Lectures on Invariant Theory (I. Dolgachev) 1 章解答

ゆじ

2021 年 7 月 30 日

1 The Symbolic Method

問題 1.1. $\sum_{i=1}^{m} d_i \neq \sum_{j=1}^{r} w_j$ であるとき、$\mathrm{Pol}(\mathrm{Mat}_{r,m})_{d_1,\cdots,d_r;w_1,\cdots,w_m} = \{0\}$ であることを示せ。

Proof. $d :\overset{\mathrm{def}}{=} \sum_{i=1}^{m} d_i, w :\overset{\mathrm{def}}{=} \sum_{j=1}^{r} w_j$ とおく。不定元からなる行列 A の縦ベクトルを $h_1, \cdots, h_m$、横ベクトルを $v_1, \cdots, v_r$ で表す。$P \in \mathrm{Pol}(\mathrm{Mat}_{r,m})_{d_1,\cdots,d_r;w_1,\cdots,w_m}$ とする。任意に $a \in k^\times$ をとる。P は縦ベクトルに関して多重次数 $(d_1, \cdots, d_r)$ の多重斉次多項式であるので

$$P(aA) = P(ah_1, \cdots, ah_r) = a^d P(A)$$

が成り立つ。一方、P は横ベクトルに関して多重次数 $(w_1, \cdots, w_m)$ の多重斉次多項式であるので

$$P(aA) = P((av_1^T, \cdots, av_m^T)^T) = a^w P(A)$$

が成り立つ (ここで $(-)^T$ は行列の転置を表す)。従って、$a^d P(A) = a^w P(A)$ が任意の $a \in k^\times$ について成り立つ。仮定より $d \neq w$ であるので、これは $P(A) = 0$ を意味する。以上で解答を完了する。

問題 1.2. $\dim(V) = r$ として、$W :\overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Pol}_2(V)$ とする。W は V 上の二次形式のなす線型空間である。

(i) $\mathrm{char}(k) \neq 2$ であることと r が奇数であることを仮定する。$\mathrm{Pol}(W)^{SL(V)}$ が k-代数として、二次形式の表現行列の行列式を与える関数で生成されることを示せ。

(ii)