[Jos17] の Chapter 1 の解答 PDF です。
私は代数幾何 (スキーム論) 既習の人間なので、そういう感じの考え方をします。

1 Riemannian Manifolds

問題 1.1. この本 [Jos17] で議論されている例の他に可微分多様体の例を 5 つ挙げよ。

証明. $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ や、$\mathbb{P}^N_{\mathbb{C}}$ の適当な滑らかな閉部分スキームでの爆発や、種数 g のコンパクトリーマン面や、SL_n などの線形代数群や、適当なベクトル束に付随する射影束や、グラスマン多様体や、旗多様体など...

問題 1.2. S^n の接空間を決定せよ (S^n の接束を $S^n \times \mathbb{R}^{n+1}$ の部分多様体として具体的に記述せよ)。

証明. $M :\stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R}^{n+1}$ の標準的な座標関数 (すなわち射影) を $x^0, \cdots, x^n : M \to \mathbb{R}$ とする。$N :\stackrel{\text{def}}{=} S^n \subset M$ は C^∞-関数 $f :\stackrel{\text{def}}{=} \sum_i (x^i)^2 - 1 : M \to \mathbb{R}$ の 0 での逆像である (以下の図式が pull-back 図式)：

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{\subset} & M \\ \downarrow & & \downarrow f \\ \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R}. \end{array}$$

f により M 上のベクトル束の完全列

$$0 \longrightarrow [f^*\Omega_{\mathbb{R}} \cong M \times \mathbb{R}] \xrightarrow{df} \Omega_M \longrightarrow \Omega_f \longrightarrow 0$$

が引き起こされる。ここで df は自明束 $M \times \mathbb{R}$ からの射 $M \times \mathbb{R} \to \Omega_M$ が定める大域切断 (大域的な 1-form) である。上の図式が pull-back 図式であることから自然に $\Omega_f|_N \cong \Omega_N$ が成立し、したがって $T_N \cong \ker(df|_N)$ が成り立つ。ここで $df|_N : T_M|_N \to N \times \mathbb{R}$ は M 上の 1-form df の定義するベクトル束の間の射の N への制限である。

さて、$\partial_i = \partial/\partial x^i$ を $M = \mathbb{R}^{n+1}$ の接束 $TM = T\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$ の座標関数 $x_0, \cdots, x_n$ に対する frame とする。$df = \sum_i 2x^i dx^i$ であるから、このとき、各点 $p = (p^0, \cdots, p^n) \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ に対して、点 $p \in \mathbb{R}^{n+1}$ での接ベクトル $v = \sum_i a^i \partial_i \in T_p\mathbb{R}^{n+1}$ が $T_pS^n \subset T_p\mathbb{R}^{n+1}$ に属するためには

$$0 = df_p(v) = df_p(\sum_i a^i \partial_i) = \sum_i a^i df_p(\partial_i) = \sum_i a^i (\partial_i f)(p) = \sum_i a^i (2x^i)(p) = 2\sum_i a^i p^i$$

が成り立つことが必要充分である。したがって、

$$\begin{aligned} TS^n &= \ker(T\mathbb{R}^{n+1} \xrightarrow{df} S^n \times \mathbb{R}) \\ &\cong \left\{ (x^0, \cdots, x^n; \sum_i a^i \partial_i) \in T\mathbb{R}^{n+1} \,\middle|\, \sum_i (x^i)^2 = 1, \sum_i a^i x^i = 0 \right\} \end{aligned}$$

となる。

問題 1.3. M を可微分多様体、$\tau : M \to M$ を固定点のない involution、すなわち、$\tau \circ \tau = \mathrm{id}_M$ かつ $\tau(x) \neq x (\forall x \in M)$ を満たす射とする。二点 $x, y \in M$ に対して $y = \tau(x)$ であることによって同値関係を定義するこのとき、同値類 M/τ には標準射影 $M \to M/\tau$ が局所微分同相写像となる一意的な可微分構造が存在することを示せ。

証明.

References

[Jos17] Jürgen Jost. *Riemannian geometry and geometric analysis*. 7th edition. Vol. 42005. Universitext. Springer International Publishing, 2017. ISBN: 978-3-319-61860-9. URL: https://www.springer.com/gp/book/9783319618593.