Lecture Notes - Differential Equations by Professor Macauley

Emulie Chhor

May 17, 2021

Introduction

This document is a summary of concepts I have learned from Professor Macauley's Differential Equations Course.

His course is separated into the following chapter:

1. Introduction to ODE
2. First Order Differential Equations
3. Second Order Differential Equations
4. Systems of Differential Equations
5. Laplace Transforms
6. Fourier Series and Boundary Value Problems
7. Partiel Differential Equations

1 Introduction to ODE

Overview

Le premier chapitre introduit la notion d'Ordinary Differential Equations, qui sont des equations differentielles à une seule variable. On n'apprend pas encore comment les résoudre, mais on désire les dessiner puisque ça nous donne une bonne idée de l'allure de la famille de solutions.

Notons qu'il existe d'autres tyes d'équations différentielles (ex: PDEs, qui sont des équa diff avec 2 variables), mais on se penche sur les ODEs en premier.

On verra 4 méthodes pour résoudre les ODEs:

1. Separating Variables: isolate dy/y and integrate both sides
2. Integrating Factor: multiplier par une constante d'intégration pour pouvoir intégrer
3. Variables Parameters
4. indetermined coefficient: $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$

1.1 What is a differential equation?

Une équation différentielle est une équation définie par ses fonctions et ses dérivées. On l'utilise pour modéliser:

1. Growth : $P'(t) = rP(t)$
2. Decay : $P'(t) = r(1 - \frac{P(t)}{M})$
3. Logistic Equation: $P'(t) = r(1 - \frac{P(t)}{M})P(t)$

Éventuellement, le graphe devrait converger vers une valeur quelconque.

Il est à noter qu'on cherche la famille de fonctions qui vérifie l'équation. On pourra choisir la solution parmi cette famille de solutions plus tard.

1.2 Plotting solutions to differential equations.

Présentement, on n'est pas encore capable de résoudre une équation différentielle, mais on peut utiliser les outils du calcul pour tracer le graphe pour avoir une idée de l'allure de la famille de solutions.

On distingue 2 types de solutions:

1. Isocline: y' est une constante: $y' = 0$, with c
2. Autonomous ODEs: y' est une fonction quelconque: $y' = f(y)$

1.2.1 Comment tracer les solutions

TODO

1.3 Approximating solutions to differential equations.

Présentement, on n'a pas enore les outils pour résoudre une équa diff. Par contre, on peut toujours se servir des concepts vu en calcul pour approximer les solutions à une équations différentielles. Il existe plusieurs méthodes:

1. Euler's method: Approximating using stepwise Linear Approximations
2. Runge-Kutta's Method: skipped

1.3.1 Euler's Method

La méthode d'Euler conciste à tracer la fonction à l'aide d'approximation linéaire. On doit d'abord choisir un "step", qui représente la distance sur lequel on trace notre droite. Plus le step est petit, plus notre graphe aura l'air d'une courbe.

Plus généralement, si on a $y' = f(t, y)$ et $y(t_0)$ avec un stepsize de h, on a:

$$(t_{k+1}, y_{k+1}) = (t_k + h, y_k + f(t_k, y_k) \cdot h)$$

Il s'agit donc d'une méthode récursive pour tracer des graphes: on détermine la pente entre deux steps en considérant le triangle rectangle qui forme le point précédent et le point suivant.

2 First Order Differential Equations

Overview

2.1 Separation of variables

Cette setion met l'emphase sur la séparation de variables. En gros, on veut réécrire notre équation différentielle sous la notation de Leibniz afin d'isoler dy/y et d'avoir une équation p/r au temps. On voit qu'en intégrant, on obtient les équations suivantes:

1. Exponential Growth: $y' = ky \iff y(t) = Ce^{kt}$
2. Exponential Decay: $y' = -ky \iff y(t) = Ce^{-kt}$
3. Decay to Initial Value: $y' = -k(y - M) \iff y(t) = Ce^{-kt} + M$

Il faut aussi se souvenir que le k, représentant le rate of change, nous dit à quel point le decay/growth se fait rapidement.

Remarque (Stratégies de résolution)**.** *Pour résoudre des intégrales, il est parfois utile d'utiliser*

1. *intégration par fraction partielle*
2. *Rational zero theorem: trouver les facteurs de p et q, et résoudre par division euclidienne une foit qu'on a trouvé le premier zéro*

2.2 Initial value problems

Cette section focussait sur la résolution de ODEs. Tout d'abord, on introduisait la notion de valeur initiale. Auparavant, on voulait trouver la solution générale du ODEs. Ici, on nous donne des valeurs intiales $y(t_0) = y_0$.

