# Sheaves on Manifolds Exercise I.2 の解答

ゆじとも

2021 年 2 月 9 日

Sheaves on Manifolds [Exercise I.2, KS02] の解答です。

## I Homological Algebra

**問題 I.2.** $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ を二つの圏、$F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}', G : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ を二つの函手とする。

(1) 次の二つの条件は同値であることを示せ：

(i) 函手の射 $\alpha : F \circ G \to \mathrm{id}_{\mathcal{C}'}, \beta : G \circ F \to \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ が存在して、任意の $X \in \mathcal{C}, Y \in \mathcal{C}'$ に対し

$$\mathrm{id}_{G(Y)} = G(\alpha_Y) \circ \beta_{G(Y)} \ , \ \mathrm{id}_{F(X)} = \alpha_{F(X)} \circ F(\beta_X)$$

となる。

(ii) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(-), ?), \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, G(?))$ は函手 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C}' \to \mathsf{Set}$ として同型である。

(2) 任意の函手 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ に対して、$F$ の左 (または右) 随伴は、存在すれば、どの二つも函手として同型となる。

(3) 任意の函手 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ に対して、$F$ の左 (または右) 随伴が存在するための必要十分条件は、任意の対象 $Y \in \mathcal{C}'$ に対して函手 $X \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(X), Y)$ (または $X \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(Y, F(X))$) が表現可能であることである。

**証明.** (1) を示す。(i) を仮定する。$F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ は函手なので、$\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C}$ から $\mathsf{Set}$ への二つの函手の間の射 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, ?) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(-), F(?))$ を引き起こす。これを $\bar{F}$ と書く。同じく $\bar{G}$ を定義する。函手の射

$$P : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(-), ?) \xrightarrow{\bar{G}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(G(F(-)), G(?)) \xrightarrow{(??) \circ \beta_{(-)}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, G(?))$$
$$Q : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, G(?)) \xrightarrow{\bar{F}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(-), F(G(?))) \xrightarrow{\alpha_{(?)} \circ (??)} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(-), ?)$$

を合成で定義する。すると、各対象 $(X, Y) \in \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C}'$ と $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(X), Y), g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y))$ に対し、

$$\begin{aligned} Q_{(X,Y)}(P_{(X,Y)}(f)) &= \alpha_Y \circ F(G(f) \circ \beta_X)) \\ &= \alpha_Y \circ F(G(f)) \circ F(\beta_X) \\ &\overset{\bigstar}{=} f \circ \alpha_{F(X)} \circ F(\beta_X) \\ &\overset{*}{=} f \circ \mathrm{id}_{F(X)} \ = f, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} P_{(X,Y)}(Q_{(X,Y)}(g)) &= G(\alpha_Y \circ F(g)) \circ \beta_X \\ &= G(\alpha_Y) \circ G(F(g)) \circ \beta_X \\ &\overset{\bigstar}{=} G(\alpha_Y) \circ \beta_{G(Y)} \circ g \\ &\overset{*}{=} \mathrm{id}_{G(Y)} \circ g \ = g \end{aligned}$$

となる。ただし、$\bigstar$ の箇所で $\alpha, \beta$ が自然変換であることを用い、$*$ の箇所で (i) で仮定されている条件を用いた。以上より $P, Q$ は函手の同型射である。よって (ii) が示された。

逆に (ii) を仮定する。$P : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(-), ?) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, G(?))$ を函手の同型射として、$Q :\overset{\mathrm{def}}{=} P^{-1}$ と置く。$P$ が函手の射であることは、各射 $[f : F(X) \to Y], [f' : F(X') \to Y] \in \mathcal{C}', [g : Y \to Y'] \in \mathcal{C}', [h : X \to X'] \in \mathcal{C}$ に対して $P_{(X,Y')}(g \circ f) = G(g) \circ P_{(X,Y)}(f), P_{(X',Y)}(f') \circ h = P_{(X,Y)}(f' \circ F(h))$ となることを意味する (以下の図式が可換である)：

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(X'), Y) \arrow[r, "(-)\circ F(h)"] \arrow[d, "P_{(X',Y)}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(X), Y) \arrow[r, "g\circ(-)"] \arrow[d, "P_{(X,Y)}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(X), Y') \arrow[d, "P_{(X,Y')}"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(X', G(Y)) \arrow[r, "(-)\circ h"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y)) \arrow[r, "G(g)\circ(-)"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y')).
\end{tikzcd}$$

$Q$ についても同様の等式が成立する (上の図式で縦向きの射が逆になったものが $Q$ の場合)。次のように自然変換を定義する：

$$\begin{aligned}
\alpha_{(?)} &:\overset{\mathrm{def}}{=} Q_{(G(?),?)}(\mathrm{id}_{G(?)}) : F(G(?)) \to (?), \\
\beta_{(-)} &:\overset{\mathrm{def}}{=} P_{(-,F(-))}(\mathrm{id}_{F(-)}) : (-) \to G(F(-)).
\end{aligned}$$

すると各 $(X, Y) \in \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C}'$ に対して

$$\begin{aligned}
\alpha_{F(X)} \circ F(\beta_X) &= Q_{(G(F(X)),F(X))}(\mathrm{id}_{G(F(X))}) \circ F(\beta_X) \\
&\overset{\bigstar_l}{=} Q_{(X,F(X))}(\mathrm{id}_{F(X)}) \circ \beta_X \\
&= Q_{(X,F(X))}(P_{(X,F(X))}(\mathrm{id}_{F(X)})) \ = \mathrm{id}_{F(X)} \\
G(\alpha_Y) \circ \beta_{G(Y)} &= G(\alpha_Y) \circ P_{(G(Y),F(G(Y)))}(\mathrm{id}_{F(G(Y))}) \\
&\overset{\bigstar_r}{=} P_{(G(Y),Y)}(\alpha_Y \circ \mathrm{id}_{F(G(Y))}) \\
&= P_{(G(Y),Y)}(Q_{(G(Y),Y)}(\mathrm{id}_{G(Y)})) \ = \mathrm{id}_{G(Y)}
\end{aligned}$$

となる。ただし $\bigstar_l, \bigstar_r$ の箇所で上の図式の可換性を用いた ($l$ は左、$r$ は右側の四角形の可換性を用いている)。以上で (1) の証明を完了する。

(2) を示す。$G, G'$ がどちらも $F$ の右随伴であれば、(1) における函手の自然同型を用いて

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, G(?)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(-), ?) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, G'(?))$$

となるので、米田の補題によって $G \cong G'$ がわかる。左随伴についても同様である。

(3) を示す。各 $Y \in \mathcal{C}'$ について $X \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(X), Y)$ が表現可能であるとし、その表現対象を $G(Y)$ と置く。すると $X$ について自然な同型 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(X), Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y))$ を得る。$g : Y \to Y'$ を任意の $\mathcal{C}'$ の射とする。すると $g$ を合成することによって函手の射 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(-), Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(-), Y')$ を得る。よって米田の補題によって一意的に射 $G(Y) \to G(Y')$ を得る。この射を $G(g)$ と書く。すると $G$ は函手であり、$X$ について自然な同型 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(X), Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y))$ は構成から $Y$ についても自然である。これによって $F$ の右随伴 $G$ を得る。左随伴に関しても同様である。以上で問題 I.2 の解答を完了する。 □

## References


[KS02] M. Kashiwara and P. Schapira. *Sheaves on Manifolds*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer Berlin Heidelberg, 2002. ISBN: 9783540518617. URL: https://www.springer.com/jp/book/9783540518617.