Sheaves on Manifolds Exercise I.37 の解答

ゆじとも

2021 年 2 月 9 日

Sheaves on Manifolds [Exercise I.37, KS02] の解答です。

I Homological Algebra

問題 I.37. $\mathcal{C}$ を加法圏とする。$\mathrm{End}(\mathcal{C})$ を $\mathrm{id}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ の自己射のなす集合とする。すなわち、$\mathrm{End}(\mathcal{C}) :\overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Hom}_{[\mathcal{C},\mathcal{C}]}(\mathrm{id}_{\mathcal{C}})$ とする。

(1) $\mathrm{End}(\mathcal{C})$ は可換環であることを示せ。

(2) A を環とする。$\mathrm{End}(\mathsf{Mod}(A))$ は A の中心 $Z(A)$ と同型であることを示せ。

(3) A を可換環として、環準同型 $A \to \mathrm{End}(\mathcal{C})$ が与えられているとする。このとき加法圏 $\mathcal{C}$ を A **上の加法圏**という。$\mathcal{C}$ が A 上の加法圏であるとき、$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ は合成が双線型となるような A-加群の構造を持つことを示せ。

(4) A をネーター環、$\mathcal{C}$ を A 上の**アーベル**圏とする。

 (i) $M \in \mathsf{Mod}^f(A)$ と $X \in \mathcal{C}$ に対して函手 $Y \mapsto \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)), (Y \in \mathcal{C})$ は表現可能であることを示せ。この表現対象を $X \otimes_A M$ と書く。

 (ii) $\otimes_A : \mathcal{C} \times \mathsf{Mod}^f(A) \to \mathcal{C}$ は右完全な双函手であることを示せ。

 (iii) $\otimes_A$ は左導来函手 $\otimes_A^L : \mathsf{D}^-(\mathcal{C}) \times \mathsf{D}^-(\mathsf{Mod}^f(A)) \to \mathsf{D}^-(\mathcal{C})$ を持つことを示せ。

 (iv) $\mathrm{Hom}_A(-,-) : \mathsf{Mod}^f(A)^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ についても同様の議論を行え。

証明. (1) を示す。$f : \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \to \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ は各 $M \in \mathcal{C}$ に対する自己射 $f_M : M \to M$ の族で $g : M \to N$ に対して $g \circ f_M = f_N \circ g$ を満たすものである。従って、二つの $f^1, f^2 : \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \to \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ に対して族 $(f^1_M + f^2_M)_{M\in\mathcal{C}}$ は $\mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ の自己射となるので、これによって加法が定義される。乗法を合成によって定義すると、$\mathcal{C}$ が加法圏であること、すなわち合成が双線型であることから、$\mathrm{End}(\mathcal{C})$ は環の公理を満たす。可換であることを示すことが残っている。$f, g : \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \to \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ と $M \in \mathcal{C}$ を任意にとると、g が自然変換であることから、射 $f_M : M \to M$ に対して等式 $f_M \circ g_M = g_M \circ f_M$ を満たす。従って $f \circ g = g \circ f$ が成り立ち、$\mathrm{End}(\mathcal{C})$ は合成を乗法として可換である。以上で (1) の証明を完了する。

(2) を示す。$a \in Z(A)$ に対して、一斉に a 倍をする射 $M \to M$ は任意の $g : M \to N$ と $m \in M$ に対して $g(am) = ag(m)$ を満たすので $\mathrm{End}(\mathsf{Mod}(A))$ の元を定める。こうして写像 $Z(A) \to \mathrm{End}(\mathsf{Mod}(A))$ ができる。この写像は明らかに環準同型である。単射であることを示すために、$a \in Z(A)$ が $\mathrm{End}(\mathsf{Mod}(A))$ で 0 であると仮定する。すると a 倍写像 $A \to A$ が 0 射であるため、$a = 0$ が従う。よって $Z(A) \to \mathrm{End}(\mathsf{Mod}(A))$ は単射である。全射であることを示すために、$f : \mathrm{id}_{\mathsf{Mod}(A)} \to \mathrm{id}_{\mathsf{Mod}(A)}$ を任意にとる。$f_A : A \to A$ によって $a :\overset{\mathrm{def}}{=} f_A(1)$ とおく。f_M が a 倍写像であることを示せば、$Z(A) \to \mathrm{End}(\mathsf{Mod}(A))$ が全射であることが

従う。$M \in \mathsf{Mod}(A)$ を任意にとる。全射 $p : A^{\oplus I} \to M$ をひとつ選ぶ。$f : \mathrm{id}_{\mathsf{Mod}(A)} \to \mathrm{id}_{\mathsf{Mod}(A)}$ が自然変換であることから、$f_{A^{\oplus I}}$ は各座標ごとに f_A が並んでいる射であり、それは a 倍写像に他ならない。また $f_M \circ p = p \circ f_{A^{\oplus I}} = p(a\ 倍) = ap$ が成り立つ。ここで p はエピなので、f_M も a-倍写像であることが従う。以上で $Z(A) \to \mathrm{End}(\mathsf{Mod}(A))$ が全射であることが従い、(2) の証明を完了する。

