

Sheaves on Manifolds Exercise II.21 の解答

ゆじとも

2021 年 2 月 10 日

Sheaves on Manifolds [Exercise II.21, [KS02](#)] の解答です。

II Sheaves

問題 II.21. X を位相空間、 $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ を X の閉部分集合の減少列で $X_n = X, (n \ll 0)$ と $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} X_n = \emptyset$ を満たすものとする。 $F \in \mathbf{D}^+(X)$ は $k \neq n$ に対して $H_{X_n \setminus X_{n+1}}^k(F) = 0$ を満たすものとする。完全三角

$$R\Gamma_{X_{n+1} \setminus X_{n+2}}(F) \rightarrow R\Gamma_{X_n \setminus X_{n+2}}(F) \rightarrow R\Gamma_{X_n \setminus X_{n+1}}(F) \xrightarrow{+1}$$

のコホモロジーをとって、連結準同型を $d^n : H_{X_n \setminus X_{n+1}}^n(F) \rightarrow H_{X_{n+1} \setminus X_{n+2}}^{n+1}(F)$ と表す。 $K^n \stackrel{\text{def}}{=} H_{X_n \setminus X_{n+1}}^n(F)$ と表す。

- (1) (K^\bullet, d^\bullet) は X 上の層の複体であることを示せ。
- (2) $k < n$ に対して $H_{X_n}^k(F) = 0$ であり、さらに $H_{X_{n-1}}^n(F) \xrightarrow{\sim} H^n(F)$ は同型射であることを示せ。
- (3) $G^n = \Gamma_{X_n}(F^n) \cap (d_F^n)^{-1}(\Gamma_{X_{n+1}}(F^{n+1}))$ とおく。射 $d_G^n : G^n \rightarrow G^{n+1}$ を構成して、 $G = (G^\bullet, d^\bullet)$ が複体であることを示せ。さらに $G \rightarrow K$ と $G \rightarrow F$ を構成して、各 F^n が脆弱層である場合に擬同型となることを示せ。 $\mathbf{D}^+(X)$ において $F \cong K$ であることを結論付けよ。

証明. (1) を示す。明らかに以下の図式が可換である：

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \Gamma_{X_{n+2} \setminus X_{n+3}}(-) & \longrightarrow & \Gamma_{X_n \setminus X_{n+3}}(-) & \longrightarrow & \Gamma_{X_n \setminus X_{n+2}}(-) \\ & & \downarrow & & \parallel & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \Gamma_{X_{n+1} \setminus X_{n+3}}(-) & \longrightarrow & \Gamma_{X_n \setminus X_{n+3}}(-) & \longrightarrow & \Gamma_{X_n \setminus X_{n+1}}(-). \end{array}$$

従って、完全三角の間の射

$$\begin{array}{ccccccc} R\Gamma_{X_n \setminus X_{n+3}}(-) & \longrightarrow & R\Gamma_{X_n \setminus X_{n+2}}(-) & \longrightarrow & R\Gamma_{X_{n+2} \setminus X_{n+3}}(-)[1] & \xrightarrow{+1} & \\ \parallel & & \downarrow & & \downarrow & & \\ R\Gamma_{X_n \setminus X_{n+3}}(-) & \longrightarrow & R\Gamma_{X_n \setminus X_{n+1}}(-) & \longrightarrow & R\Gamma_{X_{n+1} \setminus X_{n+3}}(-)[1] & \xrightarrow{+1} & \end{array}$$

を得る。縦に伸ばして横向きに書けば、完全三角の射

$$\begin{array}{ccccccc} R\Gamma_{X_n \setminus X_{n+2}}(-) & \longrightarrow & R\Gamma_{X_n \setminus X_{n+1}}(-) & \longrightarrow & R\Gamma_{X_{n+1} \setminus X_{n+2}}(-)[1] & \xrightarrow{+1} & \\ \downarrow & & \downarrow & & \parallel & & \\ R\Gamma_{X_{n+2} \setminus X_{n+3}}(-)[1] & \longrightarrow & R\Gamma_{X_{n+1} \setminus X_{n+3}}(-)[1] & \longrightarrow & R\Gamma_{X_{n+1} \setminus X_{n+2}}(-)[1] & \xrightarrow{+1} & \end{array}$$

