Sheaves on Manifolds Exercise I.32 の解答

ゆじとも

2021 年 2 月 9 日

Sheaves on Manifolds [Exercise I.32, KS02] の解答です。

I Homological Algebra

問題 I.32. k を体、$X \in \mathsf{D}^b(\mathsf{Mod}(k))$ とする。$X^* :\overset{\text{def}}{=} R\operatorname{Hom}(X,k)$ とおく (微分が本文 [Remark 1.8.11, KS02] で与えられることを思い出そう)。

(1) $X \in \mathsf{D}^b_f(\mathsf{Mod}(k))$ と仮定する。以下の自然な同型が存在することを示せ：

$$X \xrightarrow{\sim} X^{**} \quad , \quad X^* \otimes X \xrightarrow{\sim} R\operatorname{Hom}(X,X).$$

さらに、$(X^n)^* \otimes X^n \to k$ の直和として射 $X^* \otimes X \to k$ を構成せよ。

(2) $X \in \mathsf{D}^b_f(\mathsf{Mod}(k))$ と $v \in \operatorname{Hom}(X,X)$ に対して

$$\operatorname{tr}(v) :\overset{\text{def}}{=} \sum_j (-1)^j \operatorname{tr}(H^j(v))$$

と定義する。ここで $\operatorname{tr}(H^j(v))$ は自己準同型 $H^j(v) : H^j(X) \to H^j(X)$ のトレースである。$Y \in \mathsf{K}^b(\mathsf{Mod}^f(k))$ として、$v \in \operatorname{Hom}_{\mathsf{K}^b(\mathsf{Mod}^f(k))}(Y,Y)$ とする。以下の等式を示せ：

$$\operatorname{tr}(v) = \sum_j (-1)^j \operatorname{tr}(v^j).$$

(3) $\mathsf{D}^b_f(\mathsf{Mod}(k))$ の完全三角の間の自己射

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r] \arrow[d, "v'"'] & X \arrow[r] \arrow[d, "v"'] & X'' \arrow[r] \arrow[d, "v''"'] & {} \\ X' \arrow[r] & X \arrow[r] & X'' \arrow[r] & {} \end{tikzcd}$$

に対して、$\operatorname{tr}(v) = \operatorname{tr}(v') + \operatorname{tr}(v'')$ が成り立つことを示せ。

(4) (2) の状況設定において、$\operatorname{tr}(v)$ が v の

$$H^0(R\operatorname{Hom}(X,X)) \cong H^0(X^* \otimes X) \to k$$

による像と一致することを示せ。$X \in \mathsf{D}^b_f(\mathsf{Mod}(k))$ に対して

$$\chi(X) :\overset{\text{def}}{=} \sum_j (-1)^j \dim H^j(X)$$

とおく。k において $\chi(X) = \operatorname{tr}(\mathrm{id}_X)$ が成り立つ。

証明. (1) を示す。k は体なので、[Exercise 1.30 (5), KS02] より X は perfect であり、従って、一つ目の同型は [Exercise 1.30 (3), KS02] より従う。自然な同型射 $(X^{-m})^* \otimes X^n \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(X^{-m}, X^n)$ を並べることによって、二重複体の同型射 $X^* \otimes X \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(X, X)$ を得る。Tot を取ることによって複体の同型射 $X^* \otimes X \xrightarrow{\sim} R\,\mathrm{Hom}(X, X)$ を得る。これが二つ目の同型である。最後の自然な射を構成する。0 次の部分は各 $n \in \mathbb{Z}$ に対して自然な射 $(X^*)^{-n} \otimes X^n = (X^n)^* \otimes X^n \to k$ を直和することにより得られる射 $(X^* \otimes X)^0 \to k$ で、他の次数は 0 射とすることにより、複体の射 $X^* \otimes X \to k$ が well-defined に定義されることを示す。そのためには、これらの射が複体 $X^* \otimes X$ と k (これは 0 次部分のみに k があり他で 0 となる複体を表す) の微分と可換することを示すことが十分である。射

$$
\begin{aligned}
(X^*)^{-n} \otimes X^{n-1} &\to (X^*)^{-n} \otimes X^n \to k \\
(X^*)^{-n} \otimes X^{n-1} &\to (X^*)^{-n+1} \otimes X^{n-1} \to k
\end{aligned}
$$

について考える。ただしここで、最後の k への射は $(f, x) \mapsto f(x)$ により与えられる自然な射 ($(X^*)^{-n} = (X^n)^*$ に注意せよ) であり、はじめの射は本文 [式 (1.9.3), KS02] により定義される、Tot の微分を与える射である。上の二つの射の合成は $(f, x) \in (X^*)^{-n} \otimes X^{n-1}$ が

$$(f, x) \mapsto (f, (-1)^{-n} d^{n-1}(x)) \mapsto (-1)^n f(d^{n-1}(x))$$

と写る射である。微分 $(X^*)^{-n} \to (X^*)^{-n+1}$ は $(-1)^{n-1} d^{n-1} : X^{n-1} \to X^n$ を合成することにより与えられているので (cf. 本文 [Remark 1.8.11, KS02])、下の二つの射の合成は $(f, x) \in (X^*)^{-n} \otimes X^{n-1}$ が

$$(f, x) \mapsto ((-1)^{n-1}(f \circ d^{n-1}), x) \mapsto (-1)^{n-1} f(d^{n-1}(x))$$

と写る射である。$(-1)^n f(d^{n-1}(x)) + (-1)^{n-1} f(d^{n-1}(x)) = 0$ であるため、従って、$X^* \otimes X \to k$ は複体の射である。以上で (1) の証明を完了する。