(3) を示す。$\varphi : A \to \mathrm{End}(\mathcal{C})$ を環準同型とする。$a \in A$ に対して自然変換 $\varphi(a) : \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \to \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ が対応している。$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ に $\varphi(a)_Y : Y \to Y$ を合成することによって A-加群の構造を入れる (これが $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ の加法と両立的であることは明らかである)。このとき、$f : X \to Y$ に対して $f \circ \varphi(a)_X = \varphi(a)_Y \circ f$ であるから、この A-加群の構造は $\varphi(a)_X : X \to X$ を合成することによる A-加群の構造と等しい。また、$X, Y, Z \in \mathcal{C}$ と $a \in A, f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y), g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ に対して、

$$g \circ (a \cdot f) = g \circ (f \circ \varphi(a)_X) = (g \circ f) \circ \varphi(a)_X = a \cdot (g \circ f)$$

が成り立つので、g を合成する射 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$ は A-加群の構造と両立的である。同じく

$$(a \cdot g) \circ f = (\varphi(a)_Z \circ g) \circ f = \varphi(a)_Z \circ (g \circ f) = a \cdot (g \circ f)$$

が成り立つので、f を合成する射 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$ は A-加群の構造と両立的である。以上より $\mathcal{C}$ の合成は A-双線型であり、(3) の証明を完了する。

(4) を示す。(i) を示す。$M = A$ のときは自然に $\mathrm{Hom}_A(A, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ であるから明らかにこの函手が表現可能であり $X \otimes_A A \cong X$ が成り立つ。M が A の有限直和の場合も同様にして $\mathrm{Hom}_A(A^n, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)^n \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X^n, Y)$ が成り立つので、この函手は表現可能であり $X \otimes_A A^n \cong X^n$ が成り立つ。一般の有限生成加群 M に対して、所望の表現可能性を証明する。A はネーターであるから、完全列 $A^n \to A^m \to M \to 0$ が存在する。このとき

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)) \to \mathrm{Hom}_A(A^m, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)) \to \mathrm{Hom}_A(A^n, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y))$$

も完全である。Y に関して函手的に $\mathrm{Hom}_A(A^m, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X^m, Y)$ が成り立つので、A-加群の完全列

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X^m, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X^n, Y)$$

を得る。従って Y に関して函手的に $\mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathrm{coker}(X^m \to X^n), Y)$ が成り立つ。よって $Y \mapsto \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y))$ は表現可能であることが従う。以上で (i) の証明を完了する。

(ii) を示す。M, X に関しての双函手

$$\mathcal{C} \times \mathsf{Mod}^f(A) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{C}, \mathsf{Mod}(A)), \quad (X, M) \mapsto [Y \mapsto \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y))]$$

の表現対象として $X \otimes_A M$ が定義されているので、米田の補題より $\otimes_A : \mathcal{C} \times \mathsf{Mod}^f(A) \to \mathcal{C}$ は双函手である。さらに $\mathrm{Hom}_A(-, *)$ が左完全であることと $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, Y)$ が左完全であることから、$\otimes_A$ はいずれの成分についても右完全であることが従う。以上で (ii) の証明を完了する。

(iii) を示す。$\mathcal{P} \subset \mathsf{Mod}^f(A)^{\mathrm{op}}$ を射影加群からなる部分圏とする。$X \in \mathcal{C}$ とする。$\mathcal{P}$ が $(X \otimes_A (-))^{\mathrm{op}} : \mathsf{Mod}^f(A)^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ に対して injective であることを示す。まず $\mathcal{P} \subset \mathsf{Mod}^f(A)^{\mathrm{op}}$ は明らかに本文の条件 [(1.7.5), KS02] (=本文 [Definition 1.8.2 (i), KS02]) を満たす。次に有限生成加群の完全列 $0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$ で M_2, M_3 が射影加群であるとき、この完全列は分裂して M_1 は射影加群 M_2 の直和因子となるので M_1 も射影加群である。従って $\mathcal{P}$ は本文 [Definition 1.8.2 (ii), KS02] を満たす。$0 \to P_1 \to P_2 \to P_3 \to 0$ を射影加群の完全列とする。これは分裂するので、各 Y に対して

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(P_3, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)) \to \mathrm{Hom}_A(P_2, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)) \to \mathrm{Hom}_A(P_1, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)) \to 0$$

