Sheaves on Manifolds Exercise I.31 の解答

ゆじとも

2021 年 2 月 17 日

Sheaves on Manifolds [Exercise I.31, KS02] の解答です。

I Homological Algebra

問題 I.31. $M \in \mathsf{D}^b(\mathsf{Ab})$ とする。

(1) $M^* = R\operatorname{Hom}(M, \mathbb{Z}) = 0$ であるとき、$M = 0$ であることを示せ。

(2) $M^* \in \mathsf{D}^b_f(\mathsf{Ab})$ であるとき、$M \in \mathsf{D}^b_f(\mathsf{Ab})$ であることを示せ。

注意. (2) は $M^* \in \mathsf{D}^b(\mathsf{Mod}^f(\mathbb{Z}))$ という仮定のもとで $M \in \mathsf{D}^b(\mathsf{Mod}^f(\mathbb{Z}))$ を示す問題であったが、$\mathsf{D}^b(\mathsf{Mod}^f(\mathbb{Z}))$ は $\mathsf{D}^b(\mathsf{Ab})$ の部分圏として同型で閉じていないので、これはかなり微妙な問題設定であり (成り立たないかもしれない)、上記の設定がより適切であると思われる。

証明. (1) を示す。まず $M \in \mathsf{Ab}$ である場合に (1) を証明する。$R\operatorname{Hom}(M\mathbb{Z}) = 0$ は $\operatorname{Hom}(M, \mathbb{Z}) = \operatorname{Ext}^1(M, \mathbb{Z}) = 0$ を意味する。このときに $M = 0$ を示す。単射 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to M$ を任意にとると $0 = \operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Z}) \to \operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ は全射となるので $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = 0$ となって $n = 1$ となる。従って M はねじれなし群である。$n \neq 0, 1, -1$ とすれば M/nM はねじれ群であるが、完全列 $0 \to M \xrightarrow{n} M \to M/nM \to 0$ に函手 $R\operatorname{Hom}(-, \mathbb{Z})$ を施すことによって $R\operatorname{Hom}(M/nM, \mathbb{Z}) = 0$ が従い、よって M/nM はねじれなし群でもある。これは $M/nM = 0$ を意味し、従って M は可除である。M はねじれがないので $M \to M \otimes \mathbb{Q}$ は単射であり、M は可除なのでこれは全射でもある。従って $M \cong M \otimes \mathbb{Q}$ である。もし $M \neq 0$ なら、M は $\mathbb{Q}$ を直和因子として持つ。一方、完全列 $0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$ に $\operatorname{Hom}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, -)$ を適用することにより、$\hat{\mathbb{Z}} \cong \operatorname{End}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Ext}^1(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ を得るので、同じ完全列に $\operatorname{Hom}(-, \mathbb{Z})$ を適用することで $\operatorname{Ext}^1(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) \cong \operatorname{coker}(\operatorname{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \to \operatorname{Ext}^1(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \mathbb{Z})) \cong \hat{\mathbb{Z}}/\mathbb{Z} \neq 0$ が従い、これは $\operatorname{Ext}^1(M, \mathbb{Z}) = 0$ に反する。以上で $M \in \mathsf{Ab}$ の場合に示された。

一般の $M \in \mathsf{D}^b(\mathsf{Ab})$ に対して (1) を示す。$H^n(M) \neq 0$ となる最大の n をとる。このとき $\tau^{\leq n-1}(M) \to M \to H^n(M)[-n] \xrightarrow{+1}$ は完全三角である。$R\operatorname{Hom}(-, \mathbb{Z})$ を適用してコホモロジーをとることで、アーベル群の完全列

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \operatorname{Hom}(H^n(M), \mathbb{Z}) \longrightarrow H^n(R\operatorname{Hom}(M, \mathbb{Z})) \longrightarrow H^n(R\operatorname{Hom}(\tau^{\leq n-1}(M), \mathbb{Z})) \\ &\longrightarrow \operatorname{Ext}^1(H^n(M), \mathbb{Z}) \longrightarrow H^{n+1}(R\operatorname{Hom}(M, \mathbb{Z})) \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

を得る。ここで、$R\operatorname{Hom}(M, \mathbb{Z}) = 0$ であるから、$H^n(R\operatorname{Hom}(M, \mathbb{Z})) = 0, H^{n+1}(R\operatorname{Hom}(M, \mathbb{Z})) = 0$ が成り立つ。さらに、[Exercise 1.21, KS02] を $\tau^{\leq n-1}(M)$ と $R\operatorname{Hom}(-, \mathbb{Z})$ に対して適用することによって、$H^n(R\operatorname{Hom}(\tau^{\leq n-1}(M), \mathbb{Z})) = 0$ であることが従う。従って $\operatorname{Hom}(H^n(M), \mathbb{Z}) = \operatorname{Ext}^1(H^n(M), \mathbb{Z}) = 0$ が成

り立つ。すでに示している $M \in \mathsf{Ab}$ の場合により $H^n(M) = 0$ が従い、これは $H^n(M) \neq 0$ に矛盾する。以上で (1) の証明を完了する。

