Notes de Cours - Algèbre Linéaire

Emulie Chhor

May 11, 2021

Introduction

Le cours d'algèbre linéaire comporte plusieurs chapitres:

1. Systèmes d'Équations Linéaires
2. Matrices
3. Déterminants
4. Espaces et Sous-Espaces Vectoriels
5. Orthogonalité et Projections
6. Diagonalisation

0.1 Pourquoi étudier l'algèbre linéaire?

1 Systèmes d'Équations Linéaires

1.1 Overview

Le but de cette section est de pouvoir résoudre des systèmes d'équations linéaires avec l'algorithme de Gauss et de Gauss-Jordan

1.2 Définition d'un système d'équations linéaires

1.3 Opérations élémentaires sur les lignes

Il existe 3 opérations élémentaires sur les matrices:

1. Multiplier la ligne i par une constante $k \neq 0$: $L_i \to kL_j, k \neq 0$
2. Permuter les lignes i et j : $L_i \leftrightarrow L_j$
3. Ajouter à la linge i un multiple d de la ligne j : $L_i \to L_i + dL_j$

1.4 Forme des matrices

Lorsqu'on essait de résoudre un SEL, on veut transformer notre matrice en l'une des deux formes:

1. Forme échelonée : Gauss
2. Forme échelonée réduite : Gauss-Jordan

1.5 Types de Solutions

Il existe 3 types de solutions:

1. Solution Unique: chaque variable est associée à un pivot
2. Infinité de Solutions: il existe une variable libre ou plus
3. Aucune Solutions: le système est incompatible et on a $[0\,0\,...\,0|\,k]$, $k \neq 0$

1.6 Méthode de Gauss

1.7 Méthode de Gauss-Jordan

Remarque (Méthode de Gauss vs Gauss-Jordan).

2 Matrices

2.1 Overview

Le but de cette section est de se familiariser algébriquement avec la notion de matrice. Cependant, il faut toujours garder en tête qu'une matrice représente une transformation linéaire. Essentiellement, une transformation linéaire est une fonction qui prend un vecteur et en recrache un autre. On verra plus tard les détails.

2.2 Opérations Matricielles

2.2.1 Addition et Multiplication par un scalaire

Definition 2.2.1 (Égalité Matricielle)**.** *On dit que 2 matrices* A_{mxn} *et* B_{pxq} *sont égales si:*

1. *meme dimension: m=p et n=q*
2. *composantes identiques:* $^(A)_ij = (B)ij, \forall i, j$

Definition 2.2.2 (Addition Matricielle)**.** *Soit A et B, deux matrices de même dimension. La Matrice A+B est de même dimension et est caractérisée par*

$$(A + B)_ij = (A)_ij + (B)_ij$$

Remarque (Interprétation Géométrique de l'addition Matricielle)**.**

Definition 2.2.3 (Multiplication par un scalaire)**.** *Soit A, une matrice, et r un scalaire. La matrice rA, de meme dimension, est donnée par*

$$(rA)_ij = r(A)_ij$$

Remarque (Interprétation Géométrique de la multiplication Matricielle)**.**

Theorem 2.2.1 (Propriétés de la somme et du PPS matriciel)**.** *Soit A,B,C des matrices et r,s des scalaires.*

1. *(Commutativité de l'addition) : A + B = B + A*
2. *(Associativité de l'addition) : (A+B)+C=A+(B+C)*
3. *(Identité de la somme) : A + 0 = A*
4. *r(A+B) = rA + rB*
5. *(r+s)A = rA + sA*
6. *r(sA) = (rs)A*

Remarque. *Algébriquement, on sait que les matrices possèdent ces propriétés, car ses composantes sont des réels ou des complexes, qui sont des fields. Géométriquement, on sait que les matrices sont construites à partir de vecteurs, alors il s'agit encore de d'addition et de multiplication, mais sur des vecteurs au lieu de composantes.*

2.2.2 Multiplication Matricielle

Definition 2.2.4 (Multiplication Matricielle). *Lignes x Colonnes*

Theorem 2.2.2 (Propriétés de la Multiplication Matricielle). *Soit A,B,C, des matrices carrées et r un scalaire. Alors,*

