

Sheaves on Manifolds Exercise I.35 の解答

ゆじとも

2021 年 2 月 9 日

Sheaves on Manifolds [Exercise I.35, [KS02](#)] の解答です。

I Homological Algebra

問題 I.35. $\hat{\mathcal{C}} = \text{Set}^{\mathcal{C}^{\text{op}}}$ を前層圏とする。

- (1) I を有向集合、 X_i を I で添字付けられた圏 \mathcal{C} の図式とする。 $X \mapsto \text{colim}_{i \in I} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X_i)$ により定まる $\hat{\mathcal{C}}$ の対象 “ $\text{colim}_{i \in I} X_i$ ” (この記号の定義は [Definition 1.11.4, [KS02](#)] を参照) は I で添字付けられた図式 $h_{X_i} \in \hat{\mathcal{C}}$ の余極限であることを示せ。より詳しく、 $F \in \hat{\mathcal{C}}$ に対して以下の自然な同型を示せ：

$$\text{Hom}_{\hat{\mathcal{C}}}(\text{“colim”}_{i \in I} X_i, F) \cong \text{colim}_{i \in I} F(X_i).$$

- (2) $Y_j \in \mathcal{C}$ を有向集合 J で添字付けられた図式とする。以下の自然な同型を示せ：

$$\text{Hom}_{\hat{\mathcal{C}}}(\text{“colim”}_{i \in I} X_i, \text{“colim”}_{j \in J} Y_j) \cong \lim_{i \in I} \text{colim}_{j \in J} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_i, Y_j).$$

注意. 本文では (2) の左辺の右側の “ colim ” がたんに colim と表記されていたが、これは “” をつけ忘れた？

証明. (1) を示す。函手圏の余極限は各点ごとに計算されるので “ $\text{colim}_{i \in I} X_i \cong \text{colim}_{i \in I} h_{X_i}$ ” が従う。さらにこれがわかると、余極限の定義と米田の補題より、

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\hat{\mathcal{C}}}(\text{“colim”}_{i \in I} X_i, F) &\cong \text{Hom}_{\hat{\mathcal{C}}}(\text{colim}_{i \in I} h_{X_i}, F) \\ &\cong \lim_{i \in I} \text{Hom}_{\hat{\mathcal{C}}}(h_{X_i}, F) \\ &\cong \lim_{i \in I} F(X_i) \end{aligned}$$

が従う。以上で (1) の証明を完了する。

(2) を示す。素直に計算すると、

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\hat{\mathcal{C}}}(\text{“colim”}_{i \in I} X_i, \text{“colim”}_{j \in J} h_{Y_j}) &\stackrel{\star}{\cong} \text{Hom}_{\hat{\mathcal{C}}}(\text{colim}_{i \in I} h_{X_i}, \text{colim}_{j \in J} h_{Y_j}) \\ &\stackrel{\star}{\cong} \lim_{i \in I} \text{Hom}_{\hat{\mathcal{C}}}(h_{X_i}, \text{colim}_{j \in J} h_{Y_j}) \\ &\stackrel{\spadesuit}{\cong} \lim_{i \in I} (\text{colim}_{j \in J} h_{Y_j})(X_i) \\ &\stackrel{\clubsuit}{\cong} \lim_{i \in I} \text{colim}_{j \in J} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_i, Y_j) \end{aligned}$$

となる。ただしここで、 \star の部分に (1) を用い、 \star の部分に余極限の定義を用い、 \spadesuit の部分に米田の補題を用い、 \clubsuit の部分に函手圏での余極限が各点ごとに計算されることを用いた。以上で (2) の証明を完了し、[問題 I.35](#) の解答を完了する。 \square

References

- [KS02] M. Kashiwara and P. Schapira. *Sheaves on Manifolds*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer Berlin Heidelberg, 2002. ISBN: 9783540518617. URL: <https://www.springer.com/jp/book/9783540518617>.