

# Sheaves on Manifolds Exercise II.19 の解答

ゆじとも

2021 年 2 月 9 日

Sheaves on Manifolds [Exercise II.19, [KS02](#)] の解答です。

## II Sheaves

本文では、局所コンパクト空間であるという場合には、ハウスドルフ性を常に仮定していることに注意しておく (cf. 本文 [Proposition 2.5.1, [KS02](#)] 直前の記述)。

**問題 II.19.**  $X$  を局所コンパクト空間として、 $A$  を可換環で  $\mathrm{wgl}d(A) < \infty$  であるものとする。 $F \in D^+(A_X)$  として、 $\Omega, Z \subset X$  をそれぞれ開集合と閉集合とする。 $a_X$  を一意的な射  $X \rightarrow \{\mathrm{pt}\}$  とする。以下を示せ：

$$R\Gamma(\Omega, F) \cong Ra_{X*}R\mathcal{H}om(A_\Omega, F), \quad (1)$$

$$R\Gamma_c(\Omega, F) \cong Ra_{X!}(A_\Omega \otimes^L F), \quad (2)$$

$$R\Gamma_Z(X, F) \cong Ra_{X*}R\mathcal{H}om(A_Z, F), \quad (3)$$

$$R\Gamma_c(Z, F) \cong Ra_{X!}(A_Z \otimes^L F). \quad (4)$$

**証明.** (1) と (3) を示す。 $F$  を入射的のとすると、本文 [Proposition 2.4.6 (vii), [KS02](#)] より、 $\mathcal{H}om(-, F)$  は脆弱層である。従って、 $a_{X*} = \Gamma(X, -)$  に関して acyclic である。よって

$$R(a_{X*} \circ \mathcal{H}om(A_\Omega, -)) \cong Ra_{X*} \circ R\mathcal{H}om(A_\Omega, -), \quad R(a_{X*} \circ \mathcal{H}om(A_Z, -)) \cong Ra_{X*} \circ R\mathcal{H}om(A_Z, -),$$

が成り立つ。ここで  $\Omega \subset X$  は開であるので、 $a_{X*} \circ \mathcal{H}om(A_\Omega, -) \cong \Gamma(\Omega, -)$  が成り立ち、 $Z \subset X$  は閉であるので、 $a_{X*} \circ \mathcal{H}om(A_Z, -) \cong \Gamma_Z(X, -)$  が成り立つ。よって

$$R\Gamma(\Omega, -) \cong Ra_{X*} \circ R\mathcal{H}om(A_\Omega, -), \quad R\Gamma_Z(X, -) \cong Ra_{X*} \circ R\mathcal{H}om(A_Z, -),$$

が成り立つ。以上で (1) と (3) の証明を完了する。

(2) と (4) を示す。 $Z$  を局所閉集合とする。 $A_Z$  は  $A_X$ -flat なので、 $A_Z \otimes^L (-) \cong A_Z \otimes (-)$  が成り立つ。また、本文 [Proposition 2.3.10, [KS02](#)] より、 $A_Z \otimes (-) \cong (-)_Z$  が成り立つ。さらに、 $(-)_Z$  は完全関手であるので、従って、

$$Ra_{X!} \circ (-)_Z \cong R(a_{X!} \circ (-)_Z) \cong R\Gamma_c(Z, -)$$

が成り立つ。 $Z$  を開または閉とすることにより、(2) と (4) が従う。以上で [問題 II.19](#) の解答を完了する。□

## References

- [KS02] M. Kashiwara and P. Schapira. *Sheaves on Manifolds*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer Berlin Heidelberg, 2002. ISBN: 9783540518617. URL: <https://www.springer.com/jp/book/9783540518617>.