1. $AB \neq BA$
2. $r(AB) = (rA)B = A(rB), r \in \mathbb{R}$
3. $IA = AI = A$
4. $A(B + C) = AB + AC$
5. $(B + C)A = BA + CA$
6. $A(BC) = (AB)C$

Remarque (Interprétation géométrique). *Géométriquement, on peut interpréter la multiplication matricielle comme la composition de transformations linéaires, ce qui fait en sorte que l'ordre est important.*
Que peut-on dire à propos de A et B si AB=BA?

2.2.3 Transposition de Matrice

Definition 2.2.5 (Transposition). *La transposition de la matrice A, notée A^T, est la matrice dont on a interchangé ses lignes et ses colonnes.*

$$(A^T)_{ij} = (A)_{ji}$$

Theorem 2.2.3 (Propriétés de la Transposée matricielle). *Soit A,B,C, des matrices carrées et r un scalaire. Alors,*

1. $(A^T)^T = A$
2. $(A + B)^T = A^T + B^T$
3. $(rA)^T = r(A^T), r \in \mathbb{R}$
4. $(AB)^T = B^T A^T$

2.3 Équation Ax=b

2.3.1 Combinaison Linéaire

Definition 2.3.1 (Combinaison Linéaire). *On dit que le vecteur u est une combinaison linéaire des vecteurs v_1, v_2, v_3 dans l'espace vectoriel V s'il existe des scalaires c_2, c_2, c_3 tels que:*

$$u = c_1 v_1 + c_2 v_2 + ... + c_n v_n$$

Intuition (Interprétation Géométrique de la Combinaison Linéaire)**.** *On veut exprimer un vecteur quelconque comme une somme de plusieurs autres. C'est comme si on voulait se rendre à la destination X, mais qu'on s'arrêtait à pleins d'endroits.*

2.3.2 Indépendance Linéaire

Definition 2.3.2 (Indépendance Linéaire)**.** *On dit que la famille des vecteurs* $(v_1, v_2, ..., v_n)$ *de l'espace vectoriel sont linéairement indépendants* $\iff c_1 = c_2 = ... = c_n = 0$ *est la seule solution pour la combinaison linéaire* $c_1v_1 + c_2v_2 + ... + c_nv_n = 0$

Intuition. *On ne peut pas écrire les vecteurs de l'ensemble comme une combinaison linéaire des autres. Plus tard, on verra que l'indépendance linéaire fait en sorte qu'on a un minimum de vecteurs nécessaires pour générer un ensemble de vecteurs.*

2.3.3 Équation Ax=b

Theorem 2.3.1 (Compatibilité de Ax=b)**.** *Le système Ax=b est compatible si et seulement si b est une combinaison linéaire des colonnes de A*

Intuition. *On sait que A est une matrice de transformation, ce qui veut dire que b est le vecteur x après avoir appliqué cette transformation. Ainsi, on peut s'imaginer que les colonnes de A ont été utilisées pour faire le doit product, qui nous donne l'étirement de chaque composantes de x. Cet étirement peut donc être vu comme un scalaire par lequel on multiplie x pour obtenir le vecteur b.*

Theorem 2.3.2. *Le système Ax=0 possède une unique solution si et seulement si les colonnes de A sont linéairement indépendantes.*

Intuition. *On veut multiplier les vecteurs colonnes de A par le vecteur nul pour obtenir zéro, ce qui est équivalent à l'indépendance linéaire.*

2.4 Inversion de Matrices

2.4.1 Définition et Propriétés de l'inverse

Definition 2.4.1 (Matrice Inversible)**.** *On dit qu'une matrice carrée est inversible s'il existe une matrice B telle que* $AB = BA = I$

Theorem 2.4.1 (Unicité de l'inverse)**.** *Si A est une matrice inversible, alors elle est l'inverse de A, notée* $A^(- 1)$*, est unique*

