

# Sheaves on Manifolds Exercise I.12 の解答

ゆじとも

2021 年 2 月 9 日

Sheaves on Manifolds [Exercise I.12, KS02] の解答です。

## I Homological Algebra

問題 I.12.  $\mathcal{C}$  を三角圏とし、

$$\begin{array}{ccccccc} X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & X[1] \\ \parallel & & \parallel & & \downarrow & & \parallel \\ X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z' & \longrightarrow & X[1] \end{array}$$

を  $\mathcal{C}$  の可換図式で、上の列が完全三角であるものとする。このとき、以下の条件のうち的一方が成り立つとき、下の列も完全三角であることを示せ：

- (1) 任意の対象  $P \in \mathcal{C}$  に対して、以下の列は完全である：

$$\mathrm{Hom}(P, X) \rightarrow \mathrm{Hom}(P, Y) \rightarrow \mathrm{Hom}(P, Z') \rightarrow \mathrm{Hom}(P, X[1]).$$

- (2) 任意の対象  $Q \in \mathcal{C}$  に対して、以下の列は完全である：

$$\mathrm{Hom}(X, Q) \leftarrow \mathrm{Hom}(Y, Q) \leftarrow \mathrm{Hom}(Z', Q) \leftarrow \mathrm{Hom}(X[1], Q).$$

証明.  $\mathrm{Hom}(P, -)$  と  $\mathrm{Hom}(-, Q)$  はそれぞれ cohomological functor であるから、(1) を仮定すれば、射  $\mathrm{Hom}(P, Z) \rightarrow \mathrm{Hom}(P, Z')$  は同型射であることが従い、(2) を仮定すれば、射  $\mathrm{Hom}(Z', Q) \rightarrow \mathrm{Hom}(Z, Q)$  は同型射であることが従う。すると、米田の補題より、(1) と (2) のいずれかを仮定すれば、射  $Z \rightarrow Z'$  は同型射であることが従う。 $\mathcal{C}$  は三角圏なので、[Proposition 1.4.4 (TR0), KS02] を満たし、従って所望の完全性を得る。□

## References

- [KS02] M. Kashiwara and P. Schapira. *Sheaves on Manifolds*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer Berlin Heidelberg, 2002. ISBN: 9783540518617. URL: <https://www.springer.com/jp/book/9783540518617>.