Sheaves on Manifolds Exercise I.14 の解答

ゆじとも

2021 年 2 月 9 日

Sheaves on Manifolds [Exercise I.14, KS02] の解答です。

I Homological Algebra

問題 I.14. $\mathcal{C}$ を圏、S を積閉系とする。対象 $X \in \mathcal{C}$ に対して、圏 S_X を次で定義する：

- S_X の対象は S に属する射 $s : X' \to X$ である。
- 対象 $s : X' \to X$ から対象 $s' : X'' \to X$ への射は、$\mathcal{C}$ の射 $h : X'' \to X'$ であって $s' = s \circ h$ となるものとして定義する ($\mathcal{C}$ の射の向きとは逆向きであることに注意)。

このとき、以下を証明せよ：

(1) S_X は filtered である。

(2) $X, Y \in \mathcal{C}$ を対象とする。このとき、以下が成り立つ：

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_S}(X, Y) = \mathrm{colim}_{X' \in S_X} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X', Y).$$

(3) 射を逆向きにすることで圏 S_Y^a を定義し、次が成り立つことを示せ：

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_S}(X, Y) = \mathrm{colim}_{Y' \in S_Y^a} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y').$$

注意. 第一版の本文では、(1) は、$(S_X)^{\mathrm{op}}$ が filtered であることを示す問題となっているが、これは誤植であると思われる。なお、$(S_X)^{\mathrm{op}}$ が filtered であることは、終対象 $\mathrm{id}_X : X \to X$ を持つことから自明である。

証明. (1) を示す。S_X^{op} が cofiltered であることを証明すれば良い。$[s_1 : X_1 \to X], [s_2 : X_2 \to X]$ を S_X^{op} の対象とする。すると本文 [Definition 1.6.1 (S3), KS02] より、ある S に属する射 $t : W \to X_1$ と $\mathcal{C}$ の射 $f : W \to X_2$ が存在して $s_1 \circ t = s_2 \circ f$ となる。$s_1, t \in S$ なので、本文 [Definition 1.6.1 (S2), KS02] より、$u :\overset{\mathrm{def}}{=} s_1 \circ t \in S$ である。従って、$[u : W \to X]$ は S_X^{op} の対象であり、f, t は S_X^{op} の射である。よって S_X は本文の条件 [Definition 1.11.2 (1.11.1), KS02] を満たす。

次に、$[s_1 : X_1 \to X], [s_2 : X_2 \to X]$ を S_X^{op} の対象とし、$f_1, f_2 : s_1 \to s_2$ を S_X^{op} の二つの射とする。このとき、$s_2 \circ f_1 = s_2 \circ f_2$ であるから、本文 [Definition 1.6.1 (S4), KS02] より、S に属するある射 $t : Y \to X_1$ が存在して、$f_1 \circ t = f_2 \circ t$ となる。$u :\overset{\mathrm{def}}{=} s_1 \circ t$ とすれば、本文 [Definition 1.6.1 (S2), KS02] より $u \in S$ であるから、$[u : Y \to X]$ は S_X^{op} の対象であり、$t : u \to s_1$ は S_X^{op} の射である。よって S_X は本文の条件 [Definition 1.11.2 (1.11.2), KS02] を満たす。以上で (1) の証明を完了する。

(2) を示す。

$$T :\overset{\mathrm{def}}{=} \{(X', s, f) | X' \in \mathcal{C}, [s : X' \to X] \in S, f : X' \to Y\}$$

と置く (本文 [Definition 1.6.2 (S3), KS02] の Hom 集合の定義式の割る前の集合) と、

$$T = \coprod_{[s:X'\to X]\in S_X} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X', Y)$$

である。また、$f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X', Y), g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X'', Y)$ に対して本文 [Definition 1.6.2, KS02] で定義されている関係は、ある S_X の射 $X' \to X''' \leftarrow X''$ が存在して、f, g は $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X''', Y)$ において等しい、ということを意味している。従って、集合の圏における余極限の具体的な構成を思い出すと、$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_S}(X, Y) = \mathrm{colim}_{X'\in S_X} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X', Y)$ となることがわかる。以上で (2) の証明を完了する。

(3) を示す。$S^a_Y :\overset{\text{def}}{=} ((S^{\mathrm{op}})_Y)^{\mathrm{op}}$ とおく。ただし S^{op} は S に対応する圏 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ の積閉系である。(1) より $(S^{\mathrm{op}})_Y$ は cofiltered であるから、$((S^{\mathrm{op}})_Y)^{\mathrm{op}}$ は filtered である。また (2) より

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}_{S^{\mathrm{op}}}}(Y, X) = \mathrm{colim}_{Y'\in (S^{\mathrm{op}})_Y} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(Y', X)$$

である。op をとれば、

$$\mathrm{Hom}_{(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}_{S^{\mathrm{op}}})^{\mathrm{op}}}(X, Y) = \mathrm{colim}_{Y'\in S^a_Y} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y')$$

であることが従う。$(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}_{S^{\mathrm{op}}})^{\mathrm{op}} = \mathcal{C}_S$ であること (cf. 本文 [Remark 1.6.4, KS02]) に注意すれば、所望の等式を得る。以上で (3) の証明を完了し、問題 I.14 の解答を完了する。 □

References

[KS02] M. Kashiwara and P. Schapira. *Sheaves on Manifolds*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer Berlin Heidelberg, 2002. ISBN: 9783540518617. URL: https://www.springer.com/jp/book/9783540518617.