Sheaves on Manifolds Exercise II.17 の解答

ゆじとも

2021 年 2 月 9 日

Sheaves on Manifolds [Exercise II.17, KS02] の解答です。

II Sheaves

問題 II.17. X を局所コンパクト空間、$\mathcal{R}$ を X 上の (可換) 環の層で $\mathrm{wgld}(\mathcal{R}) < \infty$ であるものとし、$Z_1, Z_2 \subset X$ を局所閉部分集合とする。

(1) $F_1, F_2 \in \mathsf{D}^+(\mathcal{R})$ に対し、自然な射

$$R\Gamma_{Z_1}(F_1) \otimes^L_{\mathcal{R}} R\Gamma_{Z_2}(F_2) \to R\Gamma_{Z_1 \cap Z_2}(F_1 \otimes^L_{\mathcal{R}} F_2)$$

を構成せよ。

(2) A を可換環として、$\mathcal{R} = A_X$ であると仮定せよ。$F_1, F_2 \in \mathsf{D}^+(\mathcal{R})$ に対し、自然な射

$$R\Gamma_{Z_1}(X, F_1) \otimes^L_A R\Gamma_{Z_2}(X, F_2) \to R\Gamma_{Z_1 \cap Z_2}(X, F_1 \otimes^L_A F_2)$$

を構成し、各 $p, q \in \mathbb{Z}$ に対して

$$H^p_{Z_1}(X, F_1) \otimes_A H^q_{Z_2}(X, F_2) \to H^{p+q}_{Z_1 \cap Z_2}(X, F_1 \otimes^L_A F_2)$$

を構成せよ。最後の射は **cup 積**と呼ばれる。

証明. (1) を示す。本文 [同型 (2.6.9), KS02] より、自然に $R\Gamma_{Z_i}(F_i) \cong R\mathcal{H}om_{\mathcal{R}}(\mathcal{R}_{Z_i}, F_i)$ が成り立つ。また、本文 [射 (2.6.11), KS02] より、自然な射

$$\begin{aligned} R\mathcal{H}om_{\mathcal{R}}(\mathcal{R}_{Z_1}, F_1) \otimes^L_{\mathcal{R}} R\mathcal{H}om_{\mathcal{R}}(\mathcal{R}_{Z_2}, F_2) &\to R\mathcal{H}om_{\mathcal{R}}(\mathcal{R}_{Z_1}, F_1 \otimes^L_{\mathcal{R}} R\mathcal{H}om_{\mathcal{R}}(\mathcal{R}_{Z_2}, F_2)) \\ &\to R\mathcal{H}om_{\mathcal{R}}(\mathcal{R}_{Z_1}, R\mathcal{H}om_{\mathcal{R}}(\mathcal{R}_{Z_2}, F_1 \otimes^L_{\mathcal{R}} F_2)) \end{aligned}$$

を得る。さらに本文 [Proposition 2.6.3 (ii), KS02] より、自然な同型

$$R\mathcal{H}om_{\mathcal{R}}(\mathcal{R}_{Z_1}, R\mathcal{H}om_{\mathcal{R}}(\mathcal{R}_{Z_2}, F_1 \otimes^L_{\mathcal{R}} F_2)) \cong R\mathcal{H}om_{\mathcal{R}}(\mathcal{R}_{Z_1} \otimes^L_{\mathcal{R}} \mathcal{R}_{Z_2}, F_1 \otimes^L_{\mathcal{R}} F_2))$$

を得る。ここで $\mathcal{R}_{Z_i}$ は $\mathcal{R}$-flat であるので、自然に $\mathcal{R}_{Z_1} \otimes^L_{\mathcal{R}} \mathcal{R}_{Z_2} \cong \mathcal{R}_{Z_1} \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{R}_{Z_2} \cong \mathcal{R}_{Z_1 \cap Z_2}$ が成り立つ。再び本文 [同型 (2.6.9), KS02] を用いることで、自然に $R\Gamma_{Z_1 \cap Z_2}(F_1 \otimes^L_{\mathcal{R}} F_2) \cong R\mathcal{H}om_{\mathcal{R}}(\mathcal{R}_{Z_1 \cap Z_2}, F_1 \otimes^L_{\mathcal{R}} F_2)$ が成り立つので、これらを組み合わせることによって所望の射を得る。以上で (1) の証明を完了する。

