Résumé des Cours - Processus Stochastiques

Emulie Chhor

June 7, 2021

Introduction

Ce document est un résumé des idées importantes présentées lors de chaque cours de MAT2717

1 Semaine 1

1.1 Théorie 1

Big Idea

Dans le premier cours de probabilité, on s'est penché sur la notion de variable aléatoire. Dans ce cours-ci, on voit qu'on doit ajouter un autre paramètre à ces variables aléatoires: le temps. On ne parle donc plus de variables aléaoires, mais de processus stochastiques, qui sont des variables aléatoires prenant en considération le temps. Ainsi, on parle donc de processus stochastique à temps discrete et à temps continu, dépendemment si on considère le temps discret ou continu.

Outline

1. Processus Stochastiques
2. Marche Aléatoire

1.2 Processus Stochastiques

Un processus stochastique est une v.a aléatoire qui est dépendante du temps. Elle peut être discrète ou continue dépendemment à quelle fréquence on observe la valeur de la v.a)

On dit que le temps est déterministe. Why?

On peut écrire un p.s. $X(\omega, t)$, avec omega: les scenarios possibles et t, le temps. Si on fixe le temps, on parle de variable aléatoire. Si on fixe l'évènement et on laisse le temps libre, on parle de trajectoire.

1.3 Marche Aléatoire

La marche aléatoire représente la valeur d'un p.s. discret à un temps donnée. On peut la modéliser de deux façons:

1. Conditionnement: valeur à la dernière position $\pm$ 1
2. Somme de variables indicatrices: $X_n = Y_1 + ... + Y_n$

Il est à noter qu'on préfère représenter une marche aléatoire par une somme de variable indicatrice puisque ça rend le calcul plus facile.

Espérance: $\mathbb{E}(X_n) = n(2p - 1)$ Variance: $Var(X_n) = 4np(1 - p)$

1.4 D'ou vient la formule de l'esperance et de la variance d'une marche aleatoire

Il s'agit de l'esperance et de la variance pour une somme de variable indicatrice.

$E(x) = n(1 * p + (-1)(1-p))$: nombre de pas x esperance succes/echec au i-ème pas $V(X) =$ somme des variances $= n[E(Y^2) - E(Y)^2]$

1.5 Théorie 2

Big Idea

Ce cours introduisait les chaines de Markov. Comme on l'a vu au dernier cours, les processus stochastiques sont des v.a. qui sont en fonction du temps. Certaine PS ont la propriété de Markov, c-à-d qu'on n'a que besoin de la dernière valeur pour déterminer la prochaine position et non tout l'historique. On introduit la notion de matrice de transition pour modéliser la probabilité de transitionner d'un état à l'autre, et la notion d'état absorbant, qui est un état duquel on ne peut se sortir une fois atteinte.

Outline

1. Rappel: Processus Stochastiques
2. Marche Aléatoire
3. Processus de Branchement
4. Chaines de Markov: Proba de transition et État absorbant

1.5.1 Marche Aléatoire

Il faut se rappeler que la marche aléatoire sert à modéliser un p.s discret. On a vu qu'il y avait deux façons de l'interpréter:

1. Conditionnement: previous +/- 1 dépendemment du succès/échec
2. Somme de variables indicatrices (bernouilli)

Essentiellement, la probabilité est déterminer par une Bernouilli, puisqu'on considère que chaque coin flip est iid. On peut aussi visualiser la marche aléatoire comme un arbre de décision.

Exemple: t=2, coin flip: +1 si Head, -1 si Tail

1. $x_2 = 2$ avec proba p^2 : HH
2. $x_2 = 0$ avec proba $2p(1-p)$: HT, TH
3. $x_2 = -2$ avec proba $(1-p)^2$: TT

Notons qu'après 2 coins flip, on ne peut pas avoir 1 ou -1, car apres le premier coin flip, on est à 1 ou -1, et on ne peut que se déplacer de 1 vers le haut ou vers le bas

On a aussi vu qu'on peut tracer la trajectoire de la marche aléatoire, qui représente la valeur de x_n selon le temps.

1.5.2 Processus de Branchement

Le processus de Banchament est une façon de modéliser la générations d'évènement. Par exemple, en reinforcement learning, ça représente la transition d'état. Visuellement, on a un arbre et chaque branche mène à un autre état, associé à une certaine probabilité.

