関数空間

ゆじ

2021 年 8 月 10 日

1 ノルム空間、Banach 空間、Hilbert 空間

1.1 定義

係数体 $\mathbb{K}$ は $\mathbb{R}$ や $\mathbb{C}$ や $\mathbb{Q}_p$ などの完備ノルム体とする。

Definition 1.1.

- **ノルム空間**：ノルム $\|-\|$ が付随している $\mathbb{K}$-線形空間のこと。
- **Banach 空間**：完備なノルムが付随しているノルム空間のこと。
- **Hilbert 空間**：完備な内積 $(-,*)$ が付随している $\mathbb{C}$-線形空間のこと。

とくに、$\mathbb{K}=\mathbb{C}$ なら、Hilbert 空間 $\Rightarrow$Banach 空間 $\Rightarrow$ ノルム空間。

X をノルム空間とする。$r>0$ に対し、$B_r^X, B_r \subset X$ などの記号で半径 r の**開球**を表す：

$$B_r = B_r^X :\overset{\text{def}}{=} \{x \in X | \|x\| < r\} \subset X.$$

二つのノルム $\|-\|_1, \|-\|_2$ が**同値**であるとは、ある $a,b>0$ が存在してすべての元 x に対して $a\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq b\|x\|_1$ が成り立つことを言う。このとき $\|-\|_1, \|-\|_2$ の定める位相は同じである。$\bar{B}_r$ で**閉球**、∂B_r で**球面**を表す。

H を Hilbert 空間、$F \subset H$ を閉 (線形) 部分空間とする。

$$F^\perp :\overset{\text{def}}{=} \{v \in H | (v,w)=0, \forall w \in F\}$$

と書き、これを F の**直交補空間**という。

Remark 1.2 (**有限次元ノルム空間は完備**)**.** 有限次元ノルム空間は完備である。実際、どんな線型空間の同型 $\cong \mathbb{K}^r$ をとっても、右辺の標準的なノルムから定まる位相に関して同相になる。右辺は完備である。特に、任意のノルム空間の**有限次元部分空間は閉部分空間**である。

Remark 1.3 (**直交補空間は閉**)**.** 直交補空間は閉である。実際、$v \in \overline{F^\perp}$ となる Cauchy 列 $v_n \in F^\perp$ に対して $0=(v_n,w) \to (\lim v_n, w)=0$ がわかって $\lim v_n \in F^\perp$ となる。

Example 1.4.

- 二つのノルム空間 X,Y に対して $X \oplus Y$ も**積ノルム** $\|x\|_X + \|y\|_Y$ によってノルム空間となる。X,Y が Banach 空間であれば、$X \oplus Y$ も Banach 空間となる。

- ノルム空間 X の閉部分空間 $Y \subset X$ に対して、X/Y は**商ノルム** $\|x+Y\| = \inf\{\|x+y\| | y \in Y\}$ によってノルム空間となる。実際、$x + y_n \to 0$ であれば $-y_n \to x$ となって Y が閉であることから $x \in Y$ となることがわかるので、このセミノルムはノルムとなる。X が Banach 空間であれば X/Y も Banach 空間となる。
- X を距離空間、Y をノルム空間とする。Y に値を持つ連続写像のなす空間 $C(X,Y)$ 上の一様ノルム $\|f\|_\infty :\stackrel{\mathrm{def}}{=} \sup_{x\in X} \|f(x)\|_Y$ を考える。$x \mapsto \|f(x)\|_Y$ は連続であるから、X がコンパクトであれば、有界であり、従って一様ノルムが $C(X,Y)$ のノルムを定める。さらに Y が Banach 空間であれば、一様ノルムに関する Cauchy 列の各点収束極限が存在し、一様ノルムに関する Cauchy 列の極限であることから連続となり、$C(X,Y)$ が Banach 空間であることも従う。
- (Ω, μ) を測度空間、$1 \le p < \infty$ とする。Ω 上の p 乗可積分な可測関数のなす $\mathbb{K}$-線形空間を $\mathcal{L}^p(\Omega)$ と書き、
$$\|f\|_p :\stackrel{\mathrm{def}}{=} \int_\Omega f d\mu$$
でセミノルムを定め、$L^p(\Omega) :\stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathcal{L}^p(\Omega)/(\|-\|_p = 0)$ と定めると、$L^p(\Omega)$ はノルム空間となる。可測関数の各点収束極限は可測であることに注意する。従って、$f_n \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ が $L^p(\Omega)$ の Cauchy 列を代表する可測関数の列であるとき、$f :\stackrel{\mathrm{def}}{=} \lim f_n, a.e.$ により可測関数 $f : \Omega \to \mathbb{K}$ が定義される。ここで $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n, m > N$ で
$$|\|f_n\|_p - \|f_m\|_p| \le \|f_n - f_m\|_p < \varepsilon$$
となるので $\|f_n\|_p$ は $\mathbb{K}$ の Cauchy 列となり、収束する。以上より $\|f\|_p < \infty$ がわかって $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ となる。すなわち $L^p(\Omega)$ は Banach 空間である。
- 直前の例と同様に、Ω 上の有界可測関数の $\mathbb{K}$-線形空間を $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$ と書き、一様ノルム $\|-\|_\infty$ でセミノルムを定め、$L^\infty(\Omega) :\stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathcal{L}^\infty(\Omega)/(\|-\|_\infty = 0)$ と定めることで Banach 空間 $L^\infty(\Omega)$ を得る。

Definition 1.5. X, Y：ノルム空間とする。**作用素** $A : X \to Y$ とは、線形写像のことを意味する (連続とは言ってない)。**線形汎関数**とは、行き先が $\mathbb{K}$ である線形作用素のことを意味する。以下、X, Y を Banach 空間とする。

- **有界作用素**：$\exists M > 0, \forall x \in X, \|Ax\|_X \le M\|x\|_Y$.
  つまり、単位球の行き先がノルム M 以下の部分、ということ。
- **閉作用素**：X がノルム $\|x\|_X + \|Ax\|_Y$ に関して完備、ということ。
  このノルムを**グラフノルム**と言う。
- **コンパクト作用素**：単位球の像が相対コンパクト (閉包がコンパクト)、ということ。
- **Fredholm 作用素**：$\dim(\ker(A)), \dim(\mathrm{coker}(A)) < \infty$ かつ $\mathrm{Im}(A) \subset Y$ が閉、ということ。

有界作用素 A に対して $\|A\| :\stackrel{\mathrm{def}}{=} \sup\{Ax | x \in X, \|x\| = 1\}$ と定め、これを**作用素ノルム**という。有界作用素全体のなす線形空間をたんに $\mathrm{Hom}(X,Y)$ で表し、X 上の有界な線形汎関数全体の空間を $X^* :\stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Hom}(X, \mathbb{K})$ で表す。$\mathrm{Hom}(X,Y)$ は作用素ノルムによってノルム空間となり、さらに Y が Banach 空間であれば $\mathrm{Hom}(X,Y)$ も Banach 空間となる。とくに、係数体が完備であることから、ノルム空間 X に対して X^* は Banach 空間となる。$X \otimes Y :\stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Hom}(X^*, Y)$ と定め、これを**テンソル積**と言う。

$A : X \to Y$ が Hilbert 空間の間の作用素であるとき、$A^* :\stackrel{\mathrm{def}}{=} (-) \circ A : Y^* \to X^*$ を A の**共役作用素**と言う。さらに、Hilbert 空間上の作用素 $A : X \to X$ が任意の $u, v \in X$ に対して $(Au, v) = (u, A^*v)$ を満たすと

き、**自己共役作用素**と言う。

Remark 1.6. ここでは作用素の定義域はつねに全体であるとする。

Remark 1.7 (**有界 $\iff$ 連続**)**.** 有界作用素は連続である。実際 Definition 1.5の記号で、$x_n \in X$ が Cauchy 列であれば、$|\|Ax_n\| - \|Ax_m\|| \leq \|A(x_n - x_m)\| \leq M\|x_n - x_m\|$ なので $Ax_n \in Y$ も Cauchy 列である。逆に連続な線形作用素は有界である。実際、有界でないとすれば、$\|Ax_n\| \geq 2^n, \|x_n\| = 1$ となる $x_n \in X$ が取れて、$2^{-n}x_n \to 0$ であるが $A(2^{-n}x_n) \to 0$ とはならず、連続でない。

すぐ後で示すように、Banach 空間の間の全射有界作用素は開写像である (開写像定理)。

Remark 1.8 (閉 $\Rightarrow$ 連続)**.** 閉作用素の定義には連続性は含まれていないが、後で示すように、Banach 空間の間の閉作用素は連続 (従って有界) となる (閉グラフ定理)。定義域が全体ではない場合、閉作用素は有界とは限らない。

