$\begin{aligned} Rs_!(p_1^{-1}F \otimes^L p_2^{-1}G) &\cong Rs_! Rp_!(p_1^{-1}F \otimes^L p_2^{-1}G) \\ &\cong Rs_! p^{-1}(p_1^{-1}F \otimes^L p_2^{-1}G) \\ &\cong Rs_!(p^{-1}p_1^{-1}F \otimes^L p^{-1}p_2^{-1}G) \\ &\cong Rs_!(p_2^{-1}F \otimes^L p_1^{-1}G) \\ &\cong Rs_!(p_1^{-1}G \otimes^L p_2^{-1}F) \end{aligned}$$

が成り立つ。以上で $F * G \cong G * F$ が示された。

次に $F * (G * H) \cong (F * G) * H$ を示す。$q_{ij} : E \times E \times E \to E \times E$ を第 ij 成分への射影とし、$q_i : E \times E \times E \to E$ を第 i 成分への射影とする。$\bar{s} : E \times E \times E \to E$ を足し算写像とする。このとき、図式

$$\begin{tikzcd} E \times E \times E \arrow[r, "\mathrm{id} \times s"] \arrow[d, "q_{23}"'] & E \times E \arrow[d, "p_2"] \\ E \times E \arrow[r, "s"] & E \end{tikzcd}$$

は Cartesian である。従って自然な同型射 $p_2^{-1} \circ Rs_! \xrightarrow{\sim} R(\mathrm{id} \times s)_! \circ q_{23}^{-1}$ が存在する。よって、

$$\begin{aligned} F * (G * H) &= Rs_!(p_1^{-1}F \otimes^L p_2^{-1}Rs_!(p_1^{-1}G \otimes^L p_2^{-1}H)) \\ &\xrightarrow{\sim} Rs_!(p_1^{-1}F \otimes^L R(\mathrm{id} \times s)_! q_{23}^{-1}(p_1^{-1}G \otimes^L p_2^{-1}H)) \\ &\xrightarrow{\sim} Rs_!(p_1^{-1}F \otimes^L R(\mathrm{id} \times s)_!(q_{23}^{-1}p_1^{-1}G \otimes^L q_{23}^{-1}p_2^{-1}H)) \\ &\cong Rs_!(p_1^{-1}F \otimes^L R(\mathrm{id} \times s)_!(q_2^{-1}G \otimes^L q_3^{-1}H)) && (11) \\ &\xrightarrow{\sim} Rs_! R(\mathrm{id} \times s)_!((\mathrm{id} \times s)^{-1}p_1^{-1}F \otimes^L q_2^{-1}G \otimes^L q_3^{-1}H) && (12) \\ &\cong R\bar{s}_!(q_1^{-1}F \otimes^L q_2^{-1}G \otimes^L q_3^{-1}H) && (13) \end{aligned}$$

が成り立つ。ただしここで (11) の箇所に等式 $p_1 \circ q_{23} = q_2, p_2 \circ q_{23} = q_3$ を用い、(12) の箇所に本文 [Proposition 2.6.6, KS02] を用い、(13) の箇所に等式 $s \circ (\mathrm{id} \times s) = \bar{s}, p_1 \circ (\mathrm{id} \times s) = q_1$ を用いた。同様に $(F * G) * H \cong R\bar{s}_!(q_1^{-1}F \otimes^L q_2^{-1}G \otimes^L q_3^{-1}H)$ が従う。以上より $F * (G * H) \cong (F * G) * H$ が成り立つ。

次に $A_{\{0\}} * F \cong F$ を示す。$i : E \cong \{0\} \times E \to E \times E$ を包含射とする。i は閉部分集合の上への同相写像なので、$i_!$ は完全函手である (cf. 本文 [Proposition 2.5.4 (i), KS02])。従って、

$$\begin{aligned} A_{\{0\}} * F &= Rs_!(p_1^{-1}A_{\{0\}} \otimes^L p_2^{-1}F) \\ &= Rs_!(A_{\{0\} \times E} \otimes^L p_2^{-1}F) \\ &\cong Rs_!((p_2^{-1}F)_{\{0\} \times E}) && (14) \\ &\xrightarrow{\sim} Rs_! i_!(i^{-1}p_2^{-1}F) && (15) \\ &\xrightarrow{\sim} F && (16) \end{aligned}$$

