

Um método de solução para o problema de empacotamento de cilindros em níveis

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de
Matemática Aplicada e Estatística da Universidade de São Paulo
como requisito parcial para a obtenção do diploma de Bacharel em
Matemática Aplicada e Computação Científica.

Área de Concentração: Otimização
Orientadora: Prof^a. Dr^a. Marina Andretta

Fernanda Yuka Ueno

2018

Agradecimentos

Gostaria de agradecer aos meus pais por apoiarem, terem dado a oportunidade e ajudar muito para conseguir realizar os meus estudos nesse curso. Agradecer pela paciência da minha irmãzinha de me esperar. Ao meu irmão pelo apoio e companhia. Agradecer à Universidade de São Paulo por me acolher e possibilitar a realização o curso. À Marina Andretta por ter aceitado ser a minha orientadora neste Trabalho de Conclusão de Curso e por ter me ajudado muito a realizá-lo, sempre disponível e atenciosa.

Agradeço ao Marcel Otoboni por tudo e por estar sempre disponível na horas difíceis. Ao grupo *Kakushin* por ter me acolhido e apoiar sempre. Aos meus amigos e colegas que conheci ao longo desses anos por terem me ajudado e pela companhia.

E a todos que me apoiaram e ajudaram.

Resumo

Um problema frequentemente encontrado nas indústrias de cerâmica é o problema de empacotamento de peças (que aproximamos por cilindros) em níveis, no qual deseja-se minimizar a quantidade de fornadas necessárias para queimar todas as peças de cerâmica, a fim de diminuir o tempo de fabricação e a energia gasta nesses ciclos de queima. Baseados em heurísticas propostas na literatura, desenvolvemos outras variações para resolver o problema que usam diferentes ordenações dos cilindros para acomodá-los em níveis usando o método *Bottom-Left*. Estes níveis são então empacotados em recipientes, usando três estratégias clássicas: *Best-Fit*, *First-Fit* e *Worst-Fit*.

Realizamos experimentos computacionais utilizando instâncias da literatura e comparamos os resultados obtidos.

Palavras-chave: problemas de empacotamento, empacotamento de cilindros, empacotamento em níveis, modelagem matemática, métodos heurísticos.

Conteúdo

1	Introdução	4
2	Definição do problema	6
3	Formulação matemática	10
3.1	Parâmetros	10
3.2	Variáveis	11
3.3	Função objetivo e restrições	13
4	Método de resolução	17
4.1	Primeira fase da heurística	17
4.2	Segunda fase da heurística	20
4.3	Variações das heurísticas	21
5	Resultados numéricos	28
5.1	Instâncias utilizadas	28
5.2	Heurísticas com ordenação baseada na quantidade dos cilindros .	30
5.3	Heurísticas com ordenação baseada na altura dos cilindros	35
5.4	Comparação entre as heurísticas	39
6	Considerações finais	48
	Bibliografia	50
A	Resultados obtidos pelos métodos heurísticos com ordenação baseada na quantidade de cilindros	52
B	Resultados obtidos pelos métodos heurísticos com ordenação baseada na altura dos cilindros	53

Capítulo 1

Introdução

O problema de empacotamento de cilindros em níveis é comumente encontrado na indústria de cerâmica e sua resolução eficiente e eficaz pode trazer muitos ganhos, tanto econômicos como ambientais. Por se tratar de um problema NP-difícil¹, encontrar algoritmos eficientes para resolvê-lo otimamente pode não ser possível. Assim, o uso de heurísticas para resolver instâncias reais, em que um conjunto de cilindros devem ser empacotados, se torna uma boa alternativa.

Na literatura, houve poucas contribuições para os problemas de empacotamento de cilindros em recipientes e em níveis. Em [3] foi estudado o empacotamento de cilindros de alturas idênticas e raios diferentes. Como a altura dos cilindros é idêntica, o problema foi reduzido em empacotamento das bases dos cilindros (que são círculos) em retângulos. Os autores criaram uma formulação matemática não-linear e discreta que consiste em maximizar a quantidade de cilindros empacotados de modo que nenhuma parte do cilindros fique fora do retângulo e que não se sobreponham. Dentre as heurísticas propostas, ao comparar os resultados obtidos, observaram que *Random* e *Genetic* apresentaram o maior tempo de execução, mas as soluções foram melhores que as outras heurísticas.

Em [4] foi tratado o problema de empacotamento de objetos tridimensionais, chamado *esferocone* (o cilindro é um caso particular dele). Na modelagem matemática, a função objetivo visa minimizar o volume ocupado no recipiente e as restrições garantem que os objetos não se sobreponham e nem excedam os limites do recipientes. Esta modelagem também é não-linear e para resolvê-la foi necessário construir uma solução factível inicial. Os autores utilizaram *Ipopt Library (Interior Point Optimizer)*² para desenvolver um método e conseguiram empacotar até 300 objetos.

Em [5] foram propostos métodos heurísticos com duas fases: na primeira

¹Em [1] temos a definição de NP-difícil e [2] mostra que o problema de empacotamento arbitrário de objetos em duas ou mais dimensões é NP-difícil, portanto o problema de empacotamento de cilindros em níveis é NP-difícil.

²<https://projects.coin-or.org/Ipopt> - Último acesso: 08/11/2018.

temos um problema de empacotamento da base dos cilindros em níveis (problema bidimensional) e na segunda o empacotamento de níveis em recipientes (problema unidimensional). A segunda fase foi inspirada nos métodos, muito utilizados, de alocação de memória [6]. Baseados nesses métodos, neste trabalho desenvolvemos métodos, nos quais, na primeira fase, avaliaremos algumas variações de ordenação dos cilindros para analisar se há melhoria nas soluções obtidas.

Neste Trabalho de Conclusão de Curso, temos 6 capítulos: no Capítulo 2 vamos definir o problema e explicar as simplificações realizadas; no Capítulo 3 apresentaremos a formulação matemática proposta em [5]; no Capítulo 4 são apresentadas as heurísticas propostas; no Capítulo 5, são apresentados os experimentos computacionais realizados, e as comparações entre as heurísticas propostas e a comparação dos resultados obtidos com os resultados de [5]; e no Capítulo 6 apresentaremos as considerações finais.

Capítulo 2

Definição do problema

Pela definição de cerâmica, segundo a Associação Brasileira de Cerâmica, ela compreende todos os materiais inorgânicos, não metálicos, obtidos geralmente após tratamento térmico em temperaturas elevadas [7].

Para produção de cerâmicas há vários processos que variam de acordo com o tipo e o formato de peça e matérias-primas utilizadas para produzi-las. Um dos processos na produção da cerâmica é a queima, conhecida também como sinterização, onde as peças de cerâmicas são colocadas em prateleiras, depois colocadas em fornos e submetidas a um tratamento térmico a temperaturas elevadas. Esse ciclo de queima pode variar de alguns minutos até vários dias [8].

Podemos observar que quanto mais o ciclo de queima demora, há mais gastos como energia. Considere o caso em que existe uma quantidade fixa de peças de cerâmicas a serem colocadas em uma quantidade fixa de fornos para realizarmos o ciclo de queima. Caso não caibam todas as peças nos fornos disponíveis, vamos ter que esperar terminar o ciclo de queima das peças já colocadas para colocar o resto das peças nos fornos e vamos fazendo isso até que todas as peças tenham passado nesse ciclo de queima. Assim, uma das estratégias seria diminuir o número das fornadas colocando de forma otimizada as peças de cerâmicas nos fornos que obedeçam às restrições que variam para cada peça (por exemplo, algumas peças podem ser empilhadas, outras não; algumas podem encostar em outras peças, outras não).

Na Figura 2.1, temos um exemplo com as peças de cerâmica dispostas em um forno. Nesse caso, aparentemente as prateleiras não encostam nas paredes do forno e em cada parte da prateleira há alguns apoios para sustentá-la. Notamos que a última prateleira não encosta no chão do forno e as peças de cerâmicas neste caso não estão encostadas entre si. Cada espaço entre as prateleira chamamos de níveis do forno.

Neste trabalho, baseado na dissertação de metrado [5], consideramos o recipiente sendo o espaço que as peças de cerâmica podem ocupar nos fornos tem forma de um paralelepípedo, pois esta é uma boa aproximação, que não aumenta muito a complexidade do problema. Desconsideramos a espessura das prateleiras e espaço que os apoios vão ocupar (veja Figura 2.1), também vamos



Figura 2.1: Forno com as peças colocadas [9].

desconsiderar que existam prateleiras de tamanhos diferentes (como aparece na Figura 2.2). Consideramos também que temos apenas um forno, de tamanho fixo, e assim vamos calcular o número de fornadas necessárias para que todas as peças passem pelo ciclo da queima. Na Figura 2.3, podemos observar essa simplificação, no qual está representado o recipiente com os níveis. A altura de cada nível pode variar livremente, desde que esteja dentro do recipiente.



Figura 2.2: Forno com as peças colocadas [10].

Quanto às peças de cerâmica, há vários tipos diferentes de formas e tamanhos. Mas, por simplificação, vamos considerar apenas peças cilíndricas neste trabalho. Tendo um número fixo de peças de cerâmicas cilíndricas para serem queimadas, consideramos o caso em que as dispomos na prateleira formando uma camada de cilindros em cada nível de forma que não haja sobreposição entre eles, mas podendo encostar, e que cada cilindro não ultrapasse os limites das dimensões dos recipientes, como podemos ver na Figura 2.3.

Para facilitar a visualização, vamos representar o recipiente como se o

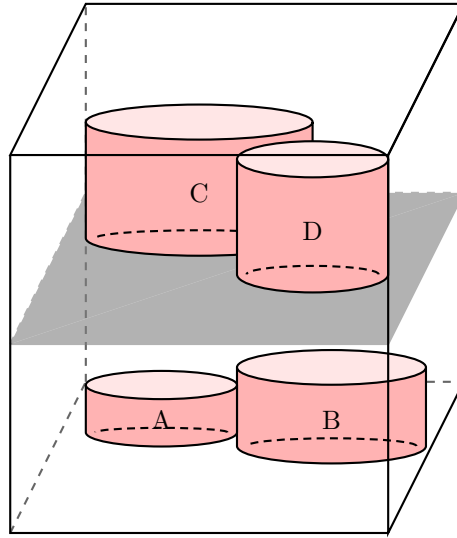


Figura 2.3: Representação do forno e peças simplificados.

olhássemos de perfil e por cima de cada Nível. Note que, ao olharmos de perfil, vamos visualizar retângulos. E por cima de cada nível, vamos observar círculos. Vamos representar o recipiente da Figura 2.3 nesses dois ângulos. Na Figura 2.4a, podemos observar o recipiente de perfil e na Figura 2.4b podemos observar por cima de cada nível do recipiente.

E para exemplificar disposições das peças de cilindros que não podem ocorrer nos recipientes, veja a Figura 2.5. Nela temos a peça *C* que está fora do recipiente, a peça *B* está sobrepondo a peça *A* e a peça *D* não está respeitando o limite do nível.

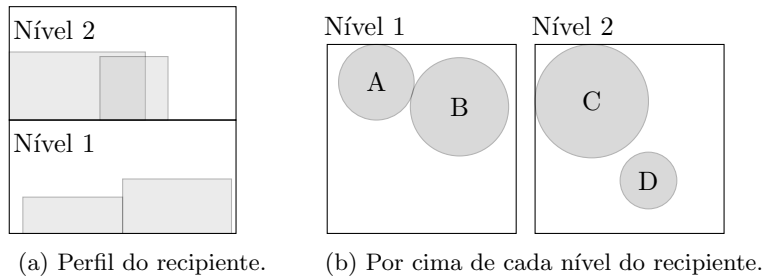


Figura 2.4: Visualização do Recipiente.

Assim, definimos o problema de empacotamento de cilindros em níveis da seguinte forma: queremos empacotar um número dado de cilindros dispondo-os em recipientes, podendo utilizar níveis, de forma que cada cilindro não sobreponha algum outro cilindro e não ultrapasse os limites do recipiente e do nível.

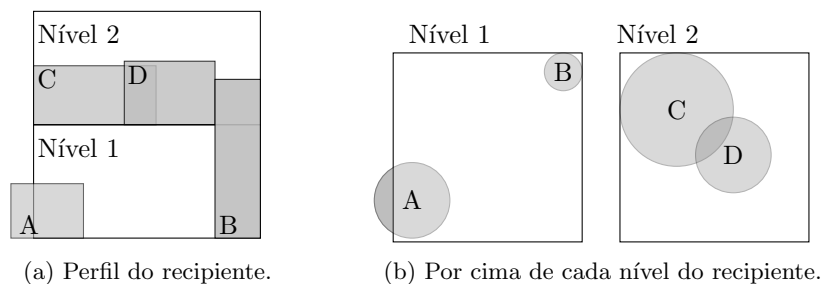


Figura 2.5: Exemplo com alguns cilindros se sobrepondo (A e B), outro ultrapassando o limite do nível (D) e o outro ultrapassando o limite do recipiente (C).

O objetivo é minimizar o número de recipientes utilizados para empacotar os cilindros.

Agora que definimos o problema, vamos modelá-lo matematicamente no próximo capítulo.

Capítulo 3

Formulação matemática

Estamos interessados em resolver um problema de empacotamento de cilindros em níveis no qual temos n cilindros a serem empacotados em recipientes em forma de paralelepípedos, podendo usar níveis. Há tantos recipientes quantos necessário e o objetivo é que todos os cilindros sejam empacotados usando a menor quantidade de recipiente possível. Assim temos o seguinte problema (como em [5]):

minimizar	quantidade de recipientes utilizados
sujeito a	cada cilindro obedecer às dimensões do recipiente, não sobreposição dos cilindros, cada cilindro ser empacotado apenas uma vez, cada recipiente conter pelo menos um nível, um nível criado ter altura maior que os cilindros posicionados abaixo dele, cada nível deve conter pelo menos um cilindro.

Agora, para modelar o problema, vamos definir nas seções a seguir os parâmetros, as variáveis, a função objetivo e as restrições, exatamente como foi feito em [5]. Aqui exibimos o modelo apresentado em [5] para facilitar a leitura. Para identificação de cada um dos parâmetros foram utilizadas letras romanas e para as variáveis foram utilizadas letras gregas.

3.1 Parâmetros

Temos um número n fixo de cilindros a serem empacotados em recipientes com L de largura, W de comprimento e H de altura, em que todos os recipientes são idênticos (veja a Figura 3.1b). Para cada cilindro i , são dados h_i altura do cilindro e r_i raio do cilindro (veja a Figura 3.1a).