Remark 1.9. コンパクト距離空間は全有界、とくに有界であるので、コンパクト作用素は定義より有界作用素 (特に連続) である。

Remark 1.10 (合成について)**.** 有界作用素の合成は有界作用素である。また、定義より、$A : X \to Y$ が有界、$B : Y \to Z$ がコンパクト作用素であれば、$B \circ A : X \to Z$ はコンパクト作用素となる。また、二つの有界作用素 $A : X \to Y, B : Y \to Z$ に対し、$|A(B(-))| \leq \|A\||B(-)| \leq \|A\|\|B\|\| - \|$ となるので、$\|A \circ B\| \leq \|A\|\|B\|$ となる。とくに、$Y = X$、A が全単射、A^{-1} が有界作用素、であれば、$\|A\|^{-1} \leq \|A^{-1}\|$ となる。

Example 1.11 (Hilbert-Schmidt 作用素)**.** $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ を有界領域、μ を Ω の通常の測度、$L^2(\Omega)$ を Ω 上の二乗可積分関数のなす Banach 空間とする。第一変数に関して一様連続な二乗可積分関数 $[K : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}] \in L^2(\Omega \times \Omega)$ と $f \in L^2(\Omega), x \in X$ に対して

$$U_K f(x) :\stackrel{\text{def}}{=} \int_\Omega K(x, y) f(y) d\mu(y)$$

と定義すれば、作用素

$$U_K : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$$

が定まる。これを **Hilbert-Schmidt 作用素**という。

1.2 ノルム空間の基本的な性質

Theorem 1.12 (Hahn-Banach)**.** $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ とする。

(i) (**Hahn-Banach** の拡張定理、$\mathbb{R}$ 版)**.** X を $\mathbb{R}$ 線形位相空間、$Y \subset X$ を部分線形空間、$p : E \to \mathbb{R}$ を**劣線形写像**、つまり $p(x_1 + x_2) \geq p(x_1) + p(x_2), p(ax) \geq ap(x), (\forall a \geq 0, x, x_1, x_2 \in E)$ を満たす写像、$f : Y \to \mathbb{R}$ を線形写像とする。$\forall y \in Y, f(y) \leq p(y)$、と仮定する。このとき、$f$ は $\tilde{f}(x) \leq p(x)$ を満たすように X 全体に延長できる。つまり、$\exists \tilde{f} : X \to \mathbb{R}$, s.t., $f = \tilde{f}|_F, \forall x \in X, \tilde{f}(x) \leq p(x)$.

(ii) (**Hahn-Banach** の拡張定理、$\mathbb{C}$ 版)**.** X を $\mathbb{C}$ 線形位相空間、$Y \subset X$ を部分線形空間、$p : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ を**劣線形写像**、つまり $p(x_1 + x_2) \geq p(x_1) + p(x_2), p(ax) \geq |a|p(x), (\forall a \in \mathbb{C}, x, x_1, x_2 \in E)$ を満たす

写像、$f : Y \to \mathbb{R}$ を線形写像とする。$\forall y \in Y, f(y) \le p(y)$、と仮定する。このとき、$f$ は $\tilde{f}(x) \le p(x)$ を満たすように X 全体に延長できる。つまり、$\exists \tilde{f} : X \to \mathbb{R}$, s.t., $f = \tilde{f}|_F, \forall x \in X, |\tilde{f}(x)| \le |p(x)|$.

(iii) (**連続汎関数は同じノルムのまま全体に拡張できる**). X をノルム空間、$F \subset X$ を閉部分空間、$f : F \to \mathbb{K}$ を連続汎関数とすると、f は連続汎関数 $\tilde{f} : X \to \mathbb{K}$ へとノルムを保って拡張できる。すなわち、$\tilde{f}|_F = f, \|\tilde{f}\| = \|f\|$ となる $\tilde{f}$ が存在する。

(iv) (**$\neq 0$ な局所凸空間の双対空間は $\neq 0$**). $X \neq 0$ を**局所凸空間** ($:\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 凸集合からなる 0 の基本近傍系を持つ線形位相空間)、$u, v \in X$ を異なる元とすると、ある連続汎関数 $f : X \to \mathbb{K}$ が存在して $f(u) \neq f(v)$ となる。とくに $X^* \neq 0$ が成り立つ。

(v) X をノルム空間、$v \in X$ を元とするとき、次が成り立つ：

$$\|v\| = \sup\{|f(v)| \mid f \in X^*, \|f\| \le 1\}.$$

(vi) X をノルム空間とすると、自然な射 $X \to X^{**}$ は等長埋め込みである。

Proof. (i) ($\mathbb{R}$ 版 **Hahn-Banach**) を示す。部分的な f の延長全体に Zorn の補題を使う。$F \subset F' \subset E$ を線形空間、$f' : F' \to \mathbb{R}$ を線型写像で $f'|_F = f$ と $f'(x) \le p(x), (\forall x \in F')$ を満たすものとして、ペア (F', f') たちの間に $F'_1 \subset F'_2, f'_2|_{F'_1} = f'_1$ を満たすことで順序を入れる。Zorn の補題より極大元 (F_0, f_0) が存在する。もし $x \in F \setminus F_0$ が存在すれば、$\tilde{f}_0(x) :\overset{\text{def}}{=} \inf\{p(x + x_0) - f_0(x_0) | x_0 \in F_0\} \ge 0$ と定義することで、f_0 は $F_0 + \mathbb{R}x_0 \subset E$ へと延長される。$a \ge 0$ なら

$$\tilde{f}_0(ax + bx_0) \le a(p(x + x_0) - f_0(x_0)) + f_0(bx_0) \le p(a(x + x_0)) + f_0((b - a)x_0) \le p(ax + bx_0),$$

$a \le 0$ でも同様にして、$\tilde{f}_0(ax + bx_0) \le p(ax + bx_0)$ がわかり、$\tilde{f}_0(x) \le p(x)$ を満たす。これは (F_0, f_0) の極大性に反する。以上で $\mathbb{R}$ 版 Hahn-Banach の証明を完了する。

(ii) ($\mathbb{C}$ 版 **Hahn-Banach**) を示す。f の実部 g を $\mathbb{R}$ 線形写像と見て $\mathbb{R}$ 版 Hahn-Banach を用いて $\tilde{g}$ へと延長する。$\tilde{f}(x) :\overset{\text{def}}{=} \tilde{g}(x) - i\tilde{g}(ix)$ と定める。$\tilde{f}$ は f の延長である。また

$$\tilde{f}((a + ib)x) = \tilde{g}((a + ib)x) - i\tilde{g}(i(a + ib)x) = a\tilde{g}(x) + b\tilde{g}(ix) - ia\tilde{g}(ix) + ib\tilde{g}(x) = a\tilde{f}(x) + ib\tilde{f}(x)$$

なので $\tilde{f}$ は $\mathbb{C}$-線形である。さらに $|\tilde{f}(x)| = z\tilde{f}(x)$ となる $z \in \mathbb{C}, |z| = 1$ をとれば

$$|\tilde{f}(x)| = |\tilde{f}(zx)| = |\tilde{g}(zx)| \le p(zx) \le |z|p(x) = p(x)$$

となる。よって $\tilde{f}$ は所望の f の延長である。以上で $\mathbb{C}$ 版 Hahn-Banach の証明を完了する。

(iii) (**連続汎関数は全体に拡張できること**) を示すには、劣線形写像 $\|f(-)\| : F \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ に対して Hahn-Banach (cf. (i), (ii)) を適用すれば良い。(iv) (**$\neq 0$ な局所凸空間の双対空間は $\neq 0$ であること**) を示すには、閉部分空間 $\mathbb{K}(u - v) \subset X$ 上の線形写像 $\mathbb{K}(u - v) \to \mathbb{K}, a(u - v) \mapsto a$ をノルムを保ったまま全体に拡張 (cf. (iii)) すれば良い。(v) を示すには、$\|v\| \neq 0$ としてから、閉部分空間 $\mathbb{K}v \subset X$ 上の線形写像 $\mathbb{K}v \to \mathbb{K}, av \mapsto a$ をノルムを保ったまま全体に拡張 (cf. (iii)) すれば良い。(vi) は (v) より従う。以上で全ての主張の証明を完了する。

Lemma 1.13 (局所コンパクト性)**.**

(i) E をノルム空間、$F \subsetneq E$ を閉部分空間とする。このとき、$\|v\| = 1, \|v + F\| > 1/2$ となる $v \in E \setminus F$ が存在する。

