Sheaves on Manifolds Exercise I.38 の解答

ゆじとも

2021 年 2 月 9 日

Sheaves on Manifolds [Exercise I.38, KS02] の解答です。

I Homological Algebra

問題 I.38. I, I' を filtered な圏として、$\varphi : I \to I'$ を函手とする。φ が **cofinal** であるとは、以下の条件を満たすことを言う：

(1) 任意の $i' \in I'$ に対してある $i \in I$ と射 $i' \to \varphi(i)$ が存在する。

(2) 任意の $i \in I$ と $i' \in I'$ と射 $(f : \varphi(i) \to i') \in I'$ に対してある射 $(g : i \to i_1) \in I$ と $(h : i' \to \varphi(i_1)) \in I'$ が存在して $h \circ f = g$ となる。

$\mathcal{C}$ を圏、I, I_1 を filtered な圏、$F : I \to \mathcal{C}, G : I^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}$ を函手、$\varphi : I_1 \to I$ を cofinal とする。自然な射

$$\operatorname{colim}(F \circ \varphi) \to \operatorname{colim} F, \quad \text{“colim”}(F \circ \varphi) \to \text{“colim”} F, \quad \lim G \to \lim(G \circ \varphi), \quad \text{“lim”} G \to \text{“lim”}(G \circ \varphi)$$

はいずれも同型射であることを示せ。

証明. $\operatorname{colim}(F \circ \varphi) \to \operatorname{colim} F$ が同型射であることがわかれば、$\mathcal{C} \to \hat{\mathcal{C}} = \mathsf{Set}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}$ を合成して函手 $I \to \hat{\mathcal{C}}$ に対してその事実を適用することにより “colim”$(F \circ \varphi) \to$ “colim”F が同型射であることが従う。lim に関しても同様である。さらに $\operatorname{colim}(F \circ \varphi) \to \operatorname{colim} F$ が同型射であることがわかれば、$G^{\mathrm{op}} : I \to \mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ に対してその事実を適用することにより $\lim G \to \lim(G \circ \varphi)$ が同型射であることが従う。以上より、問題 I.38 を示すためには、$\operatorname{colim}(F \circ \varphi) \to \operatorname{colim} F$ が同型射であることを示すことが十分である。

$X \in \mathcal{C}$ を任意にとる。$\operatorname{colim}(F \circ \varphi) \to \operatorname{colim} F$ が同型射であることを示すためには、米田の補題より、自然な射 $\Psi : \lim_{i \in I} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(F(i), X) \to \lim_{i_1 \in I_1} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(F(\varphi(i_1)), X)$ が全単射であることを示すことが十分である。$(f_i), (g_i) \in \lim_{i \in I} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(F(i), X)$ が $\Psi((f_i)) = \Psi((g_i))$ を満たすとする。このとき、各 $i_1 \in I_1$ に対して $f_{\varphi(i_1)} = g_{\varphi(i_1)}$ が成り立つ。$i \in I$ を任意にとる。$\varphi : I_1 \to I$ は cofinal であるから、一つめの条件より、ある $i_1 \in I_1$ と射 $p : i \to \varphi(i_1)$ が存在する。$(f_i), (g_i)$ はそれぞれ $\lim_{i \in I} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(F(i), X)$ の元であるから、$f_{\varphi(i_1)} \circ F(p) = f_i, g_{\varphi(i_1)} \circ F(p) = g_i$ を満たす。$f_{\varphi(i_1)} = g_{\varphi(i_1)}$ であるので、従って $f_i = g_i$ が成り立つ。これは $(f_i) = (g_i)$ を意味し、よって Ψ は単射である。

Ψ が全射であることを示す。$(h_{\varphi(i_1)})_{i_1 \in I_1} \in \lim_{i_1 \in I_1} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(F(\varphi(i_1)), X)$ を任意にとる。各 $i \in I$ に対して一つ $i_1 \in I_1$ と射 $p_1 : i \to \varphi(i_1)$ を選ぶ (φ が cofinal であることの一つめの条件を用いる)。$h_i :\overset{\mathrm{def}}{=} h_{i_1} \circ F(p_1)$ と定義する。まずこれが i_1, p_1 の取り方に依存しないことを示す。そのためには、別の $p_2 : i \to \varphi(i_2)$ に対して $h_{i_1} \circ F(p_1) = h_{i_2} \circ F(p_2)$ が成り立つことが十分である。I_1 は filtered であるから、$i_3 \in I_1$ と $a_1 : i_1 \to i_3, a_2 : i_2 \to i_3$ が存在する。I は filtered であるから、二つの並行な射

$\varphi(a_1)\circ p_1, \varphi(a_2)\circ p_2 : i \to \varphi(i_3)$ に対してある射 $g : \varphi(i_3) \to i'$ が存在して $g\circ\varphi(a_1)\circ p_1 = g\circ\varphi(a_2)\circ p_2$ が成り立つ。さらに φ は cofinal であるから、$g : \varphi(i_3) \to i'$ に二つめの条件を用いることで、ある $(b : i_3 \to i_4) \in I_1$ と $(g' : i' \to \varphi(i_4)) \in I$ が存在して $g'\circ g = \varphi(b)$ が成り立つ。このとき

$$\varphi(b\circ a_1)\circ p_1 = g'\circ g\circ\varphi(a_1)\circ p_1 = g'\circ g\circ\varphi(a_2)\circ p_2 = \varphi(b\circ a_2)\circ p_2$$

が成り立つ。$p_4 :\overset{\text{def}}{=} \varphi(b\circ a_1)\circ p_1$ とおけば、

$$h_{i_1}\circ F(p_1) = h_{i_4}\circ F(\varphi(b\circ a_1)\circ p_1) = h_{i_4}\circ F(\varphi(b\circ a_2)\circ p_2) = h_{i_2}\circ F(p_2)$$

が成り立つ。以上で h_i の定義が $p_1 : i \to \varphi(i_1)$ の取り方に依存しないことが示された。次に $(h_i)_{i\in I}$ が $\lim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(F(i), X)$ の元を定めることを示す。射 $(p : i \to i') \in I$ を任意にとる。$q : i' \to \varphi(i_1)$ を一つ選べば、h_i の定義が $p_1 : i \to \varphi(i_1)$ の取り方に依存しないことから、

$$h_i = h_{i_1}\circ F(q\circ p) = h_{i_1}\circ F(q)\circ F(p) = h_{i'}\circ F(p)$$

が成り立つ。これは $(h_i)_{i\in I}$ が $F(p)$ たちと両立的であることを意味し、従って $(h_i)_{i\in I}$ は $\lim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(F(i), X)$ の元を定める。各 $i_1 \in I$ に対して $h_{\varphi(i_1)} = h_{i_1}$ であるから、$\Psi((h_i)_{i\in I}) = (h_{i_1})_{i_1\in I_1}$ が成り立つ。よって Ψ は全射である。以上で Ψ が全単射であることが従い、問題 I.38 の証明を完了する。 $\square$

References

[KS02] M. Kashiwara and P. Schapira. *Sheaves on Manifolds*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer Berlin Heidelberg, 2002. ISBN: 9783540518617. URL: https://www.springer.com/jp/book/9783540518617.