

# Sheaves on Manifolds Exercise I.22 の解答

ゆじとも

2021 年 2 月 9 日

Sheaves on Manifolds [Exercise I.22, [KS02](#)] の解答です。

## I Homological Algebra

**問題 I.22.**  $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}$  をそれぞれアーベル圏として、 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}, G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$  を左完全函手とする。 $F$ -injective な  $\mathcal{I} \subset \mathcal{C}$  と  $G$ -injective な  $\mathcal{J} \subset \mathcal{D}$  が存在して、 $F(\mathcal{I}) \subset \mathcal{J}$  となると仮定する (本文 [Proposition 1.8.7, [KS02](#)] の状況設定)。  $X \in \mathbf{D}^+(\mathcal{C})$  は  $R^j F(X) = 0, (\forall j < n)$  を満たすと仮定する。  $R^n(G \circ F)(X) \cong (G \circ R^n F)(X)$  を示せ。

**証明.** 本文 [Remark 1.8.6, [KS02](#)] を  $RF(X)$  と  $G$  に対して適用することで、任意の  $j < n$  に対して  $R^j G(RF(X)) = 0$  であり、さらに  $R^n G(RF(X)) \cong G(H^n(RF(X))) = G(R^n F(X))$  である。また、本文 [Proposition 1.8.7, [KS02](#)] より  $R(G \circ F)(X) \cong RG(RF(X))$  であるので、 $n$  番目のコホモロジーをとれば  $R^n(G \circ F)(X) \cong R^n G(RF(X))$  が従う。よって  $R^n(G \circ F)(X) \cong R^n G(RF(X)) \cong G(R^n F(X))$  となり、以上で [問題 I.22](#) の解答を完了する。  $\square$

## References

- [KS02] M. Kashiwara and P. Schapira. *Sheaves on Manifolds*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer Berlin Heidelberg, 2002. ISBN: 9783540518617. URL: <https://www.springer.com/jp/book/9783540518617>.