もんだい

ゆじ

2021 年 8 月 10 日

付録 A　位相空間論

問題 A.1. (i) $f : X \to Y$ をコンパクトハウスドルフ空間の間の連続写像とする。このとき f は閉写像であることを証明しなさい。

(ii) X をコンパクト空間、Y をハウスドルフ空間とする。標準射影 $p : X \times Y \to Y$ は閉写像であることを証明しなさい。

(iii) 任意の位相空間 Y に対して、標準射影 $X \times Y \to Y$ が閉写像となるような位相空間 X はコンパクトであることを証明しなさい。

問題 A.2 (具体例その 1)**.**

(i) 連続写像 $f : \mathbb{R} \times [0,1] \to \mathbb{R}$ であって、$f(x,0) = x, f(x,1) = 0$ を満たすものを構成しなさい。

(ii) 同相写像 $\mathbb{R} \xrightarrow{\sim} (0,1)$ を構成しなさい。

(iii) $X :\overset{\text{def}}{=} [0,1] \times [0,1]$, $Y :\overset{\text{def}}{=} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \le 1\}$ とする。同相写像 $X \xrightarrow{\sim} Y$ を構成しなさい。

(iv) $X :\overset{\text{def}}{=} [0,1] \times [0,1)$, $Y :\overset{\text{def}}{=} [0,1) \times [0,1)$ とする。同相写像 $X \xrightarrow{\sim} Y$ を構成しなさい。

(v) $-1 < x < 0 < y < 1$ を実数とする。同相写像 $f : (-1,1) \xrightarrow{\sim} (-1,1)$ で $f(x) = -1/2, f(0) = 0, f(y) = 1/2$ を満たすものを構成しなさい。

(vi) $x, y, z, w \in (-1,1) \times (-1,1)$ を異なる四点とする。同相写像 $f : (-1,1) \times (-1,1) \xrightarrow{\sim} (-1,1) \times (-1,1)$ であって、$f(x) = (1/2, 1/2), f(y) = (1/2, -1/2), f(z) = (-1/2, -1/2), f(w) = (-1/2, 1/2)$ を満たすものを構成しなさい。

(vii) $\{(x, \sin(1/x)) | x > 0\} \cup \{(0,y) | y \in \mathbb{R}\}$ は $\mathbb{R}^2$ の相対位相で連結であるが弧状連結とはならない。これを証明しなさい。

(viii) $(\{0,1\} \times [0,1]) \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{(x, 1/n) | 0 \le x \le 1 - 1/n\}$ は $\mathbb{R}^2$ の相対位相で連結であるが弧状連結とはならない。これを証明しなさい。

(ix) $\mathbb{R}$ と $\mathbb{R}^2$ は同相ではない。なぜでしょう。

(x) $X :\overset{\text{def}}{=} \{re^{\sqrt{-1}\pi/n} | 0 \le r \le 1, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{C}$, $Y :\overset{\text{def}}{=} ([0,1] \times \mathbb{N}) / [(0,n) \sim (0,m), (n,m \in \mathbb{N})]$ とする (Y は 0 側を全部一点に潰して繋げた商空間です)。X と Y は同相ではない。なぜでしょう。

問題 A.3. 位相空間 X が**可算コンパクト**であるとは、任意の可算な開被覆が有限部分被覆を持つことを言う。X をハウスドルフ空間とする。以下の主張が同値であることを証明しなさい：

(i) X は可算コンパクト空間である。

(ii) X のどんな可算無限閉部分集合も相対位相に関して離散集合でない。

問題 A.4 (いろいろな可算性)**.** 位相空間 X が **Lindelöf** であるとは、任意の開被覆が可算部分被覆を持つことを言う。位相空間 X が**可分**であるとは、可算濃度の稠密部分集合が存在することを言う。位相空間 X が**可算鎖条件を満たす**または **c.c.c. を満たす**とは、互いに交わらない開集合の族の濃度が高々可算であることを言う。

(i) Lindelöf 空間が可算コンパクトであれば、コンパクトであることを証明しなさい。

(ii) Lindelöf 空間の閉部分空間は Lindelöf 空間であることを証明しなさい。

(iii) 第二可算な位相空間は Lindelöf であることを証明しなさい。

(iv) 第二可算な位相空間は可分であることを証明しなさい。
(v) 可分な位相空間は c.c.c. を満たすことを証明しなさい。
(vi) 距離空間が可分であれば第二可算であることを証明しなさい。
(vii) 可算コンパクトな距離空間はコンパクトであることを証明しなさい。
(viii) (やや難). 距離空間が Lindelöf 空間であれば、第二可算であることを証明しなさい。
(ix) (難). 距離空間が c.c.c. を満たすとき、第二可算であることを証明しなさい。(Hint: 各 $A \subset X$ と n に対して $\mathcal{B}_n(A) :\overset{\text{def}}{=} \{x$ 中心半径 $1/n$ の開球 $| x \in A\}$ と置き、$\{\mathcal{B}_n(A) | \mathcal{B}_n(A)$ は交わらない開集合の族 $\}$ の極大元を与える $A_n \subset X$ を各 n で取ってきて、$\bigcup_n A_n \subset X$ を考えてみましょう). 特に、距離空間に対しては、第二可算性、Lindelöf 性、可分性、c.c.c. を満たすこと、はどれも同値となります。

注意. 可分であるが Lindelöf でない空間の例は問題 A.21を参照してください。$2^{2^{2^{\mathbb{N}}}}$ はコンパクト (とくに Lindelöf) であって c.c.c. を満たすが可分ではない位相空間の例になっています (問題 A.5, 問題 A.6, 問題 A.9)。コンパクトであって c.c.c. を満たさない位相空間の例は問題 A.17を参照してください。

問題 A.5 (積空間の可分性)**.** I を集合として、二点集合 $2 :\overset{\text{def}}{=} \{0, 1\}$ に離散位相を考える。$2^I :\overset{\text{def}}{=} \prod_{i \in \mathbb{N}} (2 \times \{i\})$ を直積位相で位相空間とみなす。

(i) 全単射 $I \to 2^I$ は存在しない。これを示しなさい。とくに、$2^{\mathbb{N}}$ は可算集合ではない。
(ii) $2^{\mathbb{N}}$ は可分である。これを示しなさい。
(iii) (難). $2^{2^{\mathbb{N}}}$ は可分である。これを示しなさい。
(iv) (難). $2^{2^{2^{\mathbb{N}}}}$ は可分でない。これを示しなさい。(cf. キューネン「集合論」第 II 章 演習 [4])

注意. 一般に基数 α に対して $2^{2^{\alpha}}$ は濃度 α の稠密部分集合を持つことが知られています。

問題 A.6 (c.c.c. を満たす空間の持つ性質)**.**

(i) コンパクト空間は c.c.c. を満たす。これを示しなさい。
(ii) $f : X \to Y$ を連続な全射とする。X が c.c.c. を満たせば、Y も c.c.c. を満たす。これを示しなさい。

次に、c.c.c. を満たす空間の族の積について考える。

(iii) X を集合、$\mathcal{A}$ を、濃度 n の X の有限部分集合からなる、非可算濃度の部分集合族とする。すべての点 $x \in X$ に対して $\{A \in \mathcal{A} | x \in A\}$ が可算集合であれば、非可算濃度の部分集合 $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ が存在して任意の $A, B \in \mathcal{B}, (A, B \subset X)$ に対して $A \cap B = \varnothing$ が成り立つ。これを示しなさい。
(iv) (Δ-system lemma). X を集合、$\mathcal{A}$ を X の有限部分集合からなる非可算な集合族とする。このとき、ある非可算濃度の部分族 $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ とある部分集合 $R \subset X$ が存在し、任意の $A, B \in \mathcal{B}, A \neq B$ に対して $A \cap B = R$ が成り立つ。(Hint: $\mathcal{A}$ に属する集合の濃度がすべて n である場合に帰着し、帰納法で示しなさい).
(v) $X_i, (i \in I)$ を c.c.c. を持つ空間の族として、任意の有限部分集合 $J \subset I$ に対して $\prod_{j \in J} X_j$ が c.c.c. を持つと仮定する。このとき、$\prod_{i \in I} X_i$ は c.c.c. を持つことを示しなさい。