(ii) 局所コンパクトなノルム空間は有限次元である。

Proof. (i) を示す。$v \in \partial B_1 \cap (E \setminus F)$ を一つとる。F は閉、$v \notin F$ なので、$d :\overset{\text{def}}{=} \|v + F\| > 0$ である。$d = \|v + F\|$ の定義より、$\exists w \in F, \|v - w\| < d + d = 2d$ である。$v' :\overset{\text{def}}{=} \|v - w\|^{-1}(v - w) \in \partial B_1 \cap (E \setminus V)$ とおく。任意の $w' \in V$ に対して

$$\|v' - w'\| = \|v - w\|^{-1}\|v - (w + \|v - w\|w')\| > d/2d = 1/2$$

が成り立つので、$\|v' + F\| \geq 1/2$ となる。以上で (i) の証明を完了する。

(ii) を示す。E を局所コンパクトなノルム空間とする。このとき、単位閉球 $\bar{B}_1$ はコンパクトであるので、$a_1, \cdots, a_r \in \bar{B}_1$ が存在して $\bar{B}_1 \subset \bigcup(a_i + B_{1/2})$ となる。$F :\overset{\text{def}}{=} \sum a_i \mathbb{K} \subset E$ と置く。もし $E \setminus F \neq \varnothing$ なら、(i) より、$\|v + F\| \geq 1/2$ となる $v \in \partial B_1 \cap (E \setminus F)$ が存在するが、$v \in \partial B_1 \subset \bar{B}_1$ であるから $v \in a_i + B_{1/2}, (\exists i)$、すなわち $\|v + F\| \leq \|v - a_i\| < 1/2$ が成り立ち、矛盾する。よって $E = F$ であり、E は有限次元となる。以上で (ii) の証明を完了する。

1.3 Banach 空間の基本的な性質

Theorem 1.14. Baire 範疇性：cf. Proposition 付録 A.1.

(i) (**一様有界性**, Banach-Steinhaus). X を Banach 空間、Y をノルム空間とし、Φ を有界線型写像 $X \to Y$ からなる集合とする。任意の $x \in X$ に対して $\{\|Ax\| | A \in \Phi\}$ は有界 (つまり $\forall x \in X, \sup\{\|Ax\| | x \in X\} < \infty$) であるとする。このとき $\{\|A\| | A \in \Phi\}$ は有界 (つまり $\sup\{\|A\| | A \in \Phi\} < \infty$) である。

(ii) (**開写像定理**). $f : X \to Y$ を Banach 空間の間の**全射な**有界作用素とすると、f は開写像である。

(iii) (**閉グラフ定理**). $f : X \to Y$ を Banach 空間の間の閉作用素とすると、f は連続写像 (つまり、有界作用素) である。

Proof. (i) (**一様有界性**) は Baire 範疇性を用いることで証明できる。$n \in \mathbb{N}$ に対して、ボールの逆像の共通部分を $X_n :\overset{\text{def}}{=} \bigcap_{A \in \Phi} A^{-1}(B_n^Y)$ とおけば、各 $x \in X$ ごとの有界性から $\bigcup X_n = X$ が従う。よって X の完備性と Baire 範疇性よりある n に対する X_n が内点を持つ。すると X_{2n} は原点のある ε 近傍を含み、$\sup\{\|A\| | A \in \Phi\} \leq 2n/\varepsilon < \infty$ が従う。以上で一様有界性の証明を完了する。

(ii) (**開写像定理**) を示す。$f : X \to Y$ を Banach 空間の間の全射な有界作用素とする。f が開写像であるためには、$\exists r, s > 0, B_s^Y \subset f(B_r^X)$ が成り立つことが十分である。$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n^X = X$ と f の全射性から、$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f(B_n^X) = Y$ が成り立つ。ここで Baire 範疇性より、

$$\exists n \in \mathbb{N}, \exists \eta \in \overline{f(B_n)} = n\overline{f(B_1)}, \exists \delta > 0,\ \eta + B_\delta^Y \subset n\overline{f(B_1^X)}$$

が成り立つ。よって $B_\delta^Y = (\eta + B_\delta^Y) - \eta \subset 2n\overline{f(B_1^X)}$ が成り立つ。$\eta \in B_Y^\delta \cap (2n\overline{f(B_1^X)} \setminus 2nf(B_1^X))$ という点が存在すると仮定する。このとき η 中心で半径 2^{-l} の開球が $2nf(B_1^X) = f(B_{2n}^X)$ と交わるため、また、有界性よりある $M > 0$ が存在して $f(B_1^X) \subset B_M^Y$ となる。もし $B_\delta^Y \not\subset 2nf(B_1^X)$ であるなら、ある $\eta_0 \in \overline{f(B_1^X)} \setminus f(B_1^X)$ が存在して、$\|\eta_0\| < \delta/2n$ が成り立つ。

(iii) (**閉グラフ定理**) を示す。$f : X \to Y$ を閉作用素とする。f のグラフ $\Gamma_f :\overset{\text{def}}{=} \{(x, f(x)) | x \in X\} \subset X \oplus Y$ に積ノルムを入れると、Γ_f はノルム空間である。射影 $\Gamma_f \to X$ は全単射であり、X のグラフノルムに関して等長的なので、仮定より Γ_f は Banach 空間である。すると開写像定理により射影 $\Gamma_f \to X$ は (X のもとのノ

ルムに関して) 同相写像であることが従う。射 $X \to \Gamma_f, x \mapsto (x, f(x))$ は射影の逆射であるから連続であり、従って合成 $X \to \Gamma_f \subset X \oplus Y \to Y$ も連続であるが、これは f に他ならない。以上ですべての主張の証明を完了する。

1.4 Hilbert 空間の基本的な性質

Theorem 1.15. H を Hilbert 空間とする。

(i) (**直交射影分解**). $F \subset H$ を閉部分空間、$v \in H$ を元とするとき、$v = w + u$ となる元 $w \in F, u \in F^\perp$ が一意的に存在する。

(ii) (**直交補空間が 0 でないこと**). 閉部分空間 $F \neq H$ の直交補空間は $F^\perp \neq 0$ である。

(iii) (**完全正規直交系の存在**). H には完全正規直交系が存在する。すなわち、部分集合 $\{v_\lambda | \lambda \in \Lambda\} \subset H$ であって、各 $\lambda, \mu \in \Lambda$ に対して $(v_\lambda, v_\mu) = 0, (\lambda \neq \mu), (v_\lambda, v_\lambda) = 1$ となって、さらに $\{v_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ の生成する閉部分空間が全体であるものが存在する。

(iv) (**Riesz の表現定理**). $f : H \to \mathbb{C}$ を連続線形汎関数とするとき、ある $v \in H$ が存在して $f = (-, v)$ が成り立つ。特に、反線形写像 $H \to H^*, v \mapsto \overline{(-, v)}$ は同型である。

Proof. (i) (**直交射影分解**) を示す。$F \cap F^\perp = 0$ なので一意性は明らかである。$\|v - w_n\| \to \|v + F\|$ となる点列 $w_n \in F$ を取れば、

$$\|w_m - w_n\|^2 = 2\|v - w_n\|^2 + 2\|v - w_m\|^2 - \|2(v - (w_n + w_m)/2)\|^2 \to 0,\ (n, m \to \infty)$$

となるので w_n は Cauchy 列である。F は閉なので $w_n \to \exists w \in F$ であり、よってとくに $\|v + F\| = \|v - w\|$ が成り立つ。$u :\overset{\text{def}}{=} v - w \in F^\perp$ を示す。$w' \in F$ と $a > 0$ を任意にとると

$$\|u\|^2 = \|v + F\|^2 \leq \|v - w - aw'\|^2 = \|u - aw'\|^2 = \|u\|^2 - 2a\mathrm{Re}(u, w') + a^2\|w'\|^2$$

が成り立つので、整理して、$2\mathrm{Re}(u, w') \leq a\|w'\|^2 \to 0, (a \to 0)$, ここで $-w'$ や $\sqrt{-1}w'$ で同じことをすれば $(u, w') = 0$ が従い、$u \in F^\perp$ がわかる。以上で (i) の証明を完了する。

(ii) (**直交補空間が 0 でないこと**) は、(i) を元 $v \in H \setminus F$ に対して適用することで $F^\perp$ に属する $\neq 0$ な元を得るので、これより従う。

(iii) (**完全正規直交系の存在**) を示す。正規直交系の集合全体に包含関係で順序を入れる。て Zorn の補題を適用すると極大な正規直交系 $B \subset H$ を得る。B がもし H を生成しなければ、直交補空間からノルム 1 の元をとることで極大性に矛盾する。よって B は完全正規直交系である。以上で (iii) の証明を完了する。

(iv) (**Riesz の表現定理**) を示す。$f = 0$ なら $v = 0$ と取れば良い。$f \neq 0$ とする。f は連続で $\{0\} \subset \mathbb{C}$ は閉なので $\ker(f) \subset H$ は閉である。$f \neq 0$ なので $\ker(f)^\perp \neq 0$ (cf. (i)) であり、ゆえに $\exists v \in \ker(f)^\perp, f(v) = 1$ となる。任意の元 $u \in H$ を直交射影分解すると、

$$\exists u_0 \in \ker(f), \quad u = u_0 + (u, v)v$$

となる。よって $f(u) = f(u_0) + (u, v)f(v) = (u, v)$ が成り立ち、特に $f = (-, v)$ となる。以上で全ての主張の証明を完了する。