1.5.3 Chaine de Markov

Comme mentionné, une chaine de Markov est une p.s qui satisfait à la propriété de Markov, c-à-d qu'on n'a que besoin de l'état précédant pour déterminer le futur et non tout l'historique. Dans la vraie vie, une chaine de markov ne représente pas nécessairement la situation, mais on fait cette hypothèse afin de simplifier les calculs et éviter de trainer trop d'information. On écrit:

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j) = (X_{n+1} = j | X_n + ... + X_0) = (X_{n+1} = j | X_n)$$

Pour représenter la probabilité de transition d'un état à un autre, on utilise une matrice de transition.

Finalement, il est important de comprendre la notion d'état absorbant. Une fois qu'on entre dans cet état, on ne peut plus en sortir. L'exemple donné en classe concernait le casino: une fois qu'on a plus d'argent à gamble, on ne peut plus gagner d'argent et on reste à zéro.

Notons que si une chaine de Markov à un état absorbant, il est fort probable qu'il y ait plusieurs états absorbant et qu'on puisse observer un pattern.

1.6 TP 1 - Rappel Probabilités et Chaines de Markov en Temps Discret

Cette semaine, le TP se penchait sur 2 sujets:

1. Rappel sur les concepts en probabilité
2. Intro aux Processus Stochastiques

1.6.1 Rappel sur les concepts en probabilité

1. Principe Inclusion-Exclusion
2. Probilités Totales pour généraliser le nombre de tirage avec et sans remise: $P(A_1|B)P(B) + P(A_2|B)P(B)$

3. Trouver la densité marginale d'une v.a: si continues, on doit essayer de retrouver une fonction de densité pour éviter d'avoir à résoudre l'intégrale

1.6.2 Intro aux Processus Stochastiques

1. Déterminer si une p.s. est Markov ou non
2. Trouver/Lire une Matrice de Transition
3. Déterminer la probabilité de transition d'un état à un autre
4. Tracer le Graphe

1.7 Intro aux Processus Stochastiques

2 Semaine 2

2.1 Théorie 1: Probabilité de Transition à plusieurs étapes

Big Idea

Ce cours-ci nous présentait certaines méthodologies pour déterminer la probabilité de transition à plusieurs étapes pour des P.S discrets à temps homogène satisfaisant la propriété de Markov

Outline

1. Modèles: Marche aléatoire, Processus de Branchement, Modèle de diffusion de Gaz
2. Probabilité de transition avec probabilité conditionnelle
3. Probabilité de transition avec Relation Chapman-Kolmogrov

2.1.1 Modèles: Marche aléatoire, Processus de Branchement, Modèle de diffusion de Gaz

Dans un premier temps, on a réviser les notions de marche aléatoire, processus de branchement et modèle de diffusion de gaz. Essentiellement, on voulait s'apercevoir que

1. La valeur de X_n ne peut que se déplacer de 1 (dans la plupart du temps)
2. Conditionnement: on peut trouver la probabilité de transition d'un état à l'autre par conditionnement p/r à l'étape précédante

2.1.2 Probabilité de transition avec probabilité conditionnelle

Dans les cours précédants, on nous donnait la matrice de transition pour déterminer la probabilité de se déplacer d'un état à l'autre. Ici, on voit 2 résultats importants:

1. si P.S Markov et homogène (même proba peu import le temps), alors

   $$P[X_2 = 3, X_1 = 2 | X_0 = 1] = P[X_{n+2} = 3, X_{n+1} = 2 | X_n = 1]$$

   , ce qui veut dire que la proba de transition d'état ne dépend pas d'un temps quelconque, mais que de la "distance" (nombres de pas) entre 2 états, si P.S Markov est homogène
2. On peut utiliser la probabilité conditionnelle pour déterminer la proba de transition entre 2 états

Preuve pour 1

Puisqu'on a une chaine de Markov, les les 2 états sont indépendants et on peut utiliser la règle de multiplication:

$$P[X_2 = 3, X_1 = 2|X_0 = 1]$$
$$= \frac{P(X_2 = 3, X_1 = 2, X_0 = 1)}{P(X_0 = 1)}$$
$$= (\frac{P(X_2 = 3, X_1 = 2, X_0 = 1)}{P(X_0 = 1)})(\frac{P(X_1 = 3, X_1 = 2)}{P(X_0 = 1)})$$
$$...$$