注意. 「任意の c.c.c. を持つ位相空間二つの直積はまた c.c.c. を持つ」という言明は ZFC と独立であることが知られています (Suslin 仮説)。

問題 A.7 (カントール集合)**.**

(i) $X :\overset{\text{def}}{=} [0,1] \setminus \bigcup_{n\geq 1} \bigcup_{m=1}^{(3^n-1)/2} ((2m-1)/3^n, 2m/3^n)$ に $[0,1]$ の相対位相を入れる。X は $2^{\mathbb{N}}$ と同相であることを示しなさい。このような X を**カントール集合**と言います。

(ii) 上の X はコンパクトであり、完全不連結であることを示しなさい。

(iii) I を集合、$F \subset 2^I$ を空でない閉部分集合とする。このとき、連続写像 $r : 2^X \to F$ であって、$r|_F = \mathrm{id}_F$ となるものが存在することを示しなさい。特に、カントール集合 X の任意の空でない閉部分集合 $F \subset X$ に対して $r : X \to F, r|_F = \mathrm{id}_F$ となる連続写像が存在します。

問題 A.8. 位相空間 X に対し、その開集合すべてからなる集合を $\mathsf{Open}(X)$ と表す。連続写像 $f : X \to Y$ に対し、逆像をとることによって写像 $f^{-1} : \mathsf{Open}(Y) \to \mathsf{Open}(X)$ が定義される。位相空間 X, Y に対し、X から Y への連続写像全体のなす集合を $\mathrm{Hom}_{\mathsf{Top}}(X, Y)$ で表す。連続写像 $f' : X' \to X$ に対して、f' を合成することによって得られる写像 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{Top}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathsf{Top}}(X', Y)$ を $\tilde{f}'$ で表す。

(i) $\{\varnothing, \{0\}, \{0,1\}\}$ は $\{0,1\}$ の開集合系を与える。これを確認しなさい。この位相によって位相空間と思った二点集合 $\{0,1\}$ を S で表す。

(ii) 位相空間 X たちで添字付けられた全単射の族 $\rho_X : \mathrm{Hom}_{\mathsf{Top}}(X, S) \xrightarrow{\sim} \mathsf{Open}(X)$ であって、任意の連続写像 $f : X \to Y$ に対して $\rho_X \circ \tilde{f} = f^{-1} \circ \rho_Y$ を満たすものが存在する。これを証明しなさい。

(iii) 上のような全単射の族は一つしか存在しない。これを証明しなさい。

注意. 圏論的な言葉で言うと、S が函手 $X \mapsto \mathsf{Open}(X)$ の表現対象である、ということです。

問題 A.9 (フィルターを用いたチコノフの定理の証明)**.** 集合 X の部分集合族 $\mathcal{F}$ が**フィルター**であるとは、次の条件を満たすことを言う：

- $\varnothing \notin \mathcal{F}, X \in \mathcal{F}$ である。
- $A \in \mathcal{F}, B \in \mathcal{F}$ ならば $A \cap B \in \mathcal{F}$ である。
- $A \in \mathcal{F}, A \subset B$ ならば $B \in \mathcal{F}$ である。

包含関係でフィルター全体の集合に順序を入れる。以下の問いに答えなさい：

(i) フィルター全体の集合には極大元が存在することを証明しなさい (Zorn の補題を用いる)。極大なフィルターのこと**超フィルター**と言う。

(ii) $\mathcal{F}$ が超フィルターであることは、次が成り立つことと同値であることを示しなさい：任意の部分集合 $A \subset X$ に対し、$A \in \mathcal{F}$ であるか、または $X \setminus A \in \mathcal{F}$ であるか、どちらか一方のみが成り立つ。

(iii) $f : X \to Y$ が全射であり、$\mathcal{F}$ が X の超フィルターであるとき、$f(\mathcal{F}) :\overset{\text{def}}{=} \{f(A) | A \in \mathcal{F}\}$ は Y の超フィルターであることを示しなさい。

(iv) X が位相空間であるとする。点 x の近傍すべてからなる集合はフィルターであることを確認しなさい。このフィルターのことを**近傍フィルター**と言い、$\mathcal{V}(x)$ で表す。

(v) 位相空間 X に対して、以下の主張が同値であることを証明しなさい：
   - X はコンパクトである。
   - 閉部分集合族 $F_i \subset X, (i \in I)$ は、任意の有限部分集合 I_0 に対して $\bigcap_{i\in I_0} F_i \neq \varnothing$ を満たせば、$\bigcap_{i\in I} F_i \neq \varnothing$ となる。
   - X の任意の超フィルター $\mathcal{F}$ に対してある点 $x \in X$ が存在して $\mathcal{V}(x) \subset \mathcal{F}$ となる (このときフィルター $\mathcal{F}$ は点 x に**収束する**という)。

以上の準備のもと、チコノフの定理を証明する。$X_i, (i \in I)$ をコンパクト空間の族とする。$X :\overset{\text{def}}{=} \prod_{i \in I} X_i$ に積位相を入れる。$p_i : X \to X_i$ を射影とする。これは連続な全射である。$\mathcal{F}$ を X の超フィルターとして、$\mathcal{F}_i :\overset{\text{def}}{=} p_i(\mathcal{F})$ を X_i の超フィルターとする (cf. (iii))。(v) より、$\mathcal{F}_i$ はある点 $x_i \in X_i$ に収束する。$\mathcal{F}$ が $x :\overset{\text{def}}{=} (x_i)_{i \in I} \in X$ に収束することを示しなさい。

問題 A.10 (超フィルターの個数)**.** X を集合、$\mathsf{Ult}(X)$ を X の超フィルターすべてのなす集合とする。集合の濃度を $\#(-)$ で表し、べき集合を $2^{(-)}$ で表す。この問題では、$\#(\mathsf{Ult}(X)) = \#(2^{2^X})$ を証明する。

(i) $\#(\mathsf{Ult}(X)) \leq \#(2^{2^X})$ である。理由を説明しなさい。

(ii) X が無限集合であるとき、X と $X \times X$ の間に全単射が存在することを示しなさい。

(iii) 集合 X の有限部分集合全体の集合を $\mathcal{P}_{<\infty}(X)$ で表す。X が無限集合であるとき、X と $\mathcal{P}_{<\infty}(X)$ の間に全単射が存在することを示しなさい。

$\mathcal{P} :\overset{\text{def}}{=} \mathcal{P}_{<\infty}(X) \subset 2^X$, $\mathfrak{P} :\overset{\text{def}}{=} \mathcal{P}_{<\infty}(\mathcal{P}_{<\infty}(X)) \subset 2^{2^X}$ と置く。$Y \subset X$ に対して、

$$\alpha(Y) :\overset{\text{def}}{=} \{(A, \mathcal{A}) \in \mathcal{P} \times \mathfrak{P} | A \cap Y \in \mathcal{A}\} \subset \mathcal{P} \times \mathfrak{P},$$
$$\beta(Y) :\overset{\text{def}}{=} (\mathcal{P} \times \mathfrak{P}) \setminus \alpha(Y),$$

と置く。

(iii) X を無限集合として、$\mathcal{E} \subset 2^X$ を部分集合族であって $\#(\mathcal{E}) = \#(2^X)$ となるものとする。違いに異なる有限個の $Y_1, \cdots, Y_r \in \mathcal{E}$ と違いに異なる有限個の $Z_1, \cdots, Z_s \notin 2^X \setminus \mathcal{E}$ に対し、

$$\left(\bigcap_{i=1}^{r} \alpha(Y_i)\right) \cap \left(\bigcap_{j=1}^{s} \beta(Z_j)\right) \neq \varnothing$$