1.5 コンパクト作用素の性質

Proposition 1.16 (**コンパクト作用素の双対はコンパクト**)**.** $A : X \to Y$ を Banach 空間の間の作用素とする。このとき、A がコンパクト作用素であることと $A^* : Y^* \to X^*$ がコンパクト作用素であることは同値である。

Proof. A がコンパクト作用素であるとする。各 $x \in \overline{A(\bar{B}_1^X)}$ に対して、$\{f(Ax) | f \in Y^*, \|f\| = 1\} \subset \{a \in \mathbb{K} | |a| \leq 1\}$ は相対コンパクトであり、A の有界性から $\bar{B}_1^{Y^*}$ は $\overline{A(\bar{B}_1^X)}$ 上の関数の族として同程度連続である。A はコンパクト作用素であるから、$\overline{A(\bar{B}_1^X)}$ はコンパクトで、よって Ascoli-Arzelá (cf. Proposition 付録 A.3) より $\bar{B}_1^{Y^*}$ は $A(\bar{B}_1^X)$ 上の連続関数の空間の中で相対コンパクトである。ゆえに $A^*(\bar{B}_1^{Y^*})$ は $\bar{B}_1^X$ 上の連続関数の空間 (これは X^* を含む) の中で相対コンパクトであり、特に X^* の中で相対コンパクトである。以上より A^* はコンパクト作用素である。

A^* がコンパクト作用素であるとすると、$A^{**} : X^{**} \to Y^{**}$ はコンパクト作用素であるから、その制限 $A = A^{**}|_X : X \to Y$ もコンパクト作用素である。以上で証明を完了する。

Proposition 1.17 (id **とコンパクト作用素の差**)**.** X を Banach 空間、$A : X \to X$ をコンパクト作用素とする。

(i) $1 - (1 - A)^k$ は任意の k に対してコンパクト作用素である。
(ii) $\ker(1 - A)^k$ は任意の k に対して有限次元である。
(iii) $\mathrm{coker}(1 - A)^k$ は任意の k に対して有限次元である。
(iv) $\ker(1 - A)^k = \ker(1 - A)^{k+1} = \cdots, (k \gg 0)$ である。このような k のうち最小のものを k_0 とする。
(v) $k \geq k_0$ に対して $\ker(1 - A)^k \cap \mathrm{Im}(1 - A)^k = 0$ が成り立つ。
(vi) $k \geq k_0$ に対して $\mathrm{Im}(1 - A)^k = \mathrm{Im}(1 - A)^{k+1} = \cdots$ となる。
(vii) $k \geq k_0$ に対して $\ker(1 - A)^k \oplus \mathrm{Im}(1 - A)^k \xrightarrow{\sim} X$ (線形位相空間の同型) となる。
(viii) $\mathrm{Im}(1 - A)^k \subset X$ は任意の k に対して閉部分空間である。
(ix) $k \geq k_0$ に対して $(1 - A)|_{\mathrm{Im}(1-A)^k} : \mathrm{Im}(1 - A)^k \xrightarrow{\sim} \mathrm{Im}(1 - A)^{k+1} = \mathrm{Im}(1 - A)^k$ は位相線形空間の同型である。

とくに $1 - A$ は Fredholm 作用素である。

Proof. $A_k :\overset{\text{def}}{=} 1 - (1 - A)^k, N_k :\overset{\text{def}}{=} \ker(1 - A_k), F_k :\overset{\text{def}}{=} \mathrm{Im}(1 - A_k)$ と置く。$N_k \subset N_{k+1} \subset \cdots$ であり、$F_k \supset F_{k+1} \supset \cdots$ である。

(i) を示すには $1 - A_k = 1 - (1 - A)^k = A \circ (\cdots)$ と整理すれば良い (cf. Remark 1.10)。

(ii) を示す。$(1 - A_k)(N_k) = 0$ なので $A_k(N_k) = N_k$ であり、とくに $A(\bar{B}_k^{N_k}) = \bar{B}_k^{N_k}$ となる。(i) より、$A(\bar{B}_k^{N_k}) = \bar{B}_k^{N_k}$ はコンパクトである。よって N_k は局所コンパクトとなり、有限次元 (cf. Lemma 1.13 (ii)) である。以上で (ii) の証明を完了する。

(iii) はコンパクト作用素 $(1 - A_k)^* : X^* \to X^*$ (cf. Proposition 1.16) に対して (ii) を用いることでただちに従う。

(iv) を示す。すべての k で $N_{k-1} \neq N_k$ となるとする。Lemma 1.13 (i) より、$\|v_k\| = 1, \|v_k + N_k\| \geq 1/2$ となる $v_k \in N_k \setminus N_{k-1}$ が存在する。また、N_k の定義より $(1 - A)v_k \in N_{k-1}$ が成り立つので、よって $k > l$

に対して $-v_l + (1-A)v_k + (1-A)v_l \in N_{k-1}$ が成り立ち、

$$\|A(v_k - v_l)\| = \|v_k + (-v_l - (1-A)v_k + (1-A)v_l)\| \geq 1/2$$

が従う。よって Av_k は Cauchy 列ではないため収束せず、A がコンパクト作用素であることに反する。以上で (iv) の証明を完了する。

(v) を示す。$v \in N_k \cap F_k$ をとれば、$v \in F_k$ より、$u \in X$ があって $(1-A)^k u = v$ となる。$v \in N_k$ より $u \in N_{2k} = N_k$ が成り立つので、$v = (1-A)^k u = 0$ が成り立つ。以上より $N_k \cap F_k = 0$ である。

(vi) を示す。(iv) と同様にして、$F_l = F_{l+1} = \cdots$ となる l の存在がわかる。そのような l のうち最小のものを l_0 とする。$F_{l_0} = F_{l_0+1} = \cdots$ となる。$l_0 \leq k_0$ を示せば良い。$l_0 > k_0$ と仮定する。$v \in F_{l_0-1} \setminus F_{l_0} \subset F_{k_0}$ に対し、$(1-A)v \in F_{l_0} = (1-A)(F_{l_0})$ なので、$(1-A)u = (1-A)v$ となる $u \in F_{l_0}$ が存在する。このとき $(1-A)(u-v) = 0, u-v \neq 0, u-v \in F_{l_0-1}$ となる。とくに $u - v \in N_1 \subset N_{l_0-1}$ なので $u - v \in N_{l_0-1} \cap F_{l_0-1} = 0$ となる。これは矛盾。よって $l_0 \leq k_0$ である。以上で (vi) の証明を完了する。

(vii) を示す。$v \in X$ を任意にとる。$(1-A)^k v \in F_k = F_{2k} = (1-A)^k(F_k)$ なので $\exists u \in F_k, (1-A)^k v = (1-A)^k u$ となる。ここで $v - u \in N_k$ なので、$v = u + (v-u) \in F_k + N_k$ となる。よって (v) より線型空間として $X \cong F_k \oplus N_k$ となる。N_k は有限次元なので、これは線形位相空間としての同型となる。以上で (vii) の証明を完了する。

(viii) を示す。$k \geq k_0, l \geq 1$ とする。$N_k \cong X/F_k$ は有限次元なので、部分空間 $F_l/F_{k_0} \subset X/F_k$ は閉であり、その逆像 $F_l \subset X$ も閉である。以上で (viii) の証明を完了する。

(ix) は $(1-A)^k|_{\mathrm{Im}(1-A)^k}$ が連続全単射であること (cf. (v)) と開写像定理 (cf. Theorem 1.14 (ii)) より従う。以上ですべての主張の証明を完了する。

Remark 1.18. 上の証明では、(iii) と (ix) 以外は完備性を用いていない。

Remark 1.19. $A|_{\ker(1-A)^k}$ は $\ker(1-A)^k$ に値を持ち、$A|_{\mathrm{Im}(1-A)^k}$ は $\mathrm{Im}(1-A)^k$ に値を持つ。

Remark 1.20. $1-A$ が単射なら、任意の k で $\ker(1-A)^k = 0$ であるので、(vii) より $1-A$ は全射となる。

1.6 スペクトル、Fredholm Alternative

Definition 1.21 (スペクトル)**.** $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ とする。$A : X \to X$ をノルム空間上の有界作用素とする。$z \in \mathbb{C}$ に対して z-倍写像 $X \to X$ をたんに z で表す。

- $\mathrm{Resol}(A) :\stackrel{\mathrm{def}}{=} \{z \in \mathbb{C} | z - A$ は全単射で、$(z-A)^{-1}$ は有界作用素 $\} \subset \mathbb{C}$ を A の**レゾルベント集合**と言い、$R_A(z) :\stackrel{\mathrm{def}}{=} (z-A)^{-1}$ を**レゾルベント**という。
- $\mathrm{Sp}(A) :\stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathbb{C} \setminus \mathrm{Resol}(A)$ を A の**スペクトル**という。
- $z - A$ が全単射でないとき、z を A の**固有値**という。
- $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{C}$ が相対位相で離散であるとき、A は**離散スペクトルを持つ**という。

