Sheaves on Manifolds Exercise II.20 の解答

ゆじとも

2021 年 2 月 9 日

Sheaves on Manifolds [Exercise II.20, KS02] の解答です。

II Sheaves

問題 II.20. A を可換環で、$\mathrm{wgld}(A) < \infty$ であるものとする。E を有限次元実線形空間とする。$s : E \times E \to E$ を足し算写像とし、$F, G \in \mathsf{D}^+(A_E)$ に対して $F * G :\stackrel{\mathrm{def}}{=} Rs_!(F \boxtimes^L G)$ と定める。これを $\mathsf{D}^+(A_E)$ 上の **convolution 作用素**という。

(1) $F, G, H \in \mathsf{D}^+(A_E)$ に対し、$F * G \cong G * F, F * (G * H) \cong (F * G) * H, A_{\{0\}} * F \cong F$ が成り立つことを示せ。

(2) $Z_1, Z_2 \subset E$ をコンパクト凸集合とする。$A_{Z_1} * A_{Z_2} \cong A_{Z_1 + Z_2}$ であることを示せ。

(3) γ を proper closed convex cone とするとき、$A_\gamma * A_{\mathrm{Int}(\gamma)} = 0$ であることを示せ。

(4) $E = \mathbb{R}^n$ であると仮定せよ。$Z_1 :\stackrel{\mathrm{def}}{=} [-1, 1]^n, Z_2 :\stackrel{\mathrm{def}}{=} (-1, 1)^n$ とする。$A_{Z_1} * A_{Z_2} \cong A_{\{0\}}[-n-1]$ であることを示せ。

注意. (3) で「proper cone」の意味がよくわからなかった (本文に定義書いてましたっけ...) ので Wikipedia を参考にして次の性質を満たす錐 γ のことと解釈しました:

- $\mathrm{Int}(\gamma) \neq \varnothing$ である。
- $\{x, -x\} \in \gamma$ ならば $x = 0$ である (つまり Wikipedia で**突錐**と呼ばれているものである)。

以下の解答ではこれら二つの条件はどちらも (3) を解くのに用いられますが、別の解法で突錐であることを仮定せずとも (3) が解けるのであれば、気になります。

注意. (4) は本文ではシフトが $-n$ になっていたけど、$-n-1$ な気がします。気のせいでしょうか。

証明. (1) を示す。$p_1, p_2 : E \times E \to E$ を第一射影、第二射影として、$p : E \times E \xrightarrow{E} \times E$ を成分を入れ替えることによって得られる同相写像とする。まず $F * G \cong G * F$ を示す。p は同相写像であるので、

$Rp_! \cong Rp_* \cong p^{-1}$ が成り立つ。$s = s \circ p, p_2 = p_1 \circ p, p_1 = p_2 \circ p$ であるので、従って、

$$\begin{aligned}
Rs_!(p_1^{-1}F \otimes^L p_2^{-1}G) &\cong Rs_! Rp_!(p_1^{-1}F \otimes^L p_2^{-1}G) \\
&\cong Rs_! p^{-1}(p_1^{-1}F \otimes^L p_2^{-1}G) \\
&\cong Rs_!(p^{-1}p_1^{-1}F \otimes^L p^{-1}p_2^{-1}G) \\
&\cong Rs_!(p_2^{-1}F \otimes^L p_1^{-1}G) \\
&\cong Rs_!(p_1^{-1}G \otimes^L p_2^{-1}F)
\end{aligned}$$

が成り立つ。以上で $F * G \cong G * F$ が示された。

次に $F * (G * H) \cong (F * G) * H$ を示す。$q_{ij} : E \times E \times E \to E \times E$ を第 ij 成分への射影とし、$q_i : E \times E \times E \to E$ を第 i 成分への射影とする。$\bar{s} : E \times E \times E \to E$ を足し算写像とする。このとき、図式

$$\begin{tikzcd}
E \times E \times E \arrow[r, "\mathrm{id} \times s"] \arrow[d, "q_{23}"'] & E \times E \arrow[d, "p_2"] \\
E \times E \arrow[r, "s"] & E
\end{tikzcd}$$