(2) を示す。$f : X \to \{\mathrm{pt}\}$ を自明な射とする。まず、$Z_1 = Z_2 = X$ の場合に証明する。この場合、$R\Gamma_{Z_i}(X, -) \cong Rf_*(-)$ が成り立つ。今、$\mathcal{R} = A_X = f^{-1}A$ は定数層であるので、従って、本文 [Proposition

2.6.4 (ii), KS02] より、自然に

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{D}^+(A)}(Rf_*F_1 \otimes^L_A Rf_*F_2, Rf_*(F_1 \otimes^L_{A_X} F_2)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}^+(A_X)}(f^{-1}(Rf_*F_1 \otimes^L_A Rf_*F_2), F_1 \otimes^L_{A_X} F_2)$$

が成り立つ。また、本文 [Proposition 2.6.5, KS02] より、自然に $f^{-1}(Rf_*F_1 \otimes^L_A Rf_*F_2) \cong (f^{-1}Rf_*F_1) \otimes^L_{A_X} (f^{-1}Rf_*F_2)$ が成り立つ。本文 [射 (2.6.17), KS02] より、自然な射 $(f^{-1}Rf_*F_1) \otimes^L_{A_X} (f^{-1}Rf_*F_2) \to F_1 \otimes^L_{A_X} F_2$ があり、以上より射

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathsf{D}^+(A_X)}(F_1 \otimes^L_{A_X} F_2, F_1 \otimes^L_{A_X} F_2) &\to \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}^+(A_X)}((f^{-1}Rf_*F_1) \otimes^L_{A_X} (f^{-1}Rf_*F_2), F_1 \otimes^L_{A_X} F_2)\\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}^+(A_X)}(f^{-1}(Rf_*F_1 \otimes^L_A Rf_*F_2), F_1 \otimes^L_{A_X} F_2)\\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}^+(A)}(Rf_*F_1 \otimes^L_A Rf_*F_2, Rf_*(F_1 \otimes^L_{A_X} F_2))\end{aligned}$$

を得る。id の行き先が射 $Rf_*F_1 \otimes^L_A Rf_*F_2 \to Rf_*(F_1 \otimes^L_{A_X} F_2)$ を与える。以上で $Z_1 = Z_2 = X$ の場合の 1 つ目の射の構成を完了する。一般の場合、(1) の自然な射に対して $R\Gamma(X, -)$ を適用し、$Z_1 = Z_2 = X$ の場合に得られた射と合成することによって、射

$$\begin{aligned}R\Gamma_{Z_1}(X, F_1) \otimes^L_A R\Gamma_{Z_2}(X, F_2) &\cong R\Gamma(X, R\Gamma_{Z_1}(F_1)) \otimes^L_A R\Gamma(X, R\Gamma_{Z_2}(F_2))\\ &\to R\Gamma(X, R\Gamma_{Z_1}(F_1) \otimes^L_{A_X} R\Gamma_{Z_2}(F_2))\\ &\to R\Gamma(X, R\Gamma_{Z_1\cap Z_2}(F_1 \otimes^L_{A_X} F_2))\\ &\cong R\Gamma_{Z_1\cap Z_2}(X, F_1 \otimes^L_{A_X} F_2)\end{aligned}$$

を得る。以上で一般の場合の 1 つ目の射の構成を完了する。二つ目の射は、[Exercise 1.24 (1), KS02] で $F = \otimes_A, X = R\Gamma_{Z_1}(X, F_1), Y = R\Gamma_{Z_2}(X, F_2)$ とすることにより、自然な射

$$\begin{aligned}H^p_{Z_1}(X, F_1) \otimes_A H^q_{Z_2}(X, F_2) &\to H^{p+q}(R\Gamma_{Z_1}(X, F_1) \otimes^L_A R\Gamma_{Z_2}(X, F_2))\\ &\to H^{p+q}(R\Gamma_{Z_1\cap Z_2}(X, F_1 \otimes^L_{A_X} F_2))\end{aligned}$$

を得る。これが所望の射である。以上で (2) の証明を完了し、問題 II.17 の解答を完了する。 □

References

[KS02] M. Kashiwara and P. Schapira. *Sheaves on Manifolds*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer Berlin Heidelberg, 2002. ISBN: 9783540518617. URL: https://www.springer.com/jp/book/9783540518617.