Sheaves on Manifolds Exercise II.16 の解答

ゆじとも

2021 年 2 月 9 日

Sheaves on Manifolds [Exercise II.16, KS02] の解答です。

II Sheaves

問題 II.16. A を可換環、$A^\times$ を単元のなす群とする。X を位相空間、$\mathcal{U} = \{U_i\}_i$ を X の開被覆として、$c \in C^2(\mathcal{U}, A_X^\times)$ を $\delta c = 0$ となる元とする。c' を c の $H^2(C^\bullet(\mathcal{U}, A_X^\times))$ での剰余類として、c'' を c' の $H^2(X, A_X^\times)$ での像とする (cf. [Exercise 2.15 (2), KS02])。圏 $\mathsf{Sh}(X, c)$ を次によって定義する：

- 対象は A_{U_i}-加群 F_i と同型射 $\rho_{ij} : F_j|_{U_i \cap U_j} \xrightarrow{\sim} F_i|_{U_i \cap U_j}$ の族 $\{F_i, \rho_{ij}\}$ で、任意の i, j, k に対して
$$\rho_{ij}\rho_{jk}\rho_{ki} = c_{ijk}\,\mathrm{id}_{F_i|U_i \cap U_j \cap U_k}$$
を満たすものとする。
- 射 $f : \{F_i, \rho_{ij}\} \to \{F'_i, \rho_{ij}\}$ は U_i 上の射の族 $f_i : F_i \to F'_i$ で $U_i \cap U_j$ 上で $\rho'_{ij} \circ f_j = f_i \circ \rho_{ij}$ を満たすものとする。

以下を示せ：

(1) $\mathsf{Sh}(X, c)$ はアーベル圏であることを証明せよ。

(2) $\tilde{c} \in C^2(\mathcal{U}, A_X^\times)$ を別の元で $\tilde{c}'' = c''$ を満たすものとする。$\mathsf{Sh}(X, c)$ と $\mathsf{Sh}(X, \tilde{c})$ の間の圏同値が存在することを示せ。

証明. (1) を示す。$\mathsf{Sh}(X, c)$ は明らかな 0-対象を持つ (各 U_i 上で 0 であるもの)。また、明らかに、二つの対象 $\{F_i, \rho_{ij}\}, \{F'_i, \rho'_{ij}\}$ に対して $\{F_i \oplus F'_i, \rho ij \oplus \rho'_{ij}\}$ は $\mathsf{Sh}(X, c)$ の対象である。さらに、二つの対象の間の射 $f = (f_i) : \{F_i, \rho_{ij}\} \to \{F'_i, \rho'_{ij}\}$ に対し、各 i ごとに $\ker(f_i)$ をとり、$\rho_{ij}^{\ker(f)} \stackrel{\mathrm{def}}{:=} \rho_{ij}|_{\ker(f_i)|_{U_i \cap U_j}}$ と定めることにより、明らかに $\{\ker(f_i), \rho_{ij}^{\ker(f)}\}$ は $\mathsf{Sh}(X, c)$ の対象となる。余核についても同様である。核と余核が各 i ごとに定義されるので、余像と像は一致し、これにより $\mathsf{Sh}(X, c)$ がアーベル圏であることが従う。以上で (1) の証明を完了する。

(2) を示す。$\{F_i, \rho_{ij}\}$ を $\mathsf{Sh}(X, c)$ の対象とする。$\bar{c} \stackrel{\mathrm{def}}{:=} c - \tilde{c}$ とおく。このとき $\bar{c}'' = 0$ である。本文 [Proposition 2.8.4, KS02] より、augmentation map $\delta : F \xrightarrow{\mathrm{qis}} \mathcal{C}^\bullet(\mathcal{U}, F)$ は擬同型であるので、$H^2(R\Gamma(X, \mathcal{C}^\bullet(\mathcal{U}, A_X^\times)))$ での $\bar{c}''$ の像は 0 である。 □

References

[KS02] M. Kashiwara and P. Schapira. *Sheaves on Manifolds*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer Berlin Heidelberg, 2002. ISBN: 9783540518617. URL: https://www.springer.com/jp/book/9783540518617.