を得る。\$n\$ 次と \$n+1\$ 次の周辺でコホモロジーをとれば、可換図式

$$\begin{array}{ccccccc}
\longrightarrow & H_{X_n \setminus X_{n+1}}^n(-) & \xrightarrow{d^n} & H_{X_{n+1} \setminus X_{n+2}}^{n+1}(-) & \longrightarrow & H_{X_n \setminus X_{n+2}}^{n+1}(-) & \longrightarrow \\
& \downarrow & & \parallel & & \downarrow & \\
\longrightarrow & H_{X_{n+1} \setminus X_{n+3}}^{n+1}(-) & \longrightarrow & H_{X_{n+1} \setminus X_{n+2}}^{n+1}(-) & \xrightarrow{d^{n+1}} & H_{X_{n+2} \setminus X_{n+3}}^{n+2}(-) & \longrightarrow
\end{array}$$

を得る。横向きは完全であるから、\$d^{n+1} \circ d^n = 0\$ が従う。以上で (1) の証明を完了する。

(2) を示す。完全三角

$$R\Gamma_{X_{i+1}}(F) \rightarrow R\Gamma_{X_i}(F) \rightarrow R\Gamma_{X_i \setminus X_{i+1}}(F) \xrightarrow{+1}$$

でコホモロジーをとる。各 \$k < i\$ に対して \$H_{X_i \setminus X_{i+1}}^k(F) \cong 0\$ であるので、各 \$k < i\$ に対して同型射 \$H_{X_{i+1}}^k(F) \xrightarrow{\sim} H_{X_i}^k(F)\$ を得る。\$i \ge n\$ としてこの同型射を繋ぐことによって、各 \$k < n\$ に対して同型射 \$H_{X_i}^k(F) \xrightarrow{\sim} H_{X_n}^k(F)\$, \$(i \gg 0)\$ を得る。\$x \in X\$ を任意にとれば、\$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} X_i = \emptyset\$ であるので、ある \$i \gg 0\$ が存在して \$x \in X_i\$ となる。点 \$x\$ で stalk をとることによって、\$0 = H_{X_i}^k(F)_x \xrightarrow{\sim} H_{X_n}^k(F)_x\$ を得る (\$H_{X_i}^k(F)\$ は \$X_i\$ の上に台を持つ)。\$H_{X_n}^k(F)\$ は任意の点の stalk が 0 であるので、\$H_{X_n}^k(F) = 0\$ が従う。これが示すべきことの一つ目である。また、各 \$k > i\$ に対して \$H_{X_i \setminus X_{i+1}}^k(F) \cong 0\$ であるので、各 \$k > i+1\$ に対して同型射 \$H_{X_{i+1}}^k(F) \xrightarrow{\sim} H_{X_i}^k(F)\$ を得る。\$k = n\$ として \$i \le n-2\$ とすれば、この同型射を繋ぐことにより、同型射 \$H_{X_{n-1}}^n(F) \xrightarrow{\sim} H_{X_i}^n(F)\$, \$(i \ll 0)\$ を得る。\$X_i = X\$, \$(i \ll 0)\$ であるので、同型射 \$H_{X_{n-1}}^n(F) \xrightarrow{\sim} H^n(F)\$ を得る。これが示すべきことの二つ目である。以上で (2) の証明を完了する。

(3) を示す。自然な包含射を \$i^n : \Gamma_{X_n}(F^n) \to F^n\$ とおく。\$G^n\$ の定義より、

$$\begin{array}{ccc}
G^n & \xrightarrow{q^n} & \Gamma_{X_{n+1}}(F^{n+1}) \\
p^n \downarrow & & \downarrow i^{n+1} \\
\Gamma_{X_n}(F^n) & \xrightarrow{d^n \circ i^n} & F^{n+1}
\end{array}$$