A がコンパクト作用素であれば、$z \neq 0$ に対して $z^{-1}A$ もコンパクト作用素である。従って、Proposition 1.17 (iv) より、ある k が存在して

$$V_z :\stackrel{\mathrm{def}}{=} \ker(z-A)^k = \ker(1 - z^{-1}A)^k = \ker(1 - z^{-1}A)^{k+1} = \cdots$$

が成り立つ (一般固有空間)。$(z-A)|_{V_z}^k = 0$ となる最小の値を n_z と書く。$F_z :\overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Im}(1-z^{-1}A)^{n_z} \subset X$ と置く。

Remark 1.22. 定義より、**固有値はスペクトルの元**である。

Remark 1.23. $A : X \to X$ がコンパクト作用素で $0 \in \mathrm{Resol}(A)$ と仮定する。このとき A は同相となる。よって単位球の像 (A はコンパクト作用素なのでこれはコンパクト) が 0 の近傍となり、X は局所コンパクトである。よって X は有限次元 (cf. Lemma 1.13 (ii)) となる。対偶を取れば、X が無限次元なら $0 \in \mathrm{Sp}(A)$ となることが従う。

Remark 1.24. X が Banach 空間で A がコンパクト作用素である場合、もし $0 \neq z \in \mathbb{C}$ が固有値でなければ、Remark 1.20より $1 - z^{-1}A = z^{-1}(z-A)$ は同相である。従って $z \in \mathrm{Resol}(A)$ となる。特に、X が無限次元であれば、**コンパクト作用素のスペクトルは 0 と固有値からなる**。一般には、固有値とならないスペクトルの元が存在する。

Remark 1.25 (**一般固有空間はたがいにバラバラ**)**.** $A : X \to X$ がコンパクト作用素であれば、$z \in \mathrm{Sp}(A) \setminus \{0\}$ に対し、$\dim V_z < \infty$ である (cf. Proposition 1.17 (ii))。よって、V_z の定義より、任意の $z' \neq z$ に対して $z' - A$ は V_z 上で可逆である。

さらに $z \neq z' \in \mathrm{Sp}(A)$ とする。$v \in V_{z'}$ を $v = w + w', (w \in V_z, w' \in F_z)$ と分解すると、

$$0 = (z'-A)^{n_{z'}}v = (z'-A)^{n_{z'}}w + (z'-A)^{n_{z'}}w', \quad (z'-A)^{n_{z'}}w \in V_z, \ (z'-A)^{n_{z'}}w' \in F_z$$

より $(z'-A)^{n_{z'}}w = 0$ がわかり、$w = 0$ が従う。特に、$V_{z'} \subset F_z$ となる。

Remark 1.26 (**レゾルベントは無限遠で 0 に収束**)**.** $z \in \mathrm{Resol}(A)$ に対し、

$$\|(z-A)^{-1}\| \leq |z|^{-1} \cdot \|1-(z^{-1}A)\|^{-1} \to 0, \ (|z| \to \infty)$$

となるので、特にノルム空間 $\mathrm{Hom}(X,X)$ の元として $R_A(z) \to 0, (|z| \to \infty)$ となる。

Remark 1.27 (**レゾルベント方程式**)**.** $z_1, z_2 \in \mathrm{Resol}(A)$ に対して

$$R_A(z_1) - R_A(z_2) = (z_2 - z_1)R_A(z_1)R_A(z_2) = (z_2 - z_1)R_A(z_2)R_A(z_1)$$

が成り立つ。この方程式を**レゾルベント方程式**と呼ぶ。実際、任意の $v \in X$ に対して、

$$\begin{aligned}
(R_A(z_1) - R_A(z_2))v &= ((z_1-A)^{-1} - (z_2-A)^{-1})v \\
&= (1 - (z_2-A)^{-1}(z_1-A))(z_1-A)^{-1}v \\
&= ((z_2-A) - (z_1-A))(z_2-A)^{-1}(z_1-A)^{-1}v \\
&= (z_2-z_1)(z_2-A)^{-1}(z_1-A)^{-1}v
\end{aligned}$$

となる。同様にして左側に寄せていけばもう一つの等式も従う。レゾルベント方程式より、$\mathrm{Hom}(X,X)$ に値を持つ関数 $R_A : \mathrm{Resol}(A) \to \mathrm{Hom}(X,X)$ は**連続**であるだけでなく**微分可能**であり、その導関数は $-R_A(z)^2$ であることが従う。

Proposition 1.28. X をノルム空間、$A : X \to X$ を有界作用素とする。

(i) (**スペクトルは空でない有界閉集合**). $\mathrm{Sp}(A)$ は空でない有界閉集合である。

(ii) (**コンパクト作用素のスペクトルは** 0 **以外孤立点**). X が Banach 空間、A がコンパクト作用素であるとき、0 以外の点 $a \in \mathrm{Sp}(A)$ は孤立点である。とくに、$\mathrm{Sp}(A)$ は可算集合である。

(iii) (**レゾルベントの極の位数**). X が Banach 空間、A がコンパクト作用素であるとき、0 以外の点 $a \in \mathrm{Sp}(A)$ での $R_A(z)$ の位数は $n_a + 1$ である。

Proof. (i) (**スペクトルは空でない有界閉集合**であること) を示す。まずスペクトルが有界集合であることを示す。$z \in \mathbb{C}, \|A\| < |z|$ とする。X の完備性より、$1 + (1/z)A + (1/z^2)A^2 + \cdots$ は有界作用素 $X \to X$ となる。また

$$(z - A) \circ \frac{1}{z}\left(1 + \frac{1}{z}A + \frac{1}{z^2}A^2 + \cdots\right) = \mathrm{id}_Z$$

となるので $z - A$ は全単射である。よって $\{|z| > \|A\|\} \subset \mathrm{Resol}(A)$、すなわち、$\mathrm{Sp}(A) \subset \{\|z\| \leq \|A\|\}$ となる。以上でスペクトルの有界性が示された。

次にスペクトルが閉であることを示す。$a \in \mathrm{Resol}(A), z \in \mathbb{C}$ に対して、$w :\overset{\mathrm{def}}{=} a - z, B :\overset{\mathrm{def}}{=} (a - A)^{-1}$ とおく。$\|w\| < \|B^{-1}\|^{-1}$ であれば、$1 + wB^{-1} + w^2B^{-2} + \cdots$ は有界作用素 $X \to X$ となる。$z - A = (a - A)(1 - wB)$ なので、従って $z \in \mathrm{Resol}(A)$ となる。以上より、レゾルベント集合は開であり、スペクトルは閉であることが示された。

最後にスペクトルが $\varnothing$ でないことを示す。$\mathrm{Resol}(A) = \mathbb{C}$ と仮定する。$0 \neq v \in X$ をとる。任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して $z - A$ は全単射であるから $R_A(z)v \neq 0$ となる。よってある $z \in \mathbb{C}$ に対して、$\exists f \in X^*, f(R_A(z)v) \neq 0$ となる。関数 $z \mapsto f(R_A(z)v)$ は正則 (cf. Remark 1.27) であるから、Liouville の定理より $f(R_A(z)v)$ は定数関数となるが、これは $R_A(z)$ は無限遠点で 0 に収束 (cf. Remark 1.26) するので、任意の z で $f(R_A(z)v) = 0$ となる。これは f の取り方に反する。よって $\mathrm{Resol}(A) \neq \mathbb{C}$ であり、とくに $\mathrm{Sp}(A) \neq \varnothing$ となる。以上で (i) の証明を完了する。

(ii) (**コンパクト作用素のスペクトルは** 0 **以外孤立点**であること) を示す。$0 \neq a \in \mathrm{Sp}(A)$ を任意にとる。まず、V_a の有限次元性 (cf. Proposition 1.17 (ii)) より、任意の $z \neq a$ に対して $z - A$ は V_a 上で可逆である。$a - A$ は F_a 上で同相 (cf. Proposition 1.17 (ix)) なので、$(a - A)|_{F_a}^{-1}$ は F_a 上の有界作用素である。$c :\overset{\mathrm{def}}{=} \min\{\|(a - A)|_{F_a}^{-1}\|^{-1}, |a|\} > 0$ と置く。$0 < |z - a| < c$ とする。このとき $z \neq 0$ であり、さらに任意の $0 \neq v \in F_a$ に対して

$$|z - a|\|v\| < c\|v\| \leq \|(a - A)|_{F_a}^{-1}\|^{-1}\|v\| \leq \|(a - A)v\|$$