Remarque (Interprétation de l'inverse matricielle)**.** *L'inverse d'une matrice est l'opération qui annule la transformation faite par la matrice A. On sait que l'inverse existe si la transformation ne change pas la dimension du vecteur/matrice. On verra plus tard pourquoi les matrices ayant un détarminant nul ne sont pas inversibles.*

Theorem 2.4.2 (Propriétés de l'inverse matriciel). *Soit A et B, des matrices. Alors,*

1. $(A^{(} - 1))^{(} - 1) = A$
2. $(AB))^{(} - 1) = B^{-}1A^{-}1$
3. $(A^T)^{-}1 = (A^{-}1)^T$

2.4.2 Calcul de l'inverse avec la méthode de Gauss-Jordan

Definition 2.4.2 (Algorithme de Gauss-Jordan). *On peut calculer l'inverse d'une matrice si*

$$(A \,|\, I) \;...\; (\,I \,|\, A^{(} - 1))$$

Intuition. *On est capable de trouver l'inverse avec Gauss-Jordan puisque chaque opération matricielle peut être associée à une matrice élémentaire. C'est comme si on faisait une composition de matrices élémentaires. On verra plus tard pourquoi les matrices élémentaires sont inversibles.*

2.4.3 Résolution du système Ax=b avec l'inverse

On peut trouver le vecteur x à l'aide de l'inverse de la façon suivante:

(1)

2.4.4 Matrices élémentaires

Definition 2.4.3 (Matrice élémentaire). *Une matrice élémentaire est une matrice obtenue de la matrice en effectuant une seule opération élémentaire ligne*

Proposition 2.1 (Multiplication à gauche par une matrice élémentaire). *Soit A_{mxn} une matrice quelconque et E_{mxm}, une matrice élémentaire. La matrice obtenue de A par une opération élémentaire ligne est égale au produit EA.*

Proposition 2.2 (Inverse des Matrices Élémentaires). *Toute matrice élémentaire est inversible*

3 Déterminants

3.1 Overview

Géométriquement, le déterminant d'une matrice représente le ratio entre l'aire formée par les vecteurs avant et après transormations linéaires. Intuitivement, le déterminant nous dit si une matrice est diagonalisable ou non puisque si $det(A) = 0$, alors la transformation à changer de dimension et n'est pas inversible.

On peut aussi utiliser les déterminants pour évaluer un SEL. On compare le déterminant de chaque vecteur avant et après transformation.

3.2 Définition du Déterminant

Definition 3.2.1 (Definition du Déterminant)**.**

Remarque (Interprétation Géométrique du Déterminant)**.** *Le déterminant mesure le ratio de l'aire (ou le volume) formé par les vecteurs colonnes de la matrice A avant et après la transformation. Si le déterminant est de zéro, alors il y a compression et on a perdu une dimension. La matrice est donc non inversible. Si le déterminant est de 1, alors la transformation n'a pas changé la longueur des vecteurs. On a donc une rotation ou une translation. Finalement, si le déterminant est négatif, on a flippé l'orientation des vecteurs.*

1. *si* $det(A) = 0$ *:*
2. *si* $det(A) = 1$ *:*
3. *si* $0 < det(A) < 1$ *:*
4. *si* $det(A) > 0$ *:*

3.3 Propriétés du Déterminant

3.4 Règle de Cramer

Intuition. *La règle de Cramer est un ratio*

4 Espaces et Sous-Espaces Vectoriels

4.1 Overview

Un aspect important à comprendre dans l'étude de l'algèbre linéaire est la notion d'espace. Malgré qu'on s'attarde peu à la notion d'anneau, il faut se souvenir qu'on peut manipuler les vecteurs algébriquement, car l'espace dans lequel il se trouve est un field, un ensemble qui comporte certaines propriétés qu'on nomme axiomes.

Un deuxième aspect important est la notion de transformation linéaire. Comme mentionné plus tôt, une matrice peut être interprétée comme une transformation, c-à-d qu'elle est une fonction qui transforme un vecteur en un autre vecteur. Cependant, cette transformation peut changer les propriétés de l'espace. On s'attardera donc aux transformations qui gardent ces propriétés, transformations qu'on nomme linéaire.