が成り立つ。ただしここで (14) の箇所に本文 [Proposition 2.3.10, KS02] と $A_{\{0\} \times E}$ が $A_{E \times E}$-flat であることを用い、(15) の箇所に本文 [Proposition 2.5.4(ii), KS02] を用い、(16) の箇所に等式 $s \circ i = \mathrm{id}_E, p_2 \circ i = \mathrm{id}_E$ を用いた。以上で (1) の証明を完了する。

(2) を示す。A_{Z_i} は A_E-flat なので、$p_1^{-1}A_{Z_1} \cong A_{Z_1\times E}$ と $p_2^{-1}A_{Z_2} \cong A_{E\times Z_2}$ も $A_{E\times E}$-flat である。従って

$$p_1^{-1}A_{Z_1} \otimes^L p_2^{-1}A_{Z_2} \cong A_{Z_1\times E} \otimes A_{E\times Z_2} \cong A_{(Z_1\times E)\cap(E\times Z_2)} = A_{Z_1\times Z_2}$$

が成り立つ。$p : Z_1 \times Z_2 \to Z_1 + Z_2$ を s の制限 (足し算写像) とする。$A_{Z_1\times Z_2} \cong p^{-1}A_{Z_1+Z_2}$ が成り立つ。p はコンパクト空間からコンパクト空間への射なので固有である。従って $p_! = p_*$ が成り立つ。Z_1, Z_2 は凸であるので、$Z_1 \times Z_2 \subset E \times E$ はコンパクト凸集合である。従って、任意の点 $z \in Z_1 + Z_2$ に対して、$p^{-1}(z) = (Z_1 \times Z_2) \cap s^{-1}(z)$ はコンパクト凸集合と閉凸集合の共通部分であり、再びコンパクト凸集合、とくに可縮となる。すなわち、p の各 fiber は可縮である。よって、$i : Z_1 + Z_2 \to E$ を包含射とすれば、本文 [Corollary 2.7.7 (iv), KS02] より、自然な射 $i^{-1}A_E \xrightarrow{\sim} Rp_*p^{-1}i^{-1}A_E \cong Rp_!p^{-1}i^{-1}A_E$ は同型射である。$j : Z_1 \times Z_2 \to E \times E$ を包含射とすれば、$i \circ p = s \circ j$ であるから、従って、とくに

$$A_{Z_1+Z_2} \cong i_!i^{-1}A_E \cong i_!(Rp_!p^{-1}i^{-1}A_E) \cong R(s\circ j)_!(s\circ j)^{-1}A_E \cong Rs_!A_{Z_1\times Z_2} \cong A_{Z_1} * A_{Z_2}$$

が成り立つ。以上で (2) の証明を完了する。

(3) を示す。$p_1, p_2 : E\times E \to E$ を第一、第二射影とする。$p_1^{-1}A_\gamma \otimes^L p_2^{-1}A_{\mathrm{Int}(\gamma)} \cong A_{\gamma\times\mathrm{Int}(\gamma)}$ である。(3) を示すためには、$Rs_!A_{\gamma\times\mathrm{Int}(\gamma)} = 0$ を示すことが十分である。各 $z \in E$ に対して $i : E \cong s^{-1}(z) \to E\times E$ を包含射とする。このとき、本文 [Proposition 2.6.7, KS02] より、$(Rs_!A_{\gamma\times\mathrm{Int}(\gamma)})_z \cong R\Gamma_c(s^{-1}(z), A_{\gamma\times\mathrm{Int}(\gamma)}|_{s^{-1}(z)})$ が成り立つ。問題 II.19 10 の証明で行ったように、Z が局所閉集合である場合にも問題 II.19 10 の等式が成立する。従って、本文 [Remark 2.6.9 (iii), KS02] より、

$$\begin{aligned} R\Gamma_c(s^{-1}(z), A_{\gamma\times\mathrm{Int}(\gamma)}|_{s^{-1}(z)}) &\cong R\Gamma_c(s^{-1}(z)\cap(\gamma\times\mathrm{Int}(\gamma)), A_{s^{-1}(z)}) \\ &\cong R\Gamma_c(s^{-1}(z)\cap(\gamma\times\mathrm{Int}(\gamma)), A_{s^{-1}(z)\cap(\gamma\times\mathrm{Int}(\gamma))}) \end{aligned}$$