は pull-back 図式である。また、\$p^n\$ はモノ射である。さらに、

$$d^{n+1} \circ i^{n+1} \circ q^n = d^{n+1} \circ d^n \circ i^n \circ p^n = 0$$

であるので、\$i^{n+1} \circ q^n : G^n \to \Gamma_{X_{n+1}}(F^{n+1})\$ と 0-射 \$G^n \to \Gamma_{X_{n+2}}(F^{n+2})\$ は \$p^{n+1} \circ d_G^n = q^n, q^{n+1} \circ d_G^n = 0\$ となる射 \$d_G^n : G^n \to G^{n+1}\$ を一意的に定義する。このとき、

$$\begin{aligned}
p^{n+2} \circ d_G^{n+1} \circ d_G^n &= q^{n+1} \circ d_G^n = 0, \\
q^{n+2} \circ d_G^{n+1} \circ d_G^n &= 0 \circ d_G^n = 0
\end{aligned}$$

が成り立つ。従って \$d_G^{n+1} \circ d_G^n = 0\$ であり、\$(G^\bullet, d_G^\bullet)\$ は層の複体である。また、\$p^n \circ i^n : G^n \to F^n\$ は複体の射 \$G \to F\$ を与える。

各 \$F^n\$ が脆弱層であるとする。このとき任意の局所閉集合 \$? \subset X\$ に対して \$R\Gamma_?(F) \cong \Gamma_?(F)\$ が成り立つ。\$i^{n+1}\$ はモノなので、

$$\ker(d_G^n) = \ker(i^{n+1} \circ d_G^n) = \ker(d^n \circ p^n \circ i^n) = \ker(d^n) \cap \Gamma_{X_n}(F^n) = \Gamma_{X_n}(\ker(d^n))$$

が成り立つ。定義より \$\text{Im}(d_G^{n-1}) = \Gamma_{X_n}(F^n) \cap \text{Im}(d^{n-1}) = \Gamma_{X_n}(\text{Im}(d^{n-1}))\$ が成り立つ。従って、\$H^n(G) \cong\$

$\Gamma_{X_n}(\ker(d^n))/\Gamma_{X_n}(\operatorname{Im}(d^{n-1}))$ であり、さらに

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Im}(d_G^{n-1}) & \longrightarrow & \operatorname{Im}(d^{n-1}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \ker(d_G^n) & \longrightarrow & \ker(d^n) \end{array}$$

は Cartesian である。よって、[Exercise 1.6 (3), KS02] より、 $H^n(G) \rightarrow H^n(F)$ は単射である。また、複体の完全列

$$0 \rightarrow \Gamma_{X_n}(F) \rightarrow \Gamma_{X_{n-1}}(F) \rightarrow \Gamma_{X_n \setminus X_{n-1}}(F) \rightarrow 0$$

でコホモロジーをとることにより、完全列

$$H_{X_n}^n(F) \rightarrow H_{X_{n-1}}^n(F) \rightarrow H_{X_n \setminus X_{n-1}}^n(F)$$

を得る。ここで仮定より、 $H_{X_n \setminus X_{n-1}}^n(F) = 0$ であり、さらに (2) より、 $H_{X_{n-1}}^n(F) \cong H^n(F)$ であるので、 $H_{X_n}^n(F) \rightarrow H^n(F)$ は全射である。一方、 $\mathfrak{S}(d^{n-1}) \cong \Gamma_{X_n}(F^n) \times$ 層の複体の完全列

$$0 \rightarrow \Gamma_{X_n}(F) \rightarrow F \rightarrow \Gamma_{X \setminus X_n}(F) \rightarrow 0$$

□

あいうえお

感想. (3) は、filtered complex のスペクトル系列の特別な場合。

References

- [KS02] M. Kashiwara and P. Schapira. *Sheaves on Manifolds*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer Berlin Heidelberg, 2002. ISBN: 9783540518617. URL: <https://www.springer.com/jp/book/9783540518617>.