Probabilité Conditionnelle pour trouver la probabilité de transition

Plus généralement, pour trouver la probabilité de transition à plusieurs étapes, on doit conditionner par les étapes intermédiaires:

1. 2 étapes: $P(X_2 = 1|X_0 = 1) = \sum_{i=1}^{n} P(X_2 = 2, X_1 = k|X_0 = 1)$
2. 3 étapes: $P(X_3 = 1, X_2 = 1|X_0 = 1) = P(X_3 = 1, X_2 = 1)P(X_2 = 1|X_1 = 1)P(X_1 = 1|X_0 = 2)$
3. m étapes: $P(X_{n+m} = j|X_n = i) = P(n = j|X_0 = i)$

2.1.3 Probabilité de transition avec Relation Chapman-Kolmogrov

La relation de Chapman-Kolmogrov est pratique, car elle nous permet de généraliser le calcul pour la probabilité de transition en m étapes. Au lieu de multiplier individuellement les intermédiaires à chaque étapes, on peut utiliser la multiplication matricielle pour obtenir la matrice de transition après m étapes. On note $P^(m) = P^m$, P: matrice de transition.

Par exemple, si on veut la proba de transition à 3 étapes, on n'a qu'à faire

$$P \times P \times P$$

2.2 Théorie 2

Big Idea

Outline

1. Preuve de la Relation Chapman-Kolmogrov
2. Classes: Communication entre états

2.2.1 Preuve de la Relation Chapman-Kolmogrov

La relation de Chapman-Kolmogov nous dit que si on a une chaine de Markov à temps homogène, on peut multiplier les matrices de transition pour obtenir la probabilité de passer de l'état n à l'état n+k

1. $P^m = P^m$

2. $P^{m+n} = P^m P^n$

La preuve de cette relation se fait par induction, et on montre l'étape d'induction avec la propriété des chaines de Markov et la probabilité conditionnelle. Essentiellement, on veut montrer qu'en multipliant chaque entrées entre elles, on obtient la proba à l'étape n x la proba à l'étape 1 et qu'en multipliant ces matrices, on obtient P^{n+1}

Cas de base

1. t=0: matrice identité, car on ne change pas d'état
2. t=1: $P^1 = P$

Étape d'induction

1. Puisque CM est homogène dans le temps, alors $P^{n+1} \implies P_{ij}^{n+1} = P[X_{n+1} = j|X_n = i] = P[X_{n+1} = j|X_0 = i]$
2. En considèrant les états intermédiaires, on obtient $P[X_{n+1} = j|X_0 = i] = \sum_{i=1}^{n} P[X_{n+1} = j|X_n = k]$
3. Puisque c'est une chaine de Markov, on a que
$$\sum_{i=1}^{n} P[X_{n+1} = j, X_n = k|X_0 = i]$$
4. Par probabilité conditionnelle, on a que
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{P[X_{n+1} = j, X_n = k, X_0 = i]}{P[X_0 = i]} \frac{P[X_n = k, X_0 = i]}{P[X_n = k, X_0 = i]}$$
5. En réarrangeant les termes, on obtient la proba de transition à l'étape n et en une étape
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{P[X_{n+1} = j, X_n = k, X_0 = i]}{P[X_n = k, X_0 = i]} \frac{P[X_n = k, X_0 = i]}{P[X_0 = i]}$$
6. et on applique la définition de la multiplication matricielle

2.2.2 Classes: Communication entre états

La deuxième partie du cours mettait l'emphase sur la séparation des états par des classes. Essentiellement, on veut être capable de différentier les différentes classes dans une matrice de transition afin de déterminer si la matrice est irréductible ou non.

Qu'est-ce qu'une classe

Tous les états qui communiquent entre eux forment une classe. Pour que 2 états communiquent entre entre elles, il faut qu'elles satisfassent les conditions suivantes:

1. Réflexive: $i \leftrightarrow i$
2. Symétrique: $i \leftrightarrow j \Longleftrightarrow j \leftrightarrow i$
3. Transitive: $i \rightarrow j, j \rightarrow k \Longrightarrow i \rightarrow k$

Quelles sont les types de classes

1. État absorbant: On ne peut jamais quitter cet état après y être entré
2. État de non-retour: une fois qu'on n'a quitté cet état, on ne peut jamais revenir

Qu'est-ce qu'une matrice irréductible

On dit qu'une matrice est irréductible si tous les états communiquent entre elles. Autrement dit, tous les états forment une seule classe.