となることを示しなさい。

(iv) $\#(\mathcal{E}) = \#(2^X)$ となる各 $\mathcal{E} \subset 2^X$ に対して

$$\{\alpha(Y) | Y \in \mathcal{E}\} \cup \{\beta(Z) | Z \in 2^X \setminus \mathcal{E}\} \subset 2^{\mathcal{P} \times \mathfrak{P}}$$

を含む超フィルターは唯一であることを証明しなさい。その超フィルターを $\Phi(\mathcal{E})$ で表す。

(v) 濃度が $\#(2^X)$ となる異なる $\mathcal{E}, \mathcal{F} \subset 2^X$ に対し、$\Phi(\mathcal{E}) \neq \Phi(\mathcal{F})$ となることを示しなさい。結論として、$\mathcal{P} \times \mathfrak{P}$ のすべての超フィルターからなる集合の濃度は $\#(2^{2^X})$ となり、さらに X と $\mathcal{P} \times \mathfrak{P}$ は濃度が等しいことから、X のすべての超フィルターからなる集合の濃度も $\#(2^{2^X})$ となることがわかります。

問題 A.11. 距離空間に関して以下の問題に答えなさい。

(i) (X, d) を距離空間とする。$\bar{d} : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ を

$$\bar{d}(x, y) :\overset{\text{def}}{=} \min\{d(x, y), 1\}$$

と定義する。このとき、$\bar{d}$ が距離であり、さらに $\bar{d}$ によって定まる位相は d によって定まる位相と同じであることを証明しなさい。

(ii) $(X_n, d_n), n \in \mathbb{N}$ を距離空間とする。$X :\overset{\text{def}}{=} \prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$ として、点 $x = (x_n), y = (y_n) \in X$ に対して

$$d(x, y) :\overset{\text{def}}{=} \sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{-n} \min\{d_n(x_n, y_n), 1\}$$

と定めることで、$d: X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ を定義する。d は距離であり、さらに d によって定まる位相は $X = \prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$ の積位相と同じであることを証明しなさい。各 d_n が完備な距離であれば、d も完備な距離であることを証明しなさい。

問題 A.12.

(i) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ 上の完備な距離 d であって、d から定まる位相が $\mathbb{R}$ の相対位相と等しくなるようなものを一つ構成しなさい。

(ii) $\mathbb{R} \setminus \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \cdots, n\}$ 上の完備な距離 d であって、d から定まる位相が $\mathbb{R}$ の相対位相と等しくなるようなものを一つ構成しなさい。

(iii) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ 上の完備な距離 d であって、d から定まる位相が $\mathbb{R}$ の相対位相と等しくなるようなものを一つ構成しなさい。

(iv) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ 上の完備な距離 d であって、d から定まる位相が $\mathbb{R}$ の相対位相と等しくなるようなものを一つ構成しなさい。

問題 A.13 (Baire 範疇性)**.** 位相空間 X とその部分集合 $F \subset X$ に対し、F が**疎**であるとは、閉包 $\overline{F}$ が内部を持たないことを言う。

(i) (Baire 範疇性). X を完備な距離空間とするとき、X は可算個の疎な部分集合の和とはならない。これを示しなさい。特に、$X = \bigcup_n X_n$ となっていれば、ある n が存在して X_n の閉包が内部を持つことになります。

(ii) 同じ位相を定めるどんな距離を入れても完備な距離とはならないような距離空間の例を一つ挙げなさい。

(iii) X, Y をノルム空間とする (定義は Wikipedia を参照)。$f: X \to Y$ が連続な線形写像であれば、ある $M > 0$ が存在して、任意の $x \in X$ に対して $\|f(x)\| \leq M\|x\|$ が成り立つことを示しなさい。特に、$\|f\| :\overset{\text{def}}{=} \sup\{\|f(x)\| | x \in X, \|x\| = 1\}$ によって f のノルムが定まり、連続線型写像のなす線型空間 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{conti}}(X, Y)$ はノルム空間となる。

(iv) (一様有界性). X, Y をノルム空間として、X はさらにこのノルムに関して完備であるとする。Φ を連続な線型写像 $X \to Y$ からなる集合で各 $x \in X$ に対して $\{f(x) | f \in \Phi\} \subset Y$ が有界集合であるとき、Φ はノルム空間 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{conti}}(X, Y)$ の中で有界集合であることを示しなさい。

(v) (開写像定理). $f: X \to Y$ を完備なノルム空間の間の全射連続線型写像とすると、f は開写像である。これを示しなさい。

問題 A.14 (Arens–Eells の埋め込み定理)**.** X を距離空間とする。Y を $X \subsetneq Y$ となる別の距離空間として、これが等長埋め込みであるようなものとする。$y_0 \in Y \setminus X$ を任意にとる。Y の距離を ρ とする。

$$E :\overset{\text{def}}{=} \{f: Y \to \mathbb{R} | f\text{:連続}, f(y_0) = 0,\ \forall x, y \in Y, \exists K_{x,y} > 0, |f(x) - f(y)| \leq K_{x,y}\rho(x, y)\},$$

$$\|f\| :\overset{\text{def}}{=} \inf\{K_{x,y} | x, y \in Y\},$$

と定める。$x \in X$ に対して $\mathrm{Ev}_x: E \to \mathbb{R}$ を $f \mapsto f(x)$ と定義する (evaluation の ev のつもりです)。

(i) $(E, \| - \|)$ はノルム空間であることを示しなさい。双対ノルム空間を E^* で表す。

(ii) $h: X \to E^*$ を $h(x) :\overset{\text{def}}{=} \mathrm{Ev}_x$ で定める。h は等長埋め込みであり、$\mathrm{Im}(h)$ は線型空間 E^* の一次独立な部分集合であることを示しなさい。

結論として、任意の距離空間 X からあるノルム空間への等長写像で、像が一次独立な部分集合となるものが存在することが従う。最後に、このことから、任意の距離空間 X からあるノルム空間への等長写像で、像が一次独立な**閉**部分集合となるものが存在することを示しなさい。

問題 A.15. ハウスドルフ空間 X が**正規**であるとは、任意の閉部分集合 $F, H \subset X, F \cap H = \varnothing$ に対し、ある開集合 $U, V \subset X$ が存在して、$F \subset U, H \subset V, U \cap V = \varnothing$ となることを言う。ハウスドルフ空間 X が**正則**であるとは、任意の点 $x \in X$ と閉集合 $F \subset X$ に対し、$x \notin F$ であれば、ある開集合 $U, V \subset X$ が存在して $x \in U, F \subset V, U \cap V = \varnothing$ が成り立つことを言う。

(i) 距離空間は正規である。これを証明しなさい。
(ii) コンパクトハウスドルフ空間は正規である。これを証明しなさい。
(iii) (難). 正則 Lindelöf 空間は正規である。これを証明しなさい。

問題 A.16 (コンパクト距離空間はカントール集合の連続像である)**.** この問題では、任意のコンパクト距離空間 X に対して、連続な全射 $f : 2^{\mathbb{N}} \to X$ が存在することを示します。

X は第二可算なので、可算濃度の開基 $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ が存在する。各点 $(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in 2^{\mathbb{N}}$ に対し、$x_i = 0$ なら $A(x_i) :\overset{\mathrm{def}}{=} U_i$ で、$x_i = 1$ なら $A(x_i) :\overset{\mathrm{def}}{=} X \setminus \overline{U}_i$ とすることにより、$A((x_i)_{i \in \mathbb{N}}) :\overset{\mathrm{def}}{=} \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A(x_i) \subset X$ という集合が定義される。

(i) 各点 $\mathbf{x} \in 2^{\mathbb{N}}$ に対し、$A(\mathbf{x})$ は空集合か、一点集合であることを示しなさい。
(ii) $F :\overset{\mathrm{def}}{=} \{\mathbf{x} \in 2^{\mathbb{N}} | A(\mathbf{x}) \neq \varnothing$ と置く。$F \subset 2^{\mathbb{N}}$ が閉集合であることを示しなさい。
(iii) 各 $\mathbf{x} \in F$ に対して、$f(\mathbf{x}) \in A(\mathbf{x}) (\subset X)$ となる点を一つずつ選ぶ。$f : F \to X$ が全射連続写像であることを示しなさい。
(iv) 全射連続写像 $g : 2^{\mathbb{N}} \to X$ が存在することを示しなさい。結論として、コンパクト距離空間の濃度は $\#(2^{\mathbb{N}}) = \#(\mathbb{R})$ 以下であることが従います。

