Sheaves on Manifolds Exercise I.39 の解答

ゆじとも

2021 年 2 月 9 日

Sheaves on Manifolds [Exercise I.39, KS02] の解答です。

I Homological Algebra

問題 I.39. $\mathcal{C}$ をアーベル圏とする。$X, Y \in \mathsf{D}^b(\mathcal{C})$ に対して $\mathrm{Ext}^j(X, Y) :\overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}(\mathcal{C})}(X, Y[j])$ とおく。

(1) $X, Y \in \mathcal{C}$ として $n \geq 1$ とする。完全列

$$E : 0 \to Y \to Z_n \to Z_{n-1} \to \cdots \to Z_1 \to X \to 0$$

が元 $C(E) \in \mathrm{Ext}^n(X, Y)$ を定めることを示せ。この完全列を **X の Y による n-拡大**という。

(2) 任意の $\mathrm{Ext}^n(X, Y)$ の元は $C(E)$ の形で表すことができることを示せ。

(3) $E' : 0 \to Y \to Z'_n \to \cdots \to Z'_1 \to X \to 0$ を別の拡大とする。$C(E) = C(E')$ であるための必要十分条件は、ある拡大 $E'' : 0 \to Y \to Z''_n \to \cdots \to Z''_1 \to X \to 0$ と以下の可換図式が存在することであるということを示せ：

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r] & Z_n \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & Z_1 \arrow[r] & X \\ Y \arrow[u, equal] \arrow[r] \arrow[d, equal] & Z''_n \arrow[u] \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & Z''_1 \arrow[u] \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[u, equal] \arrow[d, equal] \\ Y \arrow[r] & Z'_n \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & Z'_1 \arrow[r] & X. \end{tikzcd}$$

$\mathrm{Ext}^n(X, Y)$ をしばしば **Yoneda extension** という。

証明. (1) を示す。$Z^i :\overset{\mathrm{def}}{=} Z_{-i+1}$ と定義して、完全列 E から X, Y を取り除いた複体を

$$Z = (\cdots 0 \to Z^{-n+1} \to \cdots \to Z^0 \to 0 \to \cdots)$$

と表す。このとき $\tau^{\leq n-1}(Z) = Y[n-1]$ であり、$\tau^{\geq 0}(Z) = X$ である。また、Z は $-(n-2)$ 次から -1 次で完全なので、$Y[n-1] \to Z \to X \xrightarrow{+1}$ は完全三角である。これに函手 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{D}(\mathcal{C})}(X, -)$ を適用することにより、射 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{D}(\mathcal{C})}(X, X) \to \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}(\mathcal{C})}(X, Y[n]) = \mathrm{Ext}^n(X, Y)$ を得る。id_X の行き先を $C(E)$ とすれば良い。以上で (1) の証明を完了する。

(2) を示す。$f \in \mathrm{Ext}^n(X, Y)$ を一つとる。定義より $\mathrm{Ext}^n(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}(\mathcal{C})}(X, Y[n])$ であるので、f は $\mathsf{D}(\mathcal{C})$ の射 $f : X \to Y[n]$ とみなせる。f を $\mathsf{D}(\mathcal{C})$ の完全三角 $X \xrightarrow{f} Y[n] \to Z \xrightarrow{+1}$ に伸ばす。このとき $Y[n-1] \to Z[-1] \to X \xrightarrow{+1}$ も完全三角である。コホモロジーをとれば、$H^i(Z[-1])$ は $n-1$ 次で

$H^{n-1}(Z[-1]) \cong Y$、0 次で $H^0(Z[-1]) \cong X$、他は 0 である。従って

$$E : 0 \to [Y \cong H^n(Z)] \to Z^{-n} \to \cdots \to Z^{-1} \to [X \cong H^{-1}(Z)] \to 0$$

は完全である。完全三角 $Y[n-1] \to Z[-1] \to X \xrightarrow{+1}$ は $X \xrightarrow{f} Y[n] \to Z \xrightarrow{+1}$ を -1 方向に二つずらした完全三角なので、$\mathrm{Hom}_{\mathsf{D}(\mathcal{C})}(X,-)$ に入れると id_X の行き先は $f : X \to Y[n]$ に他ならない。このことは $f = C(E)$ を意味している。以上で (2) の証明を完了する。

