Sheaves on Manifolds Exercise I.4 の解答

ゆじとも

2021 年 2 月 9 日

Sheaves on Manifolds [Exercise I.4, KS02] の解答です。

I　Homological Algebra

問題 I.4. $\mathcal{C}$ を加法圏、$X \to i_1 Z \to p_2 Y$ を射の列で、$p_2 \circ i_1 = 0$ を満たすとする。このとき、以下の条件が同値であることを示せ：

(1) 任意の対象 $W \in \mathcal{C}$ に対して次の列は完全である：

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W, X) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W, Z) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W, Y) \to 0.$$

(2) 任意の対象 $W \in \mathcal{C}$ に対して次の列は完全である：

$$0 \leftarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, W) \leftarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, W) \leftarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, W) \leftarrow 0.$$

(3) 射 $i_2 : Y \to Z$ と $p_1 : Z \to X$ が存在して、[Exercise 1.3, KS02] の条件を満たす。

これらの条件が満たされるとき、

$$0 \to X \to i_1 Z \to p_2 Y \to 0$$

は**分裂する**と言い、X は Z の直和因子であると言う。

(†) $\mathcal{C}$ がアーベル圏または三角圏であるとする。$i_1 : X \to Z, p_1 : Z \to X$ が $p_1 \circ i_1 = \mathrm{id}_X$ を満たすとき、X は Z の直和因子となることを示せ。

証明. はじめに (1), (2), (3) が同値であることを確認する。(1) を仮定して (3) を証明する。$W = Y$ とすることで、(1) で仮定されている完全性 (のうちの右側の全射性) より、$p_2 \circ i_2 = \mathrm{id}_Y$ となる射 $i_2 : Y \to Z$ が存在することがわかる。$W = Z$ とすれば、$p_2 \circ (\mathrm{id}_Z - i_2 \circ p_2) = p_2 - p_2 = 0$ であることと、(1) で仮定されている完全性 (のうちの真ん中の完全性) より、$i_1 \circ p_1 = \mathrm{id}_Z - i_2 \circ p_2$ となる射 $p_1 : Z \to X$ が存在することがわかる。$W = X$ として $p_1 \circ i_1 : X \to X$ の行き先を見ると、それは

$$i_1 \circ p_1 \circ i_1 = i_1 - i_2 \circ p_2 \circ i_1 = i_1 = i_1 \circ \mathrm{id}_X$$

であるので、(1) で仮定されている完全性 (のうちの左側の単射性) より、$p_1 \circ i_1 = \mathrm{id}_X$ であることがわかる。$W = Y$ として $p_2 \circ i_1 : Y \to X$ の行き先を見ると、それは $i_1 \circ p_2 \circ i_1 = 0$ であるので、(1) で仮定されている完全性 (のうちの左側の単射性) より、$p_2 \circ i_1 = 0$ であることがわかる。以上で (1) から (3) が帰結することがわかった。

(2) を仮定すれば $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ において $Y \xrightarrow{p_2} Z \xrightarrow{i_1} X$ は条件 (1) を満たすので、すでに証明したことにより $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ においての条件 (3) が帰結するが、それは $\mathcal{C}$ においての条件 (3) を意味している。以上で (2) から (3) が帰結することがわかった。

(3) を仮定すると、$p_1 : Z \to X$ と $i_2 : Y \to Z$ を用いて各 W について函手的な直和分解

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W, Z) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W, X) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W, Y)$$

を得るので、これはどんな W についても (1) の列が分裂完全列であることを意味し、$\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ で考えることによって (2) の列が分裂完全列であることもわかる。以上で (1), (2), (3) が同値であることが示された。

$\mathcal{C}$ がアーベル圏であるときに (†) を証明する。任意の W に対して

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathrm{coker}(i_1), W) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, W) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, W)$$

は完全となるが、$p_1 \circ i_1$ であるから、i_1 を合成する射 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, W) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, W)$ は一番右の射の分裂を与え、これによって条件 (2) が満たされる。以上で $\mathcal{C}$ がアーベル圏である場合は証明された。

$\mathcal{C}$ が三角圏である場合に (†) を証明する。$i_1 : X \to Z$ を完全三角 $X \xrightarrow{i_1} Z \xrightarrow{p_2} Y \to X[1]$ に延長すると、任意の W について長い完全列

$$\begin{array}{cccccc} \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W, X) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W, Z) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W, Y) \\ \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W, X[1]) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W, X[1]) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

を得る ($\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W, -)$ はコホモロジー函手である：[Proposition 1.5.3 (ii), KS02])。$p_1 : Z \to X$ を (シフトしてから) 合成することで、$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W, X[i]) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W, Z[i])$ の単射性を得る。ここで上の長い列の完全性によって、$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W, Z) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W, Y)$ の全射性が従う。これによって条件 (1) が満たされる。以上で $\mathcal{C}$ が三角圏である場合も証明された。以上で問題 I.4 の解答を完了する。 □

References

[KS02] M. Kashiwara and P. Schapira. *Sheaves on Manifolds*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer Berlin Heidelberg, 2002. ISBN: 9783540518617. URL: https://www.springer.com/jp/book/9783540518617.