2.3 TP 2 - Classification des états

Le TP de cette semaine se penchait sur 2 buts:

1. Déterminer la probabilité de passer d'un état à l'autre
2. Classification des états

2.4 Déterminer la probabilité de passer d'un état à l'autre

Pour déterminer la probabilité de passer d'un état à l'autre, on a deux façons:

1. si le nombre de steps est relativement petit: conditionnement (tracer l'arbre peut aider)
2. si le nombre de steps est grand: utiliser la relation de Chapman-Kolmogrov pour calculer la matrice de transition en diagonalisant

2.5 Classification des états

Dans une matrice de transition, on veut être capable de regrouper les états similaires afin de créer de classes. Tous les états dans une même classe devraient pouvoir être accessible, c-à-d qu'il existe un chemin entre les 2. Les classes peuvent être:

1. Transition vs Récurrent: on pourrait quitter la classe et ne jamais y revenir vs une fois qu'on est dans cette classe, on ne peut jamais la quitter (non-retour)
2. Périodique vs Apériodique: après combien de pas en revient à l'état d'où on est partit (cycle) vs pgcd = 1

3. Irréductibilité: le graphe forme une seule classe

Remarque. *Il est utile de tracer le graphe pour déterminer les classes*

3 Semaine 3

3.1 Théorie 1

Big Idea

Le but de cette section est d'essayer de séparer les états de transition en classe. Cette séparation est assez pratique, car tous les états d'une même classe ont les mêmes propriétés.

Un autre concept abordé est la notion de temps de ruine, qui représente le nombre d'étapes après lequel on ne peut plus jouer. On verra qu'il est impossible de calculer l'espérance du temps de ruine pour une v.a. infinie, car on ne peut pas calculer sa distribution, mais si on a une chaine de Markov, on peut utiliser ces propriétés pour estimer ce temps de ruine. Finalement, on a finit avec quelques exemples.

Outline

1. Classification des états: types de classes et propriétés
2. Temps de Ruine
3. Périodicité

3.2 Classification des états: types de classes et propriétés

3.2.1 Types de Classes

Le premier concept à se souvenir est que la notion d'état et de classe est similaire. Puisque tous les états d'une même classe possèdent les mêmes propriétés, alors parler des propriétés d'une classe ou d'un état revient au même.

Il existe plusieurs types d'états/classe:

1. Classe Transitoire vs Classe Récurrente:
   - Transitoire: On peut rester dans cette classe ou y sortir $0 < P_{j,j} < 1$
   - Récurrente: Une fois qu'on entre dans cette classe, on ne peut plus y sortir $p_{j,j} = 1$
2. Classe Fermée vs Classe ouverte:
   - Fermée: on ne peut que reach des états à l'intérieur de la classe
   - Ouverte:
3.

3.2.2 Propriétés des Classes

1. Si l'état j est absorbant, alors elle est forme sa propre classe et on dit que c'est une classe récurrente
2. Si la classe est fermée, alors c'est une classe récurrente
3. Un état est transient si $i \to j$, mais $j \not\to i$
4. Si l'espace d'états est fini (il y a un nombre fini d'états), alors il y a au moins une classe récurrente

Remarque. *1. Pour montrer qu'une classe est transiente, on n'a qu'à montrer la propriété (3) pour l'un des états de la classe*

2. Si on a deux classes et qu'on montre que l'une d'entre elles est transiente, l'autre est nécessairement récurrent par (4)

3.3 Temps de Ruine

Le temps de ruine correspond au nombre d'étapes après laquelle on ne peut plus jouer (on get stuck dans un espace récurrent?). Plus généralement, on a 2 buts:

1. Déterminer la probabilité de se faire ruiner en n étapes: possible de calculer pour un petit nombre d'étape
2. Détermine l'espérance du temps de ruine: impossible à calculer puisqu'on n'a pas la fonction densité (pcq v.a. infinie)

