

# Résumé des Cours - Processus Stochastiques

Emilie Chhor

May 30, 2021

## **Introduction**

Ce document est un résumé des idées importantes présentées lors de chaque cours de MAT2717

# 1 Semaine 1

## 1.1 Théorie 1

### Big Idea

Dans le premier cours de probabilité, on s'est penché sur la notion de variable aléatoire. Dans ce cours-ci, on voit qu'on doit ajouter un autre paramètre à ces variables aléatoires: le temps. On ne parle donc plus de variables aléatoires, mais de processus stochastiques, qui sont des variables aléatoires prenant en considération le temps. Ainsi, on parle donc de processus stochastique à temps discret et à temps continu, dépendamment si on considère le temps discret ou continu.

### Outline

1. Processus Stochastiques
2. Marche Aléatoire

## 1.2 Processus Stochastiques

Un processus stochastique est une v.a aléatoire qui est dépendante du temps. Elle peut être discrète ou continue dépendamment à quelle fréquence on observe la valeur de la v.a)

On dit que le temps est déterministe. Why?

On peut écrire un p.s.  $X(\omega, t)$ , avec  $\omega$ : les scénarios possibles et  $t$ , le temps. Si on fixe le temps, on parle de variable aléatoire. Si on fixe l'évènement et on laisse le temps libre, on parle de trajectoire.

## 1.3 Marche Aléatoire

La marche aléatoire représente la valeur d'un p.s. discret à un temps donné. On peut la modéliser de deux façons:

1. Conditionnement: valeur à la dernière position  $\pm 1$
2. Somme de variables indicatrices:  $X_n = Y_1 + \dots + Y_n$

Il est à noter qu'on préfère représenter une marche aléatoire par une somme de variable indicatrice puisque ça rend le calcul plus facile.

Espérance:  $\mathbb{E}(X_n) = n(2p - 1)$  Variance:  $Var(X_n) = 4np(1 - p)$

## 1.4 D'où vient la formule de l'esperance et de la variance d'une marche aleatoire

Il s'agit de l'esperance et de la variance pour une somme de variable indicatrice.

$E(x) = n(1 * p + (-1)(1 - p))$  : nombre de pas x esperance succes/echec au i-ème pas  
 $V(X) = \text{somme des variances} = n[E(Y^2) - E(Y)^2]$

## 1.5 Théorie 2

### Big Idea

Ce cours introduisait les chaines de Markov. Comme on l'a vu au dernier cours, les processus stochastiques sont des v.a. qui sont en fonction du temps. Certaines PS ont la propriété de Markov, c-à-d qu'on n'a que besoin de la dernière valeur pour déterminer la prochaine position et non tout l'historique. On introduit la notion de matrice de transition pour modéliser la probabilité de transitionner d'un état à l'autre, et la notion d'état absorbant, qui est un état duquel on ne peut se sortir une fois atteinte.

### Outline

1. Rappel: Processus Stochastiques
2. Marche Aléatoire
3. Processus de Branchement
4. Chaines de Markov: Proba de transition et État absorbant

#### 1.5.1 Marche Aléatoire

Il faut se rappeler que la marche aléatoire sert à modéliser un p.s discret. On a vu qu'il y avait deux façons de l'interpréter:

1. Conditionnement: previous +/- 1 dépendemment du succès/échec
2. Somme de variables indicatrices (bernouilli)

Essentiellement, la probabilité est déterminée par une Bernouilli, puisqu'on considère que chaque coin flip est iid. On peut aussi visualiser la marche aléatoire comme un arbre de décision.

Exemple:  $t=2$ , coin flip: +1 si Head, -1 si Tail

1.  $x_2 = 2$  avec proba  $p^2$  : HH
2.  $x_2 = 0$  avec proba  $2p(1 - p)$  : HT, TH
3.  $x_2 = -2$  avec proba  $(1 - p)^2$  : TT

Notons qu'après 2 coins flip, on ne peut pas avoir 1 ou -1, car après le premier coin flip, on est à 1 ou -1, et on ne peut que se déplacer de 1 vers le haut ou vers le bas

On a aussi vu qu'on peut tracer la trajectoire de la marche aléatoire, qui représente la valeur de  $x_n$  selon le temps.

