# Sheaves on Manifolds Exercise I.9 の解答

ゆじとも

2021 年 2 月 9 日

Sheaves on Manifolds [Exercise I.9, KS02] の解答です。

## I　Homological Algebra

**問題 I.9.** $\mathcal{C}$ をアーベル圏とする。

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & Z \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X' \arrow[r, "f'"] & Y' \arrow[r, "g'"] & Z' &
\end{tikzcd}$$

を $\mathcal{C}$ の可換図式で、横向きが完全であるものとする。

(1) 自然な射 $\varphi : \ker(\gamma) \to \operatorname{coker}(\alpha)$ が存在して、以下が完全となることを示せ：

$$\ker(\alpha) \to \ker(\beta) \to \ker(\gamma) \xrightarrow{\varphi} \operatorname{coker}(\alpha) \to \operatorname{coker}(\beta) \to \operatorname{coker}(\gamma).$$

(2) 以下の図式が可換であることを示せ：

$$\begin{tikzcd}
 & Y \arrow[r, "g"] & Z \\
Y \arrow[d] & \ker(\gamma \circ g) \arrow[l] \arrow[r] \arrow[u] \arrow[d] & \ker(\gamma) \arrow[u] \arrow[d, "\varphi"] \\
Y' & X' \arrow[l, "f'"'] \arrow[r] & \operatorname{coker}(\alpha).
\end{tikzcd}$$

**証明.** $\varphi$ の構成ができれば、[Exercise 1.7, KS02] によって (1) は $\mathcal{C} = \mathsf{Ab}$ の場合に帰着され、この場合は図式追跡によって初等的に証明できる。従って、(1) を示すためには $\varphi$ を構成することが十分である。以下、$\varphi$ の構成と (2) の証明を同時に行う。

核の普遍性により、以下の図式を可換にするような射 $\psi_1 : \ker(\gamma \circ g) \to \ker(\gamma)$ が一意的に存在する：

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \ker(\gamma \circ g) \arrow[r] \arrow[d, "\psi_1"'] & Y \arrow[r, "\gamma \circ g"] \arrow[d, "g"] & Z' \arrow[d, equal] \\
0 \arrow[r] & \ker(\gamma) \arrow[r] & Y' \arrow[r, "\gamma"] & Z'.
\end{tikzcd}$$

これは (2) の図式の右上の四角形の可換性を示している。また、[Exercise 1.8 (2), KS02] より、$\psi_1$ はエピである。核の普遍性により、以下の図式を可換にするような射 $\psi_2 : \ker(\gamma \circ g) \to X'$ が一意的に存在する：

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \ker(\gamma \circ g) \arrow[r] \arrow[d, "\psi_2"'] & Y \arrow[r, "\gamma \circ g"] \arrow[d, "\beta"] & Z' \arrow[d, equal] \\
0 \arrow[r] & X' \arrow[r, "f'"] & Y' \arrow[r, "g'"] & Z'.
\end{tikzcd}$$

これは (2) の図式の左下の四角形の可換性を示している。自然な射 $X' \to \operatorname{coker}(\alpha)$ と $\psi_2$ の合成を $\psi_3 : \ker(\gamma \circ g) \to \operatorname{coker}(\alpha)$ と置く。$\ker(\psi_1) \to \ker(\gamma \circ g) \xrightarrow{\psi_3} \operatorname{coker}(\alpha)$ の合成が 0-射であることが証明できれば、$\psi_1$ がエピであることから、$\psi_3$ は $\psi_1$ を一意的に経由して、図式

$$\begin{tikzcd}
\ker(\gamma \circ g) \arrow[r, "\psi_1"] \arrow[d, "\psi_2"'] & \ker(\gamma) \arrow[d, "\varphi"] \\
X' \arrow[r] & \operatorname{coker}(\alpha)
\end{tikzcd}$$

を可換にする射 $\varphi$ の存在が従う ((2) の図式の右下の四角形の可換性の証明と $\varphi$ の構成が同時に終わる)。

$p : X \to \operatorname{Im}(f)$ を自然なエピ射、$j_1 : \operatorname{Im}(f) \cong \ker(g) \to Y$ を自然なモノ射とする。このとき $f = j_1 \circ p$ である。核の普遍性により引き起こされる一意的な射を $\alpha' : \operatorname{Im}(f) \cong \ker(g) \to X'$ と置く。

$$f' \circ \alpha = \beta \circ f = \beta \circ j_1 \circ p = f' \circ \alpha' \circ p$$

であることと $f'$ がモノであることから、$\alpha = \alpha' \circ p$ となる。$q : X' \to \operatorname{coker}(\alpha)$ を自然な射とすると、$q \circ \alpha' \circ p = q \circ \alpha = 0$ となるが、$p$ がエピであることから、$q \circ \alpha' = 0$ となる。$T :\stackrel{\text{def}}{=} \ker(\psi_1)$ とおき、$i : T \to \ker(\gamma \circ g)$ を自然な射、$j_2 : \ker(\gamma \circ g) \to Y$ を自然なモノ射とする。$\psi_1 \circ i = 0$ であるから、$g \circ j_2 \circ i = 0$ である。よって、核の普遍性により、一意的な射 $k : T \to \operatorname{Im}(f)$ が存在して、$j_1 \circ k = j_2 \circ i$ となる。以上より、

$$f' \circ \psi_2 \circ i = \beta \circ j_2 \circ i = \beta \circ j_1 \circ k = f' \circ \alpha' \circ k$$

となる。$f'$ はモノなので $\psi_2 \circ i = \alpha' \circ k$ となる。従って、$q \circ \psi_2 \circ i = q \circ \alpha' \circ k = 0$ となって、示すべき等式を得る。以上で問題 I.9 の証明を完了する。 □

## References


[KS02] M. Kashiwara and P. Schapira. *Sheaves on Manifolds*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer Berlin Heidelberg, 2002. ISBN: 9783540518617. URL: https://www.springer.com/jp/book/9783540518617.