Sheaves on Manifolds Exercise I.3 の解答

ゆじとも

2021 年 2 月 9 日

Sheaves on Manifolds [Exercise I.3, KS02] の解答です。

I Homological Algebra

問題 I.3. $\mathcal{C}$ を各 Hom がアーベル群の構造を持ち、0 対象を持ち、さらに任意の二つの対象に対する積を持つ圏とする (cf. [Definition 1.2.1 (i),(ii),(iii), KS02])。このとき、$Z \in \mathcal{C}$ が函手 $W \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, W) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, W)$ の表現対象であるための必要十分条件は、射 $i_1 : X \to Z, i_2 : Y \to Z, p_1 : Z \to X, p_2 : Z \to Y$ が存在し、

$$p_2 \circ i_1 = 0,\ p_1 \circ i_2 = 0,\ p_1 \circ i_1 = \mathrm{id}_X,\ p_2 \circ i_2 = \mathrm{id}_Y,\ i_1 \circ p_1 + i_2 \circ p_2 = \mathrm{id}_Z$$

となることである。

証明. 必要性を示す。$Z \in \mathcal{C}$ が函手 $W \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, W) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, W)$ の表現対象であると仮定する。自然な全単射 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, Z) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ による id_Z の送り先を (i_1, i_2) とする。自然な全単射 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ により $(\mathrm{id}_X, 0)$ へと写る射を $p_1 : Z \to X$ とし、自然な全単射 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Y)$ により $(0, \mathrm{id}_Y)$ へと写る射を $p_2 : Z \to Y$ とする。このとき、i_1, i_2, p_1, p_2 の定義より、

$$p_1 \circ i_1 = \mathrm{id}_X,\ p_1 \circ i_2 = 0,\ p_2 \circ i_1 = 0,\ p_2 \circ i_2 = \mathrm{id}_Y$$

であることがわかる。また、

$$\begin{aligned}(i_1 \circ p_1 + i_2 \circ p_2) \circ i_1 &= i_1 \circ p_1 \circ i_1 + i_2 \circ p_2 \circ i_1 = i_1 + 0 = i_1,\\(i_1 \circ p_1 + i_2 \circ p_2) \circ i_2 &= i_1 \circ p_1 \circ i_2 + i_2 \circ p_2 \circ i_2 = 0 + i_2 = i_2\end{aligned}$$

であるが、このような性質を満たす射 $Z \to Z$ は Z の普遍性によって id_Z に限られる。従って $i_1 \circ p_1 + i_2 \circ p_2 = \mathrm{id}_Z$ もわかる。以上で必要性の証明を完了する。

十分性を示す。問いの条件を満たす射 i_1, i_2, p_1, p_2 が存在すると仮定する。i_1, i_2, p_1, p_2 を合成することにより、W について自然な射

$$\begin{aligned}&\varphi : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, W) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, W) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, W), && \varphi(f, g) :\stackrel{\mathrm{def}}{=} f \circ p_1 + g \circ p_2,\\&\psi : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, W) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, W) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, W), && \psi(h) :\stackrel{\mathrm{def}}{=} (h \circ i_1, h \circ i_2)\end{aligned}$$

を得る。各 $f : X \to W, g : Y \to W, h : Z \to W$ について

$$\begin{aligned}
\varphi(\psi(h)) &= \varphi(h \circ i_1, h \circ i_2) = h \circ i_1 \circ p_1 + h \circ i_2 \circ p_2 = h \circ (i_1 \circ p_1 + i_2 \circ p_2) = h \circ \mathrm{id}_Z = h \\
\psi(\varphi(f, g)) &= \psi(f \circ p_1 + g \circ p_2) = ((f \circ p_1 + g \circ p_2) \circ i_1, (f \circ p_1 + g \circ p_2) \circ i_2) \\
&= (f \circ p_1 \circ i_1 + g \circ p_2 \circ i_1, f \circ p_1 \circ i_2 + g \circ p_2 \circ i_2) = (f, g)
\end{aligned}$$

となるので、φ, ψ は全単射である。これは Z が所望の表現対象であることを示している。以上で問題 I.3 の解答を完了する。 $\square$

References

[KS02] M. Kashiwara and P. Schapira. *Sheaves on Manifolds*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer Berlin Heidelberg, 2002. ISBN: 9783540518617. URL: https://www.springer.com/jp/book/9783540518617.