### 1.5.2 Processus de Branchement

Le processus de Branchement est une façon de modéliser la générations d'évènement. Par exemple, en reinforcement learning, ça représente la transition d'état. Visuellement, on a un arbre et chaque branche mène à un autre état, associé à une certaine probabilité.

### 1.5.3 Chaîne de Markov

Comme mentionné, une chaîne de Markov est une p.s qui satisfait à la propriété de Markov, c-à-d qu'on n'a que besoin de l'état précédant pour déterminer le futur et non tout l'historique. Dans la vraie vie, une chaîne de Markov ne représente pas nécessairement la situation, mais on fait cette hypothèse afin de simplifier les calculs et éviter de traiter trop d'information. On écrit:

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j) = (X_{n+1} = j | X_n + \dots + X_0) = (X_{n+1} = j | X_n)$$

Pour représenter la probabilité de transition d'un état à un autre, on utilise une matrice de transition.

Finalement, il est important de comprendre la notion d'état absorbant. Une fois qu'on entre dans cet état, on ne peut plus en sortir. L'exemple donné en classe concernait le casino: une fois qu'on a plus d'argent à gamble, on ne peut plus gagner d'argent et on reste à zéro.

Notons que si une chaîne de Markov à un état absorbant, il est fort probable qu'il y ait plusieurs états absorbant et qu'on puisse observer un pattern.

## 1.6 TP

Cette semaine, le TP se penchait sur 2 sujets:

1. Rappel sur les concepts en probabilité
2. Intro aux Processus Stochastiques

### 1.6.1 Rappel sur les concepts en probabilité

1. Principe Inclusion-Exclusion
2. Probabilités Totales pour généraliser le nombre de tirage avec et sans remise:  
 $P(A_1|B)P(B) + P(A_2|B)P(B)$

3. Trouver la densité marginale d'une v.a: si continues, on doit essayer de retrouver une fonction de densité pour éviter d'avoir à résoudre l'intégrale

### **1.6.2 Intro aux Processus Stochastiques**

1. Déterminer si une p.s. est Markov ou non
2. Trouver/Lire une Matrice de Transition
3. Déterminer la probabilité de transition d'un état à un autre
4. Tracer le Graphe

### **1.7 Intro aux Processus Stochastiques**

## 2 Semaine 2

### 2.1 Théorie 1: Probabilité de Transition à plusieurs étapes

#### Big Idea

Ce cours-ci nous présentait certaines méthodologies pour déterminer la probabilité de transition à plusieurs étapes pour des P.S discrets à temps homogène satisfaisant la propriété de Markov

#### Outline

1. Modèles: Marche aléatoire, Processus de Branchement, Modèle de diffusion de Gaz
2. Probabilité de transition avec probabilité conditionnelle
3. Probabilité de transition avec Relation Chapman-Kolmogorov

#### 2.1.1 Modèles: Marche aléatoire, Processus de Branchement, Modèle de diffusion de Gaz

Dans un premier temps, on a réviser les notions de marche aléatoire, processus de branchement et modèle de diffusion de gaz. Essentiellement, on voulait s'apercevoir que

1. La valeur de  $X_n$  ne peut que se déplacer de 1 (dans la plupart du temps)
2. Conditionnement: on peut trouver la probabilité de transition d'un état à l'autre par conditionnement p/r à l'étape précédente

#### 2.1.2 Probabilité de transition avec probabilité conditionnelle

Dans les cours précédants, on nous donnait la matrice de transition pour déterminer la probabilité de se déplacer d'un état à l'autre. Ici, on voit 2 résultats importants:

1. si P.S Markov et homogène (même proba peu import le temps), alors

$$P[X_2 = 3, X_1 = 2 | X_0 = 1] = P[X_{n+2} = 3, X_{n+1} = 2 | X_n = 1]$$

, ce qui veut dire que la proba de transition d'état ne dépend pas d'un temps quelconque, mais que de la "distance" (nombres de pas) entre 2 états, si P.S Markov est homogène