Pour ce faire, on doit trouver:

1. C: initial rate of change that can be found by solving initial value (t=0)
2. k: constant rate of change that can be found by using initial and end time (t=0 and t=5 for exemple)
3. t: time an which we measure value
4. P(t): value of function given using for all parameters

Dépendemment du problème, on doit solve for une des 4 variables

1. Find Initial Rate of Change : solve for C
2. Find how much x is worth at time t: use C, k, t to find P(t)
3. Find half live: use P(t), P(0), C, k to find t, the time when P has value of P(t)

Remarque. *On utilise souvent les logs pour abaisser l'exposant. On préfère travailler avec des fractions positives*

2.3 Falling objects with air resistance: Newton's 2nd Law

Dans cette section, on voit que la 2e loi de Newton F=ma qui considère la résistance de l'air, peut être modéliser avec une ODEs: exponential decay to value. ON voit aussi pourquoi on voudrait intégrer une ODEs

Comment trouver modéliser v(t) avec une ODE

La deuxième loi de Newton nous dit que

1. Sans résistance de l'air: $F = ma = -mg$
2. Avec résistance de l'air: $F = -mg - R(v)$, R(v): résistance de l'air

De plus, on peut considérer que la résistance à l'air est proportionnelle à la vitesse (dans le sens inverse):

$$R(v) = -rv$$

Aussi, il faut se souvenir que

1. Vitesse: $v(t) = d'(t)$, d: distance
2. Accélération: $a(t) = v'(t)$, v: vitesse

Ainsi, on a que la 2nd loi de Newton qui considère la résistance de l'air est

$$v' = -g - \frac{r}{m}v$$

, qui peut être remodelée pour obtenir un exponential decay to a value

$$v' = -g - \frac{r}{m} = \frac{r}{m}(\frac{-mg}{r} - v), k = \frac{r}{m}, A = \frac{-mg}{r}$$

, avec v: vitesse limitante, A: terminal velocity

Ainsi, on a que

$$V(t) = -\frac{mg}{r} + Ce^{\frac{-r}{m}t}$$

Problèmes

Dépendemment du problème, on nous demande de trouver:

1. terminal velocity: $A = \frac{-mg}{r}$
2. Limiting velocity: $v' = 0$
3. C: initial value
4. m: mass

5. g: constante de gravité
6. v(t): velocity after t time
7. rate of change r: use terminal velocity and solve for r
8. distance d(t): on n'a qu'à intégrer la fonction de vitesse

$$\int_a^b v(t)\, dt$$

Bref

1. Comment on a trouver la ODE pour modéliser l'accélération en considérant le frottement de l'air
2. Résoudre des problèmes en utilisant la modélisation de F=ma en ODE

2.4 Solving 1st order inhomogeneous ODEs.

Depuis le début du cours, on a vu comment résoudre des équations homogènes à l'aide de la méthode par séparation. Cependant, cette stratégie ne peut pas être utilisée pour résoudre des équations inhomogènes

Rappel: la différence entre une équation homogène et inhomogène est que f(t) = 0

1. Homogenous Equation: $y' + a(t)y(t) = 0$
2. Inhomogenous Equation: $y' + a(t)y(t) = f(t)$

On discerne deux méthodes pour résoudre des ODEs inhomogènes:

1. Integrating Factor
2. Variation of Parameters

Notons que les 2 méthodes sont équivalentes, mais il est préférable d'utiliser la deuxième, puisqu'elle possède un "built-in correction" nous permettant de voir si on a fait des erreur

2.4.1 Integrating Factor

La première méthode consiste à multiplier par un facteur d'intégration afin de pouvoir intégrer. Pour choisir ce facteur d'intégration, on doit regarder a(t), le coefficient qui multiplie y(t).

Plus généralement, les étapes sont les suivantes:

1. Identifier a(t) afin de trouver le facteur d'intégration
2. Calculer le facteur d'intégration: $e^(\int A(t)\, dt)$

3. Multiplier l'équation inhomogène par le facteur d'intégration des deux côtés: on obtient "l'inverse du produit de la dérivée"
4. Écrire le produit de la dérivée comme une dérivée
5. Intégrer des deux bords, et isoler y pour trouver la solution générale

Notons pour que cette stratégie fonctionne, on doit savoir intégrer la partie de droite

2.4.2 Variation of Parameters

La deuxième méthode consiste à trouver l'équation homogène en ignorant la constante f(t), puis à plugger le guess dans l'équation inhomogène

Les étapes sont les suivantes:

