Sheaves on Manifolds Exercise I.25 の解答

ゆじとも

2021 年 2 月 9 日

Sheaves on Manifolds [Exercise I.25, KS02] の解答です。

I　Homological Algebra

問題 I.25. $\mathcal{C}$ をアーベル圏、X を $\mathcal{C}$ の複体で、各 n に対して $X^{p,q} \neq 0, p+q=n$ となる (p,q) は高々有限個であるとする。

(1) 以下の三角形が $\mathsf{D}(\mathcal{C})$ において完全であることを示せ：

$$\mathrm{Tot}(\tau_{II}^{\leq n-1}(X)) \to \mathrm{Tot}(\tau_{II}^{\leq n}(X)) \to H_{II}^{n}(X)[-n] \xrightarrow{+1},$$
$$H_{II}^{n}(X)[-n] \to \mathrm{Tot}(\tau_{II}^{\geq n}(X)) \to \mathrm{Tot}(\tau_{II}^{\geq n+1}(X)) \xrightarrow{+1},$$

(2) $k \in \mathbb{Z}$ を固定する。自然な射 $H^k(\mathrm{Tot}(\tau_{II}^{\leq n}(X))) \to H^k(\mathrm{Tot}(X))$ (resp. $H^k(\mathrm{Tot}(X)) \to H^k(\mathrm{Tot}(\tau_{II}^{\geq n}(X)))$) は $n \gg 0$ (resp. $n \ll 0$) に対して同型であることを示せ。

(3) $k \in \mathbb{Z}$ を固定する。$n \ll 0$ に対して $H^k(\mathrm{Tot}(\tau_{II}^{\leq n}(X))) = 0$ であることと、$n \gg 0$ に対して $H^k(\mathrm{Tot}(\tau_{II}^{\geq n}(X))) = 0$ であることを示せ。

証明. (1) を示す。自然な射 $\mathrm{coker}(\tau_{II}^{\leq n-1}(X) \to \tau_{II}^{\leq n}(X)) \to H_{II}^{n}(X)[-n]$ に本文 [Proposition 1.9.3, KS02] を用いることにより、$\mathrm{Tot}(\mathrm{coker}(\tau_{II}^{\leq n-1}(X) \to \tau_{II}^{\leq n}(X))) \to H_{II}^{n}(X)[-n]$ が擬同型であることが従い、これは一つ目の三角形が完全三角であることを示している。二つ目の三角形が完全三角であることは $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ において一つ目の三角形が完全三角であることより従う。以上で (1) の証明を完了する。

(2) を示す。$X^{p,q} \neq 0, p+q=k, k-1, k+1$ となる p が存在するような q のうち最大のものを n_0 とすれば、$n > n_0$ と $p+q=k,k-1,k+1$ を満たす任意の p,q に対して $(\tau_{II}^{\leq n}(X))^{p,q} = X^{p,q}$ となり、(2) はこれからただちに従う。以上で (2) の証明を完了する。

(3) を示す。$X^{p,q} \neq 0, p+q=k, k-1, k+1$ となる p が存在するような q のうち最小のものを n_0 とすれば、$n < n_0$ と $p+q=k,k-1,k+1$ を満たす任意の p,q に対して $(\tau_{II}^{\leq n}(X))^{p,q} = X^{p,q} = 0$ となり、(3) はこれからただちに従う。以上で (3) の証明を完了し、問題 I.25 の解答を完了する。 □

References

[KS02] M. Kashiwara and P. Schapira. *Sheaves on Manifolds*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer Berlin Heidelberg, 2002. ISBN: 9783540518617. URL: https://www.springer.com/jp/book/9783540518617.