Sheaves on Manifolds Exercise I.13 の解答

ゆじとも

2021 年 2 月 9 日

Sheaves on Manifolds [Exercise I.13, KS02] の解答です。

I Homological Algebra

問題 I.13. $\mathcal{C}$ を三角圏、$X_i \to Y_i \to Z_i \to X_i[1], (i = 1, 2)$ を $\mathcal{C}$ の二つの三角形とする。これら二つの三角形が完全三角であるためには、三角形

$$X_1 \oplus X_2 \to Y_1 \oplus Y_2 \to Z_1 \oplus Z_2 \to X_1[1] \oplus X_2[1]$$

が完全三角であることが必要十分である、ということを示せ。

証明. 必要性を証明する。二つの三角形 $X_i \to Y_i \to Z_i \to X_i[1], (i = 1, 2)$ が完全三角であるとする。$M :\overset{\text{def}}{=} M(X_1 \oplus X_2 \to Y_1 \oplus Y_2)$ と置く (mapping cone)。自然な射 $X_1 \oplus X_2 \to X_i$ と $Y_1 \oplus Y_2 \to Y_i$ により可換図式

$$\begin{tikzcd}
X_1 \oplus X_2 \arrow[r] \arrow[d] & Y_1 \oplus Y_2 \arrow[d] \\
X_i \arrow[r] & Y_i
\end{tikzcd}$$

を得る。よって、(TR4) より、ある射 $M \to Z_i$ が存在して、これらが完全三角の間の射を形成する。二つの射 $M \to Z_1, M \to Z_2$ により、射 $M \to Z_1 \oplus Z_2$ ができて、可換図式

$$\begin{tikzcd}
X_1 \oplus X_2 \arrow[r] \arrow[d, equal] & Y_1 \oplus Y_2 \arrow[r] \arrow[d, equal] & M \arrow[r] \arrow[d] & X_1[1] \oplus X_2[1] \arrow[d, equal] \\
X_1 \oplus X_2 \arrow[r] & Y_1 \oplus Y_2 \arrow[r] & Z_1 \oplus Z_2 \arrow[r] & X_1[1] \oplus X_2[1]
\end{tikzcd}$$

を得る。任意に $P \in \mathcal{C}$ を取って、函手 $\mathrm{Hom}(P, -)$ を適用すると、各 $\mathrm{Hom}(P, X_i) \to \mathrm{Hom}(P, Y_i) \to \mathrm{Hom}(P, Z_i) \to \mathrm{Hom}(P, X_i[1])$ は完全であるから、

$$\mathrm{Hom}(P, X_1 \oplus X_2) \to \mathrm{Hom}(P, Y_1 \oplus Y_2) \to \mathrm{Hom}(P, Z_1 \oplus Z_2) \to \mathrm{Hom}(P, X_1[1] \oplus X_2[1])$$

も完全である。よって [Exercise 1.12, KS02] より

$$X_1 \oplus X_2 \to Y_1 \oplus Y_2 \to Z_1 \oplus Z_2 \to X_1[1] \oplus X_2[1]$$

も完全三角であることが従う。以上で必要性の証明を完了する。

十分性を証明する。

$$X_1 \oplus X_2 \to Y_1 \oplus Y_2 \to Z_1 \oplus Z_2 \to X_1[1] \oplus X_2[1]$$

が完全三角であると仮定する。$M_i :\overset{\text{def}}{=} M(X_i \to Y_i)$ と置く。自然な射 $X_i \to X_1 \oplus X_2$ と $Y_i \to Y_1 \oplus Y_2$ により可換図式

$$\begin{array}{ccc} X_i & \longrightarrow & Y_i \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_1 \oplus X_2 & \longrightarrow & Y_1 \oplus Y_2 \end{array}$$

を得る。よって、(TR4) より、ある射 $M_i \to Z_1 \oplus Z_2$ が存在して、これらが完全三角の間の射を形成する。自然な射 $X_1 \oplus X_2 \to X_i, Y_1 \oplus Y_2 \to Y_i, Z_1 \oplus Z_2 \to Z_i$ と合成することで、可換図式

$$\begin{array}{ccccccc} X_i & \longrightarrow & Y_i & \longrightarrow & M_i & \longrightarrow & X_i[1] \\ \| & & \| & & \downarrow & & \| \\ X_i & \longrightarrow & Y_i & \longrightarrow & Z_i & \longrightarrow & X_i[1] \end{array}$$

を得る。任意に $P \in \mathcal{C}$ を取って函手 $\mathrm{Hom}(P, -)$ を適用する。

$$X_1 \oplus X_2 \to Y_1 \oplus Y_2 \to Z_1 \oplus Z_2 \to X_1[1] \oplus X_2[1]$$

が完全三角であることから、

$$\mathrm{Hom}(P, X_1 \oplus X_2) \to \mathrm{Hom}(P, Y_1 \oplus Y_2) \to \mathrm{Hom}(P, Z_1 \oplus Z_2) \to \mathrm{Hom}(P, X_1[1] \oplus X_2[1])$$

は完全であり、従って各 $i = 1, 2$ に対して

$$\mathrm{Hom}(P, X_i) \to \mathrm{Hom}(P, Y_i) \to \mathrm{Hom}(P, Z_i) \to \mathrm{Hom}(P, X_i[1])$$

も完全である。よって [Exercise 1.12, KS02] より $X_i \to Y_i \to Z_i \to X_i[1]$ も完全三角であることが従う。以上で十分性の証明を完了し、問題 I.13 の解答を完了する。 □

References

[KS02] M. Kashiwara and P. Schapira. *Sheaves on Manifolds*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer Berlin Heidelberg, 2002. ISBN: 9783540518617. URL: https://www.springer.com/jp/book/9783540518617.