Sheaves on Manifolds Exercise I.7 の解答

ゆじとも

2021 年 2 月 9 日

Sheaves on Manifolds [Exercise I.7, KS02] の解答です。

I Homological Algebra

問題 I.7. $\mathcal{C}$ をアーベル圏とする。

(1) $Z \in \mathcal{C}$ を対象とする。圏 $\mathcal{P}(Z)$ を次で定義する：
- 対象はエピ射 $f : X \to Z$ である。
- 二つの対象 $f : X \to Z$ と $g : Y \to Z$ の間の射 $(f : X \to Z) \to (g : Y \to Z)$ は $\mathcal{C}$ のエピ射 $h : X \to Y$ であって $f \circ h = g$ となるものである。
- 合成は $\mathcal{C}$ の合成によって定義する。

このとき、$\mathcal{P}(Z)$ は cofiltered であることを示せ。

(2) 対象 $X \in \mathcal{C}$ に対し、$\tilde{h}_Z(X) :\stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{colim}_{Z' \in \mathcal{P}(Z)} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z', X)$ とおく。以下を示せ：
- (i) 函手 $\tilde{h}_Z : \mathcal{C} \to \mathsf{Ab}$ は完全函手である。
- (ii) $f, f' \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X')$ を二つの射とする。任意の $Z \in \mathcal{C}$ に対して $\tilde{h}_Z(f) = \tilde{h}_Z(f')$ が成り立つとき、$f = f'$ である。
- (iii) すべての対象 $Z \in \mathcal{C}$ に対する $\tilde{h}_Z$ での像が Ab において完全であるような $\mathcal{C}$ の列は完全である。

注意. [, KS02] 第一版では、(1) の問題文は次のように表記されている (引用)：

For an object Z of $\mathcal{C}$, let $\mathscr{P}(Z)$ be the category whose objects are the epimorphisms $f : Z' \to Z$, a morphism $(f : Z' \to Z) \to (f' : Z'' \to Z)$ being defined by $h : Z' \to Z''$ with $f' \circ h = f$. Prove that $\mathscr{P}(Z)$ is cofiltrant, that is, $\mathscr{P}(Z)^\circ$ is filtrant.

この文章をそのまま読むと、圏 $\mathscr{P}(Z)$ は、Z への射がエピとなるものたちからなる圏 $\mathcal{C}_{/Z}$ の充満部分圏であると読める (というか、この文章は h もエピであることが想定されているようには読めないと思う)。しかし、このように読むと、$\mathscr{P}(Z)$ は cofiltered にはならない。たとえば、k を標数が 2 でない体、$\mathcal{C}$ を k-線形空間の圏、$Z = k$ として、$\mathcal{C}_{/k}$ の対象として $p :\stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{id}_k : X :\stackrel{\mathrm{def}}{=} k \to Z$ と $q :\stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{pr}_1 : Y :\stackrel{\mathrm{def}}{=} k \times k \to Z$ を考え、p, q の間の射として $f_1 : X \to Y$ を $f_1(a) = (a, a)$ で定め、$f_2 : X \to Y$ を $f_2(a) = (a, -a)$ で定める。このとき、線形空間 V と射 $g : V \to X$ が $f_1 \circ g = f_2 \circ g$ を満たせば、g が 0-射であることが容易に従う (標数が 2 でないことを用いる)。従って、とくに、g はエピとはならず、従って、$g : V \to k$ は $\mathscr{P}(Z)$ の対象となることは決してない。このことは $\mathscr{P}(Z)^{\mathrm{op}}$ が [Definition 1.11.2 (1.11.2), KS02] を満たさない (とくに cofiltered ではない) ことを示している。

証明. (1) を示す。$\mathcal{P}(Z)$ の図式 $h_1 : (f_1 : X_1 \to Z) \to (g : Y \to Z) \leftarrow (f_2 : X_2 \to Z) : h_2$ を任意にとって、fiber 積 $X_1 \times_Y X_2$ を考える。$p_i : X_1 \times_Y X_2 \to X_i, (i = 1, 2)$ を射影とする。このとき、$f_1 \circ p_1 = g \circ h_1 \circ p_1 = g \circ h_2 \circ p_2 = f_2 \circ p_2$ であるから、$f :\overset{\mathrm{def}}{=} f_1 \circ p_1$ とすれば、$f : X_1 \times_Y X_2 \to Z$ は圏 $\mathcal{C}_{/Z}$ における fiber 積となる。$\mathcal{P}(Z)$ は終対象 $\mathrm{id}_Z : Z \to Z$ を持つので、従って、$\mathcal{P}(Z)$ が cofiltered であることを示すためには、$f : X_1 \times_Y X_2 \to Z$ がエピ射であることを示すことが十分である。[Exercise 1.6 (3), KS02] より、エピ射の pull-back はエピ射であるから、p_i はエピ射であり、エピ射の合成はエピ射であるから、$f = f_1 \circ p_1$ もエピ射である。以上で (1) の解答を完了する。