が成り立つ。よって

$$|(z - A)v| = |(z - a)v + (a - A)v| \geq ||z - a|\|v\| - \|(a - A)v\|| > 0$$

がわかり $z - A : F_a \to F_a$ は単射、Remark 1.20より同相となる。特に $\{|a - z| < c\} \cap \mathrm{Sp}(A) = \{a\}$ となって a は孤立点である。以上で (ii) の証明を完了する。

最後に (iii) (**レゾルベントの極の位数**が n_a であること) を示す。a のまわり半径 c の範囲では

$$\begin{aligned}
R_A(z) &= (z - A)|_{V_a}^{-1} + (z - A)|_{F_a}^{-1} \\
&= (z - a)^{-1}(1 + (z - a)^{-1}(a - A)|_{V_a})^{-1} + (z - A)|_{F_a}^{-1} \\
&= \sum_{n \geq 0} (z - a)^{-n-1}(a - A)|_{V_a}^{n} + (z - A)|_{F_a}^{-1}
\end{aligned}$$

と展開できるが、ここで $(a - A)|_{V_a}^{n} = 0, (n \geq n_a)$ であるから、このローラン級数展開は $-n_a - 1$ からスタートする。特に、極の位数は $n_a + 1$ である。以上ですべての証明を完了する。

Corollary 1.29 (Hilbert 空間上のコンパクト作用素のスペクトル)**.** X を Hilbert 空間、$A: X \to X$ をコンパクト作用素とする。$A^*: X \to X$ を共役作用素とする。

(i) $\mathrm{Sp}(A^*) = \{\bar{z} | z \in \mathrm{Sp}(A)\}$ である。とくに A が自己共役作用素であれば、$\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}$ となる。

(ii) (**Fredholm Alternative**). 任意の $0 \neq z \in \mathrm{Sp}(A)$ に対し、

$$\mathrm{Im}((z-A)^*) \oplus \ker(z-A) \xrightarrow{\sim} X$$

が直交分解を与える。特に、A が自己共役作用素であれば、任意の $0 \neq z \in \mathrm{Sp}(A)$ に対し、

$$\mathrm{Im}(z-A) \oplus \ker(z-A) \xrightarrow{\sim} X$$

が直交分解を与える。

Remark 1.30. Fredholm Alternative を口語的に言い換えると、次のようになる：X を Hilbert 空間、A を X 上の自己共役作用素、$v \in X$、$0 \neq z \in \mathrm{Sp}(A)$ とする。このとき次は同値である：

- 方程式 $(z-A)u = v$ は解 $u \in X$ を持つ。
- v は $\ker(z-A)$ と直交する。

$z \in \mathrm{Resol}(A)$ である場合、$z - A$ は同相なので、方程式 $(z-A)u = v$ はいつでもただ一つの解を持つ。

Proof. $(z-A)^* = \bar{z} - A^*$ より、$z \in \mathrm{Sp}(A) \setminus \{0\} \iff z$ が A の固有値 $\iff \bar{z}$ が A^* の固有値 $\iff \bar{z} \in \mathrm{Sp}(A^*) \setminus \{0\}$ となり (i) が従う。

(ii) を示す。任意の $v \in X, w \in \ker(z-A)$ に対して $((z-A)^*v, w) = (v, (z-A)w) = 0$ となるので、$\mathrm{Im}((z-A)^*) \perp \ker(z-A)$ が成り立つ。よって、残っているのは、$\dim(z-A) = \dim((z-A)^*)$ を示すことである。A^* の固有値 $\bar{z}$ に対する一般固有空間を $V_{\bar{z}}(A^*)$ として、$W_{\bar{z}}(A^*) :\stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Im}(\bar{z}-A^*)^k, (k \gg 0)$ と置くと、Proposition 1.17 (ix) より

$$\mathrm{Im}((z-A)^*) = \mathrm{Im}(\bar{z}-A^*) = W_{\bar{z}}(A^*) \oplus (\bar{z}-A^*)(V_{\bar{z}}(A^*))$$

となる。$\mathrm{Im}((z-A)^*) \perp \ker(z-A)$ より、特に、$\dim(z-A) \leq \dim(\bar{z}-A^*)$ が成り立つ。A^* で同じことをすると $\dim(\bar{z}-A^*) \leq \dim(\bar{\bar{z}}-A^{**}) = \dim(z-A)$ となって $\dim(z-A) = \dim(\bar{z}-A^*)$ が従う。以上で証明を完了する。

2 関数空間

多様体 M は位相空間であるから、開集合系を含む最小の σ-加法族をとることで可測空間とみなせる (以後、位相空間はしばしばこの操作によって可測空間とみなされる)。リーマン計量 g が付随していれば、体積要素 vol_g を用いて定義関数を積分をすることで M 上に測度が定義される (実際には、開集合や閉集合上の定義関数を C^∞ 関数で一様に近似して積分を実行し、こうして得られた部分的な測度をすべての可測集合上に拡張する)。この測度を μ_g で表す。

2.1 各種ノルムの基本的な性質

Remark 2.1. (M, g) を向きづけ可能なリーマン多様体、E をその上の複素ベクトル束、h を E 上のエルミート計量として、μ_g を自然な測度とする。可測関数としての $E \to M$ の右逆元 $s: M \to E$ のことを単に**可**

測 section と言うことにする。可測 section のなす線形空間を $\mathcal{L}(E)$ で表す。$\mathcal{L}(E)$ 上に計量 h を延長でき、$h : \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(M)$ となる。ここで $\mathcal{L}(M)$ は M 上の可測関数のなす環である。

Definition 2.2 (L^p-空間)**.** $1 \le p \le \infty$、(M, g) を向きづけ可能なリーマン多様体、E をその上の複素ベクトル束、h を E 上のエルミート計量として、μ_g を自然な測度とする。可測 section $s : M \to E$ (可測関数であって $E \to M$ の右逆元になっている関数) に対して、

$$\|s\|_{L^p(E)} :\overset{\text{def}}{=} \left(\int_M h(s,s)^{p/2} d\mu_g\right)^{1/p}, \qquad (p \neq \infty),$$
$$\|s\|_{L^\infty(E)} :\overset{\text{def}}{=} \inf\{C \ge 0 | \|h(s,s)\| \le C, (a.e.)\}, \qquad (p = \infty),$$

と置く。これを L^p**-ノルム**と言う。

$$\mathcal{L}^p(E) :\overset{\text{def}}{=} \left\{s : M \to E \middle| \|s\|_p < \infty \text{ となる可測 section}\right\},$$
$$L^p(E) :\overset{\text{def}}{=} \mathcal{L}^p(E)/(\| - \|_{L^p} = 0),$$

と定める。ペア $(L^p(E), \| - \|_{L^p})$ を L^p**-空間**と言う。$L^p(M) :\overset{\text{def}}{=} L^p(M \times \mathbb{C})$ と書く。定義より、$\|s\|_{L^p(E)} = \|h(s,s)\|_{L^p(M)}$ が成り立つ。

$p = 2$ とする。

$$(s,t)_{L^2(E)} :\overset{\text{def}}{=} \int_M h(s,t) d\mu$$

と定義し、これを L^2-内積と言う。定義より、$\|s\|_{L^2(E)} = \sqrt{(s,s)_{L^2(E)}}$ が成り立つ。

Remark 2.3. $L^p(E)$ の元は実際には $\mathcal{L}^p(E)$ の元であるかのように扱うが、実際には代表元の取り方はほとんど至るところ 0 な関数を除いて一意的なので、問題は生じない。

Lemma 2.4. Definition 2.2の状況設定のもとで以下の主張が成り立つ：

(i) **(Schwarz の不等式)**. $s, t \in L^2(E)$ に対して、$|(s,t)_{L^2(E)}| \le \|s\|_{L^2(E)} \|t\|_{L^2(E)}$ が成り立つ。特に、$L^2(E)$ ノルムはノルムである。

(ii) $L^2(E)$ は Hilbert 空間である。

(iii) **(Hölder の不等式)**. $p, q, r \ge 1$ は $1/p + 1/q = 1/r$ を満たす実数であるとする。このとき、任意の $f \in \mathcal{L}^p(M), g \in \mathcal{L}^q(M)$ に対し $\|fg\|_{L^r} \le \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$ が成り立つ。特に、$st \in \mathcal{L}^r(E)$ である。

(iv) 任意の $1 \le p \le \infty$ に対して $(L^p(E), \| - \|_{L^p}$ は Banach 空間である。

Proof. (i) を示す。まず適当に $e^{i\theta}$ 倍を施すことによって $(s,t)_{L^2(E)} \in \mathbb{R}$ であると仮定して良い。次に任意の実数 $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して

$$0 \le \|\lambda s + t\|^2_{L^2(E)} = \int_M h(\lambda s + t, \lambda s + t) d\mu = \lambda^2 \|s\|^2_{L^2(E)} + 2\lambda (s,t)_{L^2(E)} + \|t\|^2_{L^2(E)}$$