Finalement, on veut être capable de changer de base. Décrire un vecteur dans l'espace est assez arbitraire, car chaque personne peut tracer son propre quadrillage et obtenir un vecteur différent. Ainsi, pour s'assurer de parler le même language, on veut être capable de traduire un vecteur/transformation d'un espace à un autre.

4.2 Espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$

Definition 4.2.1 (Espaces Vectoriels sur $\mathbb{R}$). *On appelle espace vectoriel tout ensemble non vide V constitué d'objets appelés vecteurs sur lequel sont définies deux opérations (l'addition et la multiplication par un scalaire), vérifiant les 10 axiomes suivants:*

1. $u + v \in V$
2. $u + v = v + u$
3. $(a + v) + w = u + (v + w)$
4. $u + 0 = u$
5. $u + (-u) = 0$
6. $cu \in V$
7. $c(u + v) = cu + vu$
8. $(c + d)u = cu + du$
9. $(cd)u = c(du)$
10. $1u = u$

Remarque. *Les réels forment un ring, c-à-d que:*

1. *L'opération binaire de l'addition est un groupe commutatif*
2. *L'opération binaire de multiplication est un groupe commutatif*
3. *Distributivité de la multiplication sur l'addition*

Definition 4.2.2 (Sous-espaces vectoriels)**.** *Soit V, un espace vectoriel muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire. Un sous-espace vectoriel H de V est un sous-ensemble de V qui vérifie les propriétés suivantes:*

1. *Le vecteur nul de V appartiet à H* ($0àinH$)
2. *pour tout* $u, v\grave{}inH, u + v \in H$
3. *pour tout* $u \in H$ *et tout scalaire* $c, cu \in H$

4.3 Transformations Linéaires

Definition 4.3.1 (Transformations Linéaires)**.** *On dit qu'une fonction* T : $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *est linéaire si pour tout* $u, v \in \mathbb{R}^n$ *et* $k \in \mathbb{R}$*:*

1. *T(ku)=kT(u)*
2. *T(u+v) = T(u) + T(v)*

Intuition. *On dit qu'une transformation est linéaire si elle préserve les opérations dans les réels.*

Remarque (Pourquoi veut-on travailler avec des transformations linéaires)**.**

Theorem 4.3.1 (Représentation Matricielle)**.** *Soit* $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$*, une transformation linéaire. Alors il existe une unique matrice A, de dimension m x n telle que*

$$T(u) = Au$$

Intuition. *La représentation matricielle nous dit que la transformation matricielle est équivalente à la multiplication matricielle, ce qu'on savait déjà.*

Proposition 4.1 (Transformations Linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$)**.** *On distingue 4 transformations linéaires principales dans* $\mathbb{R}^2$*:*

Étirement:

Homothétie:

Réflexion:

Rotation:

Definition 4.3.2 (Composition de Transformations Linéaires)**.**

4.4 Injectivité et Noyau

Definition 4.4.1 (Injectivité)**.** *Soit $f : X \to Y$ une fonction. On dit que f est injective si pour tout $x_1, x_2 \in X$*

$$x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Theorem 4.4.1 (Injectivité d'une Transformation Linéaire)**.** *Soit $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une transformation linéaire.*

$$T \text{ est injective } \iff ker(T) = 0$$

Definition 4.4.2 (Surjectivité)**.** *Soit $f : X \to Y$, une fonction. On dit que f est surjective si pour tout $y \in Y$, il existe $x \in X$ tel que $f(x) = y$*

Theorem 4.4.2 (Surjectivité d'une Transformation Linéaire)**.** *Soit $f : X \to Y$, une fonction.*

$$f \text{ est surjective } \iff Im(f) = Y$$

4.5 Base d'un Espace Vectoriel

Definition 4.5.1 (Ensemble Générateur)**.** *Un ensemble B de vecteurs de l'espace vectoriel V est un ensemble générateur de V si tout élément de V peut s'écrire comme une combinaison linéaire des éléments de B*

