Sheaves on Manifolds Exercise I.15 の解答

ゆじとも

2021 年 2 月 9 日

Sheaves on Manifolds [Exercise I.15, KS02] の解答です。

I Homological Algebra

問題 I.15. $\mathcal{C}$ を圏とする。$c \in \mathcal{C}$ に対して、$h_c^{\mathcal{C}} :\overset{\text{def}}{=} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, c)$ を米田埋め込み $\mathcal{C} \to \mathsf{Set}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}$ による $c \in \mathcal{C}$ の像とする ($\mathcal{C}$ が明らかな場合は上付き添字の $\mathcal{C}$ を省略してたんに h_c と表す)。$\mathrm{Ind}(\mathcal{C})$ を $\mathsf{Set}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}$ の充満部分圏であって、ある filtered diagram $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ に対する $\mathrm{colim}_{i \in \mathcal{I}}\, h_{F(i)}$ と同型な対象たちからなるものとする。

$\mathcal{C}$ をさらにアーベル圏であるとして、S_X を over category $\mathcal{C}_{X/}$ の充満部分圏であって、擬同型 $X \to X'$ たちからなるものとする。

(1) $\sigma(X) :\overset{\text{def}}{=} \mathrm{colim}_{X' \in S_X}\, h_{X'}$ によって函手 $\sigma : \mathsf{D}^+(\mathcal{C}) \to \mathrm{Ind}(\mathsf{K}^+(\mathcal{C}))$ が well-defined に定まることを示し、σ が忠実充満であることを示せ。

(2) $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ をアーベル圏の間の左完全函手とする。$T(X) :\overset{\text{def}}{=} \mathrm{colim}_{X' \in S_X}\, h^{\mathcal{C}'}_{F(X')}$ と定める。これによって函手 $T : \mathsf{D}^+(\mathcal{C}) \to \mathrm{Ind}(\mathsf{K}^+(\mathcal{C}'))$ が well-defined に定まることを示せ。F が $X \in \mathsf{D}^+(\mathcal{C})$ で **derivable** であるということを、ある対象 $Y \in \mathsf{D}^+(\mathcal{C}')$ が存在して $T(X) \cong \sigma(Y)$ となることとして定義する。このような Y が (up to isom で) 一意的であることを示せ。また、F がすべての $X \in \mathsf{D}^+(\mathcal{C})$ で derivable であるときに、函手 $RF : \mathsf{D}^+(\mathcal{C}) \to \mathsf{D}^+(\mathcal{C}')$ で $\sigma \circ RF \cong T$ となるものが (up to isom で) 一意的に存在することを示せ (すなわち、F は右導来函手 RF を admits する)。

証明. (1) の函手 σ の well-defined 性は (2) の函手 T の well-defined 性の特別な場合 ($F = \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ の場合) であるので、まず (2) の函手 T が well-defined に定まることを示す。T は函手 $\mathsf{K}^+(\mathcal{C}) \to \mathrm{Ind}(\mathsf{K}^+(\mathcal{C}'))$ としては well-defined に定まっている。$X \in \mathsf{K}^+(\mathcal{C})$ を 0 と擬同型な対象とする。このとき 0-射 $X \to 0$ は圏 S_X の終対象であるので、

$$T(X) = \mathrm{colim}_{X' \in S_X}\, h_{F(X)} = h_{F(0)} = h_0 \cong 0$$

となる。よって $\mathrm{Ind}(\mathsf{K}^+(\mathcal{C}'))$ において $T(X) \cong 0$ である。従って、本文 [Proposition1.6.9 (iii), KS02] より、函手 $T : \mathsf{D}^+(\mathcal{C}) \to \mathrm{Ind}(\mathsf{K}^+(\mathcal{C}'))$ が well-defined に定まる。以上で T が (よって、σ も) well-defined に定まることがわかった。