問題 A.17. この問題では、コンパクトハウスドルフ空間 X であって、どんな集合 I に対しても連続な全射 $2^I \to X$ が存在しないような例を構成する。

$X :\overset{\mathrm{def}}{=} [0, 1] \times \{0, 1\}$ に位相を定義する。混乱を避けるため、この問題では開区間を $]a, b[$ で表す。まず各一点集合 $\{(a, 1)\}$ は開であるとする。次に点 $(a, 0)$ の近傍系を、十分小さい $\varepsilon > 0$ に対する $\{(]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\times \{0, 1\}) \setminus \{(a, 1)\}$ によって定義する。X の位相は、これらを開基とすることによって定める。

(i) X はコンパクトであるが c.c.c. を満たさない。これを示しなさい。特に、X は可分ではありません。
(ii) どんな集合 I をとっても、連続な全射 $2^I \to X$ が存在しないことを示しなさい。

問題 A.18 (難)**.** 濃度が可算なコンパクトハウスドルフ空間は必ず孤立点を持つことを証明しなさい。

問題 A.19 (Urysohn の距離化定理)**.** X を正規な位相空間とする。

(i) 二つの $\varnothing$ でない開集合 $U, V \subset X$ が、$\overline{U} \subsetneq V$ を満たしているとする。このとき、$\overline{U} \subsetneq W, \overline{W} \subsetneq V$ を満たす開集合 $W \subset X$ が存在することを示しなさい。
(ii) 閉部分集合 $F, H \subset X, F \cap H = \varnothing$ に対して、可算個の開集合からなる集合 $\{U_a \subset X | (a = n/2^m, 0 \leq n \leq 2^m)\}$ であって、次を満たすものを構成しなさい：$F \subset U_0, \overline{U}_1 \subset X \setminus H$ であり、さらに任意の $0 \leq a \leq b \leq 1$ に対して $\overline{U}_a \subset U_b$ である。(Hint: まず U_0, U_1 を作り、次に $U_{1/2}$ を作り、次に

$U_{1/4}, U_{3/4}$ を作り、... とすると良い)

(iii) (Urysohn の補題). 上の $\{U_a \subset X | (a = n/2^m, 0 \leq n \leq 2^m)\}$ に対して、写像 $f : X \to [0,1]$ を、

$$f(x) :\overset{\text{def}}{=} \inf\{a \in [0,1] | 1 \geq n/2^m \geq a \Rightarrow x \in U_{n/2^m}\}$$

で定義する。f が連続であることを証明しなさい。構成から、$F \subset f^{-1}(\{0\}), H \subset f^{-1}(\{1\})$ となる。

(iv) X は第二可算であるとする。$X_0 \subset X$ を可算な稠密部分集合、$\mathcal{B} \subset \mathsf{Open}(X)$ を可算開基として、$I :\overset{\text{def}}{=} \{(p,U) | p \in X_0, U \in \mathcal{B}, p \in U\}$ と定義する。定義より、I は可算集合である。各 $(p,U) \in I$ に対して連続関数 $f_{(p,U)} : X \to [0,1]$ を $f_{(p,U)}(p) = 0, X \setminus U \subset f_{(p,U)}^{-1}(\{1\})$ となるように一つとる (このような $f_{(p,U)}$ の存在は (iii) より従う)。このとき、$f(x) :\overset{\text{def}}{=} (f_{(p,U)}(x)) \in \prod_I [0,1]$ で定まる写像 $f : X \to \prod_I [0,1]$ は、像 $\mathrm{Im}(f)$ への同相写像であることを証明しなさい。$\prod_I [0,1]$ は距離 (化可能) 空間である (cf. 問題 A.11 (ii)) から、X も距離化可能であることが従う。

問題 A.20 (Tietze の拡張定理)**.** ハウスドルフ空間 X について、以下の主張が同値であることを証明しなさい：

(i) X は正規である。

(ii) 任意の閉集合 $F \subset X$ と任意の有界連続関数 $f : F \to \mathbb{R}$ に対し、ある有界連続関数 $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ が存在して $f = \tilde{f}|_F$ が成り立つ。

(iii) 任意の閉集合 $F \subset X$ と任意の連続関数 $f : F \to \mathbb{R}$ に対し、ある連続関数 $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ が存在して $f = \tilde{f}|_F$ が成り立つ。

(Hint:「(i) $\Rightarrow$ (ii)」は問題 A.19 (iii) を使うと良い。「(ii) $\Rightarrow$ (iii)」は f に同相写像 $\mathbb{R} \xrightarrow{\sim} (-1,1)$ と埋め込み $(-1,1) \subset \mathbb{R}$ を合成してみると良い。)

問題 A.21 (Sorgenfrey 直線)**.** 実数直線 $\mathbb{R}^1$ に、$\{[a,b) | a,b \in \mathbb{R}^1\}$ を開基として位相を入れたものを S で表す。

(i) $X \subset S$ を任意の部分集合とする。X は相対位相で正規であることを示しなさい。

(ii) S は可分であり、Lindelöf である。これを証明しなさい。

(iii) $F :\overset{\text{def}}{=} \{(x,-x) | x \notin Q\} \subset S \times S$ と置く。F は相対位相で離散な閉部分集合であることを示しなさい。特に、$S \times S$ は可分であるが Lindelöf ではない。

(iv) $S \times S$ は正則であるが正規ではない。これを証明しなさい。(Hint: F 上の連続関数を $S \times S$ 上に拡張することを考えてみなさい)

この S は**ゾルゲンフライ直線** (Sorgenfrey line) と呼ばれています。

問題 A.22. X が正規であるとする。以下の主張が同値であることを証明しなさい：

(i) X は可算コンパクトである。

(ii) 任意の連続関数 $f : X \to \mathbb{R}$ は有界である。

問題 A.23 (一点コンパクト化)**.** ハウスドルフ空間 X が**局所コンパクト**であるとは、X の各点がコンパクト近傍を持つことを言う。

(i) X を局所コンパクト空間とする。$\infty :\overset{\text{def}}{=} X$、$\alpha X :\overset{\text{def}}{=} X \cup \{\infty\}$ と定義する。

$$\{(X \setminus K) \cup \{\infty\} | K \subset X, \text{コンパクト} \}$$

とすると、これは ∞ の近傍系となり、αX はコンパクトハウスドルフ空間となる。このことを証明しなさい。αX を X の**一点コンパクト化**と言う。

(ii) X を局所コンパクト空間とする。このとき X は正則であることを示しなさい。(Hint: 問題 A.19 (iii))

注意. 私はあまりよく知りませんが、ハウスドルフでない場合の局所コンパクト性の定義にはいろいろな流儀があるようです。ここでは、**局所コンパクト空間といえばつねにハウスドルフである**とします。

問題 A.24 (Stone-Čech コンパクト化)**.**

(i) X, Y をコンパクトハウスドルフ空間、$f, g : X \to Y$ を連続写像とする。次の主張を証明しなさい：任意の連続写像 $h : Y \to [0,1]$ に対して $h \circ f = h \circ g$ となるなら、$f = g$ が成り立つ。(Hint: 問題 A.19 (iii))

(ii) X を局所コンパクト空間とする。$[0,1]$ への連続写像の集合をたんに $\mathrm{Hom}(X) :\overset{\text{def}}{=} \mathrm{Hom}_{\mathsf{Top}}(X, [0,1])$ で表すことにする。

$$\varphi_X : X \to \prod_{f \in \mathrm{Hom}(X)} [0,1], \quad x \mapsto (f(x))_{f \in \mathrm{Hom}(X)}$$