2. On peut utiliser la probabilité conditionnelle pour déterminer la proba de transition entre 2 états

#### Preuve pour 1

Puisqu'on a une chaîne de Markov, les 2 états sont indépendants et on peut utiliser la règle de multiplication:

$$\begin{aligned}
& P[X_2 = 3, X_1 = 2 | X_0 = 1] \\
&= \frac{P(X_2 = 3, X_1 = 2, X_0 = 1)}{P(X_0 = 1)} \\
&= \left( \frac{P(X_2 = 3, X_1 = 2, X_0 = 1)}{P(X_0 = 1)} \right) \left( \frac{P(X_1 = 3, X_1 = 2)}{P(X_0 = 1)} \right) \\
&\quad \dots
\end{aligned}$$

### Probabilité Conditionnelle pour trouver la probabilité de transition

Plus généralement, pour trouver la probabilité de transition à plusieurs étapes, on doit conditionner par les étapes intermédiaires:

1. 2 étapes:  $P(X_2 = 1 | X_0 = 1) = \sum_{i=1}^n P(X_2 = 2, X_1 = k | X_0 = 1)$
2. 3 étapes:  $P(X_3 = 1, X_2 = 1 | X_0 = 1) = P(X_3 = 1, X_2 = 1) P(X_2 = 1 | X_1 = 1) P(X_1 = 1 | X_0 = 2)$
3. m étapes:  $P(X_{n+m} = j | X_n = i) = P(n = j | X_0 = i)$

#### 2.1.3 Probabilité de transition avec Relation Chapman-Kolmogorov

La relation de Chapman-Kolmogorov est pratique, car elle nous permet de généraliser le calcul pour la probabilité de transition en m étapes. Au lieu de multiplier individuellement les intermédiaires à chaque étapes, on peut utiliser la multiplication matricielle pour obtenir la matrice de transition après m étapes. On note  $P^{(m)} = P^m$ , P: matrice de transition.

Par exemple, si on veut la proba de transition à 3 étapes, on n'a qu'à faire

$$P \times P \times P$$

## 2.2 Théorie 2

### Big Idea

#### Outline

1. Preuve de la Relation Chapman-Kolmogorov
2. Classes: Communication entre états

#### 2.2.1 Preuve de la Relation Chapman-Kolmogorov

La relation de Chapman-Kolmogorov nous dit que si on a une chaîne de Markov à temps homogène, on peut multiplier les matrices de transition pour obtenir la probabilité de passer de l'état n à l'état n+k

1.  $P^m = P^m$

$$2. P^{m+n} = P^m P^n$$

La preuve de cette relation se fait par induction, et on montre l'étape d'induction avec la propriété des chaînes de Markov et la probabilité conditionnelle. Essentiellement, on veut montrer qu'en multipliant chaque entrées entre elles, on obtient la proba à l'étape n x la proba à l'étape 1 et qu'en multipliant ces matrices, on obtient  $P^{n+1}$

#### Cas de base

1.  $t=0$ : matrice identité, car on ne change pas d'état
2.  $t=1$ :  $P^1 = P$

#### Étape d'induction

1. Puisque CM est homogène dans le temps, alors  $P^{n+1} \implies P_{ij}^{n+1} = P[X_{n+1} = j | X_n = i] = P[X_{n+1} = j | X_0 = i]$
2. En considérant les états intermédiaires, on obtient  $P[X_{n+1} = j | X_0 = i] = \sum_{k=1}^n P[X_{n+1} = j | X_n = k]$
3. Puisque c'est une chaîne de Markov, on a que

$$\sum_{i=1}^n P[X_{n+1} = j, X_n = k | X_0 = i]$$

4. Par probabilité conditionnelle, on a que

$$\sum_{i=1}^n \frac{P[X_{n+1} = j, X_n = k, X_0 = i]}{P[X_0 = i]} \frac{P[X_n = k, X_0 = i]}{P[X_n = k, X_0 = i]}$$

5. En réarrangeant les termes, on obtient la proba de transition à l'étape n et en une étape

$$\sum_{i=1}^n \frac{P[X_{n+1} = j, X_n = k, X_0 = i]}{P[X_n = k, X_0 = i]} \frac{P[X_n = k, X_0 = i]}{P[X_0 = i]}$$

6. et on applique la définition de la multiplication matricielle

#### 2.2.2 Classes: Communication entre états

La deuxième partie du cours mettait l'emphasis sur la séparation des états par des classes. Essentiellement, on veut être capable de différencier les différentes classes dans une matrice de transition afin de déterminer si la matrice est irréductible ou non.

