

εN

ゆきちゃん

2019 年 4 月 12 日

目次

1	はじめに	3
2	εN 論法	4
2.1	具体例 1	4
2.2	具体例 2	6
2.3	よく使う性質	7

1 はじめに

εN 論法と呼ばれる数列の極限を厳密に定義したものがあるが、難しいので、復習も兼ねてざっくりとした解説を書いてみた。

内容に誤りや誤植、追加して欲しいものがあれば教えてもらえると嬉しい。

2 εN 論法

数列 a_n が α に収束するとは、 εN 論法で書くと

任意の正の実数 ε に対してある自然数 N が存在し、 $n > N$ となる全ての自然数 n に対して $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ となる。

となるが、よく分からない。もう少し細かく書くと

どんなに小さな正の実数 ε が与えられても、 ε に対してある自然数 N を選ぶことで、 $n > N$ となる全ての自然数 n に対して $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ となる。

これを示すことができれば、数列 a_n が α に収束することが示せるわけだ。

で???結局何をすればいいの???

1. あなたに正の実数 ε を与えるね!
2. どのような値の ε が与えられるかあなたにはわかりません。
3. でも、 N より大きい全ての n について $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ が成立するような N を見つけてね!

つまり、

ε を使って N を見つける!

もう少し言い換えると

N を ε で表す式などを見つける!

ということだ。

2.1 具体例 1

数列 a_n を

$$a_n = \frac{1}{n} \quad (2-1)$$

として、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \quad (2-2)$$

を示してみよう。

証明したいことは

どんな正の実数 ε が与えられても、 N より大きい全ての自然数 n について

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon \quad (2-3)$$

となるような自然数 N が存在する。

この N を見つけて行こう。

実は機械的な操作で N を求めることができる*¹。ヒントは

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon$$

だ。この式を変形していく。

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon \quad (2-4)$$

$$\left| \frac{1}{n} \right| < \varepsilon \quad (2-5)$$

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \quad (2-6)$$

$$\frac{1}{\varepsilon} < n \quad (2-7)$$

この最後の式

$$\frac{1}{\varepsilon} < n$$

と、 N より大きい全ての自然数 n 、つまり

$$n > N$$

この2の式を見比べてみると、

$$N = \frac{1}{\varepsilon}$$

とできそうと分かる。しかも、 N が ε を使って表せている。しかし、 N は自然数なので、

$$N \text{ は } \frac{1}{\varepsilon} \text{ より大きい自然数の1つ}$$

としてやれば良い。*²数式で書きたい場合は、ガウス記号を用いて

$$N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1 \quad (2-8)$$

とすれば良い。*³

以上が、与えられた ε から N を作り出す方法である。

改めて、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \quad (2-9)$$

を示そう。

*¹ できない場合もあるかもしれない

*² このような自然数が存在することがアルキメデスの原理によって保証されている。

*³ ある実数に対して、それ以下の最大の整数が存在することもアルキメデスの原理が保証している。

証明 1 任意の正の実数 ε に対して、自然数 N を

$$N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1 \quad (2-10)$$

と決める。すると、 N より大きい全ての自然数 n について

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{N} = \frac{1}{\left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1} < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon \quad (2-11)$$

つまり、

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \quad (2-12)$$

なので、

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon \quad (2-13)$$

これは

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \quad (2-14)$$

が成立していることを示している。

2.2 具体例 2

数列 a_n を

$$a_n = \frac{n}{1+n} \quad (2-15)$$

として、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 \quad (2-16)$$

を示してみよう。まず、

$$a_n - 1 = \frac{n}{n+1} - 1 = -\frac{1}{n+1} \quad (2-17)$$

よって、

$$|a_n - 1| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon \quad (2-18)$$

つまり、

$$n > \frac{1}{\varepsilon} - 1 \quad (2-19)$$

従って、

証明 2 任意の $\varepsilon > 0$ に対して、 N を $\frac{1}{\varepsilon} - 1$ より大きい 1 つの自然数とすれば、 $n > N$ となる全ての自然数 n に対して、 $|a_n - 1| < \varepsilon$

2.3 よく使う性質

今、2つの数列 a_n と b_n について

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha \quad (2-20)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta \quad (2-21)$$

とする。この時、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \alpha \pm \beta \quad (2-22)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \alpha \beta \quad (2-23)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha}{\beta} \quad (\beta \neq 0) \quad (2-24)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} k a_n = k \alpha \quad (k \text{ は定数}) \quad (2-25)$$

が成立する。

ここで、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$ ということは、任意の実数 $\varepsilon > 0$ に対して自然数 N が存在し、 $n > N$ となる全ての自然数 n について

$$|a_n - \alpha| < \varepsilon, \quad |b_n - \beta| < \varepsilon \quad (2-26)$$

となる。ここで、同一の ε に対して、 N は a_n と b_n について一般には違う。これを N_1, N_2 とすると、 $N = \max(N_1, N_2)$ と N を選んでやれば $n > N$ となる全ての自然数 n について (2-26) は成立する。