によって写像 φ_X を定義する。φ_X は連続写像であり、さらに $\mathrm{Im}(\varphi_X)$ への同相写像であることを証明しなさい。

$\mathrm{Im}(\varphi_X)$ の閉包を βX で表す。φ_X によって $X \subset \beta X$ を開部分集合とみなす。チコノフの定理より $\prod_{f \in \mathrm{Hom}(X)} [0,1]$ はコンパクトであるから、βX もコンパクト空間であることに注意しておく。βX を X の **Stone-Čech コンパクト化**と呼ぶ。X がコンパクトであれば $X = \beta X$ であることを確認しなさい。

(iii) $f : X \to Y$ を局所コンパクト空間の間の連続写像とする。このとき、連続写像 $\beta f : \beta X \to \beta Y$ であって、$\beta f|_X = f$ となるものが存在することを証明しなさい。

(iv) X, Y を局所コンパクト空間、$f : X \to Y$ を像への同相として、$\mathrm{Im}(f) \subset Y$ が稠密であると仮定する。連続写像 $\beta f : \beta X \to \beta Y$ が同相であるためには、任意の連続関数 $g : X \to [0,1]$ に対してある連続関数 $h : Y \to [0,1]$ が存在して $h \circ f = g$ となることが必要十分である。これを示しなさい。

注意. 圏論の言葉で言えば、(i) は、単位閉区間 $[0,1]$ がコンパクトハウスドルフ空間のなす圏の **cogenerator** である、ということを意味していて、(ii) と (iii) は、Stone-Čech コンパクト化をする操作が、コンパクトハウスドルフ空間の圏から局所コンパクト空間の圏への忘却函手の**左随伴函手**である、ということを意味しています。

注意. 通常、Stone-Čech コンパクト化は、局所コンパクト空間のクラスより広い**完全正則空間**というクラスに対して定義されるものです。ここでは簡単のため局所コンパクト空間に対してのみ定式化しました。($\beta\mathbb{Q}$ や $\beta(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ がどうなるのかは興味深いです)

問題 A.25 (具体例その 2)**.**

(i) $[0,1]$ と $[0,1)$ と $(0,1)$ はどの二つも同相ではない。なぜでしょう。

(ii) (難). $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ と $[0,1) \cap \mathbb{Q}$ と $(0,1) \cap \mathbb{Q}$ はどれも同相である。なぜでしょう。

(iii) $X_1 :\overset{\mathrm{def}}{=} \{(0,a)|0 \leq a \leq 1\}$, $X_2 :\overset{\mathrm{def}}{=} \{(a,0)|0 \leq a \leq 1\}$, $X_3 :\overset{\mathrm{def}}{=} \{(0,a)|-1 \leq a \leq 0\}$, $X_4 :\overset{\mathrm{def}}{=} \{(a,0)|-1 \leq a \leq 0\}$, と置いて、$\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ の部分集合 $Y_n :\overset{\mathrm{def}}{=} \bigcup_{i=1}^{n} X_i, (n=1,2,3,4)$ に相対位相を入れる。どれが同相でどれが同相じゃないか決定しなさい。

(iv) (難). $[0,1]\times[0,1]$ と $[0,1]\times[0,1)$ と $[0,1]\times(0,1)$ と $(0,1)\times(0,1)$ はどの二つも同相ではない。なぜでしょう。

(v) (難). $A :\overset{\mathrm{def}}{=} [0,1]\times(-1,1)$ とするとき、二つの商空間 $X :\overset{\mathrm{def}}{=} A/[(0,a)\sim(1,a)]$ (円柱の側面) と $Y :\overset{\mathrm{def}}{=} A/[(0,a)\sim(1,-a)]$ (メビウスの帯) は同相ではない。なぜでしょう。

(vi) (やや難). $([0,1]\times[0,1])\setminus(\mathbb{Q}\times\{0\})$ と $([0,1]\times[0,1])\setminus((\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\times\{0\})$ は同相ではない。なぜでしょう。

(vii) (難). $([0,1]\times[0,1))\setminus((\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\times\{0\})$ と $([0,1)\times[0,1))\setminus((\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\times\{0\})$ と $((0,1)\times[0,1))\setminus((\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\times\{0\})$ はどの二つも同相ではない。なぜでしょう。

(viii) (難). $A :\overset{\mathrm{def}}{=} \mathbb{Q}\times\{0,1\}$, $B :\overset{\mathrm{def}}{=} (\mathbb{Q}\times\{0\})\cup((\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\times\{1\})$, $C :\overset{\mathrm{def}}{=} \{0,1\}\cup(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$ と置く。$([0,1]\times[0,1])\setminus(A\cup C)$ と $([0,1]\times[0,1))\setminus(B\cup C)$ は同相ではない。なぜでしょう。

注意. $[0,1]\times[0,1)$ と $(0,1)\times(0,1)$ が同相でないことの初等的な (=学部 2 年生的な) 証明は、Twitter である人に教えてもらいました。

注意. 一般に、可算濃度の距離空間は孤立点を持たなければ $\mathbb{Q}$ と同相であることが知られています。特に、$\mathbb{Q}$ と $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ は同相です。

問題 A.26 (パラコンパクト性)**.** 位相空間 X の部分集合族 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ が**局所有限**であるとは、任意の点 $x\in X$ に対してある近傍 $x\in V\subset X$ が存在して $V\cap U_\alpha\neq\varnothing$ となる α が有限個に限ることを言う。位相空間 X の二つの部分集合族 $\mathcal{U} :\overset{\mathrm{def}}{=} \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ と $\mathcal{V} :\overset{\mathrm{def}}{=} \{V_\beta\}_{\beta\in B}$ に対して、$\mathcal{U}$ が $\mathcal{V}$ の**細分**であるとは、任意の $\alpha\in A$ に対してある $\beta\in B$ が存在して $U_\alpha\subset V_\beta$ が成り立つことを言う。さらに $A=B$ であって $U_\alpha\subset V_\alpha$ となるとき、$\mathcal{U}$ は $\mathcal{V}$ の **1:1 細分**であると言う。位相空間 X が**パラコンパクト**であるとは、任意の開被覆が局所有限な開被覆によって細分されることを言う。

(i) コンパクトな位相空間はパラコンパクトであることを示しなさい。

(ii) パラコンパクトな位相空間の閉部分空間はパラコンパクトであることを示しなさい。

(iii) パラコンパクトかつハウスドルフな位相空間は正規であることを示しなさい。

(iv) $\{(1/n, 1/(n+1))\subset\mathbb{R}|n\in\mathbb{N}\}$ は局所有限な集合族ではない。これを示しなさい。

(v) X を位相空間、$\{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$ を X の局所有限な閉集合族とする。このとき、$\bigcup_{\alpha\in A} F_\alpha$ は閉集合であることを示しなさい。

(vi) X を位相空間、$\{C_\alpha\}_{\alpha\in A}$ を X の局所有限な部分集合族とする。このとき、$\{\overline{C}_\alpha\}_{\alpha\in A}$ は X の局所有限な閉集合族であることを示しなさい。

(vii) X を位相空間、$\{C_\alpha\}_{\alpha\in A}$ を X の局所有限な部分集合族とする。このとき、$\overline{\bigcup_{\alpha\in A} C_\alpha} = \bigcup_{\alpha\in A}\overline{C}_\alpha$ が成り立つことを示しなさい。

(viii) 集合族 $\mathcal{U}$ は局所有限な集合族 $\mathcal{V}$ により細分されるとする。このとき $\mathcal{U}$ を 1:1 細分する局所有限な集合族が存在することを示しなさい。さらに $\mathcal{V}$ が閉集合族であるとき、$\mathcal{U}$ を 1:1 細分する局所有限な閉集合族が存在することを示しなさい。

(ix) X を位相空間、$\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ を X の局所有限な開被覆、$f_\alpha : X\to\mathbb{R}, (\alpha\in A)$ を連続関数の族であって $f_\alpha(X\setminus U_\alpha)=\{0\}$ となるものとする。各 $x\in X$ に対して $f(x) :\overset{\mathrm{def}}{=} \sum_{\alpha\in A} f_\alpha(x)$ と定めることで、連