が成り立つので、これを λ に関する二次関数と見ると、判別式 $= \|s\|^2_{L^2(E)} \|t\|^2_{L^2(E)} - (s,t)^2_{L^2(E)} \ge 0$ となる。以上で (i) の証明を完了する。

(ii) を示す。$L^2(E)$ ノルムに関して $s_n \to s, t_n \to t$ であるとすると、

$$|(s_n,t_n)_{L^2(E)} - (s,t)_{L^2(E)}| = |(s_n - s, t_n)_{L^2(E)} + (s, t_n - t)_{L^2(E)}| \le \|s_n - s\|_{L^2(E)} \|t_n\|_{L^2(E)} + \|s\|_{L^2(E)} \|t_n - t\|_{L^2(E)} \to 0, \ (n \to$$

となるので $(s_n, t_n)_{L^2(E)} \to (s,t)_{L^2(E)}$ が成り立つ。以上で (ii) の証明を完了する。

(iii) を示す。$a :\overset{\text{def}}{=} \|s\|_{L^p} \neq 0, b :\overset{\text{def}}{=} \|t\|_{L^q} \neq 0$ と置く。もし a,b のうちの一方が 0 なら、s,t のうちの一方はほとんど至る所で 0 であるため、$st = 0, (a.e.)$ となる。よって $a,b > 0$ として良い。

log は上に凸なので、任意の $x,y > 0$ に対して $\log(rx^p/p + ry^q/q) \geq (r/p)\log x^p + (r/q)\log y^q = \log(xy)^r$ が成り立つ。log は単調増加なので、よって $x^p/p + y^q/q \geq (xy)^r/r$ が成り立つ。従って、

$$\int_M \left|\frac{fg}{ab}\right|^r d\mu_g \leq \int_M \frac{r}{p}\left|\frac{f}{a}\right|^p d\mu_g + \int_M \frac{r}{q}\left|\frac{g}{b}\right|^q d\mu_g = \frac{r}{p} + \frac{r}{q} = 1$$

が成り立つ。整理すると、$\|fg\|_{L^r(M)} \leq ab = \|f\|_{L^p(M)}\|g\|_{L^q(M)}$ が従う。以上で (iii) の証明を完了する。

(iv) を示す。まず $c \in \mathbb{R}$ (または $\in \mathbb{C}$) と $s \in \mathcal{L}^p(E)$ に対して $\|cs\|_{L^p(E)} = |c|\|s\|_{L^p(E)}$ が成り立つので $cs \in \mathcal{L}^p(E)$ である。次に $s,t \in \mathcal{L}^p(E)$ に対して、関数 $(-)^p$ の凸性、$\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}, (\forall a,b \geq 0)$、より、

$$\begin{aligned}
\|s+t\|_{L^p(E)}^p &= \left(\int_M (\sqrt{h(s,s) + 2\Re h(s,t) + h(t,t)})^p d\mu_g\right)^{1/p} \\
&\underset{\bigstar}{\leq} \left(\int_M \sqrt{4^{-p+1}(h(s,s)^p + 2(\Re h(s,t))^p + h(t,t)^p)} d\mu_g\right)^{1/p} \\
&\leq 2^{-1+1/p}\left(\int_M \sqrt{h(s,s)^p + 2|h(s,t)|^p + h(t,t)^p} d\mu_g\right)^{1/p} \\
&\underset{\spadesuit}{\leq} 2^{-1+1/p}\left(\int_M \sqrt{h(s,s)}^p d\mu_g + \int_M \sqrt{2|h(s,t)|^p} d\mu_g + \int_M \sqrt{h(t,t)}^p d\mu_g\right)^{1/p} \\
&\underset{\clubsuit}{\leq} 2^{-1+1/p}\left(\|s\|_{L^p(E)}^p + \|t\|_{L^p(E)}^p + \int_M \sqrt{2|h(s,t)|^p} d\mu_g\right)^{1/p}
\end{aligned}$$

$2^{p-1}(\|s\|_{L^p(E)}^p + \|t\|_{L^p(E)}^p) < \infty$

が成り立つ。ただしここで $\bigstar$ の箇所で関数 x^p) の凸性を使い、$\spadesuit$ の箇所で不等式 $\sqrt{\sum a_i} \leq \sum \sqrt{a_i}, (\forall a_i \geq 0)$ を使い、$\clubsuit$ の箇所で Schwart の不等式を使い、が成り立ち、$s+t \in \mathcal{L}^p(E)$ となる。次に、任意の $s,t \in \mathcal{L}^p(E)$ に対して、Hölder の不等式より、

$$\begin{aligned}
\|s+t\|_{L^p(E)}^p &= \|h(s+t,s+t)^{1/p} h(s+t,s+t)^{(p-1)/p}\|_{L^p(M)}^p \\
&\leq \|h(s+t,s+t)^{1/p}\|_{L^p(M)}^p \int_M |s+t| \qquad\qquad \leq
\end{aligned}$$

Remark 2.5. 合成 $\Gamma(M,E) \xhookrightarrow{\subset} \mathcal{L}^p(E) \to L^p(E)$ は単射である。それは、連続で $\neq 0$ な切断 $s : M \to E$ はある点 $x \in M$ の近傍上でつねに $s \neq 0$ であるので、$h(s,s)$ の積分は正となる。実際には、軟化することによって、$\Gamma(M,E) \subset L^p(E)$ は稠密部分集合であることが示される。とくに、$L^p(E)$ は $\Gamma(E)$ の L^p-ノルムによる完備化と自然に同型である。

Definition 2.6 (弱微分)**.** (M,g) をリーマン多様体 (複素の場合は Kähler)、(E,h) を計量ベクトル束 (複素の場合はエルミート)、∇ を h と可換な E 上の接続とする。p 乗可積分な可測切断 $s \in L^p(E)$ とベクトル場 $X \in \Gamma(TM)$ に対し、s の X-方向の**偏弱微分** $\nabla_X s$ とは、p 乗可積分な可測切断 $\nabla_X s \in L^p(E)$ であって、任意の C^∞-級切断 $t \in \Gamma(E)$ に対して

$$\int_M h(\nabla_X s, t) d\mu + \int_M h(s, \nabla_X t) d\mu = 0$$

が成り立つことを言う。任意のベクトル場 $X \in \Gamma(TM)$ に対して偏弱微分が存在するとき、**弱微分可能**と言う。k 階弱微分可能であり、さらにすべての k-階偏弱微分が p 乗可積分である可測切断全体を $W^{k,p}(E)$ で表す。

k 個のベクトル場の組 $\mathbf{X} :\overset{\text{def}}{=} (X_1, \cdots, X_k)$ と $s \in W^{k,p}(E)$ に対して、次の記号を用いる：

$$[\mathbf{X}] :\overset{\text{def}}{=} k, \quad \|\mathbf{X}\|_p :\overset{\text{def}}{=} \frac{1}{[\mathbf{X}]}\sum \|X_i\|_p, \quad \nabla_{\mathbf{X}} :\overset{\text{def}}{=} \nabla_{X_1}\cdots\nabla_{X_k}, \quad \mathbf{X}_i :\overset{\text{def}}{=} (X_1, \cdots, X_i).$$

そして $\|s\|_{W^{k,p}} :\overset{\text{def}}{=} \sup_{[\mathbf{X}]=k, X_i\neq 0}\sum_{i=0}^{k}\frac{\|\nabla_{\mathbf{X}_i}s\|_p}{\|\mathbf{X}_i\|_p}$, と定義する。ノルム空間 $(W^{k,p}(E), \|-\|_{W^{k,p}})$ を **Sobolev 空間**と言う。

Remark 2.7. s が C^∞-級の切断であれば、∇ が計量 E と可換であることから、

$$h(\nabla_X s, t) + h(s, \nabla_X t) = X(h(s,t))$$

が成り立つ。体積形式 $d\mu$ と外積すると、右辺は $=0$ である。従って、

$$\int_M h(\nabla_X s, t)d\mu + \int_M h(s, \nabla_X t)d\mu = 0$$

が成り立つ。以上より、通常の共変微分 $\nabla_X s$ は弱微分である。

Remark 2.8. Sobolev 空間は Banach 空間である。

Definition 2.9 (Hölder ノルム)**.** (M,g) をリーマン多様体 (複素の場合は Kähler)、(E,h) を計量ベクトル束 (複素の場合はエルミート)、∇ を h と可換な E 上の接続、$\varepsilon > 0$ を正の実数とする。

$$\|s\|_{C^{k,\varepsilon}} :\overset{\text{def}}{=} \sup_{[\mathbf{X}]=k, X_i\neq 0}\left(\sum_{i=0}^{k}\sup_{x\in M}\frac{|(\nabla_{\mathbf{X}_i}s)(x)|}{\|\mathbf{X}_i\|_{L^2}} + \sup_{x,y\in M, x\neq y}\frac{|(\nabla_{\mathbf{X}}s)(x) - (\nabla_{\mathbf{X}}s)(y)|}{|x-y|^\varepsilon\|\mathbf{X}\|_{L^2}}\right)$$