証明 3 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \alpha + \beta$ について

a_n に対して N_1 、 b_n に対して N_2 と選ぶ。この時、任意の実数 ε に対して $N = \max(N_1, N_2)$ とすると、 $n > N$ となる全ての自然数 n に対して、

$$|a_n - \alpha| < \varepsilon, \quad |b_n - \beta| < \varepsilon \quad (2-27)$$

が成立する。そこで、

$$|(a_n + b_n) - (\alpha + \beta)| = |(a_n - \alpha) + (b_n - \beta)| \quad (2-28)$$

$$\leq |a_n - \alpha| + |b_n - \beta| \quad (2-29)$$

$$< 2\varepsilon \quad (2-30)$$

よって、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \alpha + \beta \quad (2-31)$$

証明 4 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \alpha - \beta$ について

a_n に対して N_1 、 b_n に対して N_2 と選ぶ。この時、任意の実数 ε に対して $N = \max(N_1, N_2)$ とすると、 $n > N$ となる全ての自然数 n に対して、

$$|a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |b_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (2-32)$$

が成立する。そこで、

$$|(a_n - b_n) - (\alpha - \beta)| = |(a_n - \alpha) - (b_n - \beta)| \quad (2-33)$$

$$\leq |a_n - \alpha| + |b_n - \beta| \quad (2-34)$$

$$< \varepsilon \quad (2-35)$$

よって、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \alpha - \beta \quad (2-36)$$

証明 5 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \alpha \beta$ について

a_n に対して N_1 、 b_n に対して N_2 と選ぶ。この時、任意の実数 ε に対して $N = \max(N_1, N_2)$ とすると、 $n > N$ となる全ての自然数 n に対して、

$$|a_n - \alpha| < \varepsilon, \quad |b_n - \beta| < \varepsilon \quad (2-37)$$

が成立する。すると、

$$|a_n b_n - \alpha \beta| = |a_n b_n - \alpha \beta + a_n \beta - a_n \beta| \quad (2-38)$$

$$= |a_n(b_n - \beta) + \beta(a_n - \alpha)| \quad (2-39)$$

$$= |a_n| |(b_n - \beta)| + |\beta| |(a_n - \alpha)| \quad (2-40)$$

$$\leq |a_n| \varepsilon + |\beta| \varepsilon \quad (2-41)$$

ここで、 $n > N$ となる全ての自然数 n に対して、 $a_n < |\alpha| + \varepsilon$ である。また、数列 a_n は有限の数値列なので、最大値も最小値も持つ。そこで $C = \max(|a_1|, |a_2|, \dots, |a_n|, |\alpha| + \varepsilon)$ とすると、

$$|a_n b_n - \alpha \beta| \leq C \varepsilon + |\beta| \varepsilon \quad (2-42)$$

$$= (C + |\beta|) \varepsilon \quad (2-43)$$

よって、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \alpha \beta \quad (2-44)$$

証明 6 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha}{\beta}$ ($\beta \neq 0$) について

a_n に対して N_1 、 b_n に対して N_2 と選ぶ。この時、任意の実数 ε に対して $N = \max(N_1, N_2)$ とすると、 $n > N$ となる全ての自然数 n に対して、

$$|a_n - \alpha| < \varepsilon, \quad |b_n - \beta| < \varepsilon \quad (2-45)$$

が成立する。すると、

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{\alpha}{\beta} \right| = \left| \frac{a_n \beta - \alpha b_n}{b_n \beta} \right| \quad (2-46)$$

$$= \left| \frac{a_n \beta - \alpha b_n + \alpha \beta - \alpha \beta}{b_n \beta} \right| \quad (2-47)$$

$$= \left| \frac{\beta(a_n - \alpha) - \alpha(b_n - \beta)}{b_n \beta} \right| \quad (2-48)$$

$$= \left| \frac{1}{b_n \beta} \right| |\beta(a_n - \alpha) - \alpha(b_n - \beta)| \quad (2-49)$$

$$\leq \left| \frac{1}{b_n \beta} \right| (|\beta| |(a_n - \alpha)| + |\alpha| |(b_n - \beta)|) \quad (2-50)$$

$$\leq \left| \frac{1}{b_n \beta} \right| (|\beta| \varepsilon + |\alpha| \varepsilon) \quad (2-51)$$

$$(2-52)$$

ここで、 $n > N$ となる全ての自然数 n に対して、 $b_n < |\beta| + \varepsilon$ である。また、数列 b_n は有限の数値列なので、最大値も最小値も持つ。そこで $C = \max(|b_1|, |b_2|, \dots, |b_n|, |\beta| + \varepsilon)$ とすると、

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{\alpha}{\beta} \right| \leq \frac{|\alpha| + |\beta|}{C} \varepsilon \quad (2-53)$$

よって、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha}{\beta} \quad (\beta \neq 0) \quad (2-54)$$

証明 7 $\lim_{n \rightarrow \infty} ka_n = k\alpha$ (k は定数) について

今、任意の実数 $\varepsilon > 0$ に対して自然数 N が存在し、 $n > N$ となる全ての自然数 N について

$$|ka_n - k\alpha| = |k||a_n - \alpha| \quad (2-55)$$

$$\leq |k|\varepsilon \quad (2-56)$$

よって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} ka_n = k\alpha \quad (k \text{ は定数}) \quad (2-57)$$