#### Qu'est-ce qu'une classe



Tous les états qui communiquent entre eux forment une classe. Pour que 2 états communiquent entre eux, il faut qu'elles satisfassent les conditions suivantes:

1. Réflexive:  $i \leftrightarrow i$
2. Symétrique:  $i \leftrightarrow j \iff j \leftrightarrow i$
3. Transitive:  $i \rightarrow j, j \rightarrow k \implies i \rightarrow k$

#### Quelles sont les types de classes

1. État absorbant: On ne peut jamais quitter cet état après y être entré
2. État de non-retour: une fois qu'on n'a quitté cet état, on ne peut jamais revenir

#### Qu'est-ce qu'une matrice irréductible

On dit qu'une matrice est irréductible si tous les états communiquent entre eux. Autrement dit, tous les états forment une seule classe.

### 2.3 TP

Le TP de cette semaine se penchait sur 2 buts:

1. Déterminer la probabilité de passer d'un état à l'autre
2. Classification des états

### 2.4 Déterminer la probabilité de passer d'un état à l'autre

Pour déterminer la probabilité de passer d'un état à l'autre, on a deux façons:

1. si le nombre de steps est relativement petit: conditionnement (tracer l'arbre peut aider)
2. si le nombre de steps est grand: utiliser la relation de Chapman-Kolmogorov pour calculer la matrice de transition en diagonalisant

### 2.5 Classification des états

Dans une matrice de transition, on veut être capable de regrouper les états similaires afin de créer des classes. Tous les états dans une même classe devraient pouvoir être accessibles, c-à-d qu'il existe un chemin entre les 2. Les classes peuvent être:

1. Transition vs Récurrent: on pourrait quitter la classe et ne jamais y revenir vs une fois qu'on est dans cette classe, on ne peut jamais la quitter (non-retour)
2. Périodique vs Apériodique: après combien de pas on revient à l'état d'où on est parti (cycle) vs  $\text{pgcd} = 1$

3. Irréductibilité: le graphe forme une seule classe

**Remarque.** *Il est utile de tracer le graphe pour déterminer les classes*

## 3 Semaine 3

### 3.1 Théorie 1

#### Big Idea

Le but de cette section est d'essayer de séparer les états de transition en classe. Cette séparation est assez pratique, car tous les états d'une même classe ont les mêmes propriétés.

Un autre concept abordé est la notion de temps de ruine, qui représente le nombre d'étapes après lequel on ne peut plus jouer. On verra qu'il est impossible de calculer l'espérance du temps de ruine pour une v.a. infinie, car on ne peut pas calculer sa distribution, mais si on a une chaîne de Markov, on peut utiliser ces propriétés pour estimer ce temps de ruine. Finalement, on a fini avec quelques exemples.

#### Outline

1. Classification des états: types de classes et propriétés
2. Temps de Ruine
3. Périodicité

### 3.2 Classification des états: types de classes et propriétés

#### 3.2.1 Types de Classes

Le premier concept à se souvenir est que la notion d'état et de classe est similaire. Puisque tous les états d'une même classe possèdent les mêmes propriétés, alors parler des propriétés d'une classe ou d'un état revient au même.

Il existe plusieurs types d'états/classe:

1. Classe Transitoire vs Classe Récurrente:
  - Transitoire: On peut rester dans cette classe ou y sortir  $0 < P_{j,j} < 1$
  - Récurrente: Une fois qu'on entre dans cette classe, on ne peut plus y sortir  $p_{j,j} = 1$
2. Classe Fermée vs Classe ouverte:
  - Fermée: on ne peut que reach des états à l'intérieur de la classe
  - Ouverte:
- 3.