Para minimizar a quantidade de recipientes é feita uma estimativa de quantos

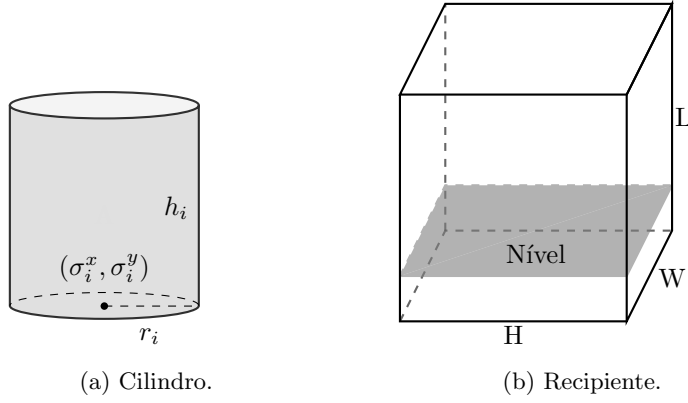


Figura 3.1: Ilustração do problema de empacotamento de cilindros em níveis, baseados em [5]

recipientes m e quantos níveis p são necessários no máximo para que todos os cilindros sejam empacotados e, a partir disso, tentar minimizar a quantidade de recipiente usados para alocar todos os cilindros. Essas estimativas foram feitas na Seção 5.2 de [5].

Assim, temos os seguintes parâmetros:

m	quantidade máxima de recipientes;
n	quantidade total de cilindros;
p	quantidade máxima de níveis para cada recipiente;
$L \times W \times H$	largura \times comprimento \times altura de cada recipiente;
r_i	raio do cilindro i , com $i = 1, 2, \dots, n$;
h_i	altura do cilindro i , com $i = 1, 2, \dots, n$.

3.2 Variáveis

No modelo são utilizadas variáveis binárias e contínuas. As variáveis binárias são:

$$\delta_{iks} = \begin{cases} 1, & \text{se o cilindro } i \text{ está empacotado no nível } k \text{ do recipiente } s, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$\gamma_s = \begin{cases} 1, & \text{se o recipiente } s \text{ é usado,} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$\beta_{ks} = \begin{cases} 1, & \text{se o nível } k \text{ é usado no recipiente } s, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

As variáveis contínuas são:

$$\lambda_{ks} \quad \text{altura (em relação ao recipiente) onde o nível } k \text{ do recipiente } s \text{ é posicionado;}$$

$$(\sigma_i^x, \sigma_i^y) \quad \text{posição do centro do cilindro } i \text{ em relação aos eixos } x \text{ e } y, \text{ respectivamente.}$$

Na Figura 3.2, temos um exemplo do posicionamento dos níveis no recipiente. Na Figura 3.3 temos um exemplo de empacotamento de quatro cilindros em dois recipientes, um com dois níveis e outro com um nível.

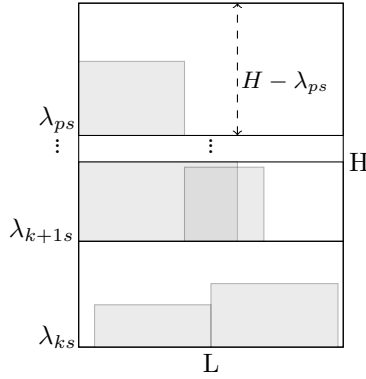


Figura 3.2: Ilustração do posicionamento dos níveis no recipiente (baseada em [5]).

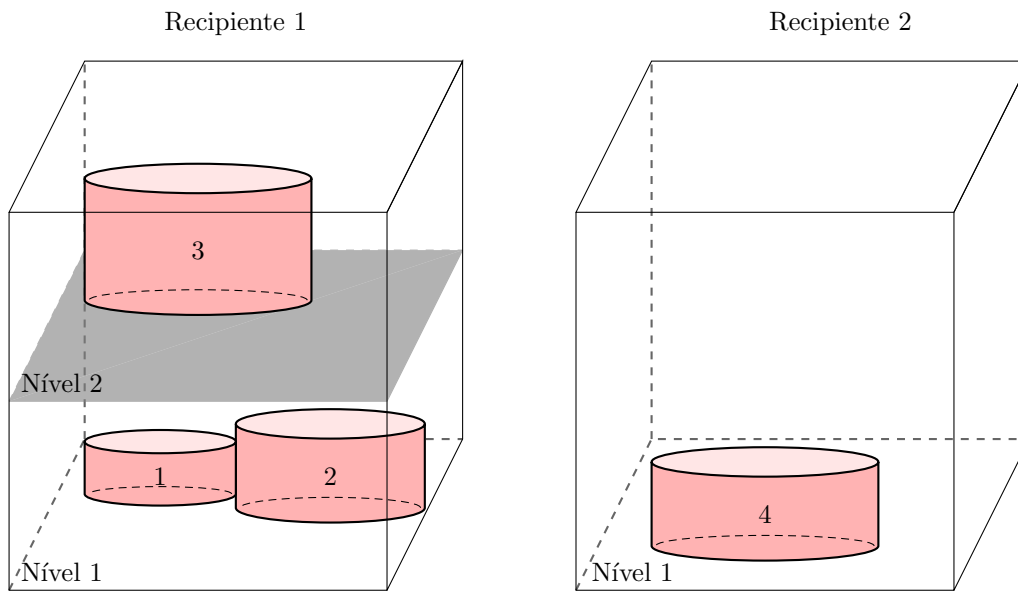


Figura 3.3: Exemplo de empacotamento de quatro cilindros em dois recipientes, um com dois níveis e outro com um nível.

3.3 Função objetivo e restrições

Neste caso foi considerado que o primeiro nível é dado pela base do recipiente e que a verificação de sobreposição é feita pela distância euclidiana dos centros das bases dos cilindros empacotados, para cada cilindro posicionado no mesmo recipiente e em um mesmo nível. Assim, com os parâmetros e as variáveis apresentadas, a formulação pode ser escrita como:

$$\text{minimizar } \sum_{s=1}^m \gamma_s \quad (3.1)$$

$$\text{sujeita a } \delta_{iks} r_i \leq \sigma_i^x \leq \delta_{iks} (L - r_i), \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.2)$$

$$\delta_{iks} r_i \leq \sigma_i^y \leq \delta_{iks} (W - r_i), \quad k = 1, \dots, p, \quad (3.3)$$

$$\delta_{iks} h_i \leq H - (\lambda_{ks} \beta_{ks}), \quad s = 1, \dots, m, \quad (3.4)$$

$$(\sigma_i^x - \sigma_j^x)^2 + (\sigma_i^y - \sigma_j^y)^2 \geq \delta_{iks} \delta_{jks} (r_i + r_j)^2, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.5)$$

$$j = 1, \dots, i - 1,$$

$$k = 1, \dots, p,$$

$$s = 1, \dots, m,$$

$$\sum_{s=1}^m \sum_{k=1}^p \delta_{iks} = 1, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.6)$$

$$\sum_{i=1}^n \delta_{iks} \leq n \beta_{ks}, \quad k = 1, \dots, p, \quad (3.7)$$

$$s = 1, \dots, m,$$

$$\sum_{k=1}^p \beta_{ks} \leq p \gamma_s, \quad s = 1, \dots, m, \quad (3.8)$$

$$\lambda_{ks} \beta_{ks} \leq H \gamma_s, \quad k = 1, \dots, p, \quad (3.9)$$

$$s = 1, \dots, m,$$

$$\lambda_{ks} \beta_{ks} \geq \delta_{ik-1s} h_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.10)$$

$$k = 2, \dots, p,$$

$$s = 1, \dots, m,$$

$$\lambda_{ks}, \sigma_i^x, \sigma_i^y \geq 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.11)$$

$$k = 1, \dots, p,$$

$$s = 1, \dots, m,$$

$$\delta_{iks}, \gamma_s, \beta_{ks} \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.12)$$

$$k = 1, \dots, p,$$

$$s = 1, \dots, m.$$

Temos a função objetivo (3.1) na qual queremos minimizar o número de recipientes utilizados para empacotar todos os cilindros, obedecendo às restrições dadas por (3.2) a (3.12). A seguir, apresentamos a interpretação de cada um dos conjuntos de restrições:

- (3.2), (3.3) e (3.4): garantem que o cilindro empacotado não ultrapasse as dimensões do recipiente em relação à largura, ao comprimento e à altura, respectivamente (na Figura 3.4 podemos observar a ilustração das restrições (3.2) e (3.3));
- (3.5): garantem que os cilindros empacotados num mesmo nível não se sobreponham (distância euclidiana no plano);
- (3.6): garantem que cada cilindro é empacotado apenas uma vez;
- (3.7): garantem que um nível do recipiente é usado apenas quando alocamos pelo menos um cilindro a ele;
- (3.8): garantem que um recipiente é usado apenas quando há algum nível alocado nele;
- (3.9): garantem que quando um nível está em um recipiente, ele obedece o limite da altura disponível;
- (3.10): garantem que a altura em que um nível é posicionado no recipiente seja maior que a altura de todos os cilindros empacotados no nível anterior do mesmo recipiente;
- (3.11) e (3.12): definem o domínio da variáveis.

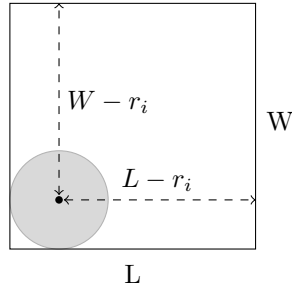


Figura 3.4: Ilustração da verificação de contenção do círculo no nível, retirado de [5].

Podemos observar que essa formulação é não-linear com variáveis inteiras e contínuas, na qual temos:

- $(n + 1) \times m \times p + m$ variáveis inteiras;
- $2 \times n + (m \times p)$ variáveis contínuas;
- $4 \times n \times m \times p$ restrições lineares;
- $(m \times p) \times \left[\frac{(n-1) \times (n-2)}{2} + 1 \right] + [n \times m \times (p - 1)]$ restrições não-lineares.

Com isso podemos observar que tanto a quantidade de variáveis como a quantidade de restrições do modelo depende da quantidade de cilindros (n) e da estimativa da quantidade de recipientes (m) e de níveis (p). Então, com o aumento dessas variáveis e restrições, pode-se tornar trabalhoso encontrar uma solução ótima. Em [5] foram feitas algumas alterações para que o número de restrições fosse reduzido, restrições não-lineares fossem linearizadas e a eventual a resolução do modelo pudesse ser mais rápida.

Mesmo com as reformulações propostas em [5], foi observado que o método exato usado para encontrar uma solução do modelo (3.1)-(3.12) para diversas instâncias do problema obteve sucesso para poucos casos. Assim, foram desenvolvidos métodos heurísticos para a resolução do problema. Neste trabalho, foi feita uma variação desses métodos heurísticos, que é apresentada no próximo capítulo.

Capítulo 4

Método de resolução

Para a resolução do problema de empacotamento de cilindros em níveis, definido no Capítulo 3, escolhemos fazer algumas variações dos métodos heurísticos apresentados em [5]. Um método heurístico é um método de resolução de problemas de otimização bastante utilizado para resolver problemas que possuem o custo ou tempo computacional muito elevado para encontrar uma solução ótima, mas não garantem a obtenção de uma solução factível ou ótima [11]. Assim, como a solução do modelo (3.1)-(3.12), proposto no Capítulo 3, gastou um tempo computacional muito elevado na maioria das instâncias escolhidas, além de obter sucesso para poucos casos, ou seja, conseguir encontrar a solução das instâncias, utilizaremos um método heurístico para encontrar uma solução.

Neste trabalho propomos 6 variações baseadas nas heurísticas propostas em [5] e cada uma foi dividida em duas fases. Na primeira fase, os cilindros são dispostos de forma que estejam inteiramente contidos em níveis e que não se sobreponham. Na segunda fase, empacotamos esses níveis nos recipientes de forma que tentem utilizar a menor quantidade possível de recipientes. Nas próximas seções vamos apresentar estas variações mais detalhadamente.

4.1 Primeira fase da heurística

Nesta fase, empacotamos os cilindros de forma que não se sobreponham e estejam inteiramente contidos dentro das dimensões das bases dos níveis. Para isso, é necessário apenas utilizar as bases dos cilindros e as bases dos níveis. Como as bases dos cilindros são círculos e as bases dos níveis são retângulos, que possuem as mesmas dimensões da base do recipiente, temos um problema de empacotamento de círculos em retângulos idênticos.

Dados n cilindros, vamos selecionar um de cada vez para empacotá-los nos níveis. Segundo [12], a ordem de seleção dos cilindros pode ter grande influência no resultado da solução. Em [5], foram escolhidos dois casos, a ordenação decrescente pela altura e a ordenação decrescente pelo raio. Baseadas nessas duas formas de ordenação, vamos apresentar na Seção 4.3 outras duas formas de

ordenação desenvolvidas neste trabalho.

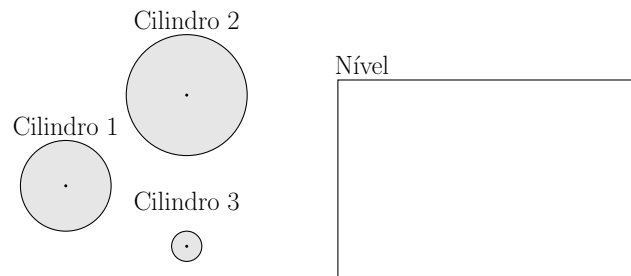
Após definirmos o tipo de ordenação que vai ser utilizada, definiremos os posicionamentos dos cilindros dentro dos níveis. Usaremos uma variação do método *Bottom-Left* encontrado em [13], que consiste em posicionar os cilindros o mais à esquerda e à frente do nível possível (considerando apenas a base dos níveis - retângulos - e os cilindros - círculos -, cada círculo deve ser posicionado o mais à esquerda e abaixo do retângulo em que é alocado). Dado um cilindro, calculamos os pontos possíveis para empacotá-lo em um nível de forma que ele fique encostado em algum outro cilindro já alocado ou em uma borda do nível. Caso não haja pontos, o cilindro não cabe no nível atual e deve ser empacotado em outro nível. Caso haja mais de um ponto, escolhemos o ponto que deixa o cilindro mais à esquerda e abaixo do nível.

Dado um cilindro i , temos a região de contenção desse cilindro, ou seja, a região em que podemos empacotá-lo de forma que ele fique inteiramente contido no nível. Temos também a região de sobreposição, que é a região em que, ao empacotar o cilindro i , haverá sobreposição com algum cilindro já empacotado. Na Figura 4.1, baseada em [5], temos um exemplo ilustrando o empacotamento de três cilindros em um nível. São explicitados todos os pontos em que é possível posicionar o centro da base de cada cilindro de forma que eles fiquem encostados em outro cilindro ou na borda do nível. Abaixo é listado o que cada formato de ponto da Figura 4.1 representa:

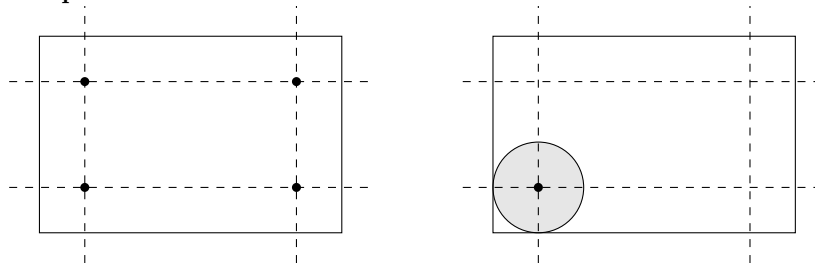
- ponto circular: representa a intersecção entre duas arestas da região de contenção;
- ponto triangular: representa a intersecção entre um aresta da região de contenção com a região de sobreposição;
- ponto quadrado: representa a intersecção entre duas regiões de sobreposição entre os cilindros já empacotados.