3.4 Périodicité

Definition 3.4.1 (Période d'une classe)**.** *La période d'une classe est le pgcd de tous les temps $n \geq 1$ vérifiant $p_{j,j} > 0$. Autrement dit, on*

1. *identifie tous les chemins qui nous permettent de revenir à l'état initial j*
2. *compte le nombre d'étapes pour chaque chemin*
3. *faire le pgcd entre ces nombres d'étapes*

Remarque (Classe Apériodique)**.** *Si la période d'une classe est de 1, on dit que la classe est apériodique. Ainsi, une classe récurrente est apériodique*

Remarque. *On dit que la période est une propriété de classe, car les états et la classe ont la même période ie on peut interchanger l'utilisation de ces termes.*

3.5 Théorie 2

Big Idea

Cette classe-ci se concentrait sur la notion de distribution stationnaire, qui représente la probabilité de transitionner vers l'état x_i à long terme. On peut représenter cette probabilité par un vecteur de probabilité π, qui est une probabilité stationnaire. Notre but sera de déterminer la probabilité stationnaire représentant la probabilité de transitionner d'un état à long terme.

Outline

1. Retour sur les classes de transition
2. Distribution Stationnaire

3.5.1 Retour sur les classes de transition

On a fait l'exemple 4 avec lequel on avait 2 classes de récurrence et une classe de transition. Encore une fois, pour montrer qu'une classe est récurrente,on doit montrer que la probabilité de retour est de 1 $p_{j,j} = 1$. Pour montrer qu'une classe est transitive, on doit montrer que

1. Un état de la classe n'est pas symétrique à celui d'une autre classe: $i \to j \not\Longrightarrow j \to i$ ou
2. La proabilité de non retour n'est pas égale à 1 : $0 < p_{j,j} < 1$

Pour faire déterminer la périodicité de la classe, on fait le pgcd des chemins de retour. Si la périodicité est de 1 (pgcd=1), on doit que la classe est apériodique.

3.5.2 Distribution Stationnaire

Qu'est-ce qu¡une distribution stationnaire

La distribution stationnaire sert à décrire l'équilibre du système à long terme. On veut déterminer la probabilité de finir dans l'état x_i, peu importe dans quel état on commence. On représente la probabilité de finir dans chaque vecteur par $\pi = (\pi_1, ..., \pi_n)$, qu'on nomme vecteur probabilité, où π_i est la probabilité de finir à l'état x_i.

Comment calculer la probabilité stationnaire de π

Pour déterminer la valeur de l'état à long terme, on doit calculer la probabilité stationnaire par un produit matriciel $\pi = \pi \cdot P$, où P est la matrice de transition. Intuitivement, on veut veut que la probabilité du vecteur à un moment donné et celui à un temps très loin soit la même, car connaitre ce qu'il s'est passé il y a 3000 ans ne change pas vraiment ce qu'on a aujourd'hui.

Pour ce faire, on veut trouver les paramètres π_i en faisant la multiplication matricielle:

$$\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3) \cdot P = (\pi_1, \pi_2, \pi_3) \begin{bmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Cependant, si on résout cette matrice, on obtient une infinité de solutions. Ainsi, on doit utiliser la propriété markovienne nous disant que la somme des probabilités de chaque ligne est 1

$$\sum_{k=1}^{3} \pi_k = 1$$

Remarque (Pourquoi la distribution stationnaire génère une infinité de solutions)**.** *La matrice de probabilité stationnaire génére une infinité de solutions, car les vecteurs colonnes ne sont pas linéairement indépendantes, ce qui veut dire qu'on peut écrire chaque vecteur comme une combinaison linéaire des autres. Ainsi, on ne peut pas associer de pivot à chaque colonne. Par conséquent, on a une variable libre.*

Que faire si l'espace d'états est infini

Si l'espace d'état est infini, il se peut que la probabilité stationnaire n'existe pas. Pour vérifier si elle existe, on n'a qu'à faire le produit matriciel (si possible), et vérifier que la somme des probabilités de chaque ligne est de 1

3.6 TP

Pas de TP (fête de la Reine)

4 Semaine 4

4.1 Théorie 1

TODO

Big Idea

Outline

1. Théorème de Convergence
2. Début du Théorème Ergodique

4.2 Théorie 2

Quiz 1

4.3 TP 3 - Distribution Stationnaire

Le TP 3 portait sur les distributions stationnaires et sur la classification des classes

1. Représenter le graphe associé pour classifier les états et déterminer si la classe est irréductible
2. Déterminer la lois stationnaire

4.4 Représenter le graphe associé pour classifier les états

Il faut se souvenir des justifications suivantes:

1. Apériodique: pgcd=1 (à cause des boucles s'il y en a)
2. Réccurente: $P_{ii} = 1$: La probabilité de retour est certaine
3. Irréductible: La CM finie forme une unique classe + thm: CM finie a au moins une classe récurrente.