### 3.2.2 Propriétés des Classes

1. Si l'état  $j$  est absorbant, alors elle est forme sa propre classe et on dit que c'est une classe récurrente
2. Si la classe est fermée, alors c'est une classe récurrente
3. Un état est transient si  $i \rightarrow j$ , mais  $j \not\rightarrow i$
4. Si l'espace d'états est fini (il y a un nombre fini d'états), alors il y a au moins une classe récurrente

**Remarque.** 1. Pour montrer qu'une classe est transiente, on n'a qu'à montrer la propriété (3) pour l'un des états de la classe

2. Si on a deux classes et qu'on montre que l'une d'entre elles est transiente, l'autre est nécessairement récurrent par (4)

### 3.3 Temps de Ruine

Le temps de ruine correspond au nombre d'étapes après laquelle on ne peut plus jouer (on get stuck dans un espace récurrent?). Plus généralement, on a 2 buts:

1. Déterminer la probabilité de se faire ruiner en  $n$  étapes: possible de calculer pour un petit nombre d'étape
2. Détermine l'espérance du temps de ruine: impossible à calculer puisqu'on n'a pas la fonction densité (pcq v.a. infinie)

### 3.4 Périodicité

**Definition 3.4.1** (Période d'une classe). La période d'une classe est le pgcd de tous les temps  $n \geq 1$  vérifiant  $p_{j,j} > 0$ . Autrement dit, on

1. identifie tous les chemins qui nous permettent de revenir à l'état initial  $j$
2. compte le nombre d'étapes pour chaque chemin
3. faire le pgcd entre ces nombres d'étapes

**Remarque** (Classe Apériodique). Si la période d'une classe est de 1, on dit que la classe est apériodique. Ainsi, une classe récurrente est apériodique

**Remarque.** On dit que la période est une propriété de classe, car les états et la classe ont la même période ie on peut interchanger l'utilisation de ces termes.

### 3.5 Théorie 2

#### Big Idea

Cette classe-ci se concentrait sur la notion de distribution stationnaire, qui représente la probabilité de transitionner vers l'état  $x_i$  à long terme. On peut

représenter cette probabilité par un vecteur de probabilité  $\pi$ , qui est une probabilité stationnaire. Notre but sera de déterminer la probabilité stationnaire représentant la probabilité de transitionner d'un état à long terme.

## Outline

1. Retour sur les classes de transition
2. Distribution Stationnaire

### 3.5.1 Retour sur les classes de transition

On a fait l'exemple 4 avec lequel on avait 2 classes de récurrence et une classe de transition. Encore une fois, pour montrer qu'une classe est récurrente, on doit montrer que la probabilité de retour est de 1  $p_{j,j} = 1$ . Pour montrer qu'une classe est transitive, on doit montrer que

1. Un état de la classe n'est pas symétrique à celui d'une autre classe:  $i \rightarrow j \not\Rightarrow j \rightarrow i$  ou
2. La probabilité de non retour n'est pas égale à 1 :  $0 < p_{j,j} < 1$

Pour faire déterminer la périodicité de la classe, on fait le pgcd des chemins de retour. Si la périodicité est de 1 (pgcd=1), on doit que la classe est apériodique.

### 3.5.2 Distribution Stationnaire

#### Qu'est-ce qu'une distribution stationnaire

La distribution stationnaire sert à décrire l'équilibre du système à long terme. On veut déterminer la probabilité de finir dans l'état  $x_i$ , peu importe dans quel état on commence. On représente la probabilité de finir dans chaque vecteur par  $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n)$ , qu'on nomme vecteur probabilité, où  $\pi_i$  est la probabilité de finir à l'état  $x_i$ .

#### Comment calculer la probabilité stationnaire de $\pi$

Pour déterminer la valeur de l'état à long terme, on doit calculer la probabilité stationnaire par un produit matriciel  $\pi = \pi \cdot P$ , où  $P$  est la matrice de transition. Intuitivement, on veut que la probabilité du vecteur à un moment donné et celui à un temps très loin soit la même, car connaître ce qu'il s'est passé il y a 3000 ans ne change pas vraiment ce qu'on a aujourd'hui.

