Sheaves on Manifolds Exercise I.10 の解答

ゆじとも

2021 年 2 月 9 日

Sheaves on Manifolds [Exercise I.10, KS02] の解答です。

I Homological Algebra

問題 I.10. $\mathcal{C}$ をアーベル圏とする。図式

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & M_0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r] & M_0' \arrow[r] & M_1' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

において、横向きは完全であり、M_0, M_0' はそれぞれ入射的であるとする。同型射 $M_0 \oplus M_1' \xrightarrow{\sim} M_0' \oplus M_1$ を構成せよ。

証明. $N :\overset{\text{def}}{=} M_0 \coprod_M M_0'$ とおいて、$j : M_0 \to N \leftarrow M_0' : j'$ を自然な射とする。i, i' はモノ射であるから、[Exercise 1.6 (3), KS02] より、その push-out である j, j' もそれぞれモノ射である。従って、M_0 が入射的であることから、ある射 $p : N \to M_0$ が存在して $p \circ j = \mathrm{id}_{M_0}$ となり、M_0' が入射的であることから、ある射 $p' : N \to M_0'$ が存在して $p' \circ j' = \mathrm{id}_{M_0'}$ となる。図式

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r] \arrow[d] & M_0 \arrow[r] \arrow[d, "j"'] & M_1 \arrow[d] \\
M_0' \arrow[r, "j'"] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d] & X \\
M_1' \arrow[r] & Y &
\end{tikzcd}$$

に $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ で [Exercise 1.6 (2), KS02] を適用すると、射 $M_1 \to X$ と $M_1' \to Y$ はそれぞれ同型射であることがわかる。以上より、二つの完全列

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M_0 \arrow[r, "j"] & N \arrow[r] & M_1' \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & M_0' \arrow[r, "j'"] & N \arrow[r] & M_1 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

を得る。j, j' は分裂モノ射であるから、[Exercise 1.4, KS02] より、同型射 $M_0 \oplus M_1' \cong N \cong M_0' \oplus M_1$ を得る。以上で問題 I.10 の証明を完了する。 □

References

[KS02] M. Kashiwara and P. Schapira. *Sheaves on Manifolds*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer Berlin Heidelberg, 2002. ISBN: 9783540518617. URL: https://www.springer.com/jp/book/9783540518617.