4.5 Déterminer la/les lois stationnaires

La loi stationnaire se trouve en résolvant $\pi = \pi \cdot P$ et $\sum \pi_i = 1$

Par contre, il faut se souvenir que s'il y a plusieurs classes récurrentes, alors la loi n'est pas unique et dépend de la classe de départ. Si l'état de départ est un état transitoire, alors on doit considérer qu'on a autant de chance d'aller dans un état transitoire qu'un autre. Par contre, si on commence dans un état récurrente, il faut considérer qu'on ne reste qu'à l'intérieur de cette classe.

5 Semaine 5

5.1 Théorie 1

Big Idea

Outline

1. Retour sur le Théorème de Convergence
2. Details sur le Théorème Ergodique
3. Théorème 3: Combinaison Théorème Convergence et Ergodique

5.2 Retour sur le Théorème de Convergence

5.3 Théorème de Convergence

Le théorème de convergence nous dit que si une chaine de Markov est irréductible et apériodique, alors $\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)} = \pi_j$. En d'autres mots, si la CM est irréductible et apériodique, alors la proportion du temps passé dans chaque état est donné par la distribution stationnaire (si elle existe)

5.3.1 Importance des hypothèses du Théorème de Convergence

On s'est aussi penché sur l'importance des hypothèses du théorème de convergence

1. Irréductible: Si la CM n'est pas irréductible, alors $i \not\to j$ et $P_i j > 0$, ce qui contredit le fait que la probabilité de retour soit de 1
2. Apériodique: Si la CM est périodique (pgcd $I_n > 1$), alors la limite ne pourrait ne pas exister, car la suite est alternée
3. Existence de la distribution stationnaire

5.4 Details sur le Théorème Ergodique

5.4.1 Théorème Ergodique

Le théorème Ergodique dit que pour une chaine de Markov irréductible, CM admet une distribution stationnaire $\iff$ elle est récurrente positive, et

$$\mathbb{E}[T_j] = \frac{1}{\pi_j}$$

En d'autres mots, on est capable d'estimer l'espérance du nombre d'étapes pour retourner à l'état i à l'aide de la distribution stationnaire d'une chaine de Markov est irréductible et est récurrente positive. On est donc capable de calculer l'espérance de premier retour sans avoir la distribution de T_j

Plus généralement, si CM irréductible, alors

$$\text{Existence de } \pi \iff \text{Récurrente positive et } \mathbb{E}[T_j] = \frac{1}{\pi_j}$$

Remarque (Récurrente positive vs Récurrente nulle). 1. *CM positive:* $\mathbb{E}[T_j] < \infty$

2. *CM nulle:* $\mathbb{E}[T_j] = \infty$

5.5 Théorème 3: Combinaison Théorème Convergence et Ergodique

Le théorème 3 est la combinaison du théorème de convergenve et du théorème ergodique. Si les hypothèses des théorèmes 1 et 2 sont respectées (ie irréductible et ergodique: apériodique et réccurente), alors la loi stationnaire existe et est unique, et on a

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)} = \frac{1}{\mathbb{E}[T_j]}$$

5.5.1 Marche Aléatoire Réfléchie

Une marche aléatoire réfléchie est représentée par la fonction suivante:

$$p_{ij} = \begin{cases} \text{p} & \text{if j=i+1} \\ \text{1-p} & \text{if j=i-1 et } p_{0,1} = 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Ainsi, on peut représenter la marche aléatoire par une somme de Bernouilli (variable indicatrice): $X_n = X_0 + Y_1 + ... + Y_n$. En divisant par le nombre d'essais n de chaque côté, on obtient $\frac{X_n}{n} = \frac{X_0}{n} + \frac{Y_1+...+Y_n}{n}$

