# Sheaves on Manifolds Exercise II.3 の解答

ゆじとも

2021 年 2 月 9 日

Sheaves on Manifolds [Exercise II.3, KS02] の解答です。

## II Sheaves

**問題 II.3.** (1) $U \subset X$ を開部分集合、$x \in \bar{U} \backslash U$ として、層 $\mathbb{Z}_U$ について考えることによって $\mathcal{H}om(F, G)_x \cong \mathrm{Hom}(F_x, G_x)$ は一般には正しくないことを示せ。

(2) 次を満たす $X$ 上の層 $F$ と閉部分集合 $Z \subset X$ と開部分集合 $U$ の例を与えよ：$Z \cap U = \varnothing$ であり、$R\Gamma_Z(F_U) \neq 0$ である。$\Gamma_Z(F_U)$ であることを確認し、このことから、一般に合成函手の導来函手が導来函手の合成とは異なることを帰結せよ。

**証明.** (1) を示す。$F = \mathbb{Z}_U$ とおき、$G$ は任意の層とする。$x \notin U$ なので $F_x = 0$ であり、従って、このとき、$\mathrm{Hom}(F_x, G_x) = 0$ が成り立つ。また、各開集合 $V \subset X$ に対して自然に

$$\mathcal{H}om(F, G)(V) = \mathcal{H}om(\mathbb{Z}_U, G)(V) = \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_U|_V, G|_V) = \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_{U\cap V}, G|_V) \cong G(U \cap V)$$

が成り立つので、$\mathcal{H}om(F, G) \cong \Gamma_U(G)$ が成り立つ。従って、たとえば $X = \mathbb{R}, U = \mathbb{R} \setminus \{0\}, x = 0, G = \mathbb{Z}$ とすると、

$$\mathcal{H}om(\mathbb{Z}_U, \mathbb{Z})_x \cong \Gamma_U(G)_x \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \neq 0 = \mathrm{Hom}(F_x, G_x)$$

である。以上で (1) の証明を完了する。

(2) を示す。まず一般に $Z \cap U = \varnothing$ であれば、$F_U$ の各切断は $U$ の中に台を持つので $\Gamma_Z(F_U) = 0$ が成り立つ。$X = \mathbb{R}_{\geq 0}, U = \mathbb{R}_{>0} \subset X, Z = \{0\}$ として $F = \mathbb{Z}_X$ を定数層とする。このとき、$F$ は定数層なので、各開集合 $V \subset X$ に対して $s \in F(V)$ で $Z$ の外で $0$ となるものは $0$ しかない ($0 \in V$ であり、$s_0 = n \neq 0$ であれば、$0$ を含む $V$ の連結成分の上で $s = n$ である)。従って $\Gamma_Z(F) = 0$ である。完全列 $0 \to F_U \to F \to F_Z \to 0$ に函手 $\Gamma_Z(-)$ を施すことにより、同型射 $\mathbb{Z}_x \cong \Gamma_Z(F_Z) \xrightarrow{\sim} H^1_Z(F_U)$ を得る。従ってこれが所望の例を与える。以上で (2) の証明を完了し、問題 II.3 の解答を完了する。 □

## References

[KS02] M. Kashiwara and P. Schapira. *Sheaves on Manifolds*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer Berlin Heidelberg, 2002. ISBN: 9783540518617. URL: https://www.springer.com/jp/book/9783540518617.