# Sheaves on Manifolds Exercise II.9 の解答

ゆじとも

2021 年 2 月 9 日

Sheaves on Manifolds [Exercise II.9, KS02] の解答です。

## II Sheaves

本文では、局所コンパクト空間であるという場合には、ハウスドルフ性を常に仮定していることに注意しておく (cf. 本文 [Proposition 2.5.1, KS02] 直前の記述)。

**問題 II.9.** $X$ を位相空間とする。

(1) $F$ を $X$ 上の層として、$n \geq 0$ を自然数とする。以下の条件が同値であることを示せ：

  (i) 完全列 $0 \to F \to F^0 \to \cdots \to F^n \to 0$ で各 $j = 0, \cdots, n$ に対して $F^j$ が脆弱であるものが存在する。

  (ii) $0 \to F \to F^0 \to \cdots \to F^n \to 0$ が完全であり、各 $j < n$ に対して $F^j$ が脆弱であれば、$F^n$ も脆弱である。

  (iii) 任意の閉部分集合 $Z \subset X$ と任意の $k > n$ に対して $H^k_Z(X, F) = 0$ が成り立つ。

  (iv) 任意の局所閉部分集合 $Z \subset X$ と任意の $k > n$ に対して $H^k_Z(X, F) = 0$ が成り立つ。

  (v) 任意の閉部分集合 $Z \subset X$ と任意の $k > n$ に対して $H^k_Z(F) = 0$ が成り立つ。

  (vi) 任意の局所閉部分集合 $Z \subset X$ と任意の $k > n$ に対して $H^k_Z(F) = 0$ が成り立つ。

  これらの条件を満たす最小の $n \geq 0$ を $F$ の**脆弱次元** (flabby dimension) と言い、$X$ 上のすべての層 $F$ の脆弱次元の sup を $X$ の**脆弱次元**と言う。

(2) $X$ を局所コンパクトハウスドルフであるとする。$X$ 上の層 $F$ の **$c$-soft dimension** を同様に定義して、この場合にも (1) の条件 (i) から (iv) に対応するものが同値であることを確認せよ。

(3) $X$ を局所コンパクトハウスドルフであるとする。このとき、以下の不等式を証明せよ：

$$F \text{ の } c\text{-soft dimension} \leq F \text{ の脆弱次元} \leq F \text{ の } c\text{-soft dimension} + 1.$$

**証明.** (1) を示す。帰納法で証明する。$n = 0$ とする。条件 (i) と (ii) はどちらも「$F$ は脆弱層である」と読むことができるので明らかに同値である。(iv) $\Rightarrow$ (iii) と (vi) $\Rightarrow$ (v) が成り立つことは明らかである。また脆弱層は函手 $\Gamma_Z(X, -)$ や $\Gamma_Z(-)$ に対して acyclic である (cf. 本文 [Proposition 2.4.10, KS02] の直前の記述) ので、(i) $\Rightarrow$ (iv), (v) が成り立つ。$U \subset X$ を任意の開集合として、$Z :\stackrel{\text{def}}{=} X \setminus U$ とおけば、

$$0 \to H^0_Z(X, F) \to F(X) \to F(U) \to H^1_Z(X, F),$$
$$0 \to H^0_Z(F) \to F \to \Gamma_U(F) \to H^1_Z(F)$$