は Cartesian である。従って自然な同型射 $p_2^{-1} \circ Rs_! \xrightarrow{\sim} R(\mathrm{id} \times s)_! \circ q_{23}^{-1}$ が存在する。よって、

$$\begin{aligned}
F * (G * H) &= Rs_!(p_1^{-1}F \otimes^L p_2^{-1}Rs_!(p_1^{-1}G \otimes^L p_2^{-1}H)) \\
&\xrightarrow{\sim} Rs_!(p_1^{-1}F \otimes^L R(\mathrm{id} \times s)_! q_{23}^{-1}(p_1^{-1}G \otimes^L p_2^{-1}H)) \\
&\xrightarrow{\sim} Rs_!(p_1^{-1}F \otimes^L R(\mathrm{id} \times s)_!(q_{23}^{-1}p_1^{-1}G \otimes^L q_{23}^{-1}p_2^{-1}H)) \\
&\cong Rs_!(p_1^{-1}F \otimes^L R(\mathrm{id} \times s)_!(q_2^{-1}G \otimes^L q_3^{-1}H)) \qquad (1) \\
&\xrightarrow{\sim} Rs_! R(\mathrm{id} \times s)_!((\mathrm{id} \times s)^{-1}p_1^{-1}F \otimes^L q_2^{-1}G \otimes^L q_3^{-1}H) \qquad (2) \\
&\cong R\bar{s}_!(q_1^{-1}F \otimes^L q_2^{-1}G \otimes^L q_3^{-1}H) \qquad (3)
\end{aligned}$$

が成り立つ。ただしここで (1) の箇所に等式 $p_1 \circ q_{23} = q_2, p_2 \circ q_{23} = q_3$ を用い、(2) の箇所に本文 [Proposition 2.6.6, KS02] を用い、(3) の箇所に等式 $s \circ (\mathrm{id} \times s) = \bar{s}, p_1 \circ (\mathrm{id} \times s) = q_1$ を用いた。同様に $(F * G) * H \cong R\bar{s}_!(q_1^{-1}F \otimes^L q_2^{-1}G \otimes^L q_3^{-1}H)$ が従う。以上より $F * (G * H) \cong (F * G) * H$ が成り立つ。

次に $A_{\{0\}} * F \cong F$ を示す。$i : E \cong \{0\} \times E \to E \times E$ を包含射とする。i は閉部分集合の上への同相写像なので、$i_!$ は完全函手である (cf. 本文 [Proposition 2.5.4 (i), KS02])。従って、

$$\begin{aligned}
A_{\{0\}} * F &= Rs_!(p_1^{-1}A_{\{0\}} \otimes^L p_2^{-1}F) \\
&= Rs_!(A_{\{0\} \times E} \otimes^L p_2^{-1}F) \\
&\cong Rs_!((p_2^{-1}F)_{\{0\} \times E}) \qquad (4) \\
&\xrightarrow{\sim} Rs_! i_!(i^{-1}p_2^{-1}F) \qquad (5) \\
&\xrightarrow{\sim} F \qquad (6)
\end{aligned}$$

が成り立つ。ただしここで (4) の箇所に本文 [Proposition 2.3.10, KS02] と $A_{\{0\} \times E}$ が $A_{E \times E}$-flat であることを用い、(5) の箇所に本文 [Proposition 2.5.4(ii), KS02] を用い、(6) の箇所に等式 $s \circ i = \mathrm{id}_E, p_2 \circ i = \mathrm{id}_E$ を用いた。以上で (1) の証明を完了する。

(2) を示す。A_{Z_i} は A_E-flat なので、$p_1^{-1}A_{Z_1} \cong A_{Z_1 \times E}$ と $p_2^{-1}A_{Z_2} \cong A_{E \times Z_2}$ も $A_{E \times E}$-flat である。従って

$$p_1^{-1}A_{Z_1} \otimes^L p_2^{-1}A_{Z_2} \cong A_{Z_1 \times E} \otimes A_{E \times Z_2} \cong A_{(Z_1 \times E) \cap (E \times Z_2)} = A_{Z_1 \times Z_2}$$

が成り立つ。$p : Z_1 \times Z_2 \to Z_1 + Z_2$ を s の制限 (足し算写像) とする。$A_{Z_1 \times Z_2} \cong p^{-1} A_{Z_1+Z_2}$ が成り立つ。p はコンパクト空間からコンパクト空間への射なので固有である。従って $p_! = p_*$ が成り立つ。Z_1, Z_2 は凸であるので、$Z_1 \times Z_2 \subset E \times E$ はコンパクト凸集合である。従って、任意の点 $z \in Z_1 + Z_2$ に対して、$p^{-1}(z) = (Z_1 \times Z_2) \cap s^{-1}(z)$ はコンパクト凸集合と閉凸集合の共通部分であり、再びコンパクト凸集合、とくに可縮となる。すなわち、p の各 fiber は可縮である。よって、$i : Z_1 + Z_2 \to E$ を包含射とすれば、本文 [Corollary 2.7.7 (iv), KS02] より、自然な射 $i^{-1} A_E \xrightarrow{\sim} Rp_* p^{-1} i^{-1} A_E \cong Rp_! p^{-1} i^{-1} A_E$ は同型射である。$j : Z_1 \times Z_2 \to E \times E$ を包含射とすれば、$i \circ p = s \circ j$ であるから、従って、とくに