函手 σ が忠実であることを示す。X, Y を $\mathsf{D}^+(\mathcal{C})$ の対象、$f : X \to Y$ を $\mathsf{D}^+(\mathcal{C})$ の射であって、$\sigma(f) = 0$ であるとする。f は $\mathsf{K}^+(\mathcal{C})$ の図式 $X \xrightarrow{f'} Y' \xleftarrow{t} Y$ によって代表される。ここで t は擬同型である。$\sigma(f) = 0$ であることと、$\sigma(t)$ が同型射であることから、$\sigma(f')$ は 0-射である。$\mathrm{id}_X \in h_X(X)$ により代表される元 $[\mathrm{id}_X] \in \sigma(X)(X) = \mathrm{colim}_{X' \in S_X}\, h_{X'}(X)$ の $\sigma(f')(X) : \sigma(X)(X) \to \sigma(Y')(X)$ での行き先は $f' : X \to Y'$ により代表される元 $[f'] \in \sigma(Y')(X) = \mathrm{colim}_{Y'' \in S_{Y'}}\, h_{Y'}(X)$ であるが、$\sigma(f') = 0$ であるから、$[f'] = 0$ で

ある。これは、ある $[t' : Y' \to Y''] \in S_{Y'}$ が存在して $t' \circ f' = 0$ となることを意味する。さらに $t' \circ f' = 0$ は f' が $\mathsf{D}^+(\mathcal{C})$ において 0-射であることを意味する。よって f は $\mathsf{D}^+(\mathcal{C})$ において 0-射であることが従う。以上より σ は忠実である。

函手 σ が充満であることを示す。$f : \sigma(X) \to \sigma(Y)$ を $\mathrm{Ind}(\mathsf{K}^+(\mathcal{C}))$ の射とする。$\mathrm{id}_X : X \to X$ で代表される元 $[\mathrm{id}_X] \in \sigma(X)(X) = \mathrm{colim}_{X' \in S_X}(h_{X'}(X))$ の $f(X) : \sigma(X)(X) \to \sigma(Y)(X)$ での行き先を $[f] \in \sigma(Y)(X) = \mathrm{colim}_{Y' \in S_Y}(h_{Y'}(X))$ と置く。S_Y は filtered であるから、ある $[t : Y \to Y'] \in S_Y$ とある射 $f' : X \to Y'$ が存在して、$[f]$ は f' によって代表される。$\mathsf{K}^+(\mathcal{C})$ の図式 $X \xrightarrow{f'} Y' \xleftarrow{t} Y$ によって代表される $\mathsf{D}^+(\mathcal{C})$ の射を g と置くと、f' が $[f]$ を代表することから、$\sigma(g)([\mathrm{id}_X]) = [f] \in \sigma(Y)(X)$ がわかる。これは $\sigma(g) = f$ を意味する。以上より σ は充満であり、(1) の証明を完了する。

(2) を証明する。T が well-defined に定義されることは既に示している。Y の (up to isom での) 一意性は σ が忠実であることから従う。すべての $X \in \mathsf{D}^+(\mathcal{C})$ で F が derivable であれば、$F : \mathsf{D}^+(\mathcal{C}) \to \mathrm{Ind}(\mathsf{K}^+(\mathcal{C}'))$ は $\sigma : \mathsf{D}^+(\mathcal{C}') \to \mathrm{Ind}(\mathsf{K}^+(\mathcal{C}'))$ の本質的像を一意的に経由するため、σ が忠実充満であることから、右導来函手 $RF : \mathsf{D}^+(\mathcal{C}) \to \mathsf{D}^+(\mathcal{C}')$ であって $\sigma \circ RF \cong T$ となるものが (up to isom で) 一意的に存在する。以上で問題 I.15 の解答を完了する。 □

References

[KS02] M. Kashiwara and P. Schapira. *Sheaves on Manifolds*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer Berlin Heidelberg, 2002. ISBN: 9783540518617. URL: https://www.springer.com/jp/book/9783540518617.