も分裂完全列である。従って、

$$0 \to X \otimes_A P_1 \to X \otimes_A P_2 \to X \otimes_A P_3 \to 0$$

も分裂完全列であり、$\mathcal{P}$ は本文 [Definition 1.8.2 (iii), KS02] を満たす。以上より $\mathcal{P}$ は $(X \otimes_A (-))^{\mathrm{op}} : \mathsf{Mod}^f(A)^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ に対して injective な $\mathsf{Mod}^f(A)$ の部分圏である。$X \in \mathsf{Ch}^-(\mathcal{C})$ を 0 と擬同型な複体、P を射影加群とする。P は A^n の直和因子であるとする。すると $X \otimes_A P$ は X^n の直和因子であるから、X が 0 と擬同型であることから、$X \otimes_A P$ も 0 と擬同型である。従って、函手 $(\otimes_A)^{\mathrm{op}} : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathsf{Mod}^f(A)^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ の引き起こす三角函手 $\mathsf{K}^+(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}) \times \mathsf{K}^+(\mathsf{Mod}^f(A)^{\mathrm{op}}) \to \mathsf{K}^+(\mathcal{C}^{\mathrm{op}})$ と $\mathcal{I} = \mathsf{K}^+(\mathcal{P}) \subset \mathsf{K}^+(\mathsf{Mod}^f(A)^{\mathrm{op}})$ に対して本文 [Corollary 1.10.5, KS02] を用いることにより、$(\otimes_A)^{\mathrm{op}}$ の右導来函手 $\mathsf{D}^+(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}) \times \mathsf{D}^+(\mathsf{Mod}^f(A)^{\mathrm{op}}) \to \mathsf{D}^+(\mathcal{C}^{\mathrm{op}})$ が存在することが従う。よって $\otimes_A$ の左導来函手 $\otimes_A^L : \mathsf{D}^-(\mathcal{C}) \times \mathsf{D}^-(\mathsf{Mod}^f(A)) \to \mathsf{D}^-(\mathcal{C})$ が存在することが従い、(iii) の証明を完了する。

(iv) を示す。$M \in \mathsf{Mod}^f(A)^{\mathrm{op}}$ と $X \in \mathcal{C}$ に対して $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Mod}(A), Y \mapsto \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X))$ が表現可能であることを示す。まず $M = A$ のときは明らかに X が表現対象であり、$M = A^n$ の場合も明らかに X^n が表現対象である。一般の M に対して完全列 $A^n \to A^m \to M \to 0$ をとって完全列

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)) \to \mathrm{Hom}_A(A^m, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)) \to \mathrm{Hom}_A(A^n, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X))$$

作ると、完全列

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X^m) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X^n)$$

を得るので、Hom の左完全性より Y についての自然な同型 $\mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, \ker(X^m \to X^n))$ を得る。従って $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Mod}(A), Y \mapsto \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X))$ は表現可能函手である。この表現対象を $\mathrm{Hom}_A(M, X)$ と表す。X, Y, M についての自然な同型 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X \otimes_A M, Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \mathrm{Hom}_A(M, Y))$ が存在するので、$\mathrm{Hom}_A(M, -)$ は $(-) \otimes_A M$ の右随伴函手であり、従って左完全である。また X, Y についての自然な同型 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \mathrm{Hom}_A(-, Y)) \cong \mathrm{Hom}_A(-, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y))$ は $\mathrm{Hom}_A(-, Y)$ の左完全性を示している。従って $\mathrm{Hom}_A(-, -)$ は左完全な双函手である。射影加群のなす部分圏 $\mathcal{P} \subset \mathsf{Mod}^f(A)^{\mathrm{op}}$ が本文 [Definition 1.8.2 (i) (ii), KS02] を満たすことはすでに (iii) の証明の中で確認している。射影加群の完全列は分裂するので、それを $\mathrm{Hom}_A(-, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y))$ に入れて得られる列も分裂完全列である。従って $\mathrm{Hom}_A(-, Y)$ に射影加群の完全列を入れると分裂完全列が得られる。このことは $\mathcal{P}$ が本文 [Definition 1.8.2 (iii), KS02] を $\mathrm{Hom}_A(-, Y)$ に対して満たすことを意味している。従って $\mathcal{P} \subset \mathsf{Mod}^f(A)^{\mathrm{op}}$ は $\mathrm{Hom}_A(-, Y)$-injective である。さらに Y が 0 と擬同型で P が射影加群であるとき、$P \subset A^n$ が直和因子であるとすれば、$\mathrm{Hom}_A(P, Y) \subset Y^n$ も直和因子であるから、Y が 0 と擬同型であることから、$\mathrm{Hom}_A(P, Y)$ も 0 と擬同型であることが従う。よって本文 [Corollary 1.10.5, KS02] を適用することで、$\mathrm{Hom}_A(-, -)$ の右導来函手 $R\,\mathrm{Hom}_A(-, -)$ が存在することが従う。以上で (iv) の証明を完了し、(4) の証明を完了し、問題 I.37 の解答を完了する。 □

References

[KS02] M. Kashiwara and P. Schapira. *Sheaves on Manifolds*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer Berlin Heidelberg, 2002. ISBN: 9783540518617. URL: https://www.springer.com/jp/book/9783540518617.