Or, puisque l'état initial est une constante, $\lim_{n\to\infty} \frac{X_0}{n} = 0$, alors que $\frac{Y_1+...+Y_n}{n} = E[Y_1] = 1(p) + (1-p)(-1) = 2p - 1$. Ainsi, $X_n \ (2p-1)\cdot n$

On obtient donc 2 cas:

1. $2p - 1 > 0 : p > 1/2$: on a $\lim_{n\to\infty} X_n \ (2p-1)\cdot n = \infty$: puisque x_n tend vers l'infini, il existe un n_0 après lequel on ne revient jamais vers l'état de départ (définition topologique de la limite à l'infini).
$\iff$ Ainsi, puisque la probabilité de non-retour n'est pas 1, l'état i est transient.
$\iff$ Puisque la CM est irréductible, alors la classe est transiente
$\iff$ la probabilité stationnaire n'existe pas (théorème ergodique)

2. $2p - 1 < 0 : p < 1/2$: $\lim_{n\to\infty} X_n \ (2p-1)\cdot n = -\infty$: par définition topologique de la limite à moins l'infini, il existe un n_0 pour lequel on ne peut pas dépasser. Ainsi, la probabilité de retour est de 1. Donc, l'état

est récurrent. Il ne reste juste qu'à vérifier si la probabilité stationnaire π existe pour savoir si la classe est récurrente positive ou nulle.

5.6 Théorie 2

Big Idea

Ce cours-ci portait sur les marches aléatoires réfléchies infinie. Auparavant, on ne considérait que les états finis, et on savait que si la classe était irréductible, alors elle était récurrente positive. Cependant, lorsqu'on a une marche aléatoire infinie, il faut considérer 2 cas:

1. p¿1/2: Puisque X_n tend vers l'infini, alors la probabilité de non retour à l'état i ¿0, ce qui implique que la classe est transiente et que la distribution stationnaire n'existe pas (par théorème ergodique)
2. p¡1/2: Puisque X_n tend vers moins l'infini, alors la probabilité de retour est de 1, et puisque la CM est irréductible, alors la classe est récurrente. Pour déterminer si la classe est récurrente positive (ou nulle), il faut vérifier que la distribution stationnaire existe.

Ce cours-ci porte donc sur la preuve du 2e cas: on veut montrer que la distribution stationnaire existe et que la classe est récurrente positive.

Outline

1. Preuve de la convergence d'une marche aléatoire si p¡1/2

5.7 Preuve de la convergence d'une marche aléatoire si p¡1/2

Notons que la matrice de transition d'une marche aléatoire réfléchie est donnée par $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 1-p & 0 & p & ... & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \end{bmatrix}$

Ainsi, on doit résoudre le SEL suivant:

1. $\pi_0 = (1-p)\pi_1$
2. $\pi_1 = \pi_0 + (1-p)\pi_2$
3. $\pi_2 = \pi_1 + (1-p)\pi_3$
4. ...
5. $\pi_n = \pi_{n-1} + (1-p)\pi_{n+1}$

En résolvant et en exprimant chacune des lignes en termes de π_0, on obtient la relation de récurrence suivante: $\pi_n = \frac{p^{n-1}}{(1-p)^n} \cdot \pi_0$

On n'a qu'à vérifier ce résultat par induction en partant de l'hypothèse de base $\pi_n = \frac{p^{n-1}}{(1-p)^n} \cdot \pi_0$ et en isolant π_{n+1} pour montrer que n+1 est vraie: $\pi_{n+1} = \frac{p^n}{(1-p)^{n+1}}$

5.8 TP 4 - Théorèmes de Convergence et Ergodique

Le 4e TP portait sur 3 sujets:

1. Utilisation du théorème de convergence et du théorème ergodique
2. Bonus: Chaines de Markov Réversibles

5.8.1 Utilisation du théorème de convergence et du théorème ergodique

Il faut se rappeler que le théorème de convergence nous dit la chose suivante: si la chaine de Markov est irréductible, apériodique et admet une distribution stationnaire, alors la probabilité à long terme est donné par la distribution stationnaire. On note $\lim_{n\to\infty} P_{0k}^{(n)} = \pi$, où $\pi = \pi \cdot P$ et $\sum \pi_i = 1$