Os pontos pretos são os pontos possíveis para posicionar o cilindro e os pontos apenas contornados são os pontos em que não é possível posicionar o cilindro.

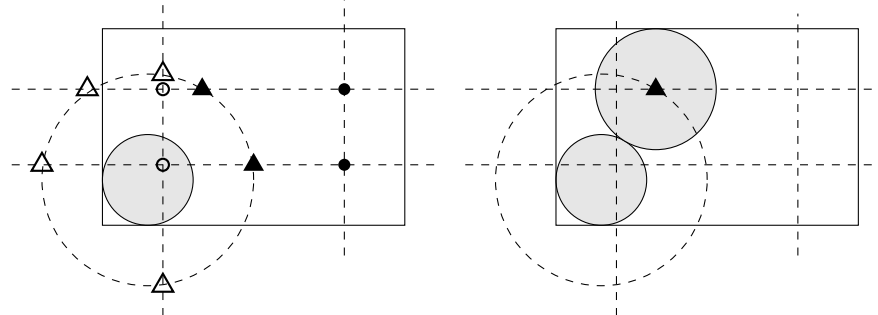
Note que, dada uma quantidade fixa de cilindros, para cada ordenação diferente, temos uma heurística diferente de alocação dos cilindros em níveis. E, com a alocação dos cilindros nos níveis feita, é preciso alocar estes níveis nos recipientes. Esta tarefa será resolvida pela segunda fase da heurística, detalhada na próxima seção.



Vamos empacotar o Cilindro 1:



Vamos empacotar o Cilindro 2:



Vamos empacotar o Cilindro 3:

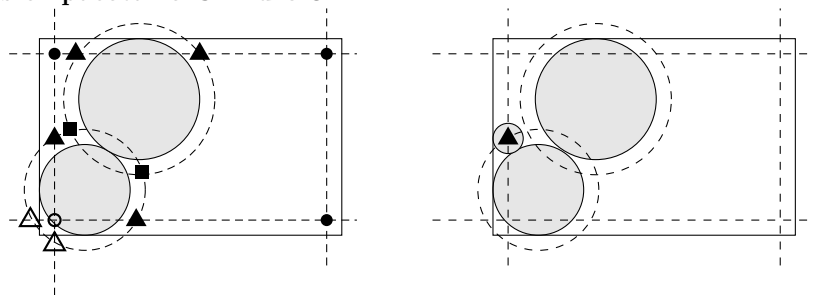


Figura 4.1: Temos um exemplo de empacotamento de cilindros em um nível explicitando todos os pontos de intersecção das regiões de contenção dos cilindros (retas tracejadas) e de sobreposição entre cilindros (círculos tracejados). Baseado em [5].

4.2 Segunda fase da heurística

Na segunda fase, utilizamos o resultado gerado na primeira fase (que são os níveis com os cilindros neles empacotados) e devemos alocá-los nos recipientes. Dada uma lista de níveis, de um em um, empacotamos os níveis em um recipiente. Caso encontremos um nível que não caiba em nenhum dos recipientes usados, alocamos um novo recipiente e empacotamos esse Nível. No momento em que vamos tentar colocar um nível em um recipiente usado, há três estratégias bastante usadas para escolher esses recipientes [6]:

- *Best-Fit*: escolhemos o recipiente em que caiba o nível que possui o menor espaço sobrando;
- *First-Fit*: escolhemos o primeiro recipiente em que encontrarmos espaço suficiente para alocar o nível;
- *Worst-Fit*: escolhemos o recipiente em que caiba o nível que possua o maior espaço sobrando.

Na Figura 4.2, temos um exemplo de empacotamento de 7 níveis (representados por retângulos) utilizando as três estratégias definidas acima. Podemos observar que, neste exemplo, para todas as estratégias foram utilizados três recipientes, mas os níveis foram empacotados de diferentes formas.

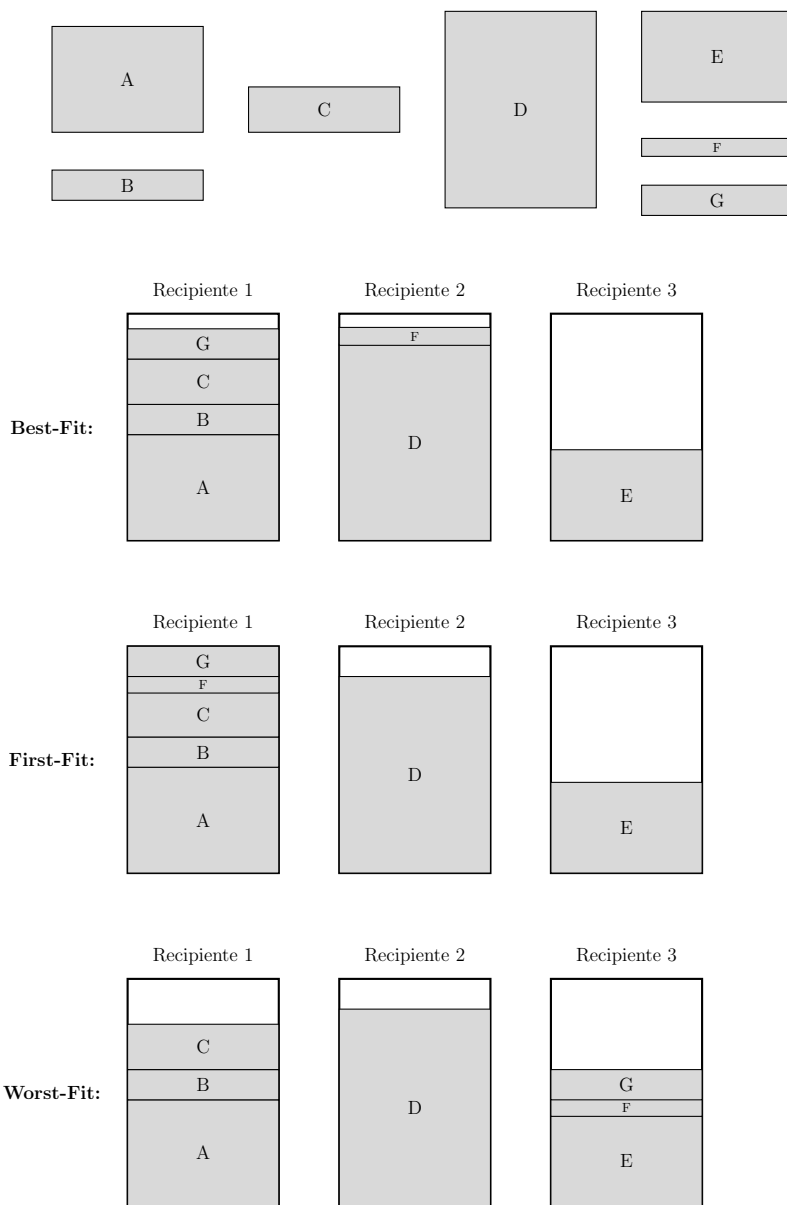


Figura 4.2: Ilustração das três estratégias de empacotamento de níveis nos recipientes (baseado em [5]).

4.3 Variações das heurísticas

Na primeira fase da heurística, antes de empacotar os cilindros, eles devem ser ordenados. Em [5] foram escolhidos dois tipos de ordenação, uma pela ordem

decrecente de altura e a outra pela ordem decrecente de raio. A partir disso, a variação escolhida neste trabalho foi ordenar os cilindros de forma intermediária, composta por 3 passos: (1) ordenamos os cilindros de forma decrecente pela altura (caso tenha empate, ordenamos de forma decrecente pelo raio); (2) dividimos o conjunto obtido em subconjuntos, mantendo a ordenação do passo (1); (3) em cada subconjunto, ordenamos os cilindros de forma decrecente pelo raio (em caso de empate, ordenamos de forma decrecente pela altura). Foram escolhidas duas formas para dividir esses conjunto de cilindros (passo(2)): uma pela quantidade de cilindros e a outra pela altura dos cilindros.

Na divisão baseada na quantidade de cilindros, consideramos t casos, $1 \leq t \leq n$ (representaremos o caso i por Q_i). Para cada caso Q_i , com $i = 1, \dots, t$, dividimos o conjunto de cilindros em i subconjuntos de tamanhos iguais, assim teremos subconjuntos s_1, s_2, \dots, s_i com tamanho $n \div i$. No caso em que não conseguimos dividir o conjunto de cilindros em tamanho iguais, obtemos o resto da divisão r , então consideramos que os subconjuntos s_i , $i = 1, \dots, r$, com tamanho $((n - r) \div i) + 1$ e os subconjuntos s_i , $i = r + 1, \dots, n$, com tamanho $(n - r) \div i$. Note que a ordenação do caso $t = 1$ é equivalente à ordenação decrecente pelo raio e a ordenação do caso $t = n$ é equivalente à ordenação decrecente pela altura.

Como exemplo, temos a Tabela 4.1 com as medidas de cinco cilindros e, na Figura 4.3, temos esses cinco cilindros ordenados pela altura de forma decrecente. Temos os cinco casos de subconjuntos (em cada caso, os subconjuntos foram ordenados pelo raio de forma decrecente).

Cilindro	Raio	Altura
A	2	20
B	5	17
C	6	17
D	4	13
E	3	10

Tabela 4.1: Alturas e os raios de cada cilindro usado nas figuras 4.3 e 4.4.

Na divisão baseada na altura dos cilindros, escolhemos uma porcentagem p para definir o tamanho do intervalo das alturas dos cilindros que farão parte de cada subconjunto (representaremos cada caso como F_p). Assim, calculamos a diferença entre a altura máxima e a altura mínima dos cilindros e, depois, calculamos uma porcentagem dessa diferença e obtemos o tamanho dos intervalos de alturas de cada subconjunto. Então, para cada intervalo, se obtemos um subconjunto de cilindros, vamos ordená-lo de forma decrecente pelo raio. Note que é inviável considerar o caso de $p = 0\%$, pois haverá infinitos subconjuntos. Utilizando o mesmo exemplo dos cinco cilindros descritos a Tabela 4.1, temos o cilindro com maior altura é o cilindro A , de tamanho 20, e com a menor altura é o cilindro E , de tamanho 10. Na Figura 4.4 temos esses cilindros ordenados pela altura de forma decrecente. Calculando a diferença das alturas entre o cilindro A e o cilindro E obtemos $\Delta = 10$. Se a porcentagem para definir os

intervalos de alturas que estão em cada subconjunto for $p = 30\%$, temos os seguintes intervalos: $[20, 17]$, $(17, 14]$, $(14, 11]$, $(11, 8]$ (os intervalos estão em ordem decrescente, pois as alturas também estão). Estes intervalos definem os subconjuntos $s_1 = \{A\}$, $s_2 = \{C, B\}$, $s_3 = \{C\}$ e $s_4 = \{D\}$. Depois de dividir o conjunto, é realizada a ordenação decrescente pelo raio em cada subconjunto obtido.

Dado n cilindros, note que existe um p tal que o número de subconjuntos seja igual n , o que faz com que os cilindros sejam ordenados de forma decrescente pela altura. Além disso, se $p = 100\%$ teremos apenas um subconjunto, o que será equivalente à ordenação dos cilindros de forma decrescente pelo raio.

Intuitivamente, num cenário ideal, a ordenação decrescente de altura iria empacotar os cilindros com alturas próximas em cada nível e na ordenação decrescente pelo raio iria empacotar primeiro os cilindros com raios maiores e depois os menores iriam ser empacotados “preenchendo” os pequenos espaços livres. Ao utilizarmos o método intermediário tentamos escolher os subconjuntos com alturas próximas e ordenar de forma decrescente pelo raio para empacotar primeiro os cilindros raios maiores e depois “preencher” os pequenos espaços livres com os cilindros de raios menores.

Note que nessas duas formas de ordenação podemos obter casos que geram a mesma ordenação, como exemplo, o Q_2 da Figura 4.3 e $F_{50\%}$ da Figura 4.4. Mas também podemos obter, como no exemplo da Figura 4.4, o caso $F_{30\%}$, que gera uma ordenação diferente de outras apresentadas no exemplo da Figura 4.3.

Para ilustrar o empacotamento de cilindros de níveis, na Figura 4.5 temos o empacotamento em níveis considerando a ordenação Q_2 (da Figura 4.3) e na Figura 4.6 temos o empacotamento utilizando a ordenação obtida por $F_{30\%}$ (da Figura 4.4). Em cada nível, as cores mais escuras indicam cilindros mais altos e cores claras indicam cilindros mais baixos. Os números indicam a ordem em que cada cilindro foi empacotado em cada nível.

Assim, dado um conjunto de cilindros, na primeira fase da heurística eles são ordenados de duas formas (uma que considera a quantidade de cilindros e outra que considera as alturas dos cilindros) e depois são empacotados utilizando o método *Bottom-Left*. Na segunda fase, os níveis obtidos da primeira fase são empacotados em recipientes utilizando uma das três estratégias: *Best-Fit* (BF), *First-Fit* (FF) e *Worst-Fit* (WF). Fazendo as possíveis combinações obtemos 6 tipos de heurísticas e definimos:

- Q_iBF : ordena os cilindros utilizando a divisão que considera a quantidade dos cilindros, dividindo-os em i subconjuntos, e para empacotar os níveis em recipientes utiliza o método *Best-Fit*;
- Q_iFF : ordena os cilindros utilizando a divisão que considera a quantidade dos cilindros, dividindo-os em i subconjuntos, e para empacotar os níveis em recipientes utiliza o método *First-Fit*;
- Q_iWF : ordena os cilindros utilizando a divisão que considera a quantidade dos cilindros, dividindo-os em i subconjuntos, e para empacotar

os níveis em recipientes utiliza o método *Worst-Fit*;

- F_pBF : ordena os cilindros utilizando a divisão que considera a altura dos cilindros com a porcentagem p e para empacotar os níveis em recipientes utiliza o método *Best-Fit*;
- F_pFF : ordena os cilindros utilizando a divisão que considera a altura dos cilindros com a porcentagem p e para empacotar os níveis em recipientes utiliza o método *First-Fit*;
- F_pWF : ordena os cilindros utilizando a divisão que considera a altura dos cilindros com a porcentagem p e para empacotar os níveis em recipientes utiliza o método *Worst-Fit*.

No próximo capítulo vamos apresentar os resultados obtidos pelos experimentos computacionais utilizando estes métodos heurísticos propostos.