が成り立つ。従って、$Rs_!A_{\gamma\times\mathrm{Int}(\gamma)} = 0$ を示すためには、各 $z \in E$ に対して $R\Gamma_c(s^{-1}(z)\cap(\gamma\times\mathrm{Int}(\gamma)), A_{s^{-1}(z)\cap(\gamma\times\mathrm{Int}(\gamma))}) = 0$ であることを示すことが十分である。ここで $s^{-1}(z)\cap(\gamma\times\mathrm{Int}(\gamma)) = \varnothing$ であれば明らかにこの等式が成り立つので、以下、$s^{-1}(z)\cap(\gamma\times\mathrm{Int}(\gamma)) \neq \varnothing$ であると仮定して $R\Gamma_c(s^{-1}(z)\cap(\gamma\times\mathrm{Int}(\gamma)), A_{s^{-1}(z)\cap(\gamma\times\mathrm{Int}(\gamma))}) = 0$ を示す。このとき、成分ごとに足すことによって $z \in \mathrm{Int}(\gamma)$ であることが従う。簡単のため $X :\overset{\mathrm{def}}{=} s^{-1}(z)\cap(\gamma\times\mathrm{Int}(\gamma))$ とおく。示すべきことは $R\Gamma_c(X, A_X) = 0$ である。

$a \in \mathrm{Int}(\gamma)$ を一つとり、以下固定する。$K_n :\overset{\mathrm{def}}{=} (\gamma\times(a/n+\gamma))\cap X \subset X$ とおく。このとき、$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ が成り立つ。K_n に関して以下を主張を示す：

(†) K_n はコンパクトである。

(‡) $X \setminus K_n$ は可縮である。

(†) を示す。もし K_n がコンパクトでなければ、点列コンパクトでないので、K_n 内で収束しない点列 $v_i = (w_i, z - w_i) \in K_n$ が存在する。もし数列 $\|w_i\|$ が N で抑えられるとすれば、γ は閉であるから、$\gamma\cap[-N,N]^{\dim E}$ はコンパクトであり、また、$w_i \in \gamma\cap[-N,N]^{\dim E}$ であるので、従って w_i は $\gamma\cap[-N,N]^{\dim E}$ 内で収束する。これは v_i が K 内で収束しないということに反する。従って $\|w_i\|$ は非有界である。γ 内の点列 $w_i/\|w_i\| \in \gamma$ と $(z-w_i)/\|w_i\|$ はノルムが有界なので γ 内で収束する。$w :\overset{\mathrm{def}}{=} \lim w_i/\|w_i\| \in \gamma$ とおく。ここで $\|w_i\| \to \infty$ であるから $z/\|w_i\| \to 0$ であり、$(z-w_i)/\|w_i\| \to -w \in \gamma$ が成り立つ。一方、γ は突であるので、これは $w = 0$ を意味する。しかしながら、$\|w_i/\|w_i\|\| = 1$ であるため、$\|w\| = 1$ であり、これは矛盾している。以上より K_n は点列コンパクトである。今、K_n は有限次元実線形空間の部分空間なので、K_n はコンパクトである。

(‡) を示す。$z \in \mathrm{Int}(\gamma)$ であるので、十分大きい $N \gg n+1$ をとれば、$z - a/N \in \gamma$ が成り立つ。$a/N \notin (a/n+\gamma)$ であるので、従って $(z-a/N, a/N) \in X \setminus K_n$ である。点 $v = (v_1, v_2) \in X \setminus K_n$ を任意にとる。このとき、$v_2 \notin (a/n+\gamma)$ が成り立つ。ある $t, u > 0, t+u = 1$ が存在して、$ta/N + uv_2 \in (a/n+\gamma)$ が成り立つと仮定する。このとき、ある $v_3 \in \gamma$ が存在して、$ta/N + uv_2 = a/n + v_3$ が成り立つ。整理すれば、

$$uv_2 = \frac{u}{n}a + \frac{1-u}{n}a + v_3 - \frac{t}{N}a$$
$$v_2 = \frac{1}{n}a + \frac{1}{u}\left(v_3 + \left(\frac{t}{n} - \frac{t}{N}\right)a\right)$$

となるので、$N \gg n+1$ であることから、$v_2 \in (a/n+\gamma)$ が従う。これは矛盾である。よって v_2 と a/N を結ぶ線分は $a/n+\gamma$ と交わらない。従って $v = (v_1, v_2)$ と $(z-a/N, a/N)$ を結ぶ線分は K_n と交わらず、$X \setminus K_n$ は星状であることが従う。よってとくに $X \setminus K_n$ は可縮である。

