Sheaves on Manifolds Exercise II.21 の解答

ゆじとも

2021 年 2 月 9 日

Sheaves on Manifolds [Exercise II.21, KS02] の解答です。

II Sheaves

問題 II.21. X を位相空間、$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を X の閉部分集合の減少列で $X_n = X, (n \ll 0)$ と $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n = \varnothing$ を満たすものとする。$F \in \mathsf{D}^+(X)$ は $k \neq n$ に対して $H^k_{X_n\setminus X_{n+1}}(F) = 0$ を満たすとする。完全三角

$$R\Gamma_{X_{n+1}\setminus X_{n+2}}(F) \to R\Gamma_{X_n\setminus X_{n+2}}(F) \to R\Gamma_{X_n\setminus X_{n+1}}(F) \xrightarrow{+1}$$

のコホモロジーをとって、連結準同型を $d^n : H^n_{X_n\setminus X_{n+1}}(F) \to H^{n+1}_{X_{n+1}\setminus X_{n+2}}(F)$ と表す。$K^n \overset{\mathrm{def}}{:=} H^n_{X_n\setminus X_{n+1}}(F)$ と表す。

(1) $(K^\bullet, d^\bullet)$ は X 上の層の複体であることを示せ。

(2) $k < n$ に対して $H^k_{X_n}(F) = 0$ であり、さらに $H^n_{X_{n-1}}(F) \xrightarrow{\sim} H^n(F)$ は同型射であることを示せ。

(3) $G^n = \Gamma_{X_n}(F^n) \cap (d^n_F)^{-1}(\Gamma_{X_{n+1}}(F^{n+1}))$ とおく。射 $d^n_G : G^n \to G^{n+1}$ を構成して、$G = (G^\bullet, d^\bullet)$ が複体であることを示せ。さらに $G \to K$ と $G \to F$ を構成して、各 F^n が脆弱層である場合に擬同型となることを示せ。$\mathsf{D}^+(X)$ において $F \cong K$ であることを結論付けよ。

証明. (1) を示す。明らかに以下の図式が可換である：

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Gamma_{X_{n+2}\setminus X_{n+3}}(-) \arrow[r] \arrow[d] & \Gamma_{X_n\setminus X_{n+3}}(-) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \Gamma_{X_n\setminus X_{n+2}}(-) \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \Gamma_{X_{n+1}\setminus X_{n+3}}(-) \arrow[r] & \Gamma_{X_n\setminus X_{n+3}}(-) \arrow[r] & \Gamma_{X_n\setminus X_{n+1}}(-).
\end{tikzcd}$$

従って、完全三角の間の射

$$\begin{tikzcd}
R\Gamma_{X_n\setminus X_{n+3}}(-) \arrow[r] \arrow[d, equal] & R\Gamma_{X_n\setminus X_{n+2}}(-) \arrow[r] \arrow[d] & R\Gamma_{X_{n+2}\setminus X_{n+3}}(-)[1] \arrow[r, "+1"] \arrow[d] & {} \\
R\Gamma_{X_n\setminus X_{n+3}}(-) \arrow[r] & R\Gamma_{X_n\setminus X_{n+1}}(-) \arrow[r] & R\Gamma_{X_{n+1}\setminus X_{n+3}}(-)[1] \arrow[r, "+1"] & {}
\end{tikzcd}$$

を得る。縦に伸ばして横向きに書けば、完全三角の射

$$\begin{tikzcd}
R\Gamma_{X_n\setminus X_{n+2}}(-) \arrow[r] \arrow[d] & R\Gamma_{X_n\setminus X_{n+1}}(-) \arrow[r] \arrow[d] & R\Gamma_{X_{n+1}\setminus X_{n+2}}(-)[1] \arrow[r, "+1"] \arrow[d, equal] & {} \\
R\Gamma_{X_{n+2}\setminus X_{n+3}}(-)[1] \arrow[r] & R\Gamma_{X_{n+1}\setminus X_{n+3}}(-)[1] \arrow[r] & R\Gamma_{X_{n+1}\setminus X_{n+2}}(-)[1] \arrow[r, "+1"] & {}
\end{tikzcd}$$

を得る。n 次と $n+1$ 次の周辺でコホモロジーをとれば、可換図式

$$\begin{tikzcd}
\longrightarrow H^n_{X_n\setminus X_{n+1}}(-) \arrow[r, "d^n"] \arrow[d] & H^{n+1}_{X_{n+1}\setminus X_{n+2}}(-) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^{n+1}_{X_n\setminus X_{n+2}}(-) \longrightarrow \arrow[d] \\
\longrightarrow H^{n+1}_{X_{n+1}\setminus X_{n+3}}(-) \arrow[r] & H^{n+1}_{X_{n+1}\setminus X_{n+2}}(-) \arrow[r, "d^{n+1}"] & H^{n+2}_{X_{n+2}\setminus X_{n+3}}(-) \longrightarrow
\end{tikzcd}$$

を得る。横向きは完全であるから、$d^{n+1}\circ d^n=0$ が従う。以上で (1) の証明を完了する。

(2) を示す。完全三角

$$R\Gamma_{X_{i+1}}(F)\to R\Gamma_{X_i}(F)\to R\Gamma_{X_i\setminus X_{i+1}}(F)\xrightarrow{+1}$$