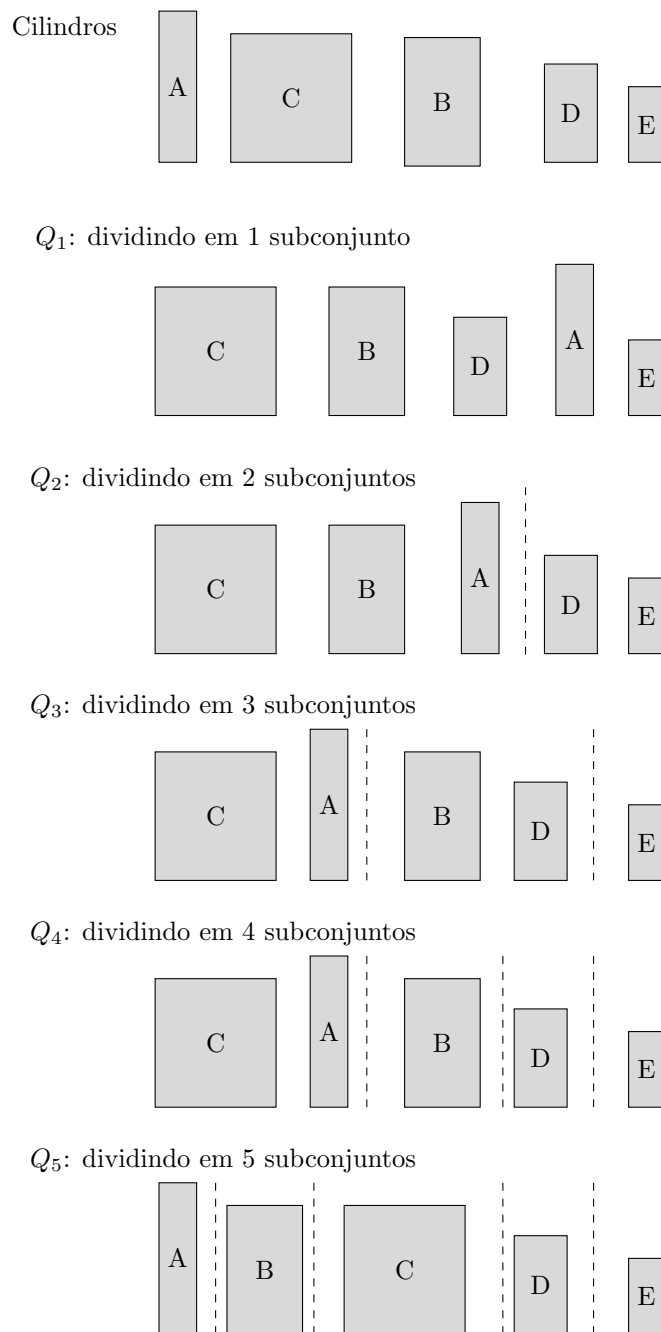
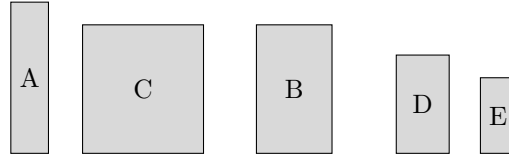
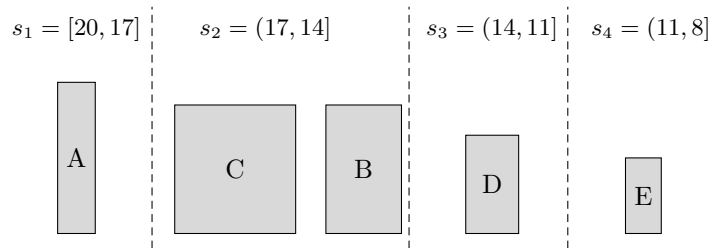


Figura 4.3: No topo, temos um conjunto de cilindros ordenado pela altura de forma decrescente. Dados 5 cilindros, geramos 5 casos. Para cada caso Q_i , temos que o conjunto de cilindros foi dividido em i subconjuntos, $i = 1, \dots, 5$. Para cada caso, cada subconjunto de cilindros obtido foi ordenado pelo raio de forma decrescente.

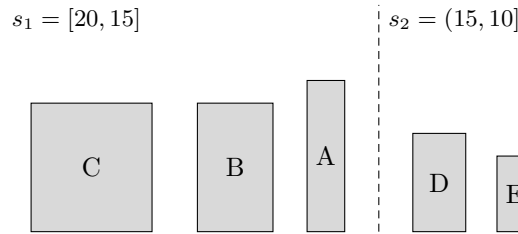
Cilindros



$F_{30\%}$: Intervalos das alturas calculados usando $p = 30\%$



$F_{50\%}$: Intervalos das alturas calculados usando $p = 50\%$



$F_{100\%}$: Intervalos das alturas calculados usando $p = 100\%$

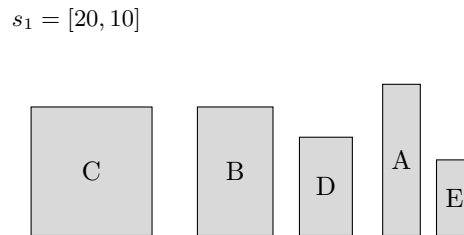


Figura 4.4: No topo, temos um conjunto de cilindros ordenado pela altura de forma decrescente. Dados 5 cilindros, como exemplo, escolhemos $p = 30\%$, $p = 50\%$ e $p = 100\%$. Depois de calcular o tamanho dos intervalos das alturas que definirão os subconjuntos para cada p , ordenamos os cilindros obtidos nesses subconjuntos de forma decrescente pelo raio.

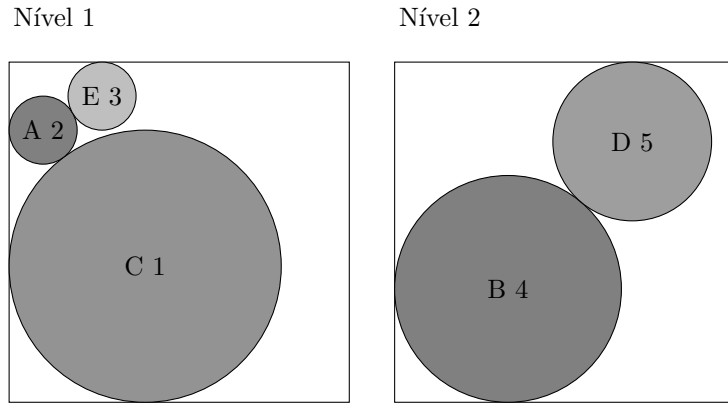


Figura 4.5: Empacotamento dos cilindros em níveis considerando a ordenação Q_2 da Figura 4.3. Em cada nível, cores mais escuras indicam cilindros mais altos e cores mais claras indicam cilindros mais baixos. Os números indicam a ordem em que os cilindros foram alocados.

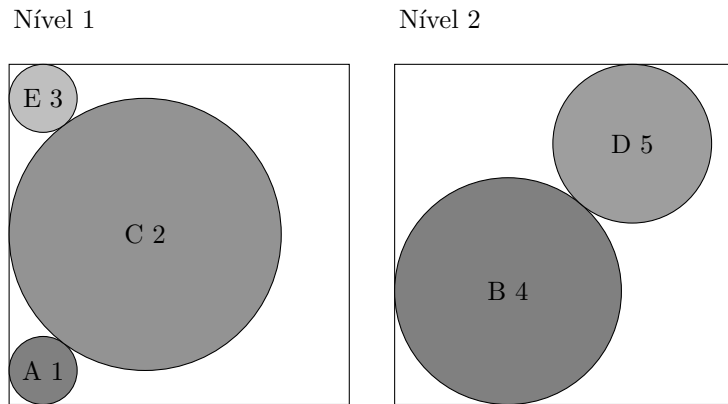


Figura 4.6: Empacotamento dos cilindros em níveis considerando a ordenação $F_{30\%}$ da Figura 4.4. Em cada nível, cores mais escuras indicam cilindros mais altos e cores mais claras indicam cilindros mais baixos. Os números indicam a ordem em que os cilindros foram alocados.

Capítulo 5

Resultados numéricos

Neste capítulo, são apresentados os resultados dos experimentos computacionais utilizando as heurísticas definidas no Capítulo 4. Os métodos foram implementadas na linguagem *Python 3* e os experimentos foram realizados em um computador com processador Intel(R) Core(TM) i7-4770 de 3.40 GHz, 8.00 GB de memória RAM e sistema operacional Ubuntu 12.04.5 LTS.

Na Seção 5.1, são apresentadas as instâncias que foram utilizadas nos experimentos computacionais, na Seção 5.2 e na Seção 5.3 são apresentados os experimentos realizados com as heurísticas aqui apresentadas. Por fim, na Seção 5.4, é apresentada uma comparação entre as heurísticas propostas e a melhor heurística de [5].

5.1 Instâncias utilizadas

Utilizamos as instâncias criadas em [5] para comparar os resultados dos experimentos. Os tamanhos dos cilindros das instâncias foram sorteados (de forma independente) de forma que tanto o raio quanto a altura possuem três tipos de tamanhos:

- pequeno (P), que ocupa entre 1% e 25% da base (ou altura) do recipiente;
- médio (M), que ocupa entre 26% e 50% da base (ou altura) do recipiente;
- grande (G), que ocupa entre 51% e 75% da base (ou altura) do recipiente;
- variáveis (V), que ocupa entre 1% e 75% da base (ou altura) do recipiente.

Fazendo as possíveis combinações dos tipos de cilindros, eles são organizados

em nove classes:

- A_MR_M : cilindros de alturas e raios médios;
- A_MR_{PG} : cilindros de alturas médias e raios pequenos e grandes;
- A_MR_V : cilindros de alturas médias e raios variáveis;
- $A_{PG}R_M$: cilindros de alturas pequenas e grandes e raios médios;
- $A_{PG}R_{PG}$: cilindros de alturas e raios pequenos e grandes;
- $A_{PG}R_V$: cilindros de alturas pequenos e grandes e raios variáveis;
- A_VR_M : cilindros de alturas e raios variáveis;
- A_VR_{PG} : cilindros de alturas variáveis e raios pequenos e grandes;
- A_VR_V : cilindros de alturas e raios variáveis.

Para cada classe $A_{c_1}R_{c_2}$, a proporção de cilindros com altura (ou raio) é a seguinte, para cada valor de c_1 e c_2 :

- M : todos os cilindros possuem altura (ou raio) médio;
- PG : metade dos cilindros possui altura (ou raio) pequeno e metade possui altura (ou raio) grande;
- V : um terço dos cilindros possui altura (ou raio) pequeno, um terço possui altura (ou raio) médio e um terço possui altura (ou raio) grande.

Para cada instância, temos o nome de umas das nove classes seguida da numeração de 1 a 17. Não utilizaremos as instâncias com numeração acima de 12, pois nos experimentos computacionais o tempo utilizado para a resolução destas foi mais de 30 minutos. Na Tabela 5.1, temos a quantidade de cilindros em cada instância utilizada, que são múltiplos de 6 por causa das proporções definidas para cada classe. Assim, temos 108 instâncias variando de 6 a 504 cilindros. Os dados dessas instâncias estão na página <http://conteudo.icmc.usp.br/pessoas/andretta/goncalves-2018/>.

Como exemplo, a instância $A_MR_{PG}3$ possui 18 cilindros no total, todos com altura média e, dentre eles, 9 com raio pequeno e 9 com raio grande. A instância $A_{PG}R_V5$ possui 30 cilindros no total, dentre eles, 15 cilindros com altura pequena e 15 com altura grande; 10 com raio pequeno, 10 com raio médio e 10 com raio grande.

Numeração da instância	Quantidade de cilindros
1	6
2	12
3	18
4	24
5	30
6	42
7	54
8	102
9	204
10	300
11	402
12	504

Tabela 5.1: Quantidade de cilindros para cada instância.

5.2 Heurísticas com ordenação baseada na quantidade dos cilindros

Para as heurísticas Q_iBF , Q_iFF e Q_iWF , precisamos decidir que valores de i usar. Observamos, em experimentos preliminares, que as instâncias com mais de 60 cilindros gastaram muito tempo computacional, por isso resolvemos realizar alguns experimentos para instâncias com menos de 60 cilindros, a fim de verificar quais valores de i apresentam resultados melhores.

Para estas instâncias, analisamos os resultados das heurísticas para $i = 1, \dots, n$, com n a quantidade de cilindros. Notamos que, para casos com $i \leq n/2$, o número de recipientes usados diminuía (veja os resultados no Apêndice A). Com base nos resultados obtidos, definimos três heurísticas, chamadas QBF , QFF e QWF . A QBF consiste em aplicar a heurística Q_iBF , com $i = 1, 2, \dots, n/8, n/4, n$ (em que n é a quantidade de cilindros a ser alocada), e devolver, dentre as soluções encontradas, uma que use a menor quantidade de recipientes. Caso diferentes valores i_1 e i_2 de i gerem a mesma ordenação, desconsideramos o caso $i = i_2$. O mesmo vale para as heurísticas QFF e QWF , que usam as heurísticas Q_iBF e Q_iWF , respectivamente.

Aplicamos essas três heurísticas no conjunto de instâncias apresentadas na Seção 5.1. Temos os resultados na Tabela 5.2 para cilindros de altura média, na Tabela 5.3 para cilindros de altura pequena e grande e na Tabela 5.4 para cilindros com alturas variáveis (pequena, média e grande). Em cada tabela temos os nomes das instâncias e a quantidade de cilindros em cada instância, seguidos dos resultados das heurísticas QBF , QFF e QWF , nos quais temos o número de recipientes encontrados para empacotar os cilindros e o tempo computacional gasto (em segundos) para encontrar a solução. Para facilitar a visualização, temos em negrito o(s) menor(es) número(s) de recipiente(s) necessário(s), comparando entre as três heurísticas. As ilustrações das soluções

obtidas pelas heurísticas QBF , QFF e QWF podem ser encontradas em <http://conteudo.icmc.usp.br/pessoas/andretta/ueno-2018/>.

Observando as Tabelas 5.2, 5.3 e 5.4, notamos que o número de recipientes encontrados pelas três heurísticas foi idêntico em 95 instâncias (87,9% do total). Para outras 13 instâncias, as heurísticas QBF e QFF encontraram o mesmo número de recipientes, mas a heurística QWF encontrou soluções que usam mais recipientes, obtendo, assim, um desempenho pior dentre as heurísticas testadas. Não levamos em consideração o tempo computacional nesta comparação, pois as três heurísticas gastaram tempo semelhante para obter uma solução para cada instância.