1. Trouver la solution à l'équation homogène en ignorant f(t)
2. Guesser la solution générale pour trouver y et y': $y(t) = v(t)y_h(t) = ve^t$
3. Solve for v by isolating v' and integrating both sides
4. Plugger y et y' dans l'équation inhomogène: il devrait y avoir des termes qui s'annulent
5. Substitutionner v dans l'équation générale $y(t) = v(t)y_h(t) = ve^t$

En d'autres mots, on devrait retrouver la constante f(t) dans le v

TO REVIEW

2.5 Linear differential equations

Cette section nous présente 2 résultas cachés des équations différentielles:

1. Superposition: Les solutions des équations différentielles homogènes sont linéairement indépendants
2. Inhomogenous ODEs: on peut trouver la solution générale d'une ODEs inhomogènes en additionnant son équation homogène et une équation particulière

2.5.1 Superposition

La superposition nous dit que si une ODE homogène $y' + a(t)y(t) = 0$ a comme solution $y_1(t)$ et $y_2(t)$, alors $C_1y_1(t) + C_2y_2(t)$ est une solution $\forall c_1, c_2$

Pourquoi c'est vrai?

Si on plug $C_1y_1(t)+C_2y_2(t)$ dans l'équation homogène initiale $y'+a(t)y(t) = 0$, on obtient que $C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0$

2.5.2 Quick Trick to solve Inhomogenous ODEs

On peut trouver la solution générale d'une ODE inhomogène en additionnant son équation homogène et une équation particulière:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

Les étapes sont les suivantes:

1. Trouver la solution Homogène y_h
2. Trouver la solution particulière y_p (choisir 0)
3. Trouver la solution générale:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

Pourquoi ça marche

Si y est la solution générale $y' + a(t)y(t) = f(t)$ et la solution particulière $y_p' + a(t)y_p(t) = f(t)$, alors en les soustrayant, on obtient

$$(y - y_p)' + a(t)(y - y_p) = 0$$

, et $(y - y_p)$ est une solution à l'équation homogène

2.6 Basic mixing problems.

Dans un problème de mixing problem, on veut déterminer la concentration de soluté dans un solvant à un temps donné. Le problème le plus simple est le cas suivant: on ajoute de l'eau à la même concentration qu'il n'en sort. On caractérise le volume à un temps donné par

$$Concentration(t) = \frac{x(t)}{Vol(t)}$$

De plus, on sait que le rate of change à un temps t est donné par

$$x'(t) = (ratein) - (rateout)$$

Ainsi, on doit calculer

1. Rate In := (volume rate) x (concentration) := (volume qui sort dans un intervalle de temps) x (concentration du solvant)
2. Rate Out := (volume rate) x (concentration) := (volume qui sort) x (concentration du solvant dans le tank) := (volume) x ($\frac{x(t)}{Vol(t)}$)
3. Solve for x and for C using one of the 4 methods: on cherche x pour pouvoir trouver C

2.7 Advanced mixing problems.

TODO

2.8 The logistic equation.

3 Second Order Differential Equations

Overview

3.1 Second order linear ODEs.

3.2 Equations with constant coefficients.

3.3 The method of undetermined coefficients.

3.4 Simple harmonic motion.

3.5 Damped and driven harmonic motion.

3.6 Variation of parameters.

3.7 Cauchy-Euler equations.

3.8 Power series solutions.

3.9 The method of Frobenius.

4 Systems of Differential Equations

Overview

4.1 Basic matrix algebra.

4.2 Eigenvalues and eigenvectors.

4.3 Mixing with two tanks.

4.4 Solving a 2x2 system of ODEs.

4.5 Phase portraits with real eigenvalues.

4.6 Phase portraits with complex eigenvalues.

4.7 Phase portraits with repeated eigenvalues.

4.8 Stability of phase portraits.

4.9 of parameters for systems.

5 Laplace Transforms

Overview

5.1 What is a Laplace transform?

5.2 Properties and applications of Laplace transforms

5.3 Discontinuous forcing terms

5.4 Periodic forcing terms

5.5 Impulse functions

5.6 Convolution

6 Fourier Series and Boundary Value Problems

6.1 Introduction to Fourier series

6.2 Computing Fourier series

6.3 Fourier sine and cosine series

6.4 Complex Fourier series

6.5 Applications of Fourier series

6.6 Boundary value problems

Overview

7 Partial Differential Equations

Overview

7.1 The heat equation

7.2 Different boundary conditions

7.3 The transport equation

7.4 The wave equation

7.5 Harmonic functions

7.6 Laplace's equation

7.7 The 2D heat equation

7.8 2D wave equation

8 Systems of Nonlinear Differential Equations

Overview

8.1 Modeling with nonlinear systems

8.2 Linearization and steady-state analysis

8.3 Predator-prey models