Sheaves on Manifolds Exercise I.16 の解答

ゆじとも

2021 年 2 月 9 日

Sheaves on Manifolds [Exercise I.16, KS02] の解答です。

I Homological Algebra

問題 I.16. $\mathcal{C}$ を加法圏とする。

(1) $X \in \mathsf{Ch}^{-}(\mathcal{C}), Y \in \mathsf{Ch}^{+}(\mathcal{C})$ とする。以下の等式を証明せよ：

$$\begin{aligned} Z^0(\mathrm{Tot}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y))) &= \mathrm{Hom}_{\mathsf{Ch}(\mathcal{C})}(X,Y), \\ B^0(\mathrm{Tot}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y))) &= \mathrm{Ht}(X,Y), \\ H^0(\mathrm{Tot}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y))) &= \mathrm{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{C})}(X,Y). \end{aligned}$$

ただしここで $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ は二重複体とみなしている。

(2) さらに $\mathcal{C}$ がアーベル圏であり、十分入射的対象を持つか、または十分射影的対象を持つと仮定する。$X \in \mathsf{D}^{-}(\mathcal{C}), Y \in \mathsf{D}^{+}(\mathcal{C})$ に対して、次の等式を示せ：

$$H^0(R\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)) = \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}(\mathcal{C})}(X,Y).$$

証明. (1) を示す。$H^{i,j} \overset{\mathrm{def}}{:=} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X^{-i}, Y^j)$ とおけば、$X \in \mathsf{Ch}^{-}(\mathcal{C}), Y \in \mathsf{Ch}^{+}(\mathcal{C})$ であることから、二重複体 $H^{i,j}$ は本文の条件 [(1.9.2), KS02] を満たし、$\mathsf{Ch}^2_f(\mathcal{C})$ に属する。$f : X \to Y$ を $\mathsf{Ch}(\mathcal{C})$ の射とすると、f は $\mathcal{C}$ の射の族 $f^n : X^n \to Y^n$ であって $f^n \circ d_X^{n-1} = d_Y^{n-1} \circ f^{n-1}$ を満たすものである。よって、とくに $f \in \bigoplus_{i+j=0} H^{i,j} = \mathrm{Tot}^0(H^{\bullet,\bullet})$ であり、等式 $f^n \circ d_X^{n-1} = d_Y^{n-1} \circ f^{n-1}$ はさらに f が $Z^0(\mathrm{Tot}(H^{\bullet,\bullet}))$ に属することを意味する。以上で (1) の一つ目の等式が従う。$f : X \to Y$ が homotopic to zero であるとする。このとき、ある $\mathcal{C}$ の射の族 $s^n : X^n \to Y^{n-1}$ が存在して $f^n = s^{n+1} \circ d_X^n + d_Y^{n-1} \circ s^n$ となる。射の族 $s = (s^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ は $\bigoplus_{i+j=-1} H^{i,j}$ に属し、等式 $f^n = s^{n+1} \circ d_X^n + d_Y^{n-1} \circ s^n$ は $\mathrm{Tot}^{-1}(H^{\bullet,\bullet})) \to \mathrm{Tot}^0(H^{\bullet,\bullet}))$ での s の像が $f \in \mathrm{Tot}^0(H^{\bullet,\bullet}))$ となることを意味する。以上で (1) の二つ目の等式が従う。(1) の三つ目の等式は (1) の一つ目と二つ目の等式より直ちに従う。以上で (1) の証明を完了する。

(2) を示す。$\mathcal{C}$ が十分射影的対象を持つ場合、$\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ を考えることによって、$\mathcal{C}$ が十分入射的対象を持つ場合に帰着される (cf. [Remark 1.10.10, KS02])。よって、(2) を示すためには、$\mathcal{C}$ が十分入射的対象を持つと仮定しても一般性を失わない。[Exercise 1.15, KS02] の意味で S_Y という記号を用いる。$\mathcal{C}$ は十分入射的対象を持つので、[Exercise 1.15 (1), KS02] より $\mathrm{Hom}_{\mathsf{D}(\mathcal{C})}(X,Y) \cong \mathrm{colim}_{Y' \in S_Y} \mathrm{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{C})}(X,Y')$ となり、また [Exercise 1.15 (2), KS02] より $R\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \cong \mathrm{colim}_{Y' \in S_Y} \mathrm{Tot}(\mathrm{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{C})}(X,Y'))$ となる。H^0 を取ることで、

$$H^0(R\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)) \cong H^0(\mathrm{colim}_{Y' \in S_Y} \mathrm{Tot}(\mathrm{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{C})}(X,Y')))$$

が従うが、S_Y は filtered であるから、余極限は H^0 と可換して、

$$H^0(R\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)) \cong \operatorname{colim}_{Y'\in S_Y} H^0(\operatorname{Tot}(\operatorname{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{C})}(X,Y')))$$

が従う。よって、(1) の最後の等式で $Y' \in S_Y$ に渡り余極限をとれば、

$$\begin{aligned} H^0(R\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)) &\cong \operatorname{colim}_{Y'\in S_Y} H^0(\operatorname{Tot}(\operatorname{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{C})}(X,Y'))) \\ &\cong \operatorname{colim}_{Y'\in S_Y} \operatorname{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{C})}(X,Y') \\ &\cong \operatorname{Hom}_{\mathsf{D}(\mathcal{C})}(X,Y) \end{aligned}$$

が従う。以上で (2) の証明を完了し、問題 I.16 の解答を完了する。 □

References

[KS02] M. Kashiwara and P. Schapira. *Sheaves on Manifolds*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer Berlin Heidelberg, 2002. ISBN: 9783540518617. URL: https://www.springer.com/jp/book/9783540518617.