Instâncias	Qtde Cilindros	QBF		QFF		QWF	
		Qtde Recip.	Tempo	Qtde Recip.	Tempo	Qtde Recip.	Tempo
$A_M R_M 1$	6	1	< 0,01	1	< 0,01	1	< 0,01
$A_M R_M 2$	12	1	0,1	1	0,1	1	0,1
$A_M R_M 3$	18	2	0,2	2	0,2	2	0,2
$A_M R_M 4$	24	3	0,4	3	0,4	3	0,4
$A_M R_M 5$	30	3	0,8	3	0,8	3	0,9
$A_M R_M 6$	42	3	2,6	3	2,5	3	2,6
$A_M R_M 7$	54	5	4,5	5	4,5	5	4,8
$A_M R_M 8$	102	8	3,0	8	3,0	8	3,1
$A_M R_M 9$	204	15	13,2	15	13,6	15	13,6
$A_M R_M 10$	300	24	24,7	24	25,4	24	26,1
$A_M R_M 11$	402	31	55,8	31	57,1	31	57,2
$A_M R_M 12$	504	39	85,9	39	87,9	39	87,7
$A_M R_{PG} 1$	6	2	< 0,01	2	< 0,01	2	< 0,01
$A_M R_{PG} 2$	12	3	< 0,01	3	< 0,01	3	< 0,01
$A_M R_{PG} 3$	18	4	0,1	4	0,1	4	0,1
$A_M R_{PG} 4$	24	4	0,4	4	0,4	4	0,5
$A_M R_{PG} 5$	30	6	0,7	6	0,7	6	0,7
$A_M R_{PG} 6$	42	7	3,2	7	3,3	7	3,3
$A_M R_{PG} 7$	54	9	6,1	9	6,3	9	6,3
$A_M R_{PG} 8$	102	16	5,0	16	5,1	16	5,1
$A_M R_{PG} 9$	204	33	25,2	33	26,0	34	26,1
$A_M R_{PG} 10$	300	46	49,9	46	51,7	46	51,3
$A_M R_{PG} 11$	402	63	117,5	63	118,6	63	119,6
$A_M R_{PG} 12$	504	78	179,9	78	179,0	79	181,5
$A_M R_V 1$	6	1	< 0,01	1	< 0,01	1	< 0,01
$A_M R_V 2$	12	2	0,1	2	< 0,01	2	0,1
$A_M R_V 3$	18	2	0,2	2	0,2	2	0,2
$A_M R_V 4$	24	3	0,5	3	0,5	3	0,5
$A_M R_V 5$	30	4	0,8	4	0,8	4	0,8
$A_M R_V 6$	42	5	1,9	5	1,9	5	1,9
$A_M R_V 7$	54	7	5,1	7	4,9	7	4,9
$A_M R_V 8$	102	12	2,3	12	2,2	12	2,3
$A_M R_V 9$	204	22	11,9	22	11,5	23	11,6
$A_M R_V 10$	300	30	29,9	30	30,0	30	30,2
$A_M R_V 11$	402	43	50,2	43	52,4	44	50,8
$A_M R_V 12$	504	54	98,4	54	95,7	54	95,6

Tabela 5.2: Resultados obtidos pelas heurísticas *QBF*, *QFF* e *QWF* para instâncias das classes com cilindros de altura média.

Instâncias	Qtde Cilindros	QBF		QFF		QWF	
		Qtde Recip.	Tempo	Qtde Recip.	Tempo	Qtde Recip.	Tempo
$APGR_M1$	6	1	< 0,01	1	< 0,01	1	< 0,01
$APGR_M2$	12	2	0,1	2	0,1	2	0,1
$APGR_M3$	18	2	0,3	2	0,2	2	0,2
$APGR_M4$	24	2	0,8	2	0,5	2	0,5
$APGR_M5$	30	3	0,9	3	0,7	3	0,7
$APGR_M6$	42	4	3,3	4	2,3	4	2,2
$APGR_M7$	54	6	7,5	6	4,6	6	4,6
$APGR_M8$	102	9	3,3	9	3,3	9	3,3
$APGR_M9$	204	19	13,0	19	13,1	19	12,9
$APGR_M10$	300	27	52,8	27	27,4	27	27,4
$APGR_M11$	402	34	61,2	34	63,0	34	60,4
$APGR_M12$	504	46	108,4	46	92,2	46	100,0
$APGR_{PG}1$	6	1	< 0,01	1	< 0,01	1	< 0,01
$APGR_{PG}2$	12	3	< 0,01	3	< 0,01	3	< 0,01
$APGR_{PG}3$	18	4	0,1	4	0,1	4	0,1
$APGR_{PG}4$	24	6	0,3	6	0,3	6	0,3
$APGR_{PG}5$	30	4	0,7	4	0,7	4	0,7
$APGR_{PG}6$	42	9	2,9	9	2,9	9	2,9
$APGR_{PG}7$	54	11	8,4	11	8,4	11	8,3
$APGR_{PG}8$	102	22	4,7	22	4,7	22	4,7
$APGR_{PG}9$	204	36	22,6	36	22,1	36	22,1
$APGR_{PG}10$	300	55	61,4	55	60,0	55	60,0
$APGR_{PG}11$	402	70	142,6	70	143,0	70	140,8
$APGR_{PG}12$	504	97	199,5	97	197,0	97	201,9
$APGR_V1$	6	1	< 0,01	1	< 0,01	1	< 0,01
$APGR_V2$	12	3	< 0,01	3	< 0,01	3	< 0,01
$APGR_V3$	18	3	0,1	3	0,1	3	0,1
$APGR_V4$	24	4	0,5	4	0,5	4	0,5
$APGR_V5$	30	4	0,6	4	0,6	4	0,6
$APGR_V6$	42	5	2,1	5	2,0	5	1,9
$APGR_V7$	54	7	4,2	7	4,2	7	4,1
$APGR_V8$	102	13	3,1	13	3,1	13	3,0
$APGR_V9$	204	26	12,5	26	12,6	26	12,2
$APGR_V10$	300	39	26,9	39	25,7	39	26,6
$APGR_V11$	402	50	61,9	50	60,6	50	60,8
$APGR_V12$	504	61	106,1	61	105,0	61	105,3

Tabela 5.3: Resultados obtidos pelas heurísticas QBF , QFF e QWF para instâncias das classes com cilindros de alturas pequena e grande.

Instâncias	Qtde Cilindros	QBF		QFF		QWF	
		Qtde Recip.	Tempo	Qtde Recip.	Tempo	Qtde Recip.	Tempo
$A_V R_M 1$	6	1	< 0,01	1	< 0,01	1	< 0,01
$A_V R_M 2$	12	2	< 0,01	2	< 0,01	2	< 0,01
$A_V R_M 3$	18	2	0,2	2	0,2	2	0,2
$A_V R_M 4$	24	2	0,5	2	0,5	2	0,5
$A_V R_M 5$	30	3	0,9	3	0,9	3	0,9
$A_V R_M 6$	42	4	2,2	4	2,2	4	2,1
$A_V R_M 7$	54	5	4,6	5	4,6	5	4,6
$A_V R_M 8$	102	8	2,9	8	2,9	8	2,9
$A_V R_M 9$	204	1	12,7	16	12,7	16	12,7
$A_V R_M 10$	300	21	25,0	21	24,7	22	24,8
$A_V R_M 11$	402	27	59,3	27	60,0	28	58,0
$A_V R_M 12$	504	35	88,9	35	89,0	36	89,1
$A_V R_{PG} 1$	6	1	< 0,01	1	< 0,01	1	< 0,01
$A_V R_{PG} 2$	12	3	< 0,01	3	< 0,01	3	< 0,01
$A_V R_{PG} 3$	18	4	0,1	4	0,1	4	0,1
$A_V R_{PG} 4$	24	5	0,2	5	0,2	5	0,2
$A_V R_{PG} 5$	30	5	0,8	5	0,8	5	0,8
$A_V R_{PG} 6$	42	8	2,3	8	2,3	8	2,3
$A_V R_{PG} 7$	54	9	5,9	9	6,1	10	6,0
$A_V R_{PG} 8$	102	15	6,0	15	6,0	15	6,1
$A_V R_{PG} 9$	204	31	39,8	31	40,2	32	39,9
$A_V R_{PG} 10$	300	45	47,0	45	47,0	45	47,2
$A_V R_{PG} 11$	402	56	116,1	56	112,3	57	112,0
$A_V R_{PG} 12$	504	66	237,2	66	229,4	68	234,2
$A_V R_V 1$	6	1	< 0,01	1	< 0,01	1	< 0,01
$A_V R_V 2$	12	2	< 0,01	2	< 0,01	2	< 0,01
$A_V R_V 3$	18	3	0,1	3	0,1	3	0,1
$A_V R_V 4$	24	3	0,4	3	0,4	3	0,4
$A_V R_V 5$	30	3	1,0	3	1,0	3	1,0
$A_V R_V 6$	42	6	3,2	6	3,1	6	3,2
$A_V R_V 7$	54	6	4,5	6	4,4	6	4,4
$A_V R_V 8$	102	12	2,0	12	2,0	12	2,0
$A_V R_V 9$	204	23	12,3	23	12,0	23	12,0
$A_V R_V 10$	300	30	23,9	30	23,3	31	23,3
$A_V R_V 11$	402	39	71,7	39	69,7	40	70,0
$A_V R_V 12$	504	51	116,8	51	114,1	53	115,3

Tabela 5.4: Resultados obtidos pelas heurísticas *QBF*, *QFF* e *QWF* para instâncias das classes com cilindros de altura variável (pequena, média e grande).

5.3 Heurísticas com ordenação baseada na altura dos cilindros

Como foi feito na Seção 5.2, definimos as heurísticas FBF , FFF e FWF . A FBF consiste em aplicar a heurística F_pBF , com $p = \{0,1\%; 0,2\%; 0,3\%; 0,4\%; 0,5\%; 1\%; 2\%; 3\%; 4\%; 5\%; 10\%; 20\%; 30\%; 50\%; 60\%; 70\%; 80\%; 90\%; 100\%\}$, e devolver, dentre as soluções encontradas, uma que use a menor quantidade de recipientes. Caso diferentes valores p_1 e p_2 de p gerem a mesma ordenação, desconsideramos o caso $p = p_2$. O mesmo vale para as heurísticas FFF e FWF , que usam as heurísticas F_pFF e F_pWF , respectivamente.

Aplicamos essas três heurísticas no conjunto de instâncias apresentadas na Seção 5.1. Temos os resultados na Tabela 5.5 para cilindros de altura média, na Tabela 5.6 para cilindros de altura pequena e grande e na Tabela 5.7 para cilindros com alturas variáveis (pequena, média e grande). Em cada tabela temos os nomes das instâncias e a quantidade de cilindros em cada instância, seguidos dos resultados das heurísticas FBF , FFF e FWF , nos quais temos o número de recipientes encontrados para empacotar os cilindros e o tempo computacional gasto (em segundos) para encontrar a solução. Para facilitar a visualização, temos em negrito o(s) menor(es) número(s) de recipiente(s) necessário(s), comparando entre as três heurísticas. As ilustrações das soluções obtidas pelas heurísticas FBF , FFF e FWF podem ser encontradas em <http://conteudo.icmc.usp.br/pessoas/andretta/ueno-2018/>.

Observando as Tabelas 5.5, 5.6 e 5.7, notamos que número de recipientes encontrados pelas três heurísticas foram iguais em 96 instâncias (88,9% do total). Para as 12 instâncias restantes, as heurísticas FBF e FFF encontraram o mesmo número de recipientes em 11 instâncias (11,2% do total), enquanto a heurística FWF encontrou um número maior de recipientes. Para uma instância, a FBF encontrou um recipiente a menos do que FFF e FWF , obtendo assim, um desempenho ligeiramente melhor dentre as heurísticas testadas. Não levamos em consideração o tempo computacional nesta comparação, pois as três heurísticas gastaram tempo semelhante para obter uma solução para cada instância.

Instâncias	Qtde Cilindros	<i>FBF</i>		<i>FFF</i>		<i>FWF</i>	
		Qtde Recip.	Tempo	Qtde Recip.	Tempo	Qtde Recip.	Tempo
A_MR_M1	6	1	< 0,01	1	< 0,01	1	< 0,01
A_MR_M2	12	1	0,1	1	0,1	1	0,1
A_MR_M3	18	2	0,1	2	0,1	2	0,1
A_MR_M4	24	3	0,4	3	0,4	3	0,4
A_MR_M5	30	3	0,5	3	0,5	3	0,5
A_MR_M6	42	3	1,2	3	1,2	3	1,2
A_MR_M7	54	5	1,6	5	1,6	5	1,6
A_MR_M8	102	8	7,6	8	7,6	8	7,9
A_MR_M9	204	15	27,3	15	28,1	15	28,2
A_MR_M10	300	24	60,0	24	61,3	24	61,4
A_MR_M11	402	31	103,1	31	106,1	31	108,7
A_MR_M12	504	39	156,2	39	159,0	39	170,5
A_MR_PG1	6	2	< 0,01	2	< 0,01	2	< 0,01
A_MR_PG2	12	3	< 0,01	3	< 0,01	3	< 0,01
A_MR_PG3	18	4	0,1	4	0,1	4	0,1
A_MR_PG4	24	4	0,2	4	0,3	4	0,3
A_MR_PG5	30	6	0,3	6	0,4	6	0,4
A_MR_PG6	42	6	1,0	6	1,1	6	1,1
A_MR_PG7	54	9	1,6	9	1,6	9	1,6
A_MR_PG8	102	16	10,9	16	10,9	16	10,8
A_MR_PG9	204	33	42,6	33	42,8	33	42,6
A_MR_PG10	300	46	84,4	46	89,0	46	87,1
A_MR_PG11	402	62	171,9	62	163,3	62	164,9
A_MR_PG12	504	79	244,8	79	251,2	79	253,3
A_MR_V1	6	1	< 0,01	1	< 0,01	1	< 0,01
A_MR_V2	12	2	0,1	2	0,1	2	0,1
A_MR_V3	18	2	0,1	2	0,1	2	0,1
A_MR_V4	24	3	0,3	3	0,3	3	0,3
A_MR_V5	30	4	0,3	4	0,3	4	0,3
A_MR_V6	42	5	0,7	5	0,7	5	0,7
A_MR_V7	54	7	1,3	7	1,3	7	1,3
A_MR_V8	102	12	4,1	12	4,2	12	4,2
A_MR_V9	204	22	18,9	22	19,2	22	19,2
A_MR_V10	300	31	49,4	31	51,5	30	50,7
A_MR_V11	402	43	74,0	43	76,9	44	76,3
A_MR_V12	504	54	126,8	54	126,0	54	125,4

Tabela 5.5: Resultados obtidos pelas heurísticas *FBF*, *FFF* e *FWF* para instâncias das classes com cilindros de altura média.