$$A_{Z_1+Z_2} \cong i_! i^{-1} A_E \cong i_! (Rp_! p^{-1} i^{-1} A_E) \cong R(s \circ j)_! (s \circ j)^{-1} A_E \cong Rs_! A_{Z_1 \times Z_2} \cong A_{Z_1} * A_{Z_2}$$

が成り立つ。以上で (2) の証明を完了する。

(3) を示す。$p_1, p_2 : E \times E \to E$ を第一、第二射影とする。$p_1^{-1} A_\gamma \otimes^L p_2^{-1} A_{\mathrm{Int}(\gamma)} \cong A_{\gamma \times \mathrm{Int}(\gamma)}$ である。(3) を示すためには、$Rs_! A_{\gamma \times \mathrm{Int}(\gamma)} = 0$ を示すことが十分である。各 $z \in E$ に対して $i : E \cong s^{-1}(z) \to E \times E$ を包含射とする。このとき、本文 [Proposition 2.6.7, KS02] より、$(Rs_! A_{\gamma \times \mathrm{Int}(\gamma)})_z \cong R\Gamma_c(s^{-1}(z), A_{\gamma \times \mathrm{Int}(\gamma)}|_{s^{-1}(z)})$ が成り立つ。[Exercise 2.19 (4), KS02] の証明で行ったように、Z が局所閉集合である場合にも [Exercise 2.19 (4), KS02] の等式が成立する。従って、本文 [Remark 2.6.9 (iii), KS02] より、

$$\begin{aligned} R\Gamma_c(s^{-1}(z), A_{\gamma \times \mathrm{Int}(\gamma)}|_{s^{-1}(z)}) &\cong R\Gamma_c(s^{-1}(z) \cap (\gamma \times \mathrm{Int}(\gamma)), A_{s^{-1}(z)}) \\ &\cong R\Gamma_c(s^{-1}(z) \cap (\gamma \times \mathrm{Int}(\gamma)), A_{s^{-1}(z) \cap (\gamma \times \mathrm{Int}(\gamma))}) \end{aligned}$$

が成り立つ。従って、$Rs_! A_{\gamma \times \mathrm{Int}(\gamma)} = 0$ を示すためには、各 $z \in E$ に対して $R\Gamma_c(s^{-1}(z) \cap (\gamma \times \mathrm{Int}(\gamma)), A_{s^{-1}(z) \cap (\gamma \times \mathrm{Int}(\gamma))}) = 0$ であることを示すことが十分である。ここで $s^{-1}(z) \cap (\gamma \times \mathrm{Int}(\gamma)) = \varnothing$ であれば明らかにこの等式が成り立つので、以下、$s^{-1}(z) \cap (\gamma \times \mathrm{Int}(\gamma)) \neq \varnothing$ であると仮定して $R\Gamma_c(s^{-1}(z) \cap (\gamma \times \mathrm{Int}(\gamma)), A_{s^{-1}(z) \cap (\gamma \times \mathrm{Int}(\gamma))}) = 0$ を示す。このとき、成分ごとに足すことによって $z \in \mathrm{Int}(\gamma)$ であることが従う。簡単のため $X :\overset{\mathrm{def}}{=} s^{-1}(z) \cap (\gamma \times \mathrm{Int}(\gamma))$ とおく。示すべきことは $R\Gamma_c(X, A_X) = 0$ である。

$a \in \mathrm{Int}(\gamma)$ を一つとり、以下固定する。$K_n :\overset{\mathrm{def}}{=} (\gamma \times (a/n + \gamma)) \cap X \subset X$ とおく。このとき、$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$ が成り立つ。K_n に関して以下を主張を示す：

