Sheaves on Manifolds Exercise I.18 の解答

ゆじとも

2021 年 2 月 9 日

Sheaves on Manifolds [Exercise I.18, KS02] の解答です。

I Homological Algebra

問題 I.18. $\mathcal{C}$ を $\mathrm{hd}(\mathcal{C}) \leq 1$ のアーベル圏とする。$X \in \mathsf{D}^b(\mathcal{C})$ を複体とするとき、$\mathsf{D}^b(\mathcal{C})$ で

$$X \cong \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} H^k(X)[-k]$$

となることを示せ。

証明. シフトすることで、$X^i = 0, (\forall i < 0)$ と仮定しても一般性を失わない。$X^n \neq 0$ となる最大の n に関する帰納法で証明する。$n = 0$ であれば主張は自明であるので、ある $n = k$ に対して主張が成立するときに、$n = k + 1$ の場合にも成立することを証明する。帰納法の仮定より、

$$\tau^{\leq n-1}(X) \cong \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} H^k(\tau^{\leq n-1}(X))[-k] \cong \bigoplus_{k \leq n-1} H^k(X)[-k]$$

である。従って、所望の同型を証明するためには、$n = 1$ の場合、さらに $d_X^0 : X^0 \to X^1$ がモノ射である場合に、$\mathsf{D}^b(\mathcal{C})$ で $X \cong \mathrm{coker}(d_X^0)[-1]$ となることを証明することが十分である。

$X \in \mathsf{D}^b(\mathcal{C})$ は $X^i = 0, (i \in (-\infty, 0] \cup (1, +\infty))$ であり、さらに $d_X^0 : X^0 \to X^1$ がモノ射であるとする。$X^1 \to I$ を入射的対象 I へのモノ射とすると、$\mathrm{hd}(\mathcal{C}) \leq 1$ であるから、$I/X^0, I/X^1$ はどちらも入射的対象となる。複体 J を $J^0 = J^1 = I, d_J^0 = \mathrm{id}_I$ で定義し、J_1 を $J_1^0 = I/X^0, J_1^1 = I/X^1$ で $d_{J_1}^0$ を自然な射として定義すると、J_1 は X^1/X^0 の入射分解であり、$0 \to X \to J \to J_1 \to 0$ は $\mathsf{Ch}(\mathcal{C})$ の完全列である。従って、$X \to J \to J_1 \to X[1]$ は $\mathsf{D}(\mathcal{C})$ の完全三角である。J_1 は X^1/X^0 の入射分解であるから、$\mathsf{D}(\mathcal{C})$ において $J_1 \cong X^1/X^0$ である。以上より、$\mathsf{D}(\mathcal{C})$ の完全三角 $X \to J \to X^1/X^0 \to X[1]$ を得る。さらに、定義より $\mathsf{D}(\mathcal{C})$ において $J \cong 0$ であるから、これは $\mathsf{D}(\mathcal{C})$ において $X \cong (X^1/X^0)[-1]$ となることを示している。以上で問題 I.18 の解答を完了する。 □

References

[KS02] M. Kashiwara and P. Schapira. *Sheaves on Manifolds*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer Berlin Heidelberg, 2002. ISBN: 9783540518617. URL: https://www.springer.com/jp/book/9783540518617.