Intuition. *On peut former tous les vecteurs de l'espace vectoriel à l'aide des vecteurs de ce même ensemble. Notons qu'il peut y avoir des vecteurs redondants.*

Definition 4.5.2 (Base d'un espace vectoriel)**.** *Un ensemble B de vecteurs de l'espace vectoriel V est une base de V si:*

1. *les vecteurs de B sont linéairement indépendnats*
2. *B est un ensemble générateur de V*

Remarque. *Pour qu'un ensemble forme une base, il faut qu'on ait le nombre minimal de vecteurs pour générer l'ensemble, mais pas trop pour que les vecteurs soient redondants.*

4.6 Système de Coordonnées dans $\mathbb{R}^n$

Definition 4.6.1 (Système de coordonnées)**.** *Soit $B = (b_1, ..., b_n)$, une base d'un espace vectoriel V. Alors pour tout vecteur x de V, il existe une unique famille $(c_1, ..., c_n)$ de scalaires telle que*

$$x = c_1 b_1 + ... + c_n b_n$$

Le vecteur $[c_1 ... c_n]$ est appelé le vecteur coordonnées de x dans la base B et est noté $[x]_B$

Remarque. *Le vecteur des coordonées, aussi appelé vecteur des composantes, est un vecteur formé des scalaire de la combinaison linéaire. Intuitivement, on peut le voir comme le scalaire par lequel on doit multiplier chaque composantes pour obtenir* x

Definition 4.6.2 (Matrice de Passage)**.** *Soit* $B = (b_1, ..., b_n)$*, une base de* $\mathbb{R}^n$*. La matrice définie par*

$$P_B = [b_1 ... b_n]$$

est appelée la matrice de passage de la base B. Pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$*, on a l'équation*

$$x = P_B[x]_B$$

De plus, la matrice P_B *est inversible, car ses colonnes forment une base, et on a l'équation*

$$[x]_B = P_B^(- 1)x$$

Remarque. *L'équation* $x = P_B[x]_B$ *est la même équation que* $b = Ax$*. On a que x=b,* $P_B = A$ *et* $[x]_B = x$*. Ainsi, on peut interpréter la matrice de passage comme la matrice intermédiaire qu'on peut utiliser pour passer d'une base à une autre.*

4.7 Changement de Base

Intuition. *Caractériser un vecteur est assez arbitraire, car chaque personne peut choisir un quadrillage différent et obtenir un résultat différent. Ainsi, pour s'assurer de parler le même language, on veut être capable de traduire un vecteur dans un espace et dans un autre. On se sert de la matrice de changement de base pour passer d'une base à l'autre.*

Theorem 4.7.1 (Matrice de Changement de Base)**.** *Soit* $B = (b_1, ..., b_n)$ *et* $C = (c_1, ..., c_n)$*, deux bases de d'un espace vectoriel V. Il existe une unique matrice n x n, notée* $P_{C \leftarrow B}$ *telle que pour tout* $x \in V$

$$[x]_C = P_{C \leftarrow B}[x]_B, P_C = [[b_1]_C ... [b_n]_C]$$

Cette matrice est appelée la matrice de changement de base de B à C

Remarque. *On peut construire la matrice de transformation pour traduire un vecteur de la base B dans la base C en prenant la matrice construite par les vecteurs colonnes de la base originelle traduite dans la nouvelle base.*
En pratique, on trouve la matrice de changement de base en échelonnant

$$(c_1 c_2 c_3 | b_1 b_2 b_3) \ (I|[b_1]_C [b_2]_C [b_3]_C) \ (I|P_{C \leftarrow B})$$

Remarque (Lien entre matrice de changement de base et matrice de passage)**.**

4.8 Représentation matricielle d'une transformation Linéaire de V dans W

5 Orthogonalité et Projections

5.1 Overview

Le but du chapitre est de définir ce qu'est l'orthogonalité et déterminer si une matrice est orthogonale, et si elle ne l'est pas, de la diagonaliser avec le Procédé de Graham-Schmidt. Essentiellement, on veut travailler avec une base orthonormale, c-à-d dont les vecteurs sont orthogonaux entre eux, car les propriétés linéaires des vecteurs et de l'espace sont gardées. De plus, travailler avec une base orthonormale est plus pratique puisque le quadrillage forment des rectangles (et non des parallélogrammes).