Le théorème ergodique nous dit que si la Chaine de Markov est ergodique (irréductible, apériodique et récurrente positive), alors l'espérance du temps de retour est donné par $\mu_i = E[T_i] = \frac{1}{\pi_i}$

On cherche à répondre aux questions suivantes:

1. Trouver la distribution stationnaire: Théorème de Convergence
2. Quelle est la probabilité de se retrouver à l'état i à long terme: Trouver la distribution stationnaire
3. Trouver l'espérance du temps de retour: théorème ergodique

5.8.2 Problème: Probabilité que S_n soit divisible par 6

Considérons un dé à 6 faces. On veut déterminer la probabilité que la somme des n premiers lancers de dé est divisible par 6. What if n tend vers l'infini.

On doit considérer $X_n = S_n (mod 6)$

5.8.3 Bonus: Chaines de Markov Réversibles

Une chaine de Markov est réversible ssi la probabilité de traverser un cycle est le même dans les 2 sens. On dit que la chaine de Markov admet un réseau de conductances. Justification: Puisque $c_{ij} = c_{ji}$, alors $m_i p_{ij} = n_j p_{ji} \implies$ la chaine est réversible

La probabilité de transition est donné par le poids de l'arc: $p_{ij} = \frac{c_{ij}}{m_i}$

On dit note que $(m_i) \propto pi_i$ et puisque $\sum \pi_i = 1$, alors $\pi_i = \frac{m_i}{M}, M = \sum m_s$

Exemple: Probabilité qu'un roi revienne sur la même case

Un échequier a une dimension de 8x8. On doit remarquer qu'il y a 3 types de cases:

1. coin (x4): 3 options $\Longrightarrow m_{coin} = 3$
2. bord (x24): 5 options $\Longrightarrow m_{bord} = 5$
3. centre (x36): 8 options $\Longrightarrow m_{centre} = 8$

Ainsi, $M = 36xm_{centre} + 24xm_{bord} + 4xm_{coin} = 420$, et donc $\pi_{coin} = 3/420$, $\pi_{bord} = 5/420$, $\pi_{centre} = 8/420$,

Donc, en sachant qu'on part du coin, il faut en moyenne 140 coups pour revenir sur le même coin.

6 Semaine 6

6.1 Théorie 1

NEXT

Big Idea

Outline

1.
2.
3.

6.2 Théorie 2

Big Idea

Outline

1.
2.
3.

6.3 TP 5 - Marche aléatoire et Processus de Poisson

7 Semaine 7

7.1 Théorie 1

Big Idea

Outline

1.
2.
3.

7.2 Théorie 2

Big Idea

Outline

1.
2.
3.

7.3 TP

8 Semaine 8

8.1 Théorie 1

Big Idea

Outline

1.
2.
3.

8.2 Théorie 2

Big Idea

Outline

1.
2.
3.

8.3 TP

9 Semaine 9

9.1 Théorie 1

Big Idea

Outline

1.
2.
3.

9.2 Théorie 2

Big Idea

Outline

1.
2.
3.

9.3 TP

10 Semaine 10

10.1 Théorie 1

Big Idea

Outline

1.
2.
3.

10.2 Théorie 2

Big Idea

Outline

1.
2.
3.

10.3 TP

11 Semaine 11

11.1 Théorie 1

Big Idea

Outline

1.
2.
3.

11.2 Théorie 2

Big Idea

Outline

1.
2.
3.

11.3 TP

12 Semaine 12

12.1 Théorie 1

Big Idea

Outline

1.
2.
3.

12.2 Théorie 2

Big Idea

Outline

1.
2.
3.

12.3 TP

13 Semaine 13

13.1 Théorie 1

Big Idea

Outline

1.
2.
3.

13.2 Théorie 2

Big Idea

Outline

1.
2.
3.

13.3 TP

14 Semaine 14

14.1 Théorie 1

Big Idea

Outline

1.
2.
3.

14.2 Théorie 2

Big Idea

Outline

1.
2.
3.

14.3 TP

15 Semaine 15

15.1 Théorie 1

Big Idea

Outline

1.
2.
3.

15.2 Théorie 2

Big Idea

Outline

1.
2.
3.

15.3 TP

16 Semaine 16

16.1 Théorie 1

Big Idea

Outline

1.
2.
3.

16.2 Théorie 2

Big Idea

Outline

1.
2.
3.

16.3 TP