(2) を示す。有限次元 k-線形空間の完全列の自己準同型

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & V_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"'] & V_2 \arrow[r] \arrow[d, "f_2"'] & V_3 \arrow[r] \arrow[d, "f_3"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & V_1 \arrow[r] & V_2 \arrow[r] & V_3 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

があると、f_1, f_3 の上三角化を与える V_1, V_3 の基底により f_2 の上三角化が与えられる。従って $\mathrm{tr}(f_2) = \mathrm{tr}(f_1) + \mathrm{tr}(f_3)$ が成り立つ。完全列の射

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^n(Y) \arrow[r] \arrow[d, "H^n(v)"'] & \mathrm{coker}(d_Y^{n-1}) \arrow[r] \arrow[d, "C^{n-1}(v)"'] & \ker(d_Y^{n+1}) \arrow[r] \arrow[d, "Z^{n+1}(v)"] & H^{n+1}(Y) \arrow[r] \arrow[d, "H^{n+1}(v)"] & 0 \\
0 \arrow[r] & H^n(Y) \arrow[r] & \mathrm{coker}(d_Y^{n-1}) \arrow[r] & \ker(d_Y^{n+1}) \arrow[r] & H^{n+1}(Y) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

にこれを適用することで、$\mathrm{tr}(C^{n-1}(v)) - \mathrm{tr}(H^n(v)) = \mathrm{tr}(Z^{n+1}(v)) - \mathrm{tr}(H^{n+1}(v))$ を得る。ただし $C^n(v)$ は余核の間に引き起こされる自然な射である。完全列の間の射

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Z_Y^n \arrow[r] \arrow[d, "Z^n(v)"'] & Y^n \arrow[r] \arrow[d, "v^n"'] & \mathrm{Im}(d_Y^n) \arrow[r] \arrow[d, "B^n(v)"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z_Y^n \arrow[r] & Y^n \arrow[r] & \mathrm{Im}(d_Y^n) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

に適用することにより、$\mathrm{tr}(B^n(v)) + \mathrm{tr}(Z^n(v)) = \mathrm{tr}(v^n)$ を得る。完全列の間の射

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & H^n(Y) & \longrightarrow & \mathrm{coker}(d_Y^{n-1}) & \longrightarrow & \mathrm{Im}(d_Y^n) & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle H^n(v)}\big\downarrow & & {\scriptstyle C^{n-1}(v)}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle B^n(v)} & & \\ 0 & \longrightarrow & H^n(Y) & \longrightarrow & \mathrm{coker}(d_Y^{n-1}) & \longrightarrow & \mathrm{Im}(d_Y^n) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

に適用することにより、$\mathrm{tr}(B^n(v)) = \mathrm{tr}(C^{n-1}(v)) - \mathrm{tr}(H^n(v))$ を得る。ただし $C^n(v)$ は余核の間に引き起こされる自然な射である。従って、

$$\begin{aligned} \sum_j (-1)^j \,\mathrm{tr}(v^j) &= \sum_j (-1)^j \left(\mathrm{tr}(B^j(v)) + \mathrm{tr}(Z^j(v))\right) \\ &= \sum_j (-1)^j \left(\mathrm{tr}(C^{j-1}(v)) - \mathrm{tr}(H^j(v)) + \mathrm{tr}(Z^j(v))\right) \\ &= \sum_j (-1)^j \left(\mathrm{tr}(C^{j-1}(v)) + \mathrm{tr}(C^{j-2}(v)) - \mathrm{tr}(H^{j-1}(v))\right) \\ &= \sum_j (-1)^{j+1} \,\mathrm{tr}(H^{j-1}(v)) \\ &= \sum_j (-1)^j \,\mathrm{tr}(H^j(v)) = \mathrm{tr}(v) \end{aligned}$$

が成り立つ。以上で (2) の証明を完了する。

(3) はコホモロジーをとることによって得られる長完全列を短完全列に分解して (2) の証明の最初で示した等式を用いると証明できる。

(4) を示す。$f : X \to Y$ の定める $H^0(R\,\mathrm{Hom}(X,Y))$ の元は、各 i について $f^i : X^i \to Y^i$ の定める $\mathrm{Hom}(X^i, Y^i)$ の元を $((-1)^i f^i) \in \bigoplus_i \mathrm{Hom}(X^i, Y^i)$ と並べた元である。実際、$R\,\mathrm{Hom}(X,Y)$ の微分は、第一変数に関しては $(-1)^i d_X^i$ を合成することによって与えられるので、$d_Y^i \circ ((-1)^i f^i = f^{i+1} \circ ((-1)^i d_X^i)$ が成り立ち、$((-1)^i f^i)$ は $H^0(R\,\mathrm{Hom}(X,Y))$ の元を定める。$v : X \to X$ を複体の自己射とする。各 j に対する $v^j : X^j \to X^j$ のトレースは $\mathrm{Hom}(X^j, X^j) \cong (X^j)^* \otimes X^j \to k$ による v^j の像が定める k の元と一致する。従って、v の定める $H^0(R\,\mathrm{Hom}(X,X))$ の元、すなわち $((-1)^i v^i) \in \bigoplus_i \mathrm{Hom}(X,X)$ の自然な射 $H^0(R\,\mathrm{Hom}(X,X)) \to k$ による像は $\sum_j (-1)^j \,\mathrm{tr}(v^j)$ に他ならない。よって (4) の最初の主張が従う。また、$\dim(V) = \mathrm{tr}(\mathrm{id}_V)$ であるので、(2) より $\chi(X) = \sum_j (-1)^j \dim(H^j(X))$ が従う。以上で (4) の証明を完了し、問題 I.32 の解答を完了する。 $\square$

References

[KS02] M. Kashiwara and P. Schapira. *Sheaves on Manifolds*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer Berlin Heidelberg, 2002. ISBN: 9783540518617. URL: https://www.springer.com/jp/book/9783540518617.