

Sheaves on Manifolds Exercise I.34 の解答

ゆじとも

2021 年 2 月 9 日

Sheaves on Manifolds [Exercise I.34, [KS02](#)] の解答です。

I Homological Algebra

問題 I.34. k を体、 $X \in D_f^b(\text{Mod}(k))$ とする。

$$b_i(X) \stackrel{\text{def}}{=} \dim(H^i(X)), \quad b_i^*(X) \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^i \sum_{j \leq i} (-1)^j b_j(X)$$

とおく。 $Y \rightarrow X \rightarrow Z \xrightarrow{+1}$ を $D_f^b(\text{Mod}(k))$ の完全三角とする。以下の式を示せ ($\chi(X)$ の定義については [Exercise 1.32 (4), [KS02](#)] を参照) :

$$\begin{aligned} \chi(X) &= \chi(Y) + \chi(Z), \\ b_i^*(X) &\leq b_i^*(Y) + b_i^*(Z). \end{aligned}$$

証明. 一つ目の等式は [Exercise 1.32 (3) (4), [KS02](#)] より直ちに従う。二つ目の不等式を示す。コホモロジーをとると、長完全列

$$\begin{array}{ccccccc} \xrightarrow{\delta^{i-1}} & H^{i-1}(Y) & \longrightarrow & H^{i-1}(X) & \longrightarrow & H^{i-1}(Z) \\ \xrightarrow{\delta^i} & H^i(Y) & \longrightarrow & H^i(X) & \longrightarrow & H^i(Z) \\ \xrightarrow{\delta^{i+1}} & \dots & & & & \end{array}$$

を得る。従って、とくに

$$\begin{aligned} 0 &\leq \dim(\text{Im}(\delta^{i+1})) \\ &= b_i(Z) - b_i(X) + b_i(Y) - b_{i-1}(Z) + \dots \\ &= \sum_{j \leq i} (-1)^{i-j} b_j(Z) - \sum_{j \leq i} (-1)^{i-j} b_j(X) + \sum_{j \leq i} (-1)^{i-j} b_j(Y) \\ &= b_i^*(Z) - b_i^*(X) + b_i^*(Y) \end{aligned}$$

を得る。よって二つ目の不等式が従う。以上で [問題 I.34](#) の解答を完了する。 □

References

- [KS02] M. Kashiwara and P. Schapira. *Sheaves on Manifolds*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer Berlin Heidelberg, 2002. ISBN: 9783540518617. URL: <https://www.springer.com/jp/book/9783540518617>.