Pour ce faire, on veut trouver les paramètres  $\pi_i$  en faisant la multiplication matricielle:

$$\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3) \cdot P = (\pi_1, \pi_2, \pi_3) \begin{bmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Cependant, si on résout cette matrice, on obtient une infinité de solutions. Ainsi, on doit utiliser la propriété markovienne nous disant que la somme des probabilités de chaque ligne est 1

$$\sum_{k=1}^3 \pi_k = 1$$

**Remarque** (Pourquoi la distribution stationnaire génère une infinité de solutions). *La matrice de probabilité stationnaire génère une infinité de solutions, car les vecteurs colonnes ne sont pas linéairement indépendantes, ce qui veut dire qu'on peut écrire chaque vecteur comme une combinaison linéaire des autres. Ainsi, on ne peut pas associer de pivot à chaque colonne. Par conséquent, on a une variable libre.*

### **Que faire si l'espace d'états est infini**

Si l'espace d'état est infini, il se peut que la probabilité stationnaire n'existe pas. Pour vérifier si elle existe, on n'a qu'à faire le produit matriciel (si possible), et vérifier que la somme des probabilités de chaque ligne est de 1

## **3.6 TP**

Pas de TP (fête de la Reine)

## **4 Semaine 4**

### **4.1 Théorie 1**

TODO

**Big Idea**

**Outline**

- 1.
- 2.
- 3.

### **4.2 Théorie 2**

**Big Idea**

**Outline**

- 1.
- 2.
- 3.

### **4.3 TP**

## **5 Semaine 5**

### **5.1 Théorie 1**

**Big Idea**

**Outline**

- 1.
- 2.
- 3.

### **5.2 Théorie 2**

**Big Idea**

**Outline**

- 1.
- 2.
- 3.

### **5.3 TP**



## **6 Semaine 6**

### **6.1 Théorie 1**

**Big Idea**

**Outline**

- 1.
- 2.
- 3.

### **6.2 Théorie 2**

**Big Idea**

**Outline**

- 1.
- 2.
- 3.

### **6.3 TP**

## **7 Semaine 7**

### **7.1 Théorie 1**

**Big Idea**

**Outline**

- 1.
- 2.
- 3.

### **7.2 Théorie 2**

**Big Idea**

**Outline**

- 1.
- 2.
- 3.

### **7.3 TP**

## **8 Semaine 8**

### **8.1 Théorie 1**

**Big Idea**

**Outline**

- 1.
- 2.
- 3.

### **8.2 Théorie 2**

**Big Idea**

**Outline**

- 1.
- 2.
- 3.

### **8.3 TP**

## **9 Semaine 9**

### **9.1 Théorie 1**

**Big Idea**

**Outline**

- 1.
- 2.
- 3.

### **9.2 Théorie 2**

**Big Idea**

**Outline**

- 1.
- 2.
- 3.

### **9.3 TP**

## **10 Semaine 10**

### **10.1 Théorie 1**

**Big Idea**

**Outline**

- 1.
- 2.
- 3.

### **10.2 Théorie 2**

**Big Idea**

**Outline**

- 1.
- 2.
- 3.

### **10.3 TP**

## **11 Semaine 11**

### **11.1 Théorie 1**

**Big Idea**

**Outline**

- 1.
- 2.
- 3.

### **11.2 Théorie 2**

**Big Idea**

**Outline**

- 1.
- 2.
- 3.

### **11.3 TP**

## **12 Semaine 12**

### **12.1 Théorie 1**

**Big Idea**

**Outline**

- 1.
- 2.
- 3.

### **12.2 Théorie 2**

**Big Idea**

**Outline**

- 1.
- 2.
- 3.

### **12.3 TP**

## **13 Semaine 13**

### **13.1 Théorie 1**

**Big Idea**

**Outline**

- 1.
- 2.
- 3.

### **13.2 Théorie 2**

**Big Idea**

**Outline**

- 1.
- 2.
- 3.

### **13.3 TP**



## **14 Semaine 14**

### **14.1 Théorie 1**

**Big Idea**

**Outline**

- 1.
- 2.
- 3.

### **14.2 Théorie 2**

**Big Idea**

**Outline**

- 1.
- 2.
- 3.

### **14.3 TP**

## **15 Semaine 15**

### **15.1 Théorie 1**

**Big Idea**

**Outline**

- 1.
- 2.
- 3.

### **15.2 Théorie 2**

**Big Idea**

**Outline**

- 1.
- 2.
- 3.

### **15.3 TP**

## **16 Semaine 16**

### **16.1 Théorie 1**

**Big Idea**

**Outline**

- 1.
- 2.
- 3.

### **16.2 Théorie 2**

**Big Idea**

**Outline**

- 1.
- 2.
- 3.

### **16.3 TP**