$R\Gamma_c(X, A_X) = 0$ を示す。コンパクト部分集合 $K \subset X$ の集合は包含関係に関して有向集合であり、$\{K_n | n \in \mathbb{N}\}$ はその cofinal な部分集合をなす。従って、本文 [Notations 2.6.8, KS02] の最後の記述より、任意の $F \in \mathsf{Ab}(X)$ に対して $H_c^j(X, F) \cong \mathrm{colim}_n H_{K_n}^j(X, F)$ が成り立つ。X は可縮であり、さらに十分大きな n に対して $X \setminus K_n$ も可縮であるので、本文 [Corollary 2.7.7 (iii), KS02] より、十分大きな n に対して $A \cong R\Gamma(X, A_X) \cong R\Gamma(X \setminus K_n, A_{X \setminus K_n})$ が成り立つ。従って任意の i に対して $H^i(X, A_X) \to H^i(X \setminus K_n, A_X)$ は同型射である ($i=0$ の場合は id_A で、他の次数ではどちらも 0)。よって任意の i に対して $H_{K_n}^i(X, A_X) = 0$ が従い、とくに $H_c^i(X, A_X) = 0$ が成り立つ。これは $R\Gamma_c(X, A_X) = 0$ を意味する。以上で (3) の証明を完了する。

(4) を示す。$p_1, p_2 : E \times E \to E$ を第一、第二射影とする。$p_1^{-1}A_{Z_1} \otimes^L p_2^{-1}A_{Z_2} \cong A_{Z_1 \times Z_2}$ である。$Rs_! A_{Z_1 \times Z_2}$ を計算しなければならない。$z \in E$ を任意にとる。$S(z) = s^{-1}(z) \cap (Z_1 \times Z_2)$ とおく。$Rs_! A_{Z_1 \times Z_2} \cong R\Gamma_c(S(z), A_{S(z)})$ である。従って、(4) を示すためには、$(z, i) \neq (0, n)$ に対して $H_c^i(S(z), A_{S(z)}) = 0$ であり、$H_c^n(S(z), A_{S(z)}) \cong A$ であることを示すことが十分である。$S \subset E$ に対して $z + S = \{z + v | v \in S\}$ とおく。$v = (v_1, v_2) \in S(z)$ は $v_1 + v_2 = z, v_1 \in Z_1, v_2 \in Z_2$ を満たす。従って、$v_1 - z = -v_2 \in Z_2$ が成り立つ (Z_2 は原点対称であることに注意)。すなわち、$v_1 \in Z_1 \cap (z + Z_2)$ が成り立つ。よって $Z_1 \cap (z + Z_2) \to S(z), v_1 \mapsto (v_1, z - v_1)$ は同相写像である。これにより $S(z)$ を $Z_1 \cap (z + Z_2)$ と同一視する。$S_k(z) :\overset{\mathrm{def}}{=} Z_1 \cap (z + [-1+1/k, 1-1/k]^n)$ とおく。$S(z) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} S_k(z)$ が成り立つ。また、$S_k(z)$ はコンパクト空間二つの共通部分であるから、コンパクトである。

$z \neq 0$ に対して $H_c^i(S(z), A_{S(z)}) = 0$ を示す。$1/k_0 < \min\{|z_1|, \cdots, |z_n|\}$ となる k_0 をとれば、任意の $k \geq k_0$ に対して、$S(z) \setminus S_k(z)$ は、$z_i \neq 0$ となる座標を $z_i/|z_i|$ 側へと潰すホモトピーによって、可縮である。また、$S(z) = \bigcup_{k \geq k_0} S_k(z)$ であるので、本文 [Notations 2.6.8, KS02] の最後の記述より、$H_c^i(S(z), A_{S(z)}) \cong \mathrm{colim}_{k \geq k_0} H_{S_k(z)}^i(S(z), A_{S(z)})$ が成り立つ。さらに、$S(z)$ と $S(z) \setminus S_k(z)$ はともに可縮であるから、本文 [Corollary 2.7.7 (iii), KS02] より、$R\Gamma(S(z), A_{S(z)}) \cong R\Gamma(S(z) \setminus S_k(z), A_{S(z) \setminus S_k(z)}) \cong A$ が成り立つ。従って、$R\Gamma_{S_k(z)}(S(z), A_{S_k(z)}) \cong 0$ であり、とくに $H_{S_k(z)}^i(S(z), A_{S(z)}) = 0$ である。よって $H_c^i(S(z), A_{S(z)}) = 0$ が従う。

