Sheaves on Manifolds Exercise II.18 の解答

ゆじとも

2021 年 2 月 9 日

Sheaves on Manifolds [Exercise II.18, KS02] の解答です。

II Sheaves

本文では、局所コンパクト空間であるという場合には、ハウスドルフ性を常に仮定していることに注意しておく (cf. 本文 [Proposition 2.5.1, KS02] 直前の記述)。

問題 II.18. S を位相空間、X_1, X_2, Y_1, Y_2 を S 上の局所コンパクトハウスドルフ空間、$f_i : Y_i \to X_i, (i = 1, 2)$ を S 上の射とする。$p_{Y_i} : Y_i \to S$ を構造射として、$f = f_1 \times_S f_2 : Y_1 \times_S Y_2 \to X_1 \times_S X_2$ とおく。$\mathcal{R}$ を S 上の可換環の層で、$\mathrm{wgld}(\mathcal{R}) < \infty$ と仮定する。$G_i \in \mathsf{D}^+(p_{Y_i}^{-1}\mathcal{R})$ とする。

(1) 以下の同型射の存在を示せ：

$$Rf_{1!}G_1 \boxtimes^L_{S,\mathcal{R}} Rf_{2!}G_2 \xrightarrow{\sim} Rf_!(G_1 \boxtimes^L_{S,\mathcal{R}} G_2).$$

この同型射は **Künneth の公式**として知られている。

(2) $S = X_1 = X_2 = \{\mathrm{pt}\}$ として、$\mathcal{R}$ を体とする。以下を示せ：

$$H^n_c(Y_1 \times Y_2, G_1 \boxtimes G_2) \cong \bigoplus_{p+q=n} (H^p_c(Y_1, G_1) \otimes H^q_c(Y_2, G_2)).$$

証明. (1) を示す。以下のように射に名前をつける (それぞれの四角形は Cartesian である)：

$$\begin{tikzcd}
Y_1 \times_S Y_2 \arrow[r, "f_1''"] \arrow[d, "f_2''"'] & X_1 \times_S Y_2 \arrow[r, "q_2'"] \arrow[d, "f_2'"] & Y_2 \arrow[d, "f_2"] \\
Y_1 \times_S X_2 \arrow[r, "f_1'"] \arrow[d, "q_1'"'] & X_1 \times_S X_2 \arrow[r, "q_2'"] \arrow[d, "q_1"] & X_2 \arrow[d] \\
Y_1 \arrow[r, "f_1"] & X_1 \arrow[r] & S.
\end{tikzcd}$$

また、$r_1 :\overset{\mathrm{def}}{=} q_1' \circ f_2'', r_2 :\overset{\mathrm{def}}{=} q_2' \circ f_1''$ とおき、$X_1 \times_S X_2 \to S$ を g とおいて、$h :\overset{\mathrm{def}}{=} g \circ f$ とおく。示すべきことは、自然な同型射

$$q_1^{-1}Rf_{1!}G_1 \otimes^L_{g^{-1}\mathcal{R}} q_2^{-1}Rf_{2!}G_2 \xrightarrow{\sim} Rf_!(r_1^{-1}G_1 \otimes^L_{h^{-1}\mathcal{R}} r_2^{-1}G_2)$$

の存在であるが、それは以下のように示される：

$$
\begin{aligned}
q_1^{-1}Rf_{1!}G_1 \otimes^L_{g^{-1}\mathcal{R}} q_2^{-1}Rf_{2!}G_2 &\xrightarrow{\sim} Rf'_{1!}{q'_1}^{-1}G_1 \otimes^L_{g^{-1}\mathcal{R}} Rf'_{2!}{q'_2}^{-1}G_2 && (1)\\
&\xrightarrow{\sim} Rf'_{1!}({q'_1}^{-1}G_1 \otimes^L_{{f'_1}^{-1}g^{-1}\mathcal{R}} {f'_1}^{-1}Rf'_{2!}{q'_2}^{-1}G_2) && (2)\\
&\xrightarrow{\sim} Rf'_{1!}({q'_1}^{-1}G_1 \otimes^L_{{f'_1}^{-1}g^{-1}\mathcal{R}} Rf''_{2!}{f''_1}^{-1}{q'_2}^{-1}G_2) && (3)\\
&= Rf'_{1!}({q'_1}^{-1}G_1 \otimes^L_{{f'_1}^{-1}g^{-1}\mathcal{R}} Rf''_{2!}r_2^{-1}G_2) && (4)\\
&\xrightarrow{\sim} Rf'_{1!}Rf''_{2!}({f''_2}^{-1}{q'_1}^{-1}G_1 \otimes^L_{{f''_2}^{-1}{f'_1}^{-1}g^{-1}\mathcal{R}} r_2^{-1}G_2) && (5)\\
&\xrightarrow{\sim} Rf_!(r_1^{-1}G_1 \otimes^L_{h^{-1}\mathcal{R}} r_2^{-1}G_2), && (6)
\end{aligned}
$$

ただしここで、(1) の部分に本文 [Proposition 2.6.7, KS02] を用い、(2) の部分に本文 [Proposition 2.6.6, KS02] を用い、(3) の部分に本文 [Proposition 2.6.7, KS02] を用い、(4) の部分に等式 $r_2 = q'_2 \circ f''_1$ を用い、(5) の部分に本文 [Proposition 2.6.6, KS02] を用い、(6) の部分に等式 $f = f'_1 \circ f''_2, r_1 = q'_1 \circ f''_2, h = g \circ f'_1 \circ f''_2$ を用いた。以上で (1) の証明を完了する。

(2) を示す。$\mathcal{R}$ は体なので、任意の $\mathcal{R}$-加群 ($f^{-1}\mathcal{R}$-加群) は平坦であり、従って $\otimes^L \cong \otimes, \boxtimes^L \cong \boxtimes$ が成り立つ。また、(1) で $S = X_1 = X_2 = \{\mathrm{pt}\}$ とすることで、同型射

$$R\Gamma_c(X, G_1) \otimes R\Gamma_c(X, G_2) \xrightarrow{\sim} R\Gamma_c(X, G_1 \boxtimes G_2)$$

を得る。ここで [Exercise 1.24 (2), KS02] を $F = \otimes, X = R\Gamma_c(X, G_1), Y = R\Gamma_c(X, G_2)$ として適用することにより、

$$\bigoplus_{p+q=n} (H^p_c(X, G_1) \otimes H^q_c(X, G_2)) \cong H^n(R\Gamma_c(X, G_1) \otimes R\Gamma_c(X, G_2)) \xrightarrow{\sim} H^n_c(X, G_1 \boxtimes G_2)$$

を得る。以上で (2) の証明を完了し、問題 II.18 の解答を完了する。 □

感想. (1) の本文のヒント、何あれ??

References

[KS02] M. Kashiwara and P. Schapira. *Sheaves on Manifolds*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer Berlin Heidelberg, 2002. ISBN: 9783540518617. URL: https://www.springer.com/jp/book/9783540518617.