Instâncias	Qtde Cilindros	<i>FBF</i>		<i>FFF</i>		<i>FWF</i>	
		Qtde Recip.	Tempo	Qtde Recip.	Tempo	Qtde Recip.	Tempo
$APGR_M1$	6	1	< 0,01	1	< 0,01	1	< 0,01
$APGR_M2$	12	2	0,1	2	0,1	2	0,1
$APGR_M3$	18	2	0,2	2	0,2	2	0,2
$APGR_M4$	24	2	0,3	2	0,3	2	0,3
$APGR_M5$	30	3	0,4	3	0,4	3	0,4
$APGR_M6$	42	4	0,8	4	0,8	4	0,8
$APGR_M7$	54	5	1,6	5	1,6	5	1,7
$APGR_M8$	102	9	7,1	9	7,1	9	7,1
$APGR_M9$	204	19	24,3	19	24,5	19	24,3
$APGR_M10$	300	27	59,0	27	58,9	27	59,5
$APGR_M11$	402	34	110,8	34	103,7	34	103,3
$APGR_M12$	504	46	157,8	46	154,9	46	153,8
$APGR_{PG}1$	6	1	< 0,01	1	< 0,01	1	< 0,01
$APGR_{PG}2$	12	3	< 0,01	3	< 0,01	3	< 0,01
$APGR_{PG}3$	18	4	0,1	4	0,1	4	0,1
$APGR_{PG}4$	24	6	0,2	6	0,2	6	0,2
$APGR_{PG}5$	30	4	0,3	4	0,3	4	0,3
$APGR_{PG}6$	42	9	1,0	9	1,0	9	1,0
$APGR_{PG}7$	54	11	2,1	11	2,1	11	2,1
$APGR_{PG}8$	102	22	8,6	22	8,6	22	8,6
$APGR_{PG}9$	204	36	32,8	36	33,0	36	32,8
$APGR_{PG}10$	300	55	103,1	55	102,8	55	102,4
$APGR_{PG}11$	402	70	180,9	70	180,5	70	180,1
$APGR_{PG}12$	504	97	258,9	97	261,2	97	258,0
$APGR_V1$	6	1	< 0,01	1	< 0,01	1	< 0,01
$APGR_V2$	12	3	< 0,01	3	< 0,01	3	< 0,01
$APGR_V3$	18	3	0,1	3	0,1	3	0,1
$APGR_V4$	24	4	0,3	4	0,3	4	0,3
$APGR_V5$	30	4	0,3	4	0,3	4	0,3
$APGR_V6$	42	5	0,7	5	0,7	5	0,7
$APGR_V7$	54	7	1,0	7	1,0	7	1,0
$APGR_V8$	102	13	5,1	13	5,1	13	5,1
$APGR_V9$	204	26	17,8	26	17,7	26	18,3
$APGR_V10$	300	39	41,1	39	41,3	39	42,3
$APGR_V11$	402	50	70,0	50	70,3	50	70,2
$APGR_V12$	504	61	134,8	61	130,4	61	154,9

Tabela 5.6: Resultados obtidos pelas heurísticas *FBF*, *FFF* e *FWF* para instâncias das classes com cilindros de alturas pequena e grande.

Instâncias	Qtde Cilindros	<i>FBF</i>		<i>FFF</i>		<i>FWF</i>	
		Qtde Recip.	Tempo	Qtde Recip.	Tempo	Qtde Recip.	Tempo
$A_V R_M 1$	6	1	< 0,01	1	< 0,01	1	< 0,01
$A_V R_M 2$	12	2	0,1	2	0,1	2	0,1
$A_V R_M 3$	18	2	0,1	2	0,1	2	0,1
$A_V R_M 4$	24	2	0,4	2	0,4	2	0,4
$A_V R_M 5$	30	3	0,5	3	0,5	3	0,5
$A_V R_M 6$	42	4	1,1	4	1,1	4	1,1
$A_V R_M 7$	54	5	1,7	5	1,7	5	1,7
$A_V R_M 8$	102	8	6,7	8	6,8	8	6,7
$A_V R_M 9$	204	16	26,4	16	26,4	16	26,3
$A_V R_M 10$	300	22	57,6	22	57,7	22	57,7
$A_V R_M 11$	402	27	107,0	27	108,2	28	106,9
$A_V R_M 12$	504	35	163,7	35	159,3	36	160,6
$A_V R_{PG} 1$	6	1	< 0,01	1	< 0,01	1	< 0,01
$A_V R_{PG} 2$	12	3	< 0,01	3	< 0,01	3	< 0,01
$A_V R_{PG} 3$	18	4	0,1	4	0,1	4	0,1
$A_V R_{PG} 4$	24	5	0,1	5	0,1	5	0,1
$A_V R_{PG} 5$	30	5	0,4	5	0,4	5	0,4
$A_V R_{PG} 6$	42	8	0,8	8	0,8	8	0,8
$A_V R_{PG} 7$	54	9	1,5	9	1,5	10	1,5
$A_V R_{PG} 8$	102	15	10,7	15	10,5	15	10,5
$A_V R_{PG} 9$	204	31	63,1	31	61,5	32	62,1
$A_V R_{PG} 10$	300	45	80,4	45	78,5	45	78,6
$A_V R_{PG} 11$	402	56	159,1	56	153,9	57	154,6
$A_V R_{PG} 12$	504	66	306,3	66	299,9	68	301,1
$A_V R_V 1$	6	1	< 0,01	1	< 0,01	1	< 0,01
$A_V R_V 2$	12	2	< 0,01	2	< 0,01	2	< 0,01
$A_V R_V 3$	18	3	0,1	3	0,1	3	0,1
$A_V R_V 4$	24	3	0,2	3	0,2	3	0,2
$A_V R_V 5$	30	3	0,5	3	0,5	3	0,5
$A_V R_V 6$	42	6	0,9	6	0,9	6	0,9
$A_V R_V 7$	54	6	1,3	6	1,2	6	1,2
$A_V R_V 8$	102	11	3,9	12	3,8	12	3,8
$A_V R_V 9$	204	23	19,0	23	18,5	23	18,4
$A_V R_V 10$	300	30	40,9	30	39,2	31	39,4
$A_V R_V 11$	402	40	89,1	40	86,2	41	86,7
$A_V R_V 12$	504	51	158,9	51	154,2	52	161,4

Tabela 5.7: Resultados obtidos pelas heurísticas *FBF*, *FFF* e *FWF* para instâncias das classes com cilindros de altura variável (pequena, média e grande).

5.4 Comparação entre as heurísticas

Temos a heurística que obteve melhores resultados em [5], a BL_hBF , que ordena os cilindros de forma decrescente pela altura, os posiciona em níveis utilizando o método *Bottom-Left* e para empacotar os níveis em recipientes, utiliza a estratégia *Best-Fit*. Na Seção 5.3 escolhemos o FBF e na Seção 5.2, QBF e QFF , que encontraram os mesmos números de recipientes. Para a comparação que faremos nesta seção, foi escolhida a QBF , pois assim como BL_hBF e FBF , ela utiliza a estratégia *Best-Fit*. Assim podemos comparar as diferentes ordenações propostas pelas heurísticas.

Temos os resultados na Tabela 5.8 para cilindros de altura média, na Tabela 5.9 para cilindros de altura pequena e grande e na Tabela 5.10 para cilindros com alturas variáveis (pequena, média e grande). Em cada tabela temos os nomes das instâncias e a quantidade de cilindros em cada instância, seguidos dos resultados das heurísticas BL_hBF , QBF e FBF , nos quais temos o número de recipientes encontrados para empacotar os cilindros e o tempo computacional gasto (em segundos) para encontrar a solução. Para facilitar a visualização, temos em negrito o(s) menor(es) número(s) de recipiente(s) necessário(s), comparando entre as três heurísticas.

Observando o tempo computacional gasto pelas heurísticas QBF e FBF , vemos que eles são parecidos e muito mais altos quando comparados com o tempo gasto pela heurística BL_hBF . Isso ocorre porque QBF e FBF testam várias ordenações e escolhem a que produz uma solução com menor número de recipientes. Justamente por esse motivo, decidimos não realizar experimentos com as instâncias com mais de 504 cilindros.

Observando o número de recipientes que cada heurística encontrou, podemos notar que QBF e FBF possuem resultados semelhantes. Ambos conseguiram diminuir até 3 recipientes necessários para empacotar os cilindros em comparação com os resultados obtidos em [5] pela heurística BL_hBF . A heurística QBF conseguiu obter soluções com menor número de recipientes que BL_hBF em 35 instâncias (32,4% do total). Era esperado que a solução dessa heurística iria obter a mesma ou menor quantidade de recipientes que BL_hBF , já que inclui BL_hBF . A heurística FBF conseguiu em 36 instâncias (33,4% do total). A diferença entre QBF e FBF foi pouca, mas FBF apresentou resultados ligeiramente melhores.

Como exemplo, temos a ilustração dos resultados para a instância A_MR_M2 : na Figura 5.1 (resultado de BL_hBF [5]), na Figura 5.2 (resultado de QBF) e na Figura 5.3 (resultado de FBF). Um outro exemplo para a instância $A_PG_R_M4$: na Figura 5.4 (resultado de BL_hBF [5]), na Figura 5.5 (resultado de QBF) e na Figura 5.6 (resultado de FBF).

Instâncias	Qtde Cilindros	$BL_hBF[5]$		QBF		FBF	
		Qtde Recip.	Tempo	Qtde Recip.	Tempo	Qtde Recip.	Tempo
A_MR_M1	6	1	< 0,01	1	< 0,01	1	< 0,01
A_MR_M2	12	2	< 0,01	1	< 0,01	1	0,1
A_MR_M3	18	2	< 0,01	2	0,2	2	0,1
A_MR_M4	24	3	< 0,01	3	0,4	3	0,4
A_MR_M5	30	3	< 0,01	3	0,8	3	0,5
A_MR_M6	42	4	< 0,01	3	2,5	3	1,2
A_MR_M7	54	5	< 0,01	5	4,5	5	1,6
A_MR_M8	102	8	< 0,01	8	3,0	8	7,6
A_MR_M9	204	16	< 0,01	15	13,2	15	27,3
A_MR_M10	300	24	< 0,01	24	24,6	24	60,0
A_MR_M11	402	31	< 0,01	31	55,8	31	103,1
A_MR_M12	504	39	< 0,01	39	86,0	39	156,2
A_MR_PG1	6	2	< 0,01	2	< 0,01	2	< 0,01
A_MR_PG2	12	3	< 0,01	3	< 0,01	3	< 0,01
A_MR_PG3	18	4	< 0,01	4	0,1	4	0,1
A_MR_PG4	24	4	< 0,01	4	0,4	4	0,2
A_MR_PG5	30	6	< 0,01	6	0,7	6	0,3
A_MR_PG6	42	7	< 0,01	7	3,2	6	1,0
A_MR_PG7	54	10	< 0,01	9	6,2	9	1,6
A_MR_PG8	102	17	< 0,01	16	5,0	16	11,0
A_MR_PG9	204	34	< 0,01	33	27,5	33	42,5
A_MR_PG10	300	48	< 0,01	46	51,0	46	84,4
A_MR_PG11	402	65	< 0,01	63	117,5	62	172,0
A_MR_PG12	504	80	< 0,01	78	180,0	79	244,8
A_MR_V1	6	1	< 0,01	1	< 0,01	1	< 0,01
A_MR_V2	12	2	< 0,01	2	< 0,01	2	< 0,01
A_MR_V3	18	2	< 0,01	2	0,1	2	0,1
A_MR_V4	24	3	< 0,01	3	0,5	3	0,3
A_MR_V5	30	4	< 0,01	4	0,8	4	0,3
A_MR_V6	42	6	< 0,01	5	2,8	5	0,6
A_MR_V7	54	7	< 0,01	7	4,1	7	1,2
A_MR_V8	102	12	< 0,01	12	2,3	12	4,1
A_MR_V9	204	23	< 0,01	22	11,6	22	19,0
A_MR_V10	300	32	< 0,01	30	29,0	31	49,4
A_MR_V11	402	45	< 0,01	43	52,3	43	74,0
A_MR_V12	504	56	< 0,01	54	96,3	54	126,8

Tabela 5.8: Resultados obtidos pelas heurísticas BL_hBF , QBF e FBF para instâncias das classes com cilindros de altura média.

Instâncias	Qtde Cilindros	$BL_hBF[5]$		QBF		FBF	
		Qtde Recip.	Tempo	Qtde Recip.	Tempo	Qtde Recip.	Tempo
$APGR_M1$	6	1	< 0,01	1	< 0,01	1	< 0,01
$APGR_M2$	12	2	< 0,01	2	< 0,01	2	< 0,01
$APGR_M3$	18	2	< 0,01	2	0,2	2	0,2
$APGR_M4$	24	3	< 0,01	2	0,5	2	0,3
$APGR_M5$	30	4	< 0,01	3	0,7	3	0,3
$APGR_M6$	42	4	< 0,01	4	2,3	4	0,8
$APGR_M7$	54	6	< 0,01	6	4,5	5	1,6
$APGR_M8$	102	9	< 0,01	9	3,4	9	7,1
$APGR_M9$	204	20	< 0,01	19	12,6	19	24,3
$APGR_M10$	300	27	< 0,01	27	27,5	27	59,0
$APGR_M11$	402	35	< 0,01	34	61,0	34	110,8
$APGR_M12$	504	46	< 0,01	46	91,6	46	157,8
$APGR_{PG}1$	6	1	< 0,01	1	< 0,01	1	< 0,01
$APGR_{PG}2$	12	3	< 0,01	3	< 0,01	3	< 0,01
$APGR_{PG}3$	18	4	< 0,01	4	0,1	4	0,1
$APGR_{PG}4$	24	6	< 0,01	6	0,3	6	0,2
$APGR_{PG}5$	30	4	< 0,01	4	0,7	4	0,3
$APGR_{PG}6$	42	10	< 0,01	9	3,0	9	1,0
$APGR_{PG}7$	54	11	< 0,01	11	8,3	11	2,1
$APGR_{PG}8$	102	22	< 0,01	22	4,6	22	8,6
$APGR_{PG}9$	204	37	< 0,01	36	21,7	36	33,0
$APGR_{PG}10$	300	56	< 0,01	55	59,4	55	103,1
$APGR_{PG}11$	402	71	< 0,01	70	138,7	70	181,0
$APGR_{PG}12$	504	98	< 0,01	97	194,2	97	259,0
$APGR_V1$	6	1	< 0,01	1	< 0,01	1	< 0,01
$APGR_V2$	12	3	< 0,01	3	< 0,01	3	< 0,01
$APGR_V3$	18	3	< 0,01	3	0,1	3	0,1
$APGR_V4$	24	4	< 0,01	4	0,5	4	0,3
$APGR_V5$	30	4	< 0,01	4	0,6	4	0,3
$APGR_V6$	42	6	< 0,01	5	2,1	5	0,7
$APGR_V7$	54	8	< 0,01	7	4,1	7	1,0
$APGR_V8$	102	14	< 0,01	13	3,0	13	5,1
$APGR_V9$	204	29	< 0,01	26	12,1	26	17,8
$APGR_V10$	300	41	< 0,01	39	25,4	39	41,1
$APGR_V11$	402	52	< 0,01	50	60,0	50	70,0
$APGR_V12$	504	62	< 0,01	61	103,4	61	135,8

Tabela 5.9: Resultados obtidos pelas heurísticas BL_hBF , QBF e FBF para instâncias das classes com cilindros de alturas pequena e grande.