続関数 $f: X \to \mathbb{R}$ が定義されることを示しなさい。

(x) X をパラコンパクトハウスドルフ空間とする。このとき、任意の開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ に対して、連続関数の族 $f_\alpha : X \to \mathbb{R}, (\alpha \in A)$ であって、$f_\alpha(X \setminus U_\alpha) = \{0\}$ かつ $\sum_{\alpha\in A} f_\alpha(x) = 1, (\forall x \in X)$ となるものが存在することを示しなさい。このような連続関数の族 $(f_\alpha)_{\alpha\in A}$ を開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ に従属する **1 の分割**と呼ぶ。(Hint: パラコンパクトハウスドルフ空間は正規だったことを思い出しましょう)

問題 A.27. この問題では、性質「任意の開被覆が局所有限な**閉**被覆によって細分できる」を満たす位相空間がパラコンパクトであることを示す。

X を位相空間とする。X の任意の開被覆が局所有限な閉被覆によって細分できると仮定する。X の開被覆 $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ を任意にとる。仮定と問題 A.26 (viii) より、$\mathcal{U}$ を 1:1 細分する閉被覆 $\mathcal{F} = \{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$ が存在する。各 $x \in X$ に対し、有限個の $\mathcal{F}$ の元とのみ交わる開近傍 V_x を一つ取る。仮定より、開被覆 $\{V_x | x \in X\}$ を細分する局所有限閉被覆 $\mathcal{H}$ が存在する。

(i) 各 $H \in \mathcal{H}$ は高々有限個の $\mathcal{F}$ の元としか交わらない。なぜでしょう。

次に、$W_\alpha :\overset{\text{def}}{=} X \setminus \bigcup_{H\in\mathcal{H}, H\cap F_\alpha=\varnothing} H$ と定義する。

(ii) W_α は F_α の開近傍である。なぜでしょう。

(iii) 各 $H \in \mathcal{H}$ に対して、$W_\alpha \cap H = \varnothing \iff F_\alpha \cap H = \varnothing$ である。なぜでしょう。

(iv) $\{W_\alpha\}_{\alpha\in A}$ は X の局所有限開被覆であることを示しなさい。

(v) $\{U_\alpha \cap W_\alpha\}_{\alpha\in A}$ は $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ を細分する局所有限開被覆であることを確認しなさい。結論として、$\mathcal{U}$ を細分する開被覆の存在がわかったことになり、X はパラコンパクトであることが従います。

最後に、位相空間 X が、条件「任意の開被覆が局所有限な (開でも閉でもないかもしれない) 被覆によって細分される」を満たすとき、パラコンパクトであることを示しなさい。

問題 A.28. 位相空間 X の集合族 $\mathcal{A}$ が **σ-局所有限**であるとは、ある可算個の局所有限な部分族 $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}, (n \in \mathbb{N})$ が存在して $\mathcal{A} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_n$ となることを言う。局所有限な集合族は σ-局所有限であることに注意しなさい。

X を正則空間とする。X の開被覆 $\mathcal{U}$ は σ-局所有限) な開被覆 $\mathcal{V} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{V}_n$ (各 $\mathcal{V}_n$ は局所有限) によって細分されると仮定する。

$$\mathcal{W}_n :\overset{\text{def}}{=} \{V \setminus \bigcup_{i<n} \bigcup_{V'\in\mathcal{V}_i} V' | V \in \mathcal{V}_n\}$$

と定義する。このとき、$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{W}_n$ は $\mathcal{U}$ を細分する局所有限被覆であることを証明しなさい。

問題 A.27と組み合わせると、結論として、正則空間に対しては、パラコンパクトであることと条件「任意の開被覆が σ-局所有限な開被覆により細分される」を満たすことは同値であることが従います。

問題 A.29 (距離空間のパラコンパクト性)**.** この問題では、距離空間がパラコンパクトであることを証明する。

(X, d) を距離空間、$\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ をその開被覆とする。中心 $x \in X$ 半径 $r > 0$ の開球を $B(x, r)$ で表す。整列可能定理によって α を整列集合と考える。また、自然数 $n \geq 1$ と $\alpha \in A$ に対して

$$U_{\alpha,n} :\overset{\text{def}}{=} \{x \in U_\alpha | B(x, 1/2^n) \subset U_\alpha\}$$

と定める。以下の問いに答えなさい。

(i) $\bigcup_{n\geq 1} U_{\alpha,n} = U_\alpha$ であることを示しなさい。

(ii) $x \in U_{\alpha,n}, y \notin U_{\alpha,n+1}$ となる点 x, y に対して $d(x,y) > 1/2^{n+1}$ が成り立つことを示しなさい。

(iii) 各 $\alpha \in A, n \geq 1$ に対して $U^*_{\alpha,n} :\overset{\text{def}}{=} U_{\alpha,n} \setminus \bigcup_{\beta<\alpha} U_{\beta,n+1}$ と定義する。このとき、任意の $n \geq 1$, $\alpha \neq \beta$, $x \in U^*_{\alpha,n}$, $y \in U^*_{\beta,n}$ に対して $d(x,y) > 1/2^{n+1}$ が成り立つことを示しなさい。

(iv) $X = \bigcup_{\alpha\in A, n\geq 1} U^*_{\alpha,n}$ であることを示しなさい。

(v) $U^\dagger_{\alpha,n} :\overset{\text{def}}{=} \{x \in X | \exists y \in U^*_{\alpha,n}, d(x,y) < 1/2^{n+3}\}$ と定義する。このとき、任意の $n \geq 1$, $\alpha \neq \beta$, $x \in U^\dagger_{\alpha,n}$, $y \in U^\dagger_{\beta,n}$ に対して $d(x,y) \geq 1/2^{n+2}$ が成り立つことを示しなさい。

(vi) $\{U^\dagger_{\alpha,n} | \alpha \in A, n \geq 1\}$ は $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ を細分する σ-局所有限な開被覆であることを示しなさい。問題 A.27と組み合わせると、結論として、距離空間はパラコンパクトであることが従います。

問題 A.30 (長田-Smirnov の距離化定理)**.** この問題では、距離空間の下部位相空間と同相であるための必要十分条件を与える長田-Smirnov の距離化定理を証明する。

X を正則空間とする。以下の主張は同値であることを示しなさい。

(i) X 上にある距離 d が存在し、d の定める位相はもとの位相と同じとなる。

(ii) X は σ-局所有限な開基を持つ。

(Hint: (i)$\Rightarrow$(ii) は半径 $1/n$ の開球からなる被覆の細分を考えなさい。(ii)$\Rightarrow$(i) はまずパラコンパクトであることを示しなさい。次に Urysohn の補題を使って...)

問題 A.31 (チコノフの板)**.** 順序集合 $(X, \leq)$ が**全順序集合**または**線形順序集合**であるとは、任意の $x, y \in X$ に対して $x \leq y$ または $y \leq x$ のいずれか一方が成り立つことを言う。順序集合 α が**整列集合**であるとは、任意の部分集合が最小元を持つことを言う。特に、元 $x \in \alpha$ に対して x より真に大きい最小の元が存在する。これを x の**後者**と呼び、$x+1$ で表す。

全順序集合 $(X, \leq)$ とその元 $a \in X$ に対して、$(-\infty, a] :\overset{\text{def}}{=} \{x \in X | x \leq a\}$ などの記号を用いる。$(-\infty, a), (a, b), [a, b]$ など...

