Sheaves on Manifolds Exercise I.19 の解答

ゆじとも

2021 年 2 月 9 日

Sheaves on Manifolds [Exercise I.19, KS02] の解答です。

I Homological Algebra

問題 I.19. $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ を二つのアーベル圏、$F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ を左完全函手とする。さらに $\mathcal{I} \subset \mathcal{C}$ を F-injective な部分圏とする。対象 $X \in \mathcal{C}$ が F**-acyclic** であるということを、任意の $k \neq 0$ に対して $R^k F(X) = 0$ となることとして定義する。$\mathcal{J} \subset \mathcal{C}$ を F-acyclic な対象からなる充満部分圏とする。

(1) $\mathcal{J}$ は F-injective であることを示せ。

(2) 任意の自然数 $n \geq 0$ に対して、以下の主張が同値であることを証明せよ：

  (i) 任意の $k > n$ と任意の対象 $X \in \mathcal{C}$ に対して $R^k F(X) = 0$ である。

  (ii) 任意の対象 $X \in \mathcal{C}$ に対して、完全列

$$0 \to X \to X^0 \to \cdots \to X^n \to 0$$

  で各 $0 \leq j \leq n$ に対して $X^j \in \mathcal{J}$ となるものが存在する。

  (iii) $X^0 \to \cdots X^n \to 0$ が完全であり、任意の $j < n$ に対して $X^j \in \mathcal{J}$ であるとき、$X^n \in \mathcal{J}$ である。

  これらの同値な条件のうちのどれか一つが成立するとき、F は**コホモロジー次元** $\leq n$ **を持つ**と言う。

証明. (1) を示す。まず、F-injective な対象は F-acyclic なので (cf. 本文 [Proposition 1.8.3, KS02] とその直前の記述)、$\mathcal{I} \subset \mathcal{J}$ であり、従って $\mathcal{J}$ は本文条件 [Definition 1.8.2 (i), KS02] を満たす。また、$\mathcal{J}$ に属する対象はすべて F-acyclic であるから、$\mathcal{J}$ が本文条件 [Definition 1.8.2 (ii), KS02] を満たすことは明らかである。$X' \to X$ を $\mathcal{J}$ に属する対象の間のモノ射として $X'' :\overset{\text{def}}{=} X/X'$ とすると、各 $i \geq 1$ に対して完全列 $R^i F(X) \to R^i F(X/X') \to R^{i+1} F(X')$ を得る。X, X' は F-acyclic であるから、$R^i F(X) = 0, R^{i+1} F(X') = 0$ であり、従って $R^i F(X/X') = 0$ もわかる。これは X/X' が F-acyclic であることを示していて、X/X' は $\mathcal{J}$ に属する。よって $\mathcal{J}$ は本文条件 [Definition 1.8.2 (ii), KS02] を満たし、$\mathcal{J}$ は F-injective である。以上で (1) の証明を完了する。

(2) を示す。(i)⇔(ii) を示す。(i)⇔(ii) を示すためには、対象 $X \in \mathcal{C}$ を固定して、次の二つの主張が同値であることを証明することが十分である：

(A) 任意の $k > n$ に対して $R^k F(X) = 0$ である。

(B) 完全列

$$0 \to X \to X^0 \to \cdots \to X^n \to 0$$

で各 $0 \leq j \leq n$ に対して $X^j \in \mathcal{J}$ となるものが存在する。

n に関する帰納法により (A)⇔(B) を示す。$n = 0$ に対して (A) が成り立つことは、X が F-acyclic であることと同値であり、さらにこれは $n = 0$ に対して (B) が成り立つことと同値である。よって $n = 0$ の場合は明らかに (A)⇔(B) が成り立つ。$n \geq 1$ として、n より小さいすべての自然数に対して (A)⇔(B) が成り立つと仮定する。$\mathcal{J}$ は本文条件 [Definition 1.8.2 (i), KS02] を満たすので、モノ射 $d : X \to X^0$ が存在する。X^0 は F-acyclic であるから、任意の $k > n$ に対して $R^{k-1}F(\mathrm{coker}(d)) \cong R^kF(X)$ となる。従ってとくに、X と n に対して (A) が成り立つことは、$X = \mathrm{coker}(d)$ と $n - 1$ に対して (A) が成り立つことと同値である。帰納法の仮定により、これは $X = \mathrm{coker}(d)$ と $n - 1$ に対して (B) が成り立つことと同値である。さらに $\mathrm{coker}(d)$ に対する (B) の完全列を $X^0 \to \mathrm{coker}(d)$ と繋ぐことを考えれば、$X = \mathrm{coker}(d)$ と $n - 1$ に対して (B) が成り立つことは X と n に対して (B) が成り立つことと同値である。以上で (A)⇔(B) の証明を完了し、従って (i)⇒(ii) の証明を完了する。

(i)⇒(iii) を示すためには、各対象 $X \in \mathcal{C}$ に対して次の二つの主張が同値であることを証明することが十分である：

(C) 任意の $k > n$ に対して $R^kF(X) = 0$ である。

(D) 完全列

$$0 \to X \to X^0 \to \cdots \to X^n \to 0$$

が条件「各 $j < n$ に対して $X^j \in \mathcal{J}$ である」を満たせば、$X^n \in \mathcal{J}$ となる。

$n = 0$ に対して (C) が成り立つことは、X が F-acyclic であることと同値であり、これは $n = 0$ に対して (D) が成り立つことと同値である。よって $n = 0$ の場合は明らかに (C)⇔(D) が成り立つ。$n \geq 1$ として、n より小さいすべての自然数に対して (C)⇔(D) が成り立つと仮定する。

$$0 \to X \xrightarrow{d} X^0 \to \cdots \to X^n \to 0$$

を条件「各 $j < n$ に対して $X^j \in \mathcal{J}$ である」を満たす完全列とする。X^0 は F-acyclic であるから、任意の $k > n$ に対して $R^{k-1}F(\mathrm{coker}(d)) \cong R^kF(X)$ となる。よって、X と n に対して (C) が成り立つことは、$X = \mathrm{coker}(d)$ と $n - 1$ に対して (C) が成り立つことと同値である。帰納法の仮定により、これは $X = \mathrm{coker}(d)$ と $n - 1$ に対して (D) が成り立つことと同値である。一方これは明らかに X と n に対して (D) が成り立つことと同値であるから、よって (C)⇔(D) が従う。以上で (2) の証明を完了し、問題 I.19 の解答を完了する。 □

References

[KS02] M. Kashiwara and P. Schapira. *Sheaves on Manifolds*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer Berlin Heidelberg, 2002. ISBN: 9783540518617. URL: https://www.springer.com/jp/book/9783540518617.