$z = 0$ とする。$S(0) \setminus S_k(0)$ は n 次元球面 S^n とホモトピックであり、Mayer-Vietoris 完全列 (cf. 本文 [Remark 2.6.10, KS02]) と本文 [Corollary 2.7.7 (iii), KS02] を用いて、帰納法により、$R\Gamma(S(0) \setminus S_k(0), A_{S(0) \setminus S_k(0)}) \cong A \oplus A[-n]$ が従う。$S(0)$ は可縮なので、本文 [Corollary 2.7.7 (iii), KS02] より $R\Gamma(S(0), A_{S(0)}) \cong A$ である。以上より、$R\Gamma_{S_k(0)}(S(0), A_{S(0)}) \cong A[-n-1]$ が成り立つ。従って、とくに

$i \neq n+1$ に対して $H^i_{S_k(0)}(S(0), A_{S(0)}) \cong 0$ であり、$i = n+1$ に対しては $H^{n+1}_{S_k(0)}(S(0), A_{S(0)}) \cong A$ である。$S(0) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} S_k(0)$ であるから、任意の i に対して $H^i_c(S(0), A_{S(0)}) \cong \operatorname{colim}_{k\in\mathbb{N}} H^i_{S_k(0)}(S(0), A_{S(0)})$ であり、よって $H^i_c(S(0), A_{S(0)}) = 0, (i \neq n+1)$ と $H^{n+1}_c(S(0), A_{S(0)}) \cong A$ が成り立つ。以上で (4) の証明を完了し、問題 II.20 の解答を完了する。 □

問題 II.21. X を位相空間、$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を X の閉部分集合の減少列で $X_n = X, (n \ll 0)$ と $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n = \varnothing$ を満たすものとする。$F \in \mathsf{D}^+(X)$ は $k \neq n$ に対して $H^k_{X_n\setminus X_{n+1}}(F) = 0$ を満たすとする。完全三角

$$R\Gamma_{X_{n+1}\setminus X_{n+2}}(F) \to R\Gamma_{X_n\setminus X_{n+2}}(F) \to R\Gamma_{X_n\setminus X_{n+1}}(F) \xrightarrow{+1}$$

のコホモロジーをとって、連結準同型を $d^n : H^n_{X_n\setminus X_{n+1}}(F) \to H^{n+1}_{X_{n+1}\setminus X_{n+2}}(F)$ と表す。$K^n \overset{\text{def}}{:=} H^n_{X_n\setminus X_{n+1}}(F)$ と表す。

(1) $(K^\bullet, d^\bullet)$ は X 上の層の複体であることを示せ。
(2) $k < n$ に対して $H^k_{X_n}(F) = 0$ であり、さらに $H^n_{X_{n-1}}(F) \xrightarrow{\sim} H^n(F)$ は同型射であることを示せ。
(3) $G^n = \Gamma_{X_n}(F^n) \cap (d^n_F)^{-1}(\Gamma_{X_{n+1}}(F^{n+1}))$ とおく。射 $d^n_G : G^n \to G^{n+1}$ を構成して、$G = (G^\bullet, d^\bullet)$ が複体であることを示せ。さらに $G \to K$ と $G \to F$ を構成して、各 F^n が脆弱層である場合に擬同型となることを示せ。$\mathsf{D}^+(X)$ において $F \cong K$ であることを結論付けよ。

証明. (1) を示す。明らかに以下の図式が可換である：

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Gamma_{X_{n+2}\setminus X_{n+3}}(-) \arrow[r] \arrow[d] & \Gamma_{X_n\setminus X_{n+3}}(-) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \Gamma_{X_n\setminus X_{n+2}}(-) \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \Gamma_{X_{n+1}\setminus X_{n+3}}(-) \arrow[r] & \Gamma_{X_n\setminus X_{n+3}}(-) \arrow[r] & \Gamma_{X_n\setminus X_{n+1}}(-).
\end{tikzcd}$$