(3) を示す。E, E' から (1) のように定義した複体をそれぞれ Z, Z' と表す。十分性を示す。E'' から (1) のように定義した複体を Z'' と表す。(1) の証明より、$\mathsf{D}(\mathcal{C})$ の完全三角とその間の射

$$\begin{tikzcd}
Y[n-1] \arrow[r] & Z \arrow[r] & X \arrow[r, "+1"] & {} \\
Y[n-1] \arrow[r] \arrow[u, equal] \arrow[d, equal] & Z'' \arrow[r] \arrow[u] \arrow[d] & X \arrow[r, "+1"] \arrow[u, equal] \arrow[d, equal] & {} \\
Y[n-1] \arrow[r] & Z' \arrow[r] & X \arrow[r, "+1"] & {}
\end{tikzcd}$$

を得る。これを $\mathrm{Hom}_{\mathsf{D}(\mathcal{C})}(X,-)$ に入れると、アーベル群の可換図式

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathsf{D}(\mathcal{C})}(X,X) \arrow[r, equal] \arrow[d, "\delta"'] & \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}(\mathcal{C})}(X,X) \arrow[r, equal] \arrow[d, "\delta''"'] & \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}(\mathcal{C})}(X,X) \arrow[d, "\delta'"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathsf{D}(\mathcal{C})}(X,Y[n]) \arrow[r, equal] & \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}(\mathcal{C})}(X,Y[n]) \arrow[r, equal] & \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}(\mathcal{C})}(X,Y[n])
\end{tikzcd}$$

を得る。ここで定義より $C(E) = \delta(\mathrm{id}_X), C(E') = \delta'(\mathrm{id}_X)$ であるが、上の図式が可換であることは $\delta = \delta'' = \delta'$ を意味するので、よって $C(E) = \delta(\mathrm{id}_X) = \delta'(\mathrm{id}_X) = C(E')$ が成り立つ。以上で十分性の証明を完了する。

必要性を示す。$f = C(E) = C(E') \in \mathrm{Ext}^n(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}(\mathcal{C})}(X, Y[n])$ とおく。$f : X \to Y[n]$ を $\mathsf{D}(\mathcal{C})$ の完全三角 $X \xrightarrow{f} Y[n] \to Z'' \xrightarrow{+1}$ に伸ばす。(2) の証明と同様に、このとき

$$0 \to Y \to Z''^{-n} \to \cdots \to Z''^{-1} \to X \to 0$$

は完全である。Z'' の $-n-1$ 次以下と 0 次以上を 0 で置き直した複体を再び Z'' で表す。すると上の完全列により $Y[n-1] \to Z''[-1] \to X \xrightarrow{+1}$ が $\mathsf{K}(\mathcal{C})$ の完全三角であることが従う。$f = C(E)$ であるから、三角圏の公理 (本文 [Proposition 1.4.4 (TR4), KS02]) より $\mathsf{K}(\mathcal{C})$ の射 $Z'' \to Z$ が存在して、$\mathrm{id}_X, \mathrm{id}_{Y[n]}$ によって $X \xrightarrow{f} Y[n] \to Z'' \xrightarrow{+1}$ から $X \xrightarrow{f} Y[n] \to Z \xrightarrow{+1}$ への完全三角の射を形成する。同様に、$f = C(E')$ であるから、完全三角の射を形成するような $Z'' \to Z'$ も存在する。よって $\mathsf{K}(\mathcal{C})$ の擬同型からなる図式 $Z \leftarrow Z'' \to Z$ を得る。これらの射を代表する $\mathsf{Ch}(\mathcal{C})$ の擬同型からなる図式 $Z \leftarrow Z'' \to Z$ を $\mathcal{C}$ の図式として書き直すと、可換図式

$$\begin{tikzcd}
H^{-n}(Z) \arrow[r] & Z^{-n} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & Z^{-1} \arrow[r] & H^{-1}(Z) \\
H^{-n}(Z'') \arrow[r] \arrow[u] \arrow[d] & Z''^{-n} \arrow[r] \arrow[u] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & Z''^{-1} \arrow[r] \arrow[u] \arrow[d] & H^{-1}(Z'') \arrow[u] \arrow[d] \\
H^{-n}(Z') \arrow[r] & Z'^{-n} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & Z'^{-1} \arrow[r] & H^{-1}(Z').
\end{tikzcd}$$

を得る。$H^{-n}(Z) \cong H^{-n}(Z'') \cong H^{-n}(Z') \cong Y$ と $H^{-1}(Z) \cong H^{-1}(Z'') \cong H^{-1}(Z') \cong X$ に注意すれば所望の可換図式を得る。以上で必要性の証明を完了し、(3) の証明を完了し、問題 I.39 の解答を完了する。 □

References

[KS02] M. Kashiwara and P. Schapira. *Sheaves on Manifolds*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer Berlin Heidelberg, 2002. ISBN: 9783540518617. URL: https://www.springer.com/jp/book/9783540518617.