を階数 k 指数 ε の **Hölder ノルム**と言う。

2.2 軟化

Lemma 2.10. $p \in L^1(\mathbb{R}^N), f \in L^2(\mathbb{R}^N)$ とする。

$$(p * f)(x) :\overset{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^N} p(x-y)f(y)dy$$

で定義される関数 $p * f$ について、$\|p * f\|_{L^2} \leq \|p\|_{L^1}\|f\|_{L^2}$ が成り立つ。特に、$p * f \in L^2(\mathbb{R}^N)$ が成り立つ。

Proof. $|p(x-y)f(y)|^2 = |p(x-y)||p(x-y)f(y)^2|$ と分解して

$$\begin{aligned}\|p * f\|_{L^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}^N} p(x-y)^2 f(y)^2 dy \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |p(x-y)|dy \times \int_{\mathbb{R}^N} |p(x-y)f(y)^2|dy \\ &\leq \|p\|_{L^1}\int_{\mathbb{R}^N} |p(x-y)f(y)^2|dy\end{aligned}$$

が成り立つ。ここで ✎

2.3 Sobolev 埋め込み

2.4 Rellich の定理

2.5 アプリオリ評価

2.6 正則性 (弱解の微分可能性)

付録 A 位相空間論

Proposition 付録 A.1 (Baire 範疇性)**.** (X,d) を完備距離空間とする。このとき、X は**第二類**である、すなわち、X は疎な部分集合 ($:\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 閉包の内部が空となる部分集合) の可算和とならない。特に、$X=\bigcup X_n$ であれば、ある n が存在して $\overline{X}_n$ が内点を持つ。

Remark 付録 A.2. もし X が離散であれば、疎な部分集合は空集合しかありえない。この場合もやはり Baire 範疇性が成り立っている。

Proof. $X=\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$, X_n は疎、とする。X_n を $\bigcup_{i\leq n}\overline{X}_i$ とみなし、$X_n\subset X_{n+1}\subset\cdots$, X_n は閉かつ疎、として良い。X_n は疎なので $X\setminus X_n$ は稠密開で、とくに $\neq\varnothing$。$x_1\in X\setminus X_1$ をとって、$r_0=\infty$ として、$x_n\in X\setminus X_n$ と $0<r_n<\infty$ を以下のように帰納的にとる：

- $\overline{B}(x_n,r_n)\subset(X\setminus X_n)\cap B(x_{n-1},r_{n-1}/2)$ (ただし B は開球、$\overline{B}$ は閉球)
- $x_{n+1}\in(X\setminus X_{n+1})\cap B(x_n,r_n/2)$ ($X\setminus X_{n+1}$ は稠密なので必ずとれる)

すると $m\geq n$ に対して $r_n\leq r_{n-1}/2\leq\cdots\leq r_1/2^{n-1}$,

$$
\begin{aligned}
d(x_n,x_m)&\leq d(x_n,x_{m-1})+d(x_{m-1},x_m)\\
&\leq d(x_n,x_{m-1})+r_{m-1}/2\\
&\leq\cdots\\
&\leq r_n/2+\cdots+r_{m-1}/2\\
&\leq r_n\leq r_1/2^{n-1}
\end{aligned}
$$

となって (x_n) は Cauchy 列で、ゆえに完備性から $x\in X$ に収束する。さらに $d(x_n,x_m)\leq r_n$ より $x_m\in B(x_n,r_n)$ となって任意の n で $x\in\overline{B}(x_n,r_n)\subset X\setminus X_n$、これは $x\in\bigcap(X\setminus X_n)=X\setminus\bigcup X_n=\varnothing$ を意味し、矛盾である。以上で Baire 範疇性の証明を完了する。 ✎

Proposition 付録 A.3 (Ascoli-Arzelá)**.** (X,d) をコンパクト距離空間、Y を Banach 空間とする。$B\subset C(X,Y)$ を連続写像からなる集合とする。このとき以下は同値である：

(i) $B\subset C(X,Y)$ は相対コンパクト ($:\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 閉包がコンパクト) である。

(ii) 任意の $x\in X$ に対して、以下が成り立つ：
- $\{f(x)|f\in B\}\subset Y$ は相対コンパクトである。
- B は x で同程度連続である。ただし x で**同程度連続**であるとは、以下を満たすことを言う：

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\quad\sup_{f\in B}\sup_{d(x',x)<\delta}\|f(x')-f(x)\|_Y<\varepsilon.$$

(iii) 以下が成り立つ：

- 任意の $x \in X$ に対して $\{f(x) | f \in B\} \subset Y$ は相対コンパクトである。
- B は同程度一様連続である。ただし**同程度一様連続**であるとは、以下を満たすことを言う：

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \quad \sup_{f \in B} \sup_{d(x,y) < \delta} \|f(x) - f(y)\|_Y < \varepsilon.$$

Proof. コンパクト空間上の連続関数が一様連続であることと同様に (ii) $\iff$ (iii) が従う。

(i) $\iff$ (ii) を示す。(i) を仮定する。代入写像 $X \times C(X, Y) \to Y$ は連続であるから、これを $\{x\} \times B$ という相対コンパクトな部分集合へと制限することで、その像 $\{f(x) | f \in B\} \subset Y$ の相対コンパクト性が従う。$\varepsilon > 0$ を任意に固定する。仮定より $B \subset C(X, Y)$ は相対コンパクトなので全有界であり、従ってある有限個の $f_1, \cdots, f_n \in B$ が存在して次を満たす：

$$\forall f \in B, \exists i, \quad \|f - f_i\|_\infty < \varepsilon/3.$$

X のコンパクト性から、各 f_i は一様連続であり、従って各 i に対して次が成り立つ：

$$\exists \delta_i > 0, \forall x, y \in X, \quad d(x, y) < \delta \ \Rightarrow \ \|f_i(x) - f_i(y)\|_Y < \varepsilon/3.$$

i は有限個なので、$\delta :\overset{\text{def}}{=} \min \delta_i$ とすれば、$d(x, y) < \delta \ (\leq \delta_i)$ に対して次が成り立つ：

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(y)\|_Y &\leq \|f(x) - f_i(x)\|_Y + \|f_i(x) - f_i(y)\|_Y + \|f_i(y) - f(y)\|_Y \\ &\leq 2\|f - f_i\|_\infty + \varepsilon/3 < \varepsilon. \end{aligned}$$

以上で同程度連続性が示され、(i) $\Rightarrow$ (ii) の証明を完了する。

(iii) $\iff$ (i) を示す。(iii) を仮定する。(i) が成り立つためには、B が全有界であることが十分である。$\varepsilon > 0$ を任意にとる。B は同程度一様連続なので、次が成り立つ：

$$\forall f \in B, \exists \delta > 0, \quad d(x, y) < \delta \ \Rightarrow \ \|f(x) - f(y)\|_Y < \varepsilon/3.$$

X はコンパクトなので、距離空間としては全有界であり、従ってある $x_1, \cdots, x_r \in X$ が存在して次が成り立つ：

$$\forall x \in X, \exists i, \quad d(x, x_i) < \delta.$$

仮定より、各 i に対して $\{f(x_i) | f \in B\} \subset Y$ は相対コンパクトであり、従って全有界なので、ある有限個の $f_{ij} \in B$ が存在して次が成り立つ：

$$\forall i, \forall f \in B, \exists j, \quad \|f(x_i) - f_{ij}(x_i)\|_Y < \varepsilon/3.$$

$x \in X$ と $f \in B$ を任意にとる。すると、$d(x, x_i) < \delta$ となる $x_i \in X$ と、$\|f(x_i) - f_{ij}(x_i)\|_Y < \varepsilon/3$ となる $f_{ij} \in B$ が存在する。従って、以下が成り立つ：

$$\begin{aligned} \|f(x) - f_{ij}(x)\|_Y &\leq \|f(x) - f(x_i)\|_Y + \|f(x_i) - f_{ij}(x_i)\|_Y + \|f_{ij}(x_i) - f_{ij}(x)\|_Y \\ &< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon. \end{aligned}$$

とくに、任意の $f \in B$ に対してある i, j が存在して $\|f - f_{ij}\|_\infty < \varepsilon$ が成り立つ。これは B の全有界性を示している。以上で証明を完了する。

付録 B　測度論

Remark 付録 B.1. (Ω, μ) を可測空間とする。Ω 上の可測関数の列 $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ がある写像 $f : \Omega \to \mathbb{R}$ に各点収束するとき、f は可測関数である。特に、可積分関数のなすノルム空間は完備である。