Sheaves on Manifolds Exercise II.10 の解答

ゆじとも

2021 年 2 月 9 日

Sheaves on Manifolds [Exercise II.10, KS02] の解答です。

II Sheaves

問題 II.10. $\mathcal{R}$ を X 上の環の層として、M を $\mathcal{R}$ 加群とする。

(1) M が入射的であるための必要十分条件は、任意の部分 $\mathcal{R}$-加群 $\mathcal{I} \subset \mathcal{R}$ (これを $\mathcal{R}$ の**イデアル**という) に対して

$$\Gamma(X, M) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{R}}(\mathcal{R}, M) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{R}}(\mathcal{I}, M)$$

が全射となることである。これを示せ。

(2) A を体とする。A_X のイデアルはある開集合 $U \subset X$ を用いて A_U と表すことができる。このことから、A_X-加群 M が入射的であるための必要十分条件は M が脆弱層であることであることを帰結せよ。

証明. (1) を示す。必要性は明らかであるので十分性が問題である。$\mathcal{R}$-加群 F とその部分 $\mathcal{R}$-加群 $G \subset F$ と射 $g : G \to M$ を任意にとる。集合

$$S :\overset{\text{def}}{=} \{(H, h) | G \subset H \subset F, h|_G = g\}$$

に

$$(H_0, H_0) \leq (H_1, h_1) \iff H_0 \subset H_1 \text{かつ } h_1|_{H_0} = h_0$$

で順序を入れる。全順序部分集合 $S_0 \subset S$ に対して、$H_{S_0} :\overset{\text{def}}{=} \bigcup_{H \in S_0} H$ と定めて $h_{S_0} : H_{S_0} \to M$ を余極限の普遍性により定まる自然な射とすると (H_{S_0}, h_{S_0}) は S_0 の上界である。よって Zorn の補題より S には極大限 (H, h) が存在する。$H \neq F$ であるとする。このとき、開集合 $U \subset X$ と切断 $s \in F(U) \setminus H(U)$ が存在する。U 上の切断 s は $\mathcal{R}$-加群の射 $\mathcal{R}_U \to H$ と対応する。Fiber 積をとって $\mathcal{I} :\overset{\text{def}}{=} \mathcal{R}_U \times_F H$ とおけば、$\mathcal{I}$ は $\mathcal{R}_U$ の部分 $\mathcal{R}$-加群である。ここで

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{R}}(\mathcal{R}, M) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{R}}(\mathcal{R}_U, M) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{R}}(\mathcal{I}, M)$$

の合成は全射であるから、$\mathrm{Hom}_{\mathcal{R}}(\mathcal{R}_U, M) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{R}}(\mathcal{I}, M)$ も全射であり、従って、自然な射影と h の合成 $\mathcal{I} \to H \xrightarrow{h} M$ は射 $\mathcal{R}_U \to M$ へとリフトし、可換図式

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{I} & \xrightarrow{\subset} & \mathcal{R}_U \\ \downarrow & & \downarrow \\ H & \xrightarrow{h} & M \end{array}$$

を得る。Push-out をとることによって、射 $h' : H' :\overset{\mathrm{def}}{=} \mathcal{R}_U \coprod_{\mathcal{I}} H \to M$ を得る。一方、可換図式

$$\begin{CD} \mathcal{I} @>{\subset}>> \mathcal{R}_U \\ @VVV @VV{s}V \\ H @>{\subset}>> F \end{CD}$$

で push-out をとることにより、射 $H' \to F$ を得るが、$\mathcal{I} = \mathcal{R}_U \times_F H$ であることと [Exercise 1.6 (3), KS02] より、$H' \to F$ はモノ射である。従って $H' \subset F$ とみなせる。$s \notin H(U)$ なので $H \subsetneq H'$ である。これは $(H, h) < (H', h')$ を意味し、(H, h) の極大性に反する。この矛盾は $H \neq F$ と仮定したことにより引き起こされたので、$H = F$ であることが帰結し、以上で、$f|_G = g$ となる射 $f : F \to M$ の存在が示された。これは F が入射的層であることを示している。以上で (1) の証明を完了する。

(2) を示す。A を体、$\mathcal{I} \subset A_X$ をイデアルとする。各 $x \in X$ に対して $\mathcal{I}_x \subset A_{X,x}$ はイデアルであるが、$A_{X,x}$ は体なので、$\mathcal{I}_x$ は 0 か $A_{X,x}$ のいずれかである。

$$S :\overset{\mathrm{def}}{=} \{x \in X | \mathcal{I}_x = A_{X,x}\}$$

とおき、S が開であることを示す。$x \in S$ を任意にとる。$\mathcal{I}_x = A_{X,x}$ であるので、ある開近傍 $x \in U$ とある切断 $s \in \mathcal{I}(U)$ が存在して、任意の $y \in U$ に対して $s_y = 1$ が成り立つ。これから各 $y \in U$ で $\mathcal{I}_y \neq 0$ であることが従い、$\mathcal{I}_y$ は 0 か $A_{X,y}$ のいずれかであったので、$\mathcal{I}_y = A_{X,y}$ が従う。よって $U \subset S$ が従い、これは S が開であることを示している。最後の主張を示す。入射的ならば脆弱層であるため、A_X-加群 M が脆弱層である場合に M が入射的であることを示す。M が入射的であることを示すためには、(1) より、任意のイデアル層 $\mathcal{I} \subset A_X$ と任意の A_X-加群の射 $\mathcal{I} \to M$ に対し、それが $\mathcal{I} \subset A_X$ に沿ってリフトすることを示すことが十分である。既に証明したことにより、イデアル層 $\mathcal{I} \subset A_X$ に対してある開集合 $U \subset X$ が存在して $\mathcal{I} = A_U$ が成り立つ。A_X 加群の射 $A_U \to M$ は $M(U)$ の切断と対応し、M は脆弱層であるので、それは $M(X)$ の元に延長することができる。このことは射 $A_U = \mathcal{I} \to M$ が $A_U = \mathcal{I} \subset A_X$ に沿ってリフトすることを意味し、従って M は入射的である。以上で (2) の証明を完了し、問題 II.10 の解答を完了する。 □

References

[KS02] M. Kashiwara and P. Schapira. *Sheaves on Manifolds*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer Berlin Heidelberg, 2002. ISBN: 9783540518617. URL: https://www.springer.com/jp/book/9783540518617.