Sheaves on Manifolds Exercise II.5 の解答

ゆじとも

2021 年 2 月 9 日

Sheaves on Manifolds [Exercise II.5, KS02] の解答です。

II Sheaves

本文では、パラコンパクト空間であるという場合には、ハウスドルフ性を常に仮定していることに注意しておく (cf. 本文 [Proposition 2.5.1, KS02] 直後の記述)。

問題 II.5. X をパラコンパクトハウスドルフ空間とする。X 上の層 F が **soft** であるとは、任意の閉集合 $Z \subset X$ に対して $F(X) \to F(Z)$ が全射であることを言う。F が soft であるとき、任意の $i > 0$ に対して $H^i(X, F) = 0$ であることを示せ。

証明. 問題 II.5 を示すには、soft な層たちからなる $\mathsf{Ab}(X)$ の充満部分圏が $\Gamma(X, -)$-injective であることを示すこと、従って、次の事柄を示すことが十分である (cf. 本文 [Definition 1.8.2, KS02] の直後の記述)：

(1) 脆弱層は soft である (従って、とくに、任意の層 F に対して、F を部分層として含む soft な層 G が存在する)。

(2) $0 \to F \to G \to H \to 0$ が層の完全列であるとき、F, G が soft であるとすると、H も soft である。

(3) $0 \to F \to G \to H \to 0$ が層の完全列であるとき、F が soft であれば、次の列も完全である：

$$0 \to \Gamma(X, F) \to \Gamma(X, G) \to \Gamma(X, H) \to 0.$$

(1) は本文 [Proposition 2.5.1 (iii), KS02] よりただちに従う。(2) は、閉部分集合の上への制限をする函手が完全であること、soft な層の閉部分集合への制限が soft であること、(3)、へびの補題、より従う。残っているのは (3) を示すことである。

(3) を示す。$u \in \Gamma(X, H)$ を任意にとる。もとの層の列が完全であることから、u は局所的には G へと持ち上がる、すなわち、ある X の開被覆 $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ と各 U_i 上の G の切断 $t_i^1 \in \Gamma(U_i, G)$ が存在して、$t_i \mapsto u|_{U_i}$ となる。U_i を局所有限開被覆による細分でおきかえて、t_i を制限することを考えれば、(3) を示すためには、U_i は局所有限であると仮定しても一般性を失わない。本文 [Proposition 2.5.1, KS02] の主張が終わるところからその証明が始まる前までの記述にあるとおり、U_i の開被覆による細分 $(V_i)_{i \in I}$ であって、任意の $i \in I$ に対して $\bar{V}_i \subset U_i$ となるものが存在する。このとき、$(\bar{V}_i)_{i \in I}$ も局所有限である。$i \in I$ に対して $Z_i :\overset{\text{def}}{=} \bar{V}_i$ とおく。すると、$(Z_i)_{i \in I}$ が局所有限であることから、任意の $J \subset I$ に対して

$$Z_J :\overset{\text{def}}{=} \bigcup_{j \in J} Z_j = \overline{\bigcup_{j \in J} V_j} \subset X$$

である (とくに Z_J は閉である)。

$$\mathcal{S} :\overset{\text{def}}{=} \{(J,t) | J \subset I, t \in \Gamma(Z_J, G), \text{s.t.}, t|_{Z_J} \mapsto u|_{Z_J}\}$$

と定義して、

$$(J_1, t_1) \le (J_2, t_2) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} J_1 \subset J_2 \text{かつ } t_1 = t_2|_{Z_{J_1}}$$

と定義する。$\mathcal{T} \subset \mathcal{S}$ を全順序部分集合とする。$J_{\mathcal{T}} :\overset{\text{def}}{=} \bigcup_{(J,t_J)\in\mathcal{T}} J$ とおく。このとき、$Z_{J_{\mathcal{T}}} = \bigcup_{(J,t_J)\in\mathcal{T}} Z_J$ であるから、各 $(J, t_J) \in \mathcal{T}$ に対して層の全射 $G_{Z_{J_{\mathcal{T}}}} \to G_{Z_J}$ を得る。この全射は Z_J 上の各点の stalk の間で同型射であるから、自然な射 $G_{Z_{J_{\mathcal{T}}}} \xrightarrow{\sim} \lim_{J\in\mathcal{T}} G_{Z_J}$ は同型射となる。大域切断をとることにより、同型射 $\Gamma(Z_{J_{\mathcal{T}}}, G) \xrightarrow{\sim} \lim_{J\in\mathcal{T}} \Gamma(Z_J, G)$ を得る。従って、各切断 $t_J \in \Gamma(Z_J, G)$ は切断 $t \in \Gamma(Z_{J_{\mathcal{T}}}, G)$ を定め、$\mathcal{T}$ は上界 $(J_{\mathcal{T}}, t)$ を持つ。よって、Zorn の補題により、$\mathcal{S}$ には極大元 (J,t) が存在する。$J = I$ であることを証明できれば、$Z_J = X$ であるから、(3) の証明が完了する。よって、(3) が成り立つためには、$J = I$ であることが十分である。元 $i \in I \setminus J$ が存在することを仮定する。$t_i|_{Z_i\cap Z_J} - t|_{Z_i\cap Z_J} \mapsto 0$ であるから、$t_i|_{Z_i\cap Z_J} - t|_{Z_i\cap Z_J} \in F(Z_i \cap Z_J)$ である。F は soft であり、$Z_i \cap Z_J \subset X$ は閉であるから、ある $s \in \Gamma(X, F)$ が存在して、$s|_{Z_i\cap Z_J} = t_i|_{Z_i\cap Z_J} - t|_{Z_i\cap Z_J}$ となる。$t'_i :\overset{\text{def}}{=} t_i - s|_{U_i}$ と定義すると、s の定義より、$t'_i|_{Z_i\cap Z_J} = t|_{Z_i\cap Z_J}$ が成り立つ。従って、本文 [Proposition 2.3.6 (vi), KS02] より、$J' :\overset{\text{def}}{=} J \cup \{i\}$ とおけば、ある $t' \in G(Z_{J'})$ が存在して、$t'|_{Z_i} = t'_i$ かつ $t'|_{Z_J} = t$ となる。よって、再び本文 [Proposition 2.3.6 (vi), KS02] より、$t' \mapsto u|_{Z_{J'}}$ である。これは $(J,t) < (J', t')$ を意味し、(J,t) の極大性に反する。以上で $I = J$ が従い、(3) の証明を、従って、問題 II.5 の解答を、完了する。 □

References

[KS02] M. Kashiwara and P. Schapira. *Sheaves on Manifolds*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer Berlin Heidelberg, 2002. ISBN: 9783540518617. URL: https://www.springer.com/jp/book/9783540518617.