5.2 Produit Scalaire et Projection Orthogonale

5.2.1 Orthogonalié et Projections

Definition 5.2.1 (Produit Scalaire)**.** *Soit u et v, deux vecteur de $\mathbb{R}^n$. Le produit scalaire de u et v est le nombre réel*

$$u \cdot v = u^T v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + ... + u_n v_n$$

Theorem 5.2.1 (Propriétés du produit scalaire)**.** *Soit u,v et w, trois vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et c, un nombre réel. Alors,*

1. $u \cdot v = v \cdot u$
2. $u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$
3. $(cu) \cdot v = u \cdot (cv) = c(u \cdot v)$
4. $u \cdot u \geq 0$ *et* $u \cdot u = 0 \iff u = 0$

Remarque (Interprétation géométrique du produit scalaire)**.** *Comme le nom le dit, le produit scalaire de deux vecteurs nous donne un scalaire. Ce nombre nous dit à quel point le premier vecteur va dans la même direction que le deuxième. Une autre interprétation peut se faire avec la formule de l'angle, qu'on verra plus tard.*

5.2.2 Norme d'un vecteur

Theorem 5.2.2 (Norme d'un vecteur)**.** *On appelle la longueur d'un vecteur (ou norme) $u \in \mathbb{R}^n$ le nombre réel positif ou nul défini par*

$$||u|| = \sqrt(u_1^2 + u_2^2 + ... + u_n^2) = \sqrt(u \cdot u)$$

Definition 5.2.2 (Vecteur Unitaire)**.** *Un vecteur ayant une norme de 1 est appelé un vecteur unitaire.*

Intuition (D'ou vient la formule pour la norme d'un vecteur)**.**

Theorem 5.2.3 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)**.** *Soit u et v, deux vecteurs de* $\mathbb{R}^n$*, alors* $|u \cdot v| \leq ||u||||v||$

Theorem 5.2.4 (Propriétés de la norme)**.** *Soit u et v, deux vecteurs de* $\mathbb{R}^n$*, alors*

1. $||u|| = 0 \Longleftrightarrow u = 0$
2. $||cu|| = |c|||u||$
3. $||u + v|| \leq ||u|| + ||v||$

5.2.3 Angle entre deux vecteurs

Theorem 5.2.5 (Angle entre deux vecteurs)**.** *Soit u et v, deux vecteurs non nul de* $\mathbb{R}^n$*. L'angle entre u et v est le nombre réel* $\Theta \in [0, \pi]$ *tel que*

$$cos(\Theta) = \frac{u \cdot v}{||u||||v||}$$

Intuition (D'ou vient la formule de l'angle entre 2 vecteurs)**.**

Theorem 5.2.6 (Vecteurs Orthogonaux)**.** *On dit que deux vecteurs u et v de* $\mathbb{R}^n$ *sont orthogonaux (ou perpendiculaires) si* $u \cdot v = 0$

Intuition. *On sait que le produit scalaire peut être interprété comme la quantité du premier vecteur qui va dans la même direction que le deuxième. Ainsi, géométriquement, on sait que deux vecteurs orthogonaux ne vont pas dans la même direction, d'ou le produit vectoriel de 0*

5.2.4 Projection Orthogonale

Proposition 5.1 (Projection Orthogonale)**.** *Soit* $u \neq 0$ *et y, deux vecteurs de* $\mathbb{R}^n$*. La projection orthogonale de y sur u est le vecteur donné par*

$$\hat{y} = proj_u y = \frac{y \cdot u}{u \cdot u} u$$

Intuition (D'ou vient la projection orthogonale)**.** *Soit* $\hat{y} = ku, y = \hat{y} + z, z \perp u$*. On a que*

