Sheaves on Manifolds Exercise I.29 の解答

ゆじとも

2021 年 2 月 9 日

Sheaves on Manifolds [Exercise I.29, KS02] の解答です。

I Homological Algebra

問題 I.29. A を環とする。

(1) 任意の自由加群は射影的であることを示せ。
(2) 任意の射影加群はある自由加群の直和因子であることを示せ。
(3) 射影加群は平坦加群であることを示せ。
(4) $n \geq 0$ を自然数とする。以下の条件が同値であることを示せ：
  (i) 任意の右 A-加群 N と任意の左 A-加群 M と任意の $j > n$ に対して $\mathrm{Tor}_j^A(N, M) = 0$ である。
  (ii) 任意の左 A-加群 M に対して完全列 $0 \to P^n \to \cdots \to P^0 \to M \to 0$ であって各 P^i が平坦加群となるものが存在する。
  (iii) 任意の右 A-加群 M に対して完全列 $0 \to P^n \to \cdots \to P^0 \to M \to 0$ であって各 P^i が平坦加群となるものが存在する。

  これらの同値な条件を満たす最小の $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ を $\mathrm{wgld}(A)$ と表し、A の**弱大域次元** (weak global dimension) という。
(5) $\mathrm{wgld}(A) \leq \mathrm{gld}(A)$ であることを示せ。

証明. (1) は函手の同型 $\mathrm{Hom}_A(A^{\oplus I}, -) \cong \prod_I(-)$ より従う。

(2) を示す。P を射影加群として全射 $p : A^{\oplus I} \to P$ をとる。P が射影加群であることから射 $\mathrm{id}_P : P \to P$ がリフトして $p \circ s = \mathrm{id}_P$ となる $s : P \to A^{\oplus I}$ が存在する。よって [Exercise 1.4 (4), KS02] より P は $A^{\oplus I}$ の直和因子である。以上で (2) の証明を完了する。

(3) を示す。P を射影加群として、P が直和因子となるように射 $i : P \to A^{\oplus I}$ をとる。$p : A^{\oplus I} \to P$ を i の左逆射、つまり $p \circ i = \mathrm{id}_P$ となる射とする。$f : M \to N$ を A-加群の単射とする。(3) を示すためには、$f \otimes_A \mathrm{id}_P$ が単射であることを示すことが十分である。可換図式

$$\begin{tikzcd}
M \otimes_A P \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes i"] \arrow[d, "f \otimes \mathrm{id}"'] & M \otimes_A A^{\oplus I} \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes p"] \arrow[d, "f \otimes \mathrm{id}"'] & M \otimes_A P \arrow[d, "f \otimes \mathrm{id}"] \\
N \otimes_A P \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes i"] & N \otimes_A A^{\oplus I} \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes p"] & N \otimes_A P
\end{tikzcd}$$

において、上と下の合成は id であり、$M \otimes_A A^{\oplus I} \cong M^{\oplus I}$ より真ん中は単射である。従って両端も単射であることが従う。以上で (3) の証明を完了する。

(4) を示す。(i) $\Leftrightarrow$ (ii) を示すことができれば、A^{op} に対して (i) $\Leftrightarrow$ (ii) を適用することで (i) $\Leftrightarrow$ (iii) が従う。残っているのは (i) $\Leftrightarrow$ (ii) を示すことである。

(i) が成り立つと仮定する。自由分解 $\cdots \to P^n \xrightarrow{d_P^n} \cdots \to P^0 \xrightarrow{d_P^0} M \to 0$ を一つとる。任意の N と $j > n$ に対して $\mathrm{Tor}_j^A(N, M) = 0$ が成り立つので、とくに任意の N と $j > n-1$ に対して $\mathrm{Tor}_j^A(N, \ker(d_P^0)) = 0$ が成り立つ。$\ker(d_P^0) \cong \mathrm{Im}(d_P^1)$ に注意して繰り返すと、繰り返して、任意の N と任意の $j > 0$ に対して $\mathrm{Tor}_j^A(N, \ker(d_P^{n-1})) = 0$ が成り立つ。このことは $\ker(d_P^{n-1})$ が平坦であることを意味していて、完全列 $0 \to \ker(d_P^{n-1}) \to P^{n-1} \to \cdots \to P^0 \to M \to 0$ は M の長さ n 以下の平坦分解である。以上で (i) $\Rightarrow$ (ii) が示された。

(ii) が成り立つと仮定する。任意に左 A-加群 M と右 A-加群 N と $j > n$ をとる。仮定より M の平坦分解 $0 \to P^n \xrightarrow{d_P^n} \cdots \to P^0 \xrightarrow{d_P^0} M \to 0$ が存在する。P^n, P^{n-1} は平坦であるから、完全列 $0 \to P^n \to P^{n-1} \to \mathrm{Im}(d_P^{n-1}) \to 0$ に $N \otimes_A (-)$ を施すことで、任意の $j > 1$ に対して $\mathrm{Tor}_j^A(N, \mathrm{Im}(d_P^{n-1})) = 0$ であることが従う。完全列 $0 \to \mathrm{Im}(d_P^{n-1}) \to P^{n-2} \to \mathrm{Im}(d_P^{n-2}) \to 0$ に $N \otimes_A (-)$ を施すことで、任意の $j > 2$ に対して $\mathrm{Tor}_j^A(N, \mathrm{Im}(d_P^{n-2})) = 0$ であることが従う。帰納的に、任意の $j > k$ に対して $\mathrm{Tor}_j^A(N, \mathrm{Im}(d_P^{n-k})) = 0$ であることが従う。$n = k$ とすれば所望の結論を得る。以上で (ii) $\Rightarrow$ (i) が示され、(4) の証明を完了する。

(5) は [Exercise 1.28 (1) $\Leftrightarrow$ (3), KS02] と (3) より従う。以上で問題 I.29 の解答を完了する。 $\square$

References

[KS02] M. Kashiwara and P. Schapira. *Sheaves on Manifolds*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer Berlin Heidelberg, 2002. ISBN: 9783540518617. URL: https://www.springer.com/jp/book/9783540518617.