は完全であるから、上の列が完全であることから (iii) $\Rightarrow$ (i) が成り立ち、下の列が完全であることと本文 [Proposition 2.4.10, KS02] の証明中で示されている主張 (2.4.1) より、(v) $\Rightarrow$ (i) が成り立つ。以上で $n=0$ の場合に条件 (i) から (vi) が全て同値であることが示された。ある $n$ で所望の同値性が示されていると仮定して、$n+1$ に対して所望の同値性を示す。(iv) $\Rightarrow$ (iii) と (vi) $\Rightarrow$ (v) はいつでも成立する。また、$n$ 番目まで入射分解をとることによって、(ii) $\Rightarrow$ (i) が成り立つ。$F$ が $n+1$ に対して (i) を満たすと仮定する。脆弱層への単射 $f: F \to F_0$ を任意にとる。$\mathrm{coker}(f)$ は $n$ に対して (i) を満たすので、帰納法の仮定より、$\mathrm{coker}(f)$ は $n$ に対して (ii) を満たす。$f$ の取り方は任意だったので、これは $F$ が $n+1$ に対して (ii) を満たすことを意味する。また、完全列 $0 \to F \to F_0 \to \mathrm{coker}(f) \to 0$ で局所コホモロジーをとると、$F_0$ が脆弱層であることから、任意の局所閉集合 $Z \subset X$ と $i \geq 1$ に対して同型射 $H^i_Z(X, \mathrm{coker}(f)) \xrightarrow{\sim} H^{i+1}_Z(X, F)$ と $H^i_Z(\mathrm{coker}(f)) \xrightarrow{\sim} H^{i+1}_Z(F)$ を得る。$\mathrm{coker}(f)$ は $n$ に対して (i) を満たすので、帰納法の仮定より、$\mathrm{coker}(f)$ は $n$ に対して (iv) と (vi) を満たす。よって、$F$ が $n+1$ に対して (iv) と (vi) を満たすことが従う。$F$ が $n+1$ に対して (iii) または (v) を満たすと仮定する。脆弱層への単射 $f: F \to F_0$ を任意にとれば、先ほどと同様にして、$\mathrm{coker}(f)$ が $n$ に対して (iii) または (v) を満たすことが従う。帰納法の仮定より、$\mathrm{coker}(f)$ が $n$ に対して (i) を満たすことが従い、よって $F$ が $n$ に対して (i) を満たすことが従う。以上で (1) の証明を完了する。

(2) を示す。$X$ を局所コンパクトハウスドルフ空間とする。(1) の主張 (i) から (iv) に対応するのは以下の主張である (ほんまか??)：

(1) 完全列 $0 \to F \to F^0 \to \cdots \to F^n \to 0$ で各 $j = 0, \cdots, n$ に対して $F^j$ が $c$-soft であるものが存在する。
(2) $0 \to F \to F^0 \to \cdots \to F^n \to 0$ が完全であり、各 $j < n$ に対して $F^j$ が $c$-soft であれば、$F^n$ も $c$-soft である。
(3) 任意の開集合 $U$ と任意の $k > n$ に対して $H^k_c(U, F|_U) = 0$ が成り立つ。
(4) 任意の局所閉集合 $U$ と任意の $k > n$ に対して $H^k_c(U, F|_U) = 0$ が成り立つ。

帰納法で証明する。まず $n=0$ の場合にこれらの主張が同値であることを示す。(1) と (2) が同値であることは明らかである。また、[Exercise 2.6 (1), KS02] より、(1) と (3) も同値である。(4) から (3) が従うことは明らかである。さらに、$c$-soft な層の局所閉部分集合への制限はまた $c$-soft であるから、[Exercise 2.6 (1), KS02] より、(1) と (2) と (3) のいずれかを仮定すれば (4) が導かれる。以上で $n=0$ の場合の証明を完了する。ある $n$ で所望の同値性が示されていると仮定して、$n+1$ に対して所望の同値性を示す。(4) から (3) が従うことは明らかである。また、$n$ 番目までの入射分解をとれば、入射的な層は脆弱層であり、脆弱層は $c$-soft であるから、これは $n$ 番目までの $c$-soft 分解を与えるので、その余核を考えることによって、(2) から (1) が導かれる。$F$ が $n+1$ に対して (1) を満たすとする。$c$-soft な層への単射 $f: F \to F_0$ を任意にとる。このとき、$\mathrm{coker}(f)$ は $n$ に対して (1) を満たす。従って、帰納法の仮定より、$\mathrm{coker}(f)$ は $n$ に対して (2) を満たす。$f$ の取り方は任意だったので、これは $F$ が $n+1$ に対して (2) を満たすことを意味する。さらに、帰納法の仮定より、$\mathrm{coker}(f)$ は $n$ に対して (4) を満たす。任意に局所閉集合 $U$ をとって、$U$ に制限したあとでコンパクト台つきコホモロジーをとることにより、各 $i \geq 1$ に対して自然な同型射 $H^i_c(U, \mathrm{coker}(f)) \xrightarrow{\sim} H^{i+1}_c(U, F)$ を得る。$\mathrm{coker}(f)$ は $n$ に対して (4) を満たすので、従って $F$ は $n+1$ に対して (4) を満たす。$F$ が $n+1$ に対して (3) を満たすと仮定する。$c$-soft な層への単射 $f: F \to F_0$ をとれば、各 $i \geq 1$ に対して自然な射 $H^i_c(U, \mathrm{coker}(f)) \xrightarrow{\sim} H^{i+1}_c(U, F)$ は同型射であるから、$\mathrm{coker}(f)$ は $n$ に対して (3) を満たす。従って、帰納法の仮定より、$\mathrm{coker}(f)$ は $n$ に対して (1) を満たす。(1) によって存在が要請される $\mathrm{coker}(f)$ の $c$-soft な層