(†) K_n はコンパクトである。

(‡) $X \setminus K_n$ は可縮である。

(†) を示す。もし K_n がコンパクトでなければ、点列コンパクトでないので、K_n 内で収束しない点列 $v_i = (w_i, z - w_i) \in K_n$ が存在する。もし数列 $\|w_i\|$ が N で抑えられるとすれば、γ は閉であるから、$\gamma \cap [-N, N]^{\dim E}$ はコンパクトであり、また、$w_i \in \gamma \cap [-N, N]^{\dim E}$ であるので、従って w_i は $\gamma \cap [-N, N]^{\dim E}$ 内で収束する。これは v_i が K 内で収束しないということに反する。従って $\|w_i\|$ は非有界である。γ 内の点列 $w_i/\|w_i\| \in \gamma$ と $(z - w_i)/\|w_i\|$ はノルムが有界なので γ 内で収束する。$w :\overset{\mathrm{def}}{=} \lim w_i/\|w_i\| \in \gamma$ とおく。ここで $\|w_i\| \to \infty$ であるから $z/\|w_i\| \to 0$ であり、$(z - w_i)/\|w_i\| \to -w \in \gamma$ が成り立つ。一方、γ は突であるので、これは $w = 0$ を意味する。しかしながら、$\|w_i/\|w_i\|\| = 1$ であるため、$\|w\| = 1$ であり、これは矛盾している。以上より K_n は点列コンパクトである。今、K_n は有限次元実線形空間の部分空間なので、K_n はコンパクトである。

(‡) を示す。$z \in \mathrm{Int}(\gamma)$ であるので、十分大きい $N \gg n + 1$ をとれば、$z - a/N \in \gamma$ が成り立つ。$a/N \notin (a/n + \gamma)$ であるので、従って $(z - a/N, a/N) \in X \setminus K_n$ である。点 $v = (v_1, v_2) \in X \setminus K_n$ を任意に

とる。このとき、$v_2 \notin (a/n+\gamma)$ が成り立つ。ある $t,u>0, t+u=1$ が存在して、$ta/N+uv_2 \in (a/n+\gamma)$ が成り立つと仮定する。このとき、ある $v_3 \in \gamma$ が存在して、$ta/N+uv_2 = a/n+v_3$ が成り立つ。整理すれば、

$$\begin{aligned} uv_2 &= \frac{u}{n}a + \frac{1-u}{n}a + v_3 - \frac{t}{N}a \\ v_2 &= \frac{1}{n}a + \frac{1}{u}\left(v_3 + \left(\frac{t}{n} - \frac{t}{N}\right)a\right) \end{aligned}$$

となるので、$N \gg n+1$ であることから、$v_2 \in (a/n+\gamma)$ が従う。これは矛盾である。よって v_2 と a/N を結ぶ線分は $a/n+\gamma$ と交わらない。従って $v=(v_1,v_2)$ と $(z-a/N, a/N)$ を結ぶ線分は K_n と交わらず、$X \setminus K_n$ は星状であることが従う。よってとくに $X \setminus K_n$ は可縮である。

$R\Gamma_c(X, A_X) = 0$ を示す。コンパクト部分集合 $K \subset X$ の集合は包含関係に関して有向集合であり、$\{K_n | n \in \mathbb{N}\}$ はその cofinal な部分集合をなす。従って、本文 [Notations 2.6.8, KS02] の最後の記述より、任意の $F \in \mathsf{Ab}(X)$ に対して $H^j_c(X,F) \cong \operatorname{colim}_n H^j_{K_n}(X,F)$ が成り立つ。X は可縮であり、さらに十分大きな n に対して $X \setminus K_n$ も可縮であるので、本文 [Corollary 2.7.7 (iii), KS02] より、十分大きな n に対して $A \cong R\Gamma(X, A_X) \cong R\Gamma(X \setminus K_n, A_{X\setminus K_n})$ が成り立つ。従って任意の i に対して $H^i(X,A_X) \to H^i(X\setminus K_n, A_X)$ は同型射である ($i=0$ の場合は id_A で、他の次数ではどちらも 0)。よって任意の i に対して $H^i_{K_n}(X,A_X)=0$ が従い、とくに $H^i_c(X,A_X)=0$ が成り立つ。これは $R\Gamma_c(X,A_X)=0$ を意味する。以上で (3) の証明を完了する。