でコホモロジーをとる。各 $k<i$ に対して $H^k_{X_i\setminus X_{i+1}}(F)\cong 0$ であるので、各 $k<i$ に対して同型射 $H^k_{X_{i+1}}(F)\xrightarrow{\sim}H^k_{X_i}(F)$ を得る。$i\geq n$ としてこの同型射を繋ぐことによって、各 $k<n$ に対して同型射 $H^k_{X_i}(F)\xrightarrow{\sim}H^k_{X_n}(F),(i\gg 0)$ を得る。$x\in X$ を任意にとれば、$\bigcap_{i\in\mathbb{N}}X_i=\varnothing$ であるので、ある $i\gg 0$ が存在して $x\in X_i$ となる。点 x で stalk をとることによって、$0=H^k_{X_i}(F)_x\xrightarrow{\sim}H^k_{X_n}(F)_x$ を得る ($H^k_{X_i}(F)$ は X_i の上に台を持つ)。$H^k_{X_n}(F)$ は任意の点の stalk が 0 であるので、$H^k_{X_n}(F)=0$ が従う。これが示すべきことの一つ目である。また、各 $k>i$ に対して $H^k_{X_i\setminus X_{i+1}}(F)\cong 0$ であるので、各 $k>i+1$ に対して同型射 $H^k_{X_{i+1}}(F)\xrightarrow{\sim}H^k_{X_i}(F)$ を得る。$k=n$ として $i\leq n-2$ とすれば、この同型射を繋ぐことにより、同型射 $H^n_{X_{n-1}}(F)\xrightarrow{\sim}H^n_{X_i}(F),(i\ll 0)$ を得る。$X_i=X,(i\ll 0)$ であるので、同型射 $H^n_{X_{n-1}}(F)\xrightarrow{\sim}H^n(F)$ を得る。これが示すべきことの二つ目である。以上で (2) の証明を完了する。

(3) を示す。自然な包含射を $i^n:\Gamma_{X_n}(F^n)\to F^n$ とおく。G^n の定義より、

$$\begin{tikzcd}
G^n \arrow[r, "q^n"] \arrow[d, "p^n"'] & \Gamma_{X_{n+1}}(F^{n+1}) \arrow[d, "i^{n+1}"] \\
\Gamma_{X_n}(F^n) \arrow[r, "i^n\circ d^n"] & F^{n+1}
\end{tikzcd}$$

は pull-back 図式である。また、p^n はモノ射である。さらに、

$$d^{n+1}\circ i^{n+1}\circ q^n=d^{n+1}\circ d^n\circ i^n\circ p^n=0$$

であるので、$i^{n+1}\circ q^n:G^n\to\Gamma_{X_{n+1}}(F^{n+1})$ と 0-射 $G^n\to\Gamma_{X_{n+2}}(F^{n+2})$ は $p^{n+1}\circ d^n_G=q^n,q^{n+1}\circ d^n_G=0$ となる射 $d^n_G:G^n\to G^{n+1}$ を一意的に定義する。このとき、

$$\begin{aligned}
p^{n+2}\circ d^{n+1}_G\circ d^n_G&=q^{n+1}\circ d^n_G=0,\\
q^{n+2}\circ d^{n+1}_G\circ d^n_G&=0\circ d^n_G=0
\end{aligned}$$

が成り立つ。従って $d^{n+1}_G\circ d^n_G=0$ であり、$(G^\bullet,d^\bullet_G)$ は層の複体である。また、$p^n\circ i^n:G^n\to F^n$ は複体の射 $G\to F$ を与える。

各 F^n が脆弱層であるとする。このとき任意の局所閉集合 $?\subset X$ に対して $R\Gamma_?(F)\cong\Gamma_?(F)$ が成り立つ。i^{n+1} はモノなので、

$$\ker(d^n_G)=\ker(i^{n+1}\circ d^n_G)=\ker(d^n\circ p^n\circ i^n)=\ker(d^n)\cap\Gamma_{X_n}(F^n)=\Gamma_{X_n}(\ker(d^n))$$

が成り立つ。定義より $\mathrm{Im}(d^{n-1}_G)=\Gamma_{X_n}(F^n)\cap\mathrm{Im}(d^{n-1})=\Gamma_{X_n}(\mathrm{Im}(d^{n-1}))$ が成り立つ。従って、$H^n(G)\cong$

$\Gamma_{X_n}(\ker(d^n))/\Gamma_{X_n}(\mathrm{Im}(d^{n-1}))$ であり、さらに

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Im}(d_G^{n-1}) & \longrightarrow & \mathrm{Im}(d^{n-1}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \ker(d_G^n) & \longrightarrow & \ker(d^n) \end{array}$$

は Cartesian である。よって、[Exercise 1.6 (3), KS02] より、$H^n(G) \to H^n(F)$ は単射である。また、複体の完全列

$$0 \to \Gamma_{X_n}(F) \to \Gamma_{X_{n-1}}(F) \to \Gamma_{X_n \setminus X_{n-1}}(F) \to 0$$

でコホモロジーをとることにより、完全列

$$H^n_{X_n}(F) \to H^n_{X_{n-1}}(F) \to H^n_{X_{n-1} \setminus X_n}(F)$$

を得る。ここで仮定より、$H^n_{X_{n-1} \setminus X_n}(F) = 0$ であり、さらに (2) より、$H^n_{X_{n-1}}(F) \cong H^n(F)$ であるので、$H^n_{X_n}(F) \to H^n(F)$ は全射である。一方、$\Im(d^{n-1}) \cong \Gamma_{X_n}(F^n) \times$ 層の複体の完全列

$$0 \to \Gamma_{X_n}(F) \to F \to \Gamma_{X \setminus X_n}(F) \to 0$$

□

感想． (3) は、filtered complex のスペクトル系列の特別な場合。

References

[KS02] M. Kashiwara and P. Schapira. *Sheaves on Manifolds*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer Berlin Heidelberg, 2002. ISBN: 9783540518617. URL: https://www.springer.com/jp/book/9783540518617.