(2) を示す。(1) の証明と同様に、$H^n(M) \neq 0$ となる最大の n をとり、アーベル群の完全列

$$\begin{array}{cccccc} 0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(H^n(M), \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^n(R\,\mathrm{Hom}(M, \mathbb{Z})) & \longrightarrow & H^n(R\,\mathrm{Hom}(\tau^{\leq n-1}(M), \mathbb{Z})) \\ & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^1(H^n(M), \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^{n+1}(R\,\mathrm{Hom}(M, \mathbb{Z})) & \longrightarrow & H^{n+1}(R\,\mathrm{Hom}(\tau^{\leq n-1}(M), \mathbb{Z})) \\ & \longrightarrow & 0 & & & & \end{array}$$

について考える ($\mathrm{Ext}^2(H^n(M), \mathbb{Z}) = 0$ であることに注意)。[Exercise 1.21, KS02] を $\tau^{\leq n-1}(M)$ と $R\,\mathrm{Hom}(-, \mathbb{Z})$ に適用することにより、$H^n(R\,\mathrm{Hom}(\tau^{\leq n-1}(M), \mathbb{Z})) = 0$ である。また、$R\,\mathrm{Hom}(M, \mathbb{Z}) \in \mathsf{D}^b_f(\mathsf{Mod}(\mathbb{Z}))$ であるので、$H^n(R\,\mathrm{Hom}(M, \mathbb{Z})), H^{n+1}(R\,\mathrm{Hom}(M, \mathbb{Z})) \in \mathsf{Mod}^f(\mathbb{Z})$ である。従って、

$$\mathrm{Hom}(H^n(M), \mathbb{Z}),\ \mathrm{Ext}^1(H^n(M), \mathbb{Z}),\ H^{n+1}(R\,\mathrm{Hom}(\tau^{\leq n-1}(M), \mathbb{Z}))\ \in \mathsf{Mod}^f(\mathbb{Z})$$

である。さらに、n より大きい部分のコホモロジーを見れば、

$$H^m(R\,\mathrm{Hom}(\tau^{\leq n-1}(M), \mathbb{Z})) \cong H^m(R\,\mathrm{Hom}(M, \mathbb{Z})),\ (\forall m > n+1)$$

であるので、$R\,\mathrm{Hom}(\tau^{\leq n-1}(M), \mathbb{Z}) \in \mathsf{Mod}^f(\mathbb{Z})$ が従う。以上より、帰納的に、(2) を示すためには、アーベル群 M が $\mathrm{Hom}(M, \mathbb{Z}), \mathrm{Ext}^1(M, \mathbb{Z}) \in \mathsf{Mod}^f(\mathbb{Z})$ を満たすとき $M \in \mathsf{Mod}^f(\mathbb{Z})$ であることを示すことが十分である。

M をアーベル群であって $\mathrm{Hom}(M, \mathbb{Z})$ と $\mathrm{Ext}^1(M, \mathbb{Z})$ がどちらも有限生成であると仮定する。ねじれ部分を $T(M) \subset M$ として、$F(M) :\overset{\mathrm{def}}{=} M/T(M)$ とおく。完全列 $0 \to T(M) \to M \to F(M) \to 0$ に $\mathrm{Hom}(-, \mathbb{Z})$ を適用することにより、全射 $\mathrm{Ext}^1(M, \mathbb{Z}) \to \mathrm{Ext}^1(T(M), \mathbb{Z})$ を得る。従って、$\mathrm{Ext}^1(T(M), \mathbb{Z})$ は有限生成アーベル群である。完全列 $0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$ に $\mathrm{Hom}(T(M), -)$ を適用することにより、自然な同型 $\mathrm{Hom}(T(M), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1(T(M), \mathbb{Z})$ を得る。$T(M)$ に離散位相を入れて $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ に $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ の双対位相を入れることにより、$\mathrm{Hom}(T(M), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont.}}(T(M), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ を連続準同型のなす位相群とみなすと、$\mathrm{Hom}_{\mathrm{cont.}}(T(M), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ は副有限アーベル群である。とくにコンパクトハウスドルフである。一方、$\mathrm{Ext}^1(T(M), \mathbb{Z}) \cong \mathrm{Hom}(T(M), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ はアーベル群として有限生成であるので、$\mathrm{Hom}_{\mathrm{cont.}}(T(M), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ は有限アーベル群であることが従う。Pontryagin 双対より、$T(M) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont.}}(\mathrm{Hom}_{\mathrm{cont.}}(T(M), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(T(M), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ が成り立つ。以上より、$T(M)$ は有限生成ねじれアーベル群である。

n 倍写像 $n : F(M) \to F(M)$ を考えると、$F(M)$ はねじれなし群なので、これは単射である。従って、n 倍写像

$$\mathrm{Ext}^1(F(M), \mathbb{Z}) \xrightarrow{n} \mathrm{Ext}^1(F(M), \mathbb{Z})$$