従って、完全三角の間の射

$$\begin{tikzcd}
R\Gamma_{X_n\setminus X_{n+3}}(-) \arrow[r] \arrow[d, equal] & R\Gamma_{X_n\setminus X_{n+2}}(-) \arrow[r] \arrow[d] & R\Gamma_{X_{n+2}\setminus X_{n+3}}(-)[1] \arrow[r, "+1"] \arrow[d] & {} \\
R\Gamma_{X_n\setminus X_{n+3}}(-) \arrow[r] & R\Gamma_{X_n\setminus X_{n+1}}(-) \arrow[r] & R\Gamma_{X_{n+1}\setminus X_{n+3}}(-)[1] \arrow[r, "+1"] & {}
\end{tikzcd}$$

を得る。縦に伸ばして横向きに書けば、完全三角の射

$$\begin{tikzcd}
R\Gamma_{X_n\setminus X_{n+2}}(-) \arrow[r] \arrow[d] & R\Gamma_{X_n\setminus X_{n+1}}(-) \arrow[r] \arrow[d] & R\Gamma_{X_{n+1}\setminus X_{n+2}}(-)[1] \arrow[r, "+1"] \arrow[d, equal] & {} \\
R\Gamma_{X_{n+2}\setminus X_{n+3}}(-)[1] \arrow[r] & R\Gamma_{X_{n+1}\setminus X_{n+3}}(-)[1] \arrow[r] & R\Gamma_{X_{n+1}\setminus X_{n+2}}(-)[1] \arrow[r, "+1"] & {}
\end{tikzcd}$$

を得る。n 次と $n+1$ 次の周辺でコホモロジーをとれば、可換図式

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & H^n_{X_n\setminus X_{n+1}}(-) \arrow[r, "d^n"] \arrow[d] & H^{n+1}_{X_{n+1}\setminus X_{n+2}}(-) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^{n+1}_{X_n\setminus X_{n+2}}(-) \arrow[r] \arrow[d] & {} \\
{} \arrow[r] & H^{n+1}_{X_{n+1}\setminus X_{n+3}}(-) \arrow[r] & H^{n+1}_{X_{n+1}\setminus X_{n+2}}(-) \arrow[r, "d^{n+1}"] & H^{n+2}_{X_{n+2}\setminus X_{n+3}}(-) \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

を得る。横向きは完全であるから、$d^{n+1} \circ d^n = 0$ が従う。以上で (1) の証明を完了する。

(2) を示す。完全三角

$$R\Gamma_{X_{i+1}}(F) \to R\Gamma_{X_i}(F) \to R\Gamma_{X_i\setminus X_{i+1}}(F) \xrightarrow{+1}$$

でコホモロジーをとる。各 $k < i$ に対して $H^k_{X_i\setminus X_{i+1}}(F) \cong 0$ であるので、各 $k < i$ に対して同型射 $H^k_{X_{i+1}}(F) \xrightarrow{\sim} H^k_{X_i}(F)$ を得る。$i \geq n$ としてこの同型射を繋ぐことによって、各 $k < n$ に対して同型射 $H^k_{X_i}(F) \xrightarrow{\sim} H^k_{X_n}(F), (i \gg 0)$ を得る。$x \in X$ を任意にとれば、$\bigcap_{i\in\mathbb{N}} X_i = \varnothing$ であるので、ある $i \gg 0$ が存在して $x \in X_i$ となる。点 x で stalk をとることによって、$0 = H^k_{X_i}(F)_x \xrightarrow{\sim} H^k_{X_n}(F)_x$ を得る ($H^k_{X_i}(F)$ は X_i の上に台を持つ)。$H^k_{X_n}(F)$ は任意の点の stalk が 0 であるので、$H^k_{X_n}(F) = 0$ が従う。これが示すべきことの一つ目である。また、各 $k > i$ に対して $H^k_{X_i\setminus X_{i+1}}(F) \cong 0$ であるので、各 $k > i+1$ に対して同型射 $H^k_{X_{i+1}}(F) \xrightarrow{\sim} H^k_{X_i}(F)$ を得る。$k = n$ として $i \leq n-2$ とすれば、この同型射を繋ぐことにより、同型射 $H^n_{X_{n-1}}(F) \xrightarrow{\sim} H^n_{X_i}(F), (i \ll 0)$ を得る。$X_i = X, (i \ll 0)$ であるので、同型射 $H^n_{X_{n-1}}(F) \xrightarrow{\sim} H^n(F)$ を得る。これが示すべきことの二つ目である。以上で (2) の証明を完了する。