1. $\hat{y} = ku$ *:*
2. $y = \hat{y} + z = ku + z$
3. $z \perp u \Longleftrightarrow z \cdot u = 0$

5.3 Sous-Espace Orthogonal

Definition 5.3.1 (Sous-Ensemble Orthogonal)**.** *Soit W, un sous-ensemble de* $\mathbb{R}^n$*. L'ensemble des vecteurs orthogonaux à tous les vecteurs de W est appelé le sous-ensemble orthogonal de W. Il est noté*

$$W^\perp = v \in \mathbb{R}^n | \forall_{w \in W} v \perp w$$

Intuition. *C'est la famille des vecteurs orthogonaux à tous les vecteurs de la famille W*

Problème (Trouver $W^{\perp}$). *Si on veut déterminer $W^{\perp}$, on n'a qu'à résoudre le système d'équations linéaires formés de vecteurs de $W_i \cdot v = 0$*

Definition 5.3.2 (Sous-Espace Orthogonal). *Soit W, un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$. Alors $W^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel*

Intuition. *On sait que $W^{\perp}$,car ses vecteurs sont linéairement indépendants*

Theorem 5.3.1 (Description d'un sous-espace orthogonal). *Un vecteur appartient à $W^{\perp} \iff$ si il est orthogonal à tous les vecteurs d'une famille génératrice de W*

5.3.1 Famille Orthogonale

Definition 5.3.3 (Famille Orthogonale). *On dit qu'une famille de vecteurs $B = (u_1, u_2, ..., u_p)$ de $\mathbb{R}^n$ est orthogonale si pour tout $i \neq j, u_i$ est orthogonal à $u_j(u_i \cdot u_j = 0)$*

Intuition. *Une famille orthogonale est une famille dont tous les vecteurs sont orthogonales entre eux c-à-d qu'ils sont à 90 degrés entre eux. Travailler avec une famille orthogonale est plutôt pratique, car notre quadrillage est rectangulaire (et non pas des parallélogrammes)*

Problème (Montrer que la famille B est orthogonale). *Pour montrer qu'une famille est orthogonale, on veut montrer que chaque paire de vecteurs de la famille est orthogonale entre elles, c-à-d que $u_i \cdot u_j = 0$*

Theorem 5.3.2 (Base Orthogonale). *Une famille orthogonale de vecteurs non nuls est une base de l'espace qu'elle engendre*

Intuition. *On sait que les vecteurs d'une famille orthogonale sont perpendiculaires entre eux, ce qui veut aussi dire qu'ils sont linéairement indépendants et forment donc une base*

Theorem 5.3.3 (Coordonnées dans une base orthogonale). *Soit $B = (u_1, u_2, ..., u_p)$, une base orthogonale d'un sous-espace W de $\mathbb{R}^n$. Pour tout $y \in W$,*

$$y = proj_{u_1}y + ... + proj_{u_p}y = \sum proj_{u_i}y = \sum (\frac{y \cdot u_i}{u_i \cdot u_i})u_i$$

Intuition.

Remarque (Illustration du théorème).

Problème (Trouver les coordonnées de y dans la base B).

6 Diagonalisation

6.1 Overview

La diagonalisation est un processus utilisé dans le domaine du Machine Learning, car elle permet de "compresser" les données dans une plus petite dimension. La diagonalisation est notamment utilisée pour le PCA et le SVD.

Géométriquement, lorsqu'on parle de valeurs propres et de vecteurs propres, c'est qu'il existe un vecteur qui reste sur le même axe après transformation linéaire. Ainsi, appliquer la transformation linéaire sur ce vecteur peut être considérer comme une multiplication par un scalaire λ, qui étire la longueur du vecteur. Notre but est donc de trouver le vecteur qui reste dans le même axe, qu'on appelle vecteur propre, et de trouver le facteur de multiplication, qu'on appele valeur propre.

6.2 Valeurs et Vecteurs Propres

6.3 Espace Propre et Multiplicité Géométrique

6.4 Diagonalisation d'une matrice quelconque

6.5 Diagonalisation d'une matrice symétrique