(i) 整列集合 α に対して、$\alpha + 1 :\overset{\text{def}}{=} \alpha \cup \{\alpha\}$ として、$\alpha \in \alpha + 1$ は最大限であるとすることによって、新しい整列集合 $\alpha + 1$ が定義される。このことを確認しなさい。

(ii) $(X, \leq)$ が全順序集合であるとする。$\{(a, b) \subset X | a, b \in X\}$ は X の開基となる。これを示しなさい。全順序集合をこの手続きによって位相空間とみなすとき、その位相を**線形順序位相**と言う。

(iii) α を整列集合とする。もし α に最大限が存在すれば、α は線形順序位相でコンパクトハウスドルフ空間である。これを証明しなさい。

(iv) (難). 以下を満たす整列集合を ω_1 で表す：
- ω_1 は非可算集合であり、最大限を持たない。
- 任意の $x \in \omega_1$ に対して、$(-\infty, x]$ は可算集合である。

この ω_1 について、任意の可算部分集合 $A \subset \omega_1$ に対して上限 $\sup A \in \omega_1$ が存在することを証明しなさい。さらに、ω_1 は線形順序位相で可算コンパクトであるがコンパクトではないことを証明しなさい。

(v) (難). また、以下を満たす整列集合を ω_0 で表す：
- ω_0 は非可算集合であり、最大限を持たない。
- 任意の $x \in \omega_0$ に対して、$(-\infty, x]$ は可算集合である。

$X :\overset{\text{def}}{=} (\omega_1 + 1) \times (\omega_0 + 1) \setminus \{(\omega_1, \omega_0)\}$ に積位相の相対位相を入れる。X は正則であるが正規でないこ

とを証明しなさい。(Hint: 正規でないことを示すためには、閉部分集合 $F :\overset{\mathrm{def}}{=} X \cap ((\omega_1+1)\times\{\omega_0\})$, $H :\overset{\mathrm{def}}{=} X \cap (\{\omega_1\}\times(\omega_0+1))$ を考え、これらをそれぞれ含む開集合が必ず交わることを証明すると良い) この X は**チコノフの板**と呼ばれています。

(vi) チコノフの板 X は、可算コンパクトでないことを示しなさい。また、X 上の任意の連続関数 $f : X \to \mathbb{R}$ は有界であることを示しなさい。(問題 A.22と見比べてみてください)

問題 A.32. 集合 X と、X 上の反射律、半対称律、推移律、を満たす二項関係 $\leq$ とのペア $(X, \leq)$ のことを **poset** と言う。位相空間 X が**既約**であるとは、空ではなく、さらに $X = F_1 \cup F_2$ となる空でない閉部分集合が存在しないことを言う。位相空間 X が **sober** であるとは、任意の既約閉部分集合 $F \subset X$ に対してある点 $x \in F$ がただ一つ存在して $F = \overline{\{x\}}$ となることを言う。このような点 $x \in F$ を F の**生成点**と言う。

(i) 位相空間 X に対して、開集合すべての集合 $\mathsf{Open}(X)$ に包含関係で順序を考える。このとき、$\mathsf{Open}(X)$ は poset であることを示しなさい。

(ii) $f : X \to Y$ を位相空間の間の連続写像であるとする。逆像をとることにより得られる写像 $f^{-1} : \mathsf{Open}(Y) \to \mathsf{Open}(X)$ は順序を保つことを確認しなさい。

(iii) 位相空間 X が既約であるための必要十分条件は、任意の空でない開集合が稠密であることは同値である。これを示しなさい。

(iv) X を sober な位相空間、$U \in \mathsf{Open}(X)$ を X とは異なる開集合とする。$X \setminus U$ が既約であるための必要十分条件は、任意の $U \subsetneq U_1 \in \mathsf{Open}(X)$ と任意の $U \subsetneq U_2 \in \mathsf{Open}(X)$ に対して $U_1 \cap U_2 \neq U$ が成り立つことである。これを示しなさい。

(v) X, Y を sober な位相空間とする。順序を保つ任意の射 $\varphi : \mathsf{Open}(Y) \to \mathsf{Open}(X)$ に対して、ただ一つの連続写像 $f : X \to Y$ が存在し、$\varphi = f^{-1}$ が成り立つことを示しなさい。特に、結論として、$\mathsf{Open}(X)$ と $\mathsf{Open}(Y)$ が順序集合として同型であれば、X と Y は位相空間として同相になります。

問題 A.33 (離散空間の Stone-Čech コンパクト化)**.** X を離散位相の入った位相空間とする。X の濃度を $\#(X)$ で表し、2^X で X の部分集合の集合を表す。

(i) $x \in X$ に対し、$V(x) :\overset{\mathrm{def}}{=} \{A \subset X | x \in A\}$ は超フィルターとなることを証明しなさい。

(ii) $f : Y \to Z$ が集合の間の単射であるとする。Y, Z に離散位相を入れて、f を連続写像と考える。このとき $\beta f : \beta Y \to \beta Z$ は単射であることを証明しなさい。(Hint: $g : Z \to Y$ を $g \circ f = \mathrm{id}_Y$ となるように選ぶと...)

(iii) 任意の点 $x \in \beta X \setminus X$ に対し、

$$\mathcal{F}_x :\overset{\mathrm{def}}{=} \{U \cap X | U \subset \beta X \text{ は } x \text{ の近傍 }\}$$

とすればこれは X の超フィルターであることを証明しなさい。

(iv) X の超フィルターと βX の点の間の 1:1 対応を作りなさい。特に、βX の濃度は $\#(2^{2^X})$ になります (cf. 問題 A.10)。

問題 A.34 (いろいろな Stone-Čech コンパクト化)**.**

(i) X が局所コンパクトであるとき、$\beta X \setminus X$ は βX の閉集合であることを示しなさい。

(ii) X が局所コンパクト、$F \subset \beta X \setminus X$ が閉集合、$Y :\overset{\mathrm{def}}{=} \beta X \setminus F$ であるとき、自然な同相 $\beta Y \cong \beta X$ が存在することを示しなさい。

(iii) X が局所コンパクト、$F \subset \beta X \setminus X$ が閉集合であるとき、任意のコンパクト部分集合 $K \subset X$ と任意の開近傍 $F \subset V$ に対して、$V \cap (X \setminus K) \neq \varnothing$ であることを示しなさい。

(iv) $X :\overset{\text{def}}{=} [0,\infty) \subset \mathbb{R}$ とする。$\beta X \setminus X = F_0 \cup F_1, F_0 \cap F_1 = \varnothing$ となる $\beta X \setminus X$ の二つの閉部分集合 F_0, F_1 が存在すると仮定する (つまり、$\beta X \setminus X$ は連結でないと仮定する)。$f(F_0) = \{0\}, f(F_1) = \{1\}$ となる連続関数 $f : \beta X \setminus X \to [0,1]$ を βX 上の連続関数へと延長することを考えて矛盾を導きなさい。結論として、$\beta X \setminus X$ は連結となります。

(v) $\beta(\mathbb{R}^N) \setminus \mathbb{R}^N, (N \geq 2)$ は連結であることを示しなさい。

(vi) $\beta\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}$ は二つの連結成分を持つことを示しなさい。

(vii) $\beta\omega_1 = \omega_1 + 1$ であることを示しなさい。(問題 A.36の E は可算コンパクト空間であるが Stone-Čech コンパクト化が一点コンパクト化とならない例です)

問題 A.35 (第一可算性と Stone-Čech コンパクト化)**.**

(i) X がコンパクトであるとする。もし点 $x \in X$ が可算濃度の開近傍基を持てば、連続関数 $f : X \to [0,1]$ であって $f^{-1}(0) = \{x\}$ となるものが存在する。これを示しなさい。

(ii) X を局所コンパクト空間、$U \subset X$ を稠密開集合、$f : X \to [0,1]$ を連続関数で $F :\overset{\text{def}}{=} f^{-1}(0) \subset X \setminus U$ となるものとする。このとき、$X \setminus F$ の離散閉部分集合 $E \subset X \setminus F$ が存在して、X での閉包 $\overline{E}$ が $\overline{E} \setminus E \subset F$ を満たす。これを示しなさい。

(iii) X を局所コンパクト空間、$f : \beta X \to \mathbb{R}$ を連続関数とする。$F :\overset{\text{def}}{=} f^{-1}(0) \subset \beta X \setminus X$ となると仮定する。このとき $\#(F) \geq \#(2^{2^{\mathbb{N}}})$ であることを示しなさい。(Hint: 上のような E に対して $\overline{E} \cong \beta\mathbb{N}$ となることを示しなさい)