(2) (i) を示す。集合の間の写像の圏において、単射の filered colimit は単射である。従って $\tilde{h}_Z$ は左完全函手である。残っているのは $\tilde{h}_Z$ の右完全性を証明することである。$g : X_1 \to X_3$ を $\mathcal{C}$ のエピ射とし、$\tilde{r}_3 \in \tilde{h}_Z(X_3)$ を任意にとる。$\tilde{r}_3$ の代表元を $r_3 : Z_3 \to X_3$ とする。ここで Z_3 はある $\mathcal{P}(Z)$ の対象 $z_3 : Z_3 \to Z$ の domain であり、$r_3 : Z_3 \to X_3$ は $\mathcal{C}$ の射である。図式 $r_3 : Z_3 \to X_3 \leftarrow X_1 : g$ の fiber 積を Z_1 とし、射影を $h : Z_1 \to Z_3, r_1 : Z_1 \to X_1$ とする。エピ射の pull-back はエピ射であるから、h はエピである。従って、$z_1 :\overset{\mathrm{def}}{=} z_3 \circ h : Z_1 \to Z$ は $\mathcal{P}(Z)$ の対象であり、h は $\mathcal{P}(Z)$ の射である。さらに、$g \circ r_1 = r_3 \circ h$ であるから、$r_1 : Z_1 \to X_1$ により代表される元 $\tilde{r}_1 \in \tilde{h}_Z(X_1)$ は射 $\tilde{h}_Z(X_1) \to \tilde{h}_Z(X_3)$ により $\tilde{r}_3$ へと写る。従って $\tilde{h}_Z(X_1) \to \tilde{h}_Z(X_3)$ は全射である。以上で (2) (i) の解答を完了する。

(2) (ii) を示す。$f, f' : X \to X'$ が任意の $Z \in \mathcal{C}$ に対して $\tilde{h}_Z(f) = \tilde{h}_Z(f')$ を満たしていると仮定する。$Z = X$ として、$\mathrm{id}_X : X \to X$ により代表される元を $\tilde{i} \in \tilde{h}_Z(X)$、$f, f' : X \to X'$ により代表される元を $\tilde{f}, \tilde{f}' \in \tilde{h}_Z(X')$ とする。このとき、

$$\tilde{f} = \tilde{h}_Z(f) \circ \tilde{i} = \tilde{h}_Z(f') \circ \tilde{i} = \tilde{f}'$$

となる。$\mathcal{P}(Z)$ の各射はエピなので、自然な射 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X) \to \tilde{h}_Z(X)$ は単射である。従って、等式 $\tilde{f} = \tilde{f}'$ は $f = f'$ であることを意味する。以上で (2) (ii) の解答を完了する。

(2) (iii) を示す。$\mathcal{C}$ を離散圏 (射が id しかない圏) とみなした圏を $\bar{\mathcal{C}}$ とおく。$\bar{\mathcal{C}}$ から Ab への (加法的とは限らない) 函手のなす圏 $[\bar{\mathcal{C}}, \mathsf{Ab}]$ はアーベル圏である。$\tilde{h} : \mathcal{C} \to [\bar{\mathcal{C}}, \mathsf{Ab}], X \mapsto [Z \mapsto \tilde{h}_Z(X)]$ はアーベル圏の間の加法的函手である。(2) (i) より、各 $\tilde{h}_Z$ は完全函手であるから、$\tilde{h}$ も完全函手である。(2) (ii) より $\tilde{h}$ は忠実である。従って、(2) (iii) を示すためには、アーベル圏の間の忠実な完全函手 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ と $\mathcal{C}$ の射の列 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ に対して、$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ が $\mathcal{C}$ で完全であることと $F(X) \xrightarrow{F(f)} F(Y) \xrightarrow{F(g)} F(Z)$ が $\mathcal{D}$ で完全であることが同値であることを証明することが十分である。F は忠実なので、$g \circ f = 0$ であることと $F(g) \circ F(f) = 0$ であることは同値である。F は完全函手なので、$\mathrm{Im}(F(f))$ と $F(\mathrm{Im}(f))$ は自然に同型であり、$\ker(F(g))$ と $F(\ker(g))$ も自然に同型である。さらに F は忠実なので、自然な射 $\mathrm{Im}(f) \to \ker(g)$ が同型であることは F での像 $F(\mathrm{Im}(f)) \to F(\ker(g))$ が同型であることと同値である。よって、$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ が $\mathcal{C}$ で完全であることと $F(X) \xrightarrow{F(f)} F(Y) \xrightarrow{F(g)} F(Z)$ が $\mathcal{D}$ で完全であることは同値である。以上で問題 I.7 の証明を完了する。 □

References

[KS02] M. Kashiwara and P. Schapira. *Sheaves on Manifolds*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer Berlin Heidelberg, 2002. ISBN: 9783540518617. URL: https://www.springer.com/jp/book/9783540518617.