による長さ $n$ の分解を $f$ と繋げることにより、$F$ の $c$-soft な層 による長さ $n+1$ の分解を得るので、$F$ は $n+1$ に対して (1) を満たす。以上で (2) の証明を完了する。

(3) を示す。脆弱層が $c$-soft であることから、不等式 $F$ の $c$-soft dimension $\leq$ $F$ の脆弱次元 が従う。もう一つの不等式を証明する。$F$ の $c$-soft dimension が $n$ であるとする。完全列 $0 \to F \to F^0 \to \cdots \to F^n$ で各 $j$ に対して $F^j$ が脆弱層であるものをとる。$F$ の $c$-soft dimension が $n$ であることから、$\mathrm{Im}(F^{n-1} \to F^n)$ は $c$-soft である。従って、$F$ の脆弱次元が $n+1$ 以下であることを示すためには、次を示すことが十分である：

(†) 局所コンパクトハウスドルフな位相空間 $X$ 上の層の完全列 $0 \to F \to G \to H \to 0$ に対して、$F$ が $c$-soft であり、$G$ が脆弱層であるとき、$H$ も脆弱層である。

$X$ は局所コンパクトであるので、各 $x \in X$ に対して開近傍 $x \in V \subset X$ であって $\bar{V}$ がコンパクトとなるものが存在する。本文 [Proposition 2.4.10, KS02] の証明で示されている主張 (2.4.1) より、(†) を示すためには、$H|_V$ が脆弱であることを示すことが十分である。$Z \subset V$ を閉集合とする。$K \overset{\mathrm{def}}{:=} \bar{Z} \cup (\bar{V} \setminus V)$ とおく。これはコンパクト空間 $\bar{V}$ の閉部分空間であるからコンパクトである。$F$ は $c$-soft であるから、[Exercise 2.6 (1), KS02] より、$H^i_c(X, F) = H^i_c(X \setminus K, F) = 0, (\forall i > 0)$ が成り立つ。各 $i$ に対して $H^i_c(X \setminus K, F) \to H^{i+1}_{c,K}(X, F) \to H^{i+1}_c(X, F)$ は完全であるので、$H^i_{c,K}(X, F) = 0, (\forall i \geq 2)$ が成り立つ。$K$ はコンパクトであるので、$H^i_{c,K}(X, -) \cong H^i_K(X, -)$ が成り立つ。$G$ は脆弱なので、$H^i_K(X, G) = 0, (\forall i > 0)$ が成り立ち、従って、完全列 $0 \to F \to G \to H \to 0$ に函手 $\Gamma_K(X, -)$ を適用すると、$H^i_K(X, H) = 0, (\forall i > 0)$ が成り立つ。$H(X) \to H(X \setminus K) \to H^1_K(X, H)$ は完全なので、従って、$H(X) \to H(X \setminus K)$ は全射である。$X \setminus K = (V \setminus Z) \cup (X \setminus \bar{V})$ なので、$H(X \setminus K) \cong H(V \setminus Z) \times H(X \setminus \bar{V})$ が成り立つ。よって $H(X) \to H(V \setminus Z)$ は全射であり、とくに $H(V) \to H(V \setminus Z)$ も全射である。以上より $H|_V$ は脆弱である。

以上で (3) の証明を完了し、問題 II.9 の解答を完了する。 □

## References


[KS02] M. Kashiwara and P. Schapira. *Sheaves on Manifolds*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer Berlin Heidelberg, 2002. ISBN: 9783540518617. URL: https://www.springer.com/jp/book/9783540518617.