(iv) X をコンパクトではない局所コンパクト空間とする。$\beta X \setminus X$ の任意の点は可算濃度の開近傍基を持たないことを示しなさい。結論として、βX が第一可算であれば、X はコンパクトとなる。

(v) X, Y を第一可算局所コンパクト空間であって、βX と βY が同相となるものとする。このとき、X, Y は同相であることを示しなさい。

問題 A.36 (可算コンパクト空間の積)**.** この問題では、可算コンパクト空間二つの積が可算コンパクトとはならない例を与える。

集合 X に対して、その可算無限部分集合全体の集合を $\mathcal{P}_{0,\infty}(X)$ で表す (0 は $\aleph_0$ 的な気持ちです)。$\beta\mathbb{N}$ はコンパクトなので、各 $A \in \mathcal{P}_{0,\infty}(\beta\mathbb{N})$ は集積点を持つ。そのうちの一つを $x_A \in \beta\mathbb{N}$ で表すとする。$0 \in \omega_1$ を最小元とする。以下の問いの答えなさい：

(i) $A \subset \beta\mathbb{N}$ を可算無限部分集合とする。$\overline{A} \subset \beta\mathbb{N}$ の濃度は $\#(2^{2^{\mathbb{N}}})$ であることを示しなさい。(Hint: $A \subset \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ である場合に帰着しなさい。相対位相で離散閉な無限部分集合 $A_0 \subset A$ を取り、A_0 上の関数を拡張することを考えて $\overline{A}_0 \cong \beta A_0 \cong \beta\mathbb{N}$ を示しなさい)

(ii) $E_0 :\overset{\text{def}}{=} \mathbb{N} \subset \beta\mathbb{N}$ として、各 $\alpha \in \omega_1$ に対して、帰納的に

$$\tilde{E}_\alpha :\overset{\text{def}}{=} \bigcup_{\beta<\alpha} E_\beta,$$
$$E_\alpha :\overset{\text{def}}{=} \tilde{E}_\alpha \cup \left\{ x_A \middle| A \in \mathcal{P}_{0,\infty}(\tilde{E}_\alpha) \right\},$$

と定義して $E :\overset{\text{def}}{=} \bigcup_{\alpha\in\omega_1} E_\alpha \subset \beta\mathbb{N}$ と置く。E が可算コンパクトであることを示しなさい。(Hint: E の可算部分集合の集積点について考えなさい。問題 A.31 (iv) も参照すると良いでしょう)

(iii) 各 $\alpha \in \omega_1$ に対して $\#(E_\alpha) \leq \#(2^{\mathbb{N}})$ が成り立つことを示しなさい。特に、$\#(E) \leq \#(2^{\mathbb{N}})$ が成り立ちます。

(iv) $F :\overset{\text{def}}{=} (\beta\mathbb{N} \setminus E) \cup \mathbb{N}$ とする。F が可算コンパクトであることを示しなさい。

(v) $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \subset E \times F$ は離散閉部分集合であることを確認しなさい。結論として、E と F は可算コンパクトであるにもかかわらず、$E \times F$ は可算コンパクトにはなっていないことが従います。

問題 A.37 (Alexandroff の問題, Arhangel'skiĭの定理)**.** この問題では、第一可算なコンパクトハウスドルフ空間の濃度が連続濃度 $\#(2^{\mathbb{N}}) = \#(\mathbb{R})$ 以下であることを証明する。

X を第一可算なコンパクトハウスドルフ空間とする。各点 $x \in X$ に対して、可算な開近傍基 $\mathcal{V}_x$ を一つとる。$0 \in \omega_1$ を最小元とする。

(i) $A \subset X$ を部分集合とする。A の濃度は $\#(\mathbb{R})$ 以下であると仮定する。このとき、A の閉包の濃度も $\#(\mathbb{R})$ 以下であることを証明しなさい。(Hint: $\overline{A}$ の点の開近傍はある A の点の開近傍でもあるので、可算個の「A の点と開近傍の組」によってすべて区別できることに注意しなさい)

(ii) $F_\alpha \subset X, (\alpha \in \omega_1)$ を閉部分集合の族であり、単調増大列である、すなわち、$\alpha \leq \beta \Rightarrow F_\alpha \subset F_\beta$、が成り立つと仮定する。このとき、$F :\overset{\text{def}}{=} \bigcup_{\alpha \in \omega_1} F_\alpha \subset X$ が閉部分集合であることを証明しなさい。(cf. 問題 A.31 (iv))

(iii) 上の状況で、$y \in X \setminus F$ が存在すると仮定する。このとき、ある $\alpha \in \omega_1$ と可算部分集合 $\mathcal{U} \subset \bigcup_{x \in F_\alpha} \mathcal{V}_x$ が存在して、$y \notin \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$ かつ $F \subset \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$ となることを示しなさい。

次に、適当に一点 $p \in X$ を取り、$F_0 :\overset{\text{def}}{=} \{p\}$ と置く。濃度が $\#(\mathbb{R})$ 以下の閉部分集合の単調増大列 $(F_\alpha)_{\alpha \in \omega_1}$, $\#(F_\alpha) \leq \#(\mathbb{R})$, $F_0 = \{p\} \subset F_1 \subset \cdots \subset F_\alpha \subset \cdots$ であって、任意の $\alpha \in \omega_1$ に対して次の条件 $\mathscr{P}(\alpha)$ を満たすものを、$\alpha \in \omega_1$ に関する超限帰納法で構成する：

- **条件** $\mathscr{P}(\alpha)$：任意の $\beta < \alpha$ と任意の可算部分集合 $\mathcal{U} \subset \bigcup_{x \in F_\beta} \mathcal{V}_x$ に対して、$X \neq \left(\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U\right)$ ならば $F_\alpha \not\subset \left(\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U\right)$ である。

ある $\alpha \in \omega_1$ に対して、濃度 $\#(\mathbb{R})$ 以下の閉部分集合からなる単調増大列 $F_\beta, \beta < \alpha$ が存在して、任意の $\beta < \alpha$ に対して $(F_\gamma)_{\gamma \leq \beta}$ が条件 $\mathscr{P}(\beta)$ を満たしていると仮定する。

$$\mathcal{V} :\overset{\text{def}}{=} \bigcup_{\beta < \alpha} \bigcup_{x \in F_\beta} \mathcal{V}_x,$$

$$\mathcal{H} :\overset{\text{def}}{=} \left\{ X \setminus \bigcup_{V \in \mathcal{V}'} V \,\middle|\, \mathcal{V}' \subset \mathcal{V}, \mathcal{V}' \text{ は可算}, X \neq \bigcup_{V \in \mathcal{V}'} V \right\},$$

と置く ($\#(\mathcal{V}), \#(\mathcal{H}) \leq \#(\mathbb{R})$ であることに注意しなさい)。各 $H \in \mathcal{H}$ に対して元 $p_H \in H$ を一つずつ選ぶ。F_α を $\{p_H | H \in \mathcal{H}\} \cup \bigcup_{\beta < \alpha} F_\beta \subset X$ の閉包とする。

(iv) $(F_\beta)_{\beta \leq \alpha}$ は濃度が $\#(\mathbb{R})$ 以下の閉部分集合の増大列であって条件 $\mathscr{P}(\alpha)$ を満たす。これを示しなさい。

これにより、超限帰納法で所望の閉部分集合族 $(F_\alpha)_{\alpha \in \omega_1}$ を得る。最後に、

(v) $X = \bigcup_{\alpha \in \omega_1} F_\alpha$ を示しなさい。

各 F_α は濃度が $\#(\mathbb{R})$ (これは $\#(\omega_1)$ 以上の基数) なので、右辺の濃度は高々 $\#(\mathbb{R})$ である。以上で証明を完了する。

注意. Alexandroff の問題は、1923 年に Alexandroff と Urysohn によって提起され、その後約 50 年もの間、1969 年になって A. Arhangel'skiĭが解決するまで、誰も解くことのできなかった位相空間論の難問です。私はあまり詳しくありませんが、集合論における**初等部分モデル**という概念を上手に使う別証明もあるようです。