は全射であり、$\mathrm{Ext}^1(F(M), \mathbb{Z})$ が可除群であることが従う。n-倍写像 $n : M \to M$ を考えると、完全列

$$0 \to \mathrm{Hom}(M/nM, \mathbb{Z}) \to \mathrm{Hom}(M, \mathbb{Z}) \xrightarrow{n} \mathrm{Hom}(M, \mathbb{Z})$$

を得る。M/nM はねじれ群なので $\mathrm{Hom}(M/nM, \mathbb{Z}) = 0$ であり、従って $\mathrm{Hom}(M, \mathbb{Z})$ はねじれなし群である。仮定より、$\mathrm{Hom}(M, \mathbb{Z})$ は有限生成なので、従って自由アーベル群である。ランクを $r = \mathrm{rank}(\mathrm{Hom}(M, \mathbb{Z}))$ と置く。r に関する帰納法により M の有限生成性を証明する。

まず $r = 0$ の場合について考える。このとき、$\mathrm{Hom}(M, \mathbb{Z}) = 0$ であり、$\mathrm{Ext}^1(M, \mathbb{Z})$ は有限生成である。完全列

$$0 \to T(M) \to M \to F(M) \to 0$$

により得られる完全列

$$\begin{aligned}0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(F(M),\mathbb{Z}) &\longrightarrow \mathrm{Hom}(M,\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(T(M),\mathbb{Z}) \\ \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(F(M),\mathbb{Z}) &\longrightarrow \mathrm{Ext}^1(M,\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(T(M),\mathbb{Z}) \longrightarrow 0\end{aligned}$$

について考える。$T(M)$ はねじれ群なので、$\mathrm{Hom}(T(M),\mathbb{Z}) = 0$ が成り立つ。よって $\mathrm{Ext}^1(F(M),\mathbb{Z}) \to \mathrm{Ext}^1(M,\mathbb{Z})$ は単射である。$\mathrm{Ext}^1(M,\mathbb{Z})$ は有限生成なので、$\mathrm{Ext}^1(F(M),\mathbb{Z})$ も有限生成である。一方、$\mathrm{Ext}^1(F(M),\mathbb{Z})$ は可除群なので、従って $\mathrm{Ext}^1(F(M),\mathbb{Z}) = 0$ が成り立つ。さらに、$r = 0$ であるという仮定より、$\mathrm{Hom}(M,\mathbb{Z}) = 0$ であるので、$\mathrm{Hom}(F(M),\mathbb{Z}) = 0$ が成り立つ。ここで (1) より、$F(M) = 0$ が従う。よって $T(M) \xrightarrow{\sim} M$ は同型射であり、既に示した $T(M)$ の有限生成性より、M も有限生成である。以上で $r = 0$ の場合の証明を完了する。

$r > 0$ とする。$\mathrm{Hom}(M,\mathbb{Z})$ のランクが $r-1$ 以下であるような任意の M について主張が成り立つと仮定する。この仮定のもとで、$\mathrm{Hom}(M,\mathbb{Z})$ のランクが r であるような任意の M に対して主張を示す。$\mathrm{Hom}(M,\mathbb{Z})$ のランクが r であるとする。$\mathrm{Hom}(M,\mathbb{Z}) \neq 0$ であるので、0 でない射 $f : M \to \mathbb{Z}$ が存在する. $f \neq 0$ なので、ある $m \in M$ が存在して $f(m) \neq 0$ が成り立つ。ここで $1 \mapsto m$ により定義される射 $\mathbb{Z} \to M$ を考えると、任意の 0 でない $n \in \mathbb{Z}$ に対して $f(nm) = nf(m) \neq 0$ であることから、$\mathbb{Z} \to M$ は単射である。この単射の余核を M_1 として、完全列

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{1\mapsto m} M \longrightarrow M_1 \longrightarrow 0$$

により得られる完全列

$$\begin{aligned}0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(M_1,\mathbb{Z}) &\longrightarrow \mathrm{Hom}(M,\mathbb{Z}) \xrightarrow{f\mapsto f(m)} \mathrm{Hom}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}) \\ \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(M_1,\mathbb{Z}) &\longrightarrow \mathrm{Ext}^1(M,\mathbb{Z}) \longrightarrow 0\end{aligned}$$

を考える。$\mathrm{Hom}(M,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^r$ であるので、$\mathrm{Hom}(M_1,\mathbb{Z})$ はねじれなしであり、従って自由アーベル群である。また、$f(m) \neq 0$ であるので、$\mathrm{Hom}(M_1,\mathbb{Z})$ のランクは $r-1$ 以下である。さらに、$\mathrm{Ext}^1(M,\mathbb{Z})$ は有限生成であるので、$\mathrm{Ext}^1(M_1,\mathbb{Z})$ も有限生成である。ここで帰納法の仮定より、M_1 が有限生成であることが従う。よって M も有限生成である。以上で (2) の証明を完了し問題 I.31 の解答を完了する。 $\square$

References

[KS02] M. Kashiwara and P. Schapira. *Sheaves on Manifolds*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer Berlin Heidelberg, 2002. ISBN: 9783540518617. URL: https://www.springer.com/jp/book/9783540518617.