(3) を示す。自然な包含射を $i^n : \Gamma_{X_n}(F^n) \to F^n$ とおく。G^n の定義より、

$$\begin{tikzcd} G^n \arrow[r, "q^n"] \arrow[d, "p^n"'] & \Gamma_{X_{n+1}}(F^{n+1}) \arrow[d, "i^{n+1}"] \\ \Gamma_{X_n}(F^n) \arrow[r, "i^n\circ d^n"] & F^{n+1} \end{tikzcd}$$

は pull-back 図式である。また、p^n はモノ射である。さらに、

$$d^{n+1} \circ i^{n+1} \circ q^n = d^{n+1} \circ d^n \circ i^n \circ p^n = 0$$

であるので、$i^{n+1} \circ q^n : G^n \to \Gamma_{X_{n+1}}(F^{n+1})$ と 0-射 $G^n \to \Gamma_{X_{n+2}}(F^{n+2})$ は $p^{n+1} \circ d^n_G = q^n, q^{n+1} \circ d^n_G = 0$ となる射 $d^n_G : G^n \to G^{n+1}$ を一意的に定義する。このとき、

$$\begin{aligned} p^{n+2} \circ d^{n+1}_G \circ d^n_G &= q^{n+1} \circ d^n_G = 0, \\ q^{n+2} \circ d^{n+1}_G \circ d^n_G &= 0 \circ d^n_G = 0 \end{aligned}$$

が成り立つ。従って $d^{n+1}_G \circ d^n_G = 0$ であり、$(G^\bullet, d^\bullet_G)$ は層の複体である。また、$p^n \circ i^n : G^n \to F^n$ は複体の射 $G \to F$ を与える。

各 F^n が脆弱層であるとする。このとき任意の局所閉集合 $? \subset X$ に対して $R\Gamma_?(F) \cong \Gamma_?(F)$ が成り立つ。i^{n+1} はモノなので、

$$\ker(d^n_G) = \ker(i^{n+1} \circ d^n_G) = \ker(d^n \circ p^n \circ i^n) = \ker(d^n) \cap \Gamma_{X_n}(F^n) = \Gamma_{X_n}(\ker(d^n))$$

が成り立つ。定義より $\mathrm{Im}(d^{n-1}_G) = \Gamma_{X_n}(F^n) \cap \mathrm{Im}(d^{n-1}) = \Gamma_{X_n}(\mathrm{Im}(d^{n-1}))$ が成り立つ。従って、$H^n(G) \cong \Gamma_{X_n}(\ker(d^n))/\Gamma_{X_n}(\mathrm{Im}(d^{n-1}))$ であり、さらに

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Im}(d^{n-1}_G) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Im}(d^{n-1}) \arrow[d] \\ \ker(d^n_G) \arrow[r] & \ker(d^n) \end{tikzcd}$$

は Cartesian である。よって、[Exercise 1.6 (3), KS02] より、$H^n(G) \to H^n(F)$ は単射である。また、複体の完全列

$$0 \to \Gamma_{X_n}(F) \to \Gamma_{X_{n-1}}(F) \to \Gamma_{X_n\setminus X_{n-1}}(F) \to 0$$

でコホモロジーをとることにより、完全列

$$H^n_{X_n}(F) \to H^n_{X_{n-1}}(F) \to H^n_{X_{n-1}\setminus X_n}(F)$$

を得る。ここで仮定より、$H^n_{X_{n-1}\setminus X_n}(F) = 0$ であり、さらに (2) より、$H^n_{X_{n-1}}(F) \cong H^n(F)$ であるので、$H^n_{X_n}(F) \to H^n(F)$ は全射である。一方、$\Im(d^{n-1})) \cong \Gamma_{X_n}(F^n) \times$ 層の複体の完全列

$$0 \to \Gamma_{X_n}(F) \to F \to \Gamma_{X\setminus X_n}(F) \to 0$$

□

感想. (3) は、filtered complex のスペクトル系列の特別な場合。

References

[Har13] R. Hartshorne. *Algebraic Geometry*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2013. ISBN: 9781475738490. URL: https://www.springer.com/jp/book/9780387902449.

[KS02] M. Kashiwara and P. Schapira. *Sheaves on Manifolds*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer Berlin Heidelberg, 2002. ISBN: 9783540518617. URL: https://www.springer.com/jp/book/9783540518617.