Instâncias	Qtde Cilindros	$BL_hBF[5]$		QBF		FBF	
		Qtde Recip.	Tempo	Qtde Recip.	Tempo	Qtde Recip.	Tempo
$A_V R_M 1$	6	1	< 0,01	1	< 0,01	1	< 0,01
$A_V R_M 2$	12	2	< 0,01	2	< 0,01	2	0,5
$A_V R_M 3$	18	2	< 0,01	2	0,2	2	0,1
$A_V R_M 4$	24	2	< 0,01	2	0,5	2	0,4
$A_V R_M 5$	30	3	< 0,01	3	0,9	3	0,5
$A_V R_M 6$	42	4	< 0,01	4	2,2	4	1,1
$A_V R_M 7$	54	5	< 0,01	5	5,0	5	1,7
$A_V R_M 8$	102	8	< 0,01	8	3,0	8	6,7
$A_V R_M 9$	204	16	< 0,01	16	12,6	16	26,4
$A_V R_M 10$	300	21	< 0,01	21	24,6	22	57,6
$A_V R_M 11$	402	28	< 0,01	27	57,0	27	107,2
$A_V R_M 12$	504	36	< 0,01	35	88,0	35	163,7
$A_V R_{PG} 1$	6	2	< 0,01	1	< 0,01	1	< 0,01
$A_V R_{PG} 2$	12	3	< 0,01	3	< 0,01	3	< 0,01
$A_V R_{PG} 3$	18	4	< 0,01	4	0,1	4	0,1
$A_V R_{PG} 4$	24	5	< 0,01	5	0,2	5	0,1
$A_V R_{PG} 5$	30	5	< 0,01	5	0,8	5	0,4
$A_V R_{PG} 6$	42	8	< 0,01	8	2,3	8	0,8
$A_V R_{PG} 7$	54	9	< 0,01	9	5,9	9	1,5
$A_V R_{PG} 8$	102	15	< 0,01	15	5,9	15	10,7
$A_V R_{PG} 9$	204	32	< 0,01	31	39,5	31	60,1
$A_V R_{PG} 10$	300	45	< 0,01	45	46,0	45	80,4
$A_V R_{PG} 11$	402	56	< 0,01	56	111,5	56	159,1
$A_V R_{PG} 12$	504	67	< 0,01	66	232,2	66	306,3
$A_V R_V 1$	6	1	< 0,01	1	< 0,01	1	< 0,01
$A_V R_V 2$	12	2	< 0,01	2	< 0,01	2	< 0,01
$A_V R_V 3$	18	3	< 0,01	3	0,1	3	0,1
$A_V R_V 4$	24	3	< 0,01	3	0,4	3	0,2
$A_V R_V 5$	30	3	< 0,01	3	1,0	3	0,5
$A_V R_V 6$	42	6	< 0,01	6	3,2	6	0,9
$A_V R_V 7$	54	6	< 0,01	6	4,5	6	1,2
$A_V R_V 8$	102	12	< 0,01	12	2,0	11	3,9
$A_V R_V 9$	204	23	< 0,01	23	12,1	23	19,0
$A_V R_V 10$	300	31	< 0,01	30	23,6	30	40,9
$A_V R_V 11$	402	40	< 0,01	39	71,0	40	89,1
$A_V R_V 12$	504	51	< 0,01	51	115,5	51	158,8

Tabela 5.10: Resultados obtidos pelas heurísticas BL_hBF , QBF e FBF para instâncias das classes com cilindros de altura variável (pequena, média e grande).

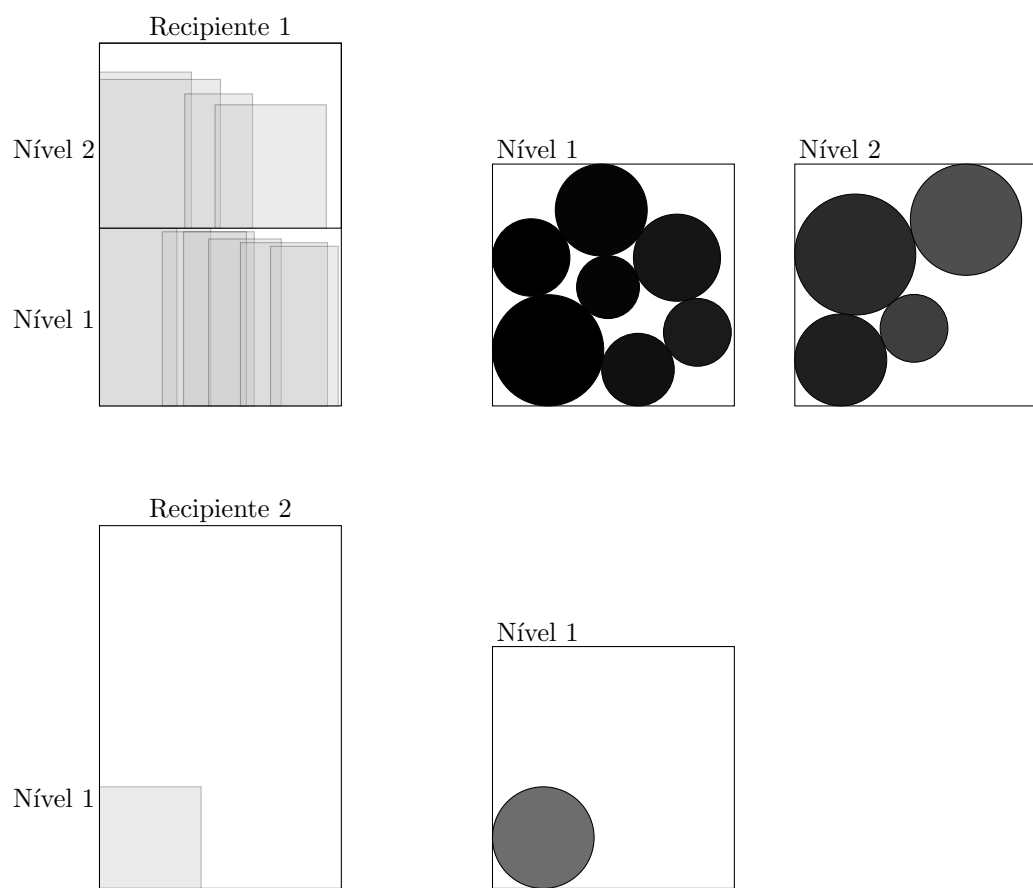


Figura 5.1: Ilustração do resultado obtido pelo método $BL_hBF[5]$ com a instância A_MR_M2 .

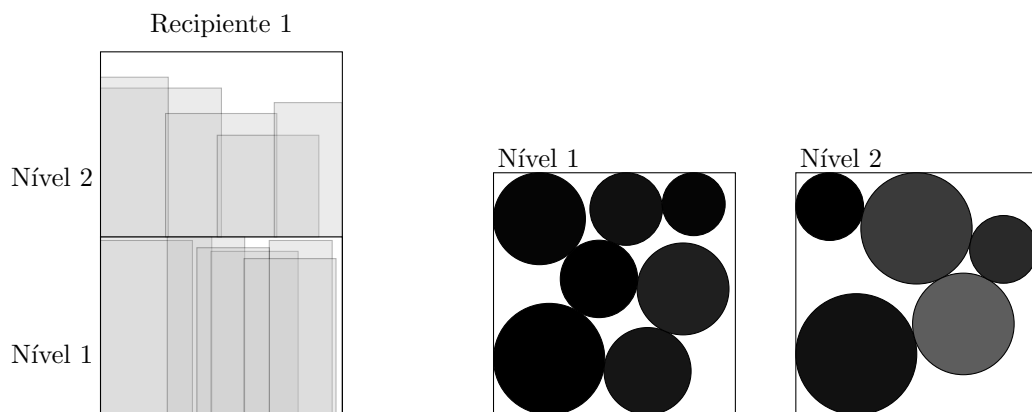


Figura 5.2: Ilustração do resultado obtido pelo método QBF com a instância A_MR_M2 .

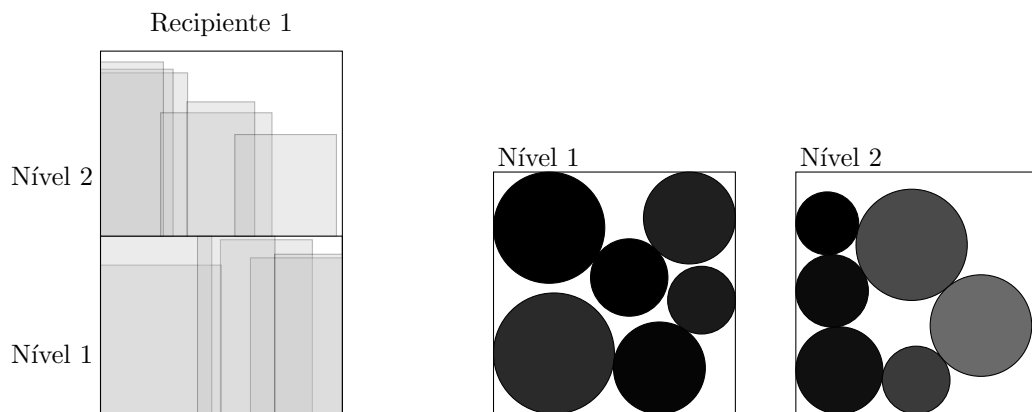


Figura 5.3: Ilustração do resultado obtido pelo método FBF com a instância A_MR_M2 .

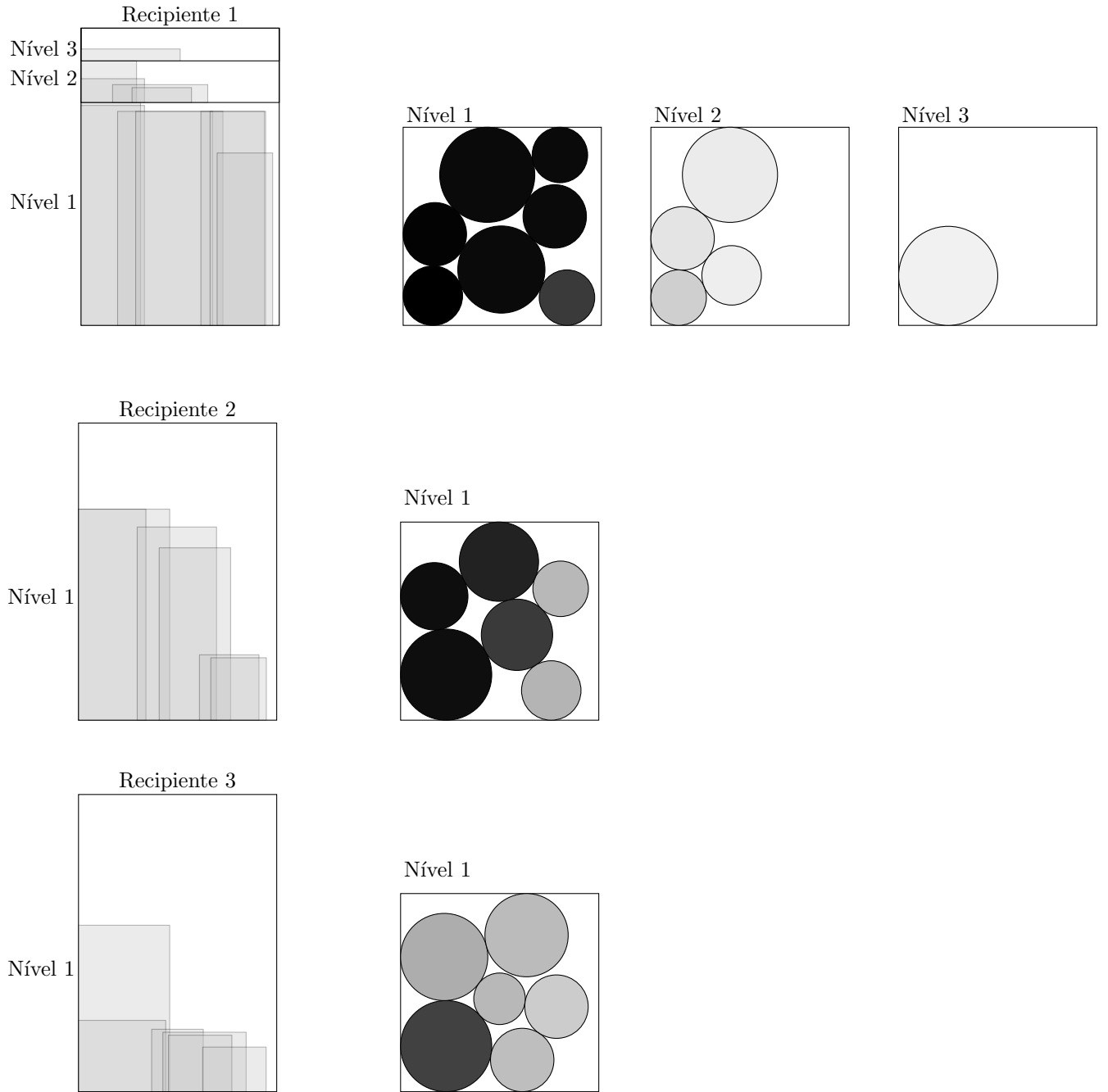


Figura 5.4: Ilustração do resultado obtido pelo método $BL_hBF[5]$ com a instância A_{PGR_M4} .