(4) を示す。$p_1, p_2 : E \times E \to E$ を第一、第二射影とする。$p_1^{-1}A_{Z_1} \otimes^L p_2^{-1}A_{Z_2} \cong A_{Z_1 \times Z_2}$ である。$Rs_! A_{Z_1\times Z_2}$ を計算しなければならない。$z \in E$ を任意にとる。$S(z) = s^{-1}(z) \cap (Z_1 \times Z_2)$ とおく。$Rs_! A_{Z_1\times Z_2} \cong R\Gamma_c(S(z), A_{S(z)})$ である。従って、(4) を示すためには、$(z,i) \neq (0,n)$ に対して $H^i_c(S(z), A_{S(z)}) = 0$ であり、$H^n_c(S(z), A_{S(z)}) \cong A$ であることを示すことが十分である。$S \subset E$ に対して $z+S = \{z+v | v \in S\}$ とおく。$v=(v_1,v_2) \in S(z)$ は $v_1+v_2=z, v_1 \in Z_1, v_2 \in Z_2$ を満たす。従って、$v_1 - z = -v_2 \in Z_2$ が成り立つ (Z_2 は原点対称であることに注意)。すなわち、$v_1 \in Z_1 \cap (z+Z_2)$ が成り立つ。よって $Z_1 \cap (z+Z_2) \to S(z), v_1 \mapsto (v_1, z-v_1)$ は同相写像である。これにより $S(z)$ を $Z_1 \cap (z+Z_2)$ と同一視する。$S_k(z) :\overset{\mathrm{def}}{=} Z_1 \cap (z+[-1+1/k, 1-1/k]^n)$ とおく。$S(z) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} S_k(z)$ が成り立つ。また、$S_k(z)$ はコンパクト空間二つの共通部分であるから、コンパクトである。

$z \neq 0$ に対して $H^i_c(S(z), A_{S(z)}) = 0$ を示す。$1/k_0 < \min\{|z_1|, \cdots, |z_n|\}$ となる k_0 をとれば、任意の $k \geq k_0$ に対して、$S(z) \setminus S_k(z)$ は、$z_i \neq 0$ となる座標を $z_i/|z_i|$ 側へと潰すホモトピーによって、可縮である。また、$S(z) = \bigcup_{k \geq k_0} S_k(z)$ であるので、本文 [Notations 2.6.8, KS02] の最後の記述より、$H^i_c(S(z), A_{S(z)}) \cong \operatorname{colim}_{k\geq k_0} H^i_{S_k(z)}(S(z), A_{S(z)})$ が成り立つ。さらに、$S(z)$ と $S(z)\setminus S_k(z)$ はともに可縮であるから、本文 [Corollary 2.7.7 (iii), KS02] より、$R\Gamma(S(z), A_{S(z)}) \cong R\Gamma(S(z)\setminus S_k(z), A_{S(z)\setminus S_k(z)}) \cong A$ が成り立つ。従って、$R\Gamma_{S_k(z)}(S(z), A_{S_k(z)}) \cong 0$ であり、とくに $H^i_{S_k(z)}(S(z), A_{S(z)}) = 0$ である。よって $H^i_c(S(z), A_{S(z)}) = 0$ が従う。

$z=0$ とする。$S(0) \setminus S_k(0)$ は n 次元球面 S^n とホモトピックであり、Mayer-Vietoris 完全列 (cf. 本文 [Remark 2.6.10, KS02]) と本文 [Corollary 2.7.7 (iii), KS02] を用いて、帰納法により、$R\Gamma(S(0) \setminus S_k(0), A_{S(0)\setminus S_k(0)}) \cong A \oplus A[-n]$ が従う。$S(0)$ は可縮なので、本文 [Corollary 2.7.7 (iii), KS02] より $R\Gamma(S(0), A_{S(0)}) \cong A$ である。以上より、$R\Gamma_{S_k(0)}(S(0), A_{S(0)}) \cong A[-n-1]$ が成り立つ。従って、とくに $i \neq n+1$ に対して $H^i_{S_k(0)}(S(0), A_{S(0)}) \cong 0$ であり、$i=n+1$ に対しては $H^{n+1}_{S_k(0)}(S(0), A_{S(0)}) \cong A$ である。$S(0) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} S_k(0)$ であるから、任意の i に対して $H^i_c(S(0), A_{S(0)}) \cong \operatorname{colim}_{k\in\mathbb{N}} H^i_{S_k(0)}(S(0), A_{S(0)})$ で

あり、よって $H^i_c(S(0), A_{S(0)}) = 0, (i \neq n+1)$ と $H^{n+1}_c(S(0), A_{S(0)}) \cong A$ が成り立つ。以上で (4) の証明を完了し、問題 II.20 の解答を完了する。 $\square$

References

[KS02] M. Kashiwara and P. Schapira. *Sheaves on Manifolds*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer Berlin Heidelberg, 2002. ISBN: 9783540518617. URL: https://www.springer.com/jp/book/9783540518617.