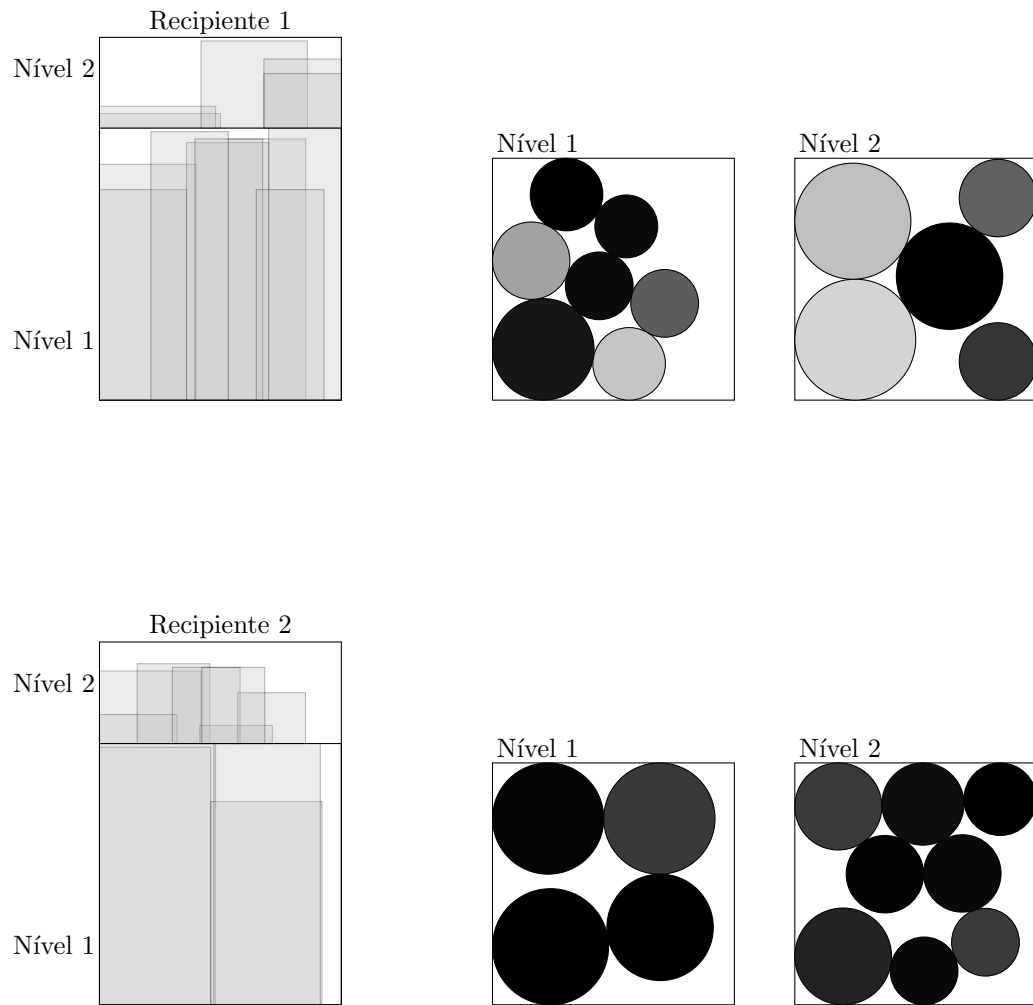


Figura 5.5: Ilustração do resultado obtido pelo método QBF com a instância $A_{PG}R_M4$.

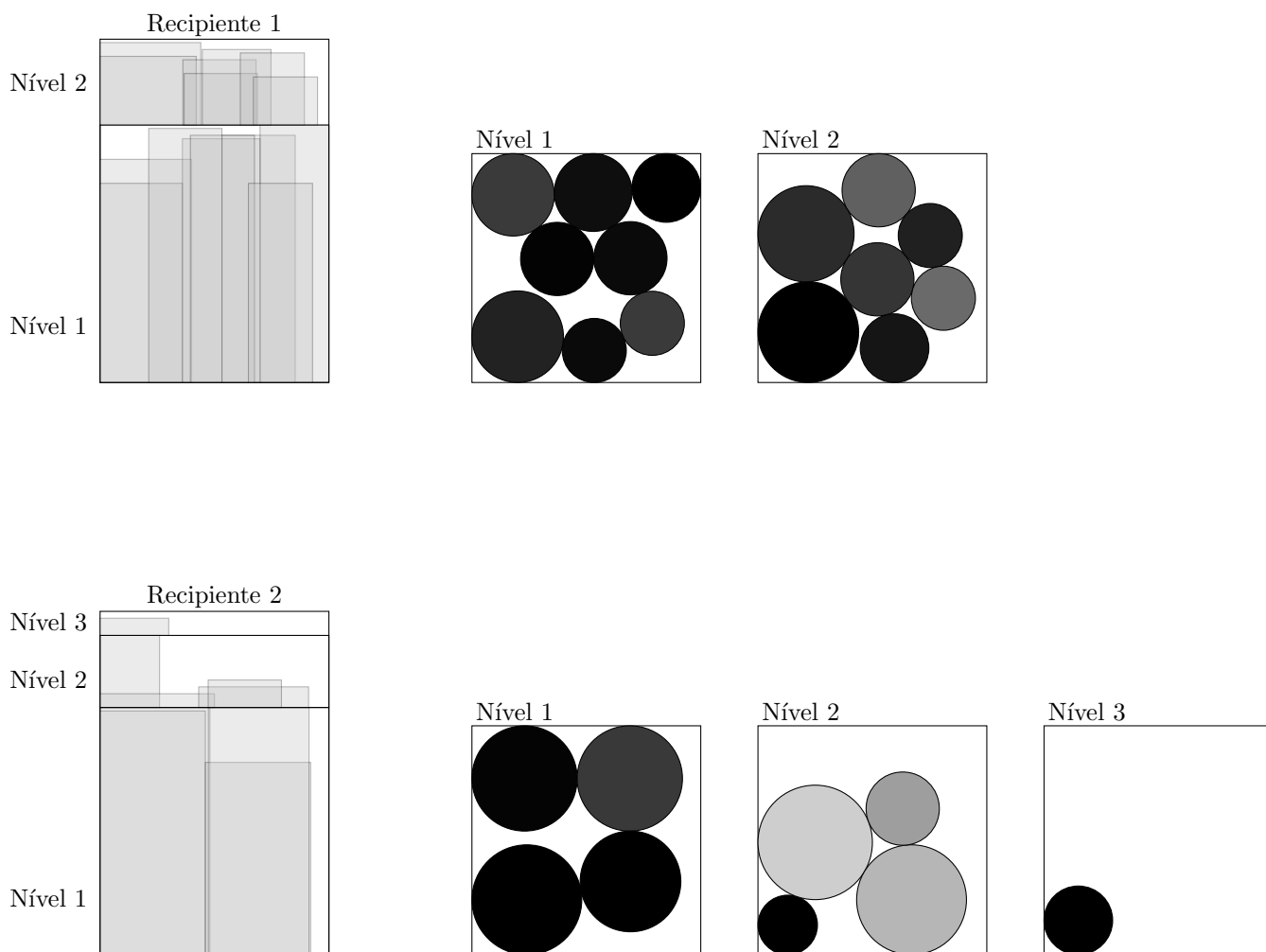


Figura 5.6: Ilustração do resultado obtido pelo método FBF com a instância A_{PGR_M4} .

Capítulo 6

Considerações finais

Estudamos neste trabalho um problema comumente encontrado nas indústrias de cerâmica que é o problema de empacotamento de peças (que aproximamos por cilindros) em níveis, no qual deseja-se minimizar a quantidade de fornadas necessárias para queimar todas as peças de cerâmica, a fim de diminuir o tempo de fabricação e a energia gasta nesses ciclos de queima.

Baseadas em [5], desenvolvemos duas variações das heurísticas, nas quais ordenamos os cilindros em ordem decrescente de altura, depois particionamos a lista de cilindros em sublistas, de acordo com a quantidade ou a variação das alturas dos cilindros. Por fim, essas sublistas são ordenadas em ordem decrescente de raio. Seguindo a ordenação obtida, empacotamos os cilindros nos níveis, utilizando o método *Bottom-Left*. Estes níveis são empacotados em recipientes, usando 3 estratégias: *Best-Fit*, *First-Fit* e *Worst-Fit*. Assim, obtemos 6 variações de heurísticas: Q_iBF , Q_iFF , Q_iWF , F_pBF , F_pFF e F_pWF .

Definimos, então, 6 heurísticas: QBF , QFF , QWF , FBF , FFF e FWF , cada uma delas aplica Q_iBF , Q_iFF , Q_iWF , F_pBF , F_pFF , F_pWF , respectivamente, e cada uma devolve, dentre as soluções encontradas, uma solução que use a menor quantidade de recipientes. Utilizamos mesmas instâncias de [5] para comparar o desempenho destas 6 heurísticas propostas com a melhor heurística de [5] (BL_hBF). A diferença desta heurística e das 6 que propusemos está basicamente na ordenação dos cilindros. Como as heurísticas desenvolvidas realizam várias ordenações e escolhem a que produz uma solução com menor número de recipientes, decidimos não realizar experimentos com as instâncias com mais de 504 cilindros, devido ao alto tempo computacional gasto.

O número de recipientes encontrados pelas heurísticas foi igual para a maioria das instâncias. Comparando os resultados entre QBF , QFF e QWF , obtemos que QBF e QFF encontraram o mesmo número de recipientes e menores ou iguais que QWF . Comparando entre FBF , FFF e FWF , obtemos que FBF encontrou números menores ou iguais que FFF e FWF . Por fim comparamos BL_hBF , FBF e QBF (foi escolhida entre QBF e QFF , pois BL_hBF e FBF utilizam a estratégia *Best-Fit*), para verificar o desempenho

entre as heurísticas considerando apenas as diferentes ordenações dos cilindros.

Considerando a quantidade de recipientes obtidos, a heurística FBF obteve menor número de recipientes em um maior número de instâncias comparado com as heurísticas BL_hBF e QBF , apesar de FBF e QBF obterem resultados semelhantes. Mas, considerando o tempo computacional gasto, a BL_hBF obteve resultados em menos tempo para maioria das instâncias.

Como trabalhos futuros, sugerimos encontrar algum método mais eficiente para escolher modos de ordenar o conjunto de cilindros, de forma que poucas ordenações fossem usadas, mantendo a qualidade das soluções aqui obtidas. Isso poderia ser feito utilizando meta-heurísticas ou técnicas de aprendizado de máquina.

Para o desenvolvimento do trabalho, foram importantes os conhecimentos prévios de Otimização, para entender o problema; Programação de Computadores, para a implementação das heurísticas; Ciência de Dados, para entender os resultados e escolher os casos de teste; e de outras disciplinas, indiretamente. Com o Trabalho de Conclusão de Curso, tive a oportunidade de ter mais contato com a leitura de textos científicos e escrever uma Monografia, que foi a parte em que tive mais dificuldade.

Antes de ingressar no curso de Bacharelado de Matemática Aplicada e Computação Científica, pensava que a Matemática era apenas “contas” e “aplicar fórmulas”. Como tinha dificuldade, resolvi ingressar no curso e descobri que ela ia muito além do que pensava. No início do curso, foi um impacto grande, pois além de não entender muito bem o conteúdo da maioria das disciplinas, o ambiente era totalmente diferente.

E o que mais dificultou meu aprendizado era a timidez para tirar dúvidas e ir atrás para entender o conteúdo das disciplinas, além disso algumas pessoas zombavam outras pessoas faziam perguntas, o que só piorava a situação. Mas maioria dos professores foram bem atenciosos e estimularam bastante a participação nas aulas, assim, com o tempo, consegui ficar um pouco mais confortável em tirar dúvidas. Outra dificuldade foi encontrar uma forma de estudar para cada disciplina.

O curso me ajudou muito a desenvolver o raciocínio lógico, conhecer e entender um pouco mais da Matemática. Foi no curso também que obtive o primeiro contato com a Computação Científica, com a qual me identifiquei mais. Como tive muitas dificuldades nas disciplinas de Matemática, pensava em desistir e mudar de curso, mais agora, nesses últimos semestres, comecei a entender um pouco mais a Matemática e gostar mais.

Bibliografia

- [1] M. Sipser. *Introduction to the Theory of Computation*. Cengage Learning, Boston, USA, 2013.
- [2] RJ Fowler; MS Paterson; SL Tanimoto. Optimal packing and covering in the plane are np-complete. *Inf. Process. Lett*, 12(3):133–137, 1981.
- [3] JA George; JM George; BW Lamar. Packing different-sized circles into a rectangular container. *European Journal of Operational Research*, 84(3):693–712, 1995.
- [4] YG Stoyan; VV Semkin; AM Chugay. Modeling close packing of 3d objects. *Cybernetics and Systems Analysis*, 52(2):296–304, 2016.
- [5] RF Gonçalves. Métodos de resolução para o problema de empacotamento de cilindros em níveis. Dissertação, Mestrado em Ciências - Programa de Pós-Graduação em Ciências de Computação e Matemática Computacional – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos - SP, 2018.
- [6] AS Tanenbaum. *Sistemas operacionais modernos*. Pearson Prentice Hall, São Paulo, 2010.
- [7] Associação Brasileira de Cerâmica ABCERAM. Informações técnicas - definição e classificação, 2016 (Último acesso 7 de outubro de 2018). <https://abceram.org.br/definicao-e-classificacao/>.
- [8] Associação Brasileira de Cerâmica ABCERAM. Informações técnicas - processos de fabricação, 2016 (Último acesso 7 de outubro de 2018). <https://abceram.org.br/processo-de-fabricacao/>.
- [9] G Jackson. Packed, stacked & loaded, 2016 (Último acesso 15 de setembro de 2018). <http://firewhenreadypottery.com/2016/05/44288/>.
- [10] BC Maeda. Primeira fornada do ano de biscoitos em cerâmica, 2011 (Último acesso 15 de setembro de 2018). <http://ceramicadealtatemperatura.blogspot.com/2011/02/primeira-fornada-do-ano-de-biscoitos-em.html>.
- [11] M Arenales; V Armentano; R Morabito; H Yanasse. *Pesquisa operacional*. Elsevier: ABEPRO, Rio de Janeiro, 2011.

- [12] JA Bennell; JF Oliveira. The geometry of nesting problems: A tutorial. *European Journal of Operational Research*, 184(2):397–415, 2008.
- [13] RCA Jr. *An approach to the two dimensional irregular cutting stock problem*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1966.

Apêndice A

Resultados obtidos pelos métodos heurísticos com ordenação baseada na quantidade de cilindros

Apresentamos aqui os resultados obtidos pelas heurísticas Q_iBF , Q_iFF e Q_iWF na resolução das instâncias apresentadas na Seção 5.1.

Seja n o número de cilindros em cada instância. Para instâncias com numeração de 1 a 7, escolhemos $i = 1, \dots, n$. Para instâncias com numeração de 8 a 12, escolhemos $i = 1, 2, \dots, n/8, n/4, n/2, n, n$. Caso diferentes valores i_1 e i_2 de i gerem a mesma ordenação, desconsideramos o caso $i = i_2$.

Para cada instância, construímos três gráficos: um que agrupa os resultados da heurística Q_iBF , outro para Q_iFF e outro para Q_iWF . Em cada gráfico, a abscissa indica o valor de i e a ordenada indica a quantidade de recipientes que a solução encontrada pela heurística Q_iBF (Q_iFF e Q_iWF) precisou para empacotar os cilindros.

Apêndice B

Resultados obtidos pelos métodos heurísticos com ordenação baseada na altura dos cilindros

Apresentamos aqui os resultados obtidos pelas heurísticas F_pBF , F_pFF e F_pWF na resolução das instâncias apresentadas na Seção 5.1.

Escolhemos $p = \{0.1\%, 0.2\%, 0.3\%, 0.4\%, 0.5\%, 1\%, 2\%, 3\%, 4\%, 5\%, 10\%, 20\%, 30\%, 50\%, 60\%, 70\%, 80\%, 90\%, 100\%\}$. Caso diferentes valores p_1 e p_2 de p gerem a mesma ordenação, desconsideramos o caso $p = p_2$.

Para cada instância, construímos três gráficos: um que agrupa os resultados da heurística F_pBF , outro para F_pFF e outro para F_pWF . Em cada gráfico, a abscissa indica o valor de p e a ordenada indica a quantidade de recipientes que a solução encontrada pela heurística F_pBF (F_pFF e F_pWF) precisou para empacotar os cilindros.