Handbook for Linear Algebra

Emulie Chhor

May 15, 2021

Introduction

This is a compilation of the intuition I have learned in Linear Algebra. The approach I want to take is a recursive top-down approach.

In my mind, linear algebra should be taught as follow:

1. What is Linear Algebra
2. Introduction to Vectors: Length, Dot Product, Linear Combination
3. Opérations sur les Matrices: Addition, Scalar Multiplication, Matrix Multiplication, transpose
4. System of Linear Equation (à part)
5. Interlude: Relations entre droites/plans: parallèles vs sécantes, distance
6. Linear Tranformation
7. Inverse of a Matrix
8. Determinants
9. Sous-Espace Orthogonaux
10. Eigenvalues and Eigenvectors
11. Diagonalization
12. Spaces, Subspaces
13. Bases et Changements de Bases
14. Bases Orthogonale
15. Singular Value Decomposition (SVD)

Plus généralement, on a 3 buts:

1. Résoudre un SEL
2. Diagonaliser une matrice avec les eigenvalue et eigenvectors

3. Traduire des vecteurs d'une base à l'autre avec les matrices de changements de base
4. Orthogonaliser une base avec Gram-Schmidt (ou QR decomposition)

Proof[subsection]

1 What is Linear Algebra

L'algèbre linéaire est l'étude des espaces vectoriels et sert de pont entre les différentes branches en mathématiques.

2 Introduction to Vectors: Length, Dot Product, Linear Combination

2.1 Overview

Le premier concept à comprendre est la notion de vecteur. Il est important de comprendre ce qu'est un vecteur algébriquement et géométriquement, car ces représentations nous permettra de comprendre et de caractériser ce qu'est un espace vectoriel et de généraliser nos conclusions à des objets plus complexes (polynômes, fonctions, matrice, ...). Il est donc essentiel de comprendre:

1. Qu'est-ce qui définit un vecteur algébriquement et géométriquement
2. Quelles sont les propriétés d'un vecteur
3. Opérations sur les vecteurs: addition, PPS
4. Combinaison Linéaire

2.2 Qu'est-ce qu'un vecteur

Comme mentionné plus tôt, un vecteur peut être visualisé géométriquement et algébriquement.

1. Géométriquement: flèche ayant une longeur et une direction
2. Algébriquement: composée de paramètres représentant les coordonnées sur les axes

2.3 Propriétés d'un vecteur

2.3.1 Overview

Un vecteur est caractérisé par sa longueur et son orientation. Encore une fois, il est nécessaire de bien comprendre pourquoi les propriétés d'un vecteur sont vraies algébriquement et géométriquement. Algébriquement, les propriétés des vecteurs sont vraies, car elles découlent du fait qu'un vecteur est définit dans les réels, qui forment un ring. Géométriquement, les propriétés modifient la longueur et la direction d'un vecteur

2.3.2 Longueur d'un vecteur

Calcul de la Longueur d'un vecteur

Definition 2.3.1 (Norme d'un vecteur). *TODO*

Definition 2.3.2 (Vecteur Unitaire). *TODO*

Propriétés de la longueur d'un vecteur TODO

Inégalité du Triangle TODO

2.3.3 Orientation d'un vecteur

Produit Scalaire

Definition 2.3.3 (Produit Scalaire). *TODO*

Intuition. *Le produit scalaire représente le "ratio" de la direction entre 2 vecteurs.*

Theorem 2.3.1 (Propriétés du produit scalaire). *TODO*

Theorem 2.3.2 (Inégalité de Cauchy-Schwarz).

Remarque. *L'inégalité de Cauchy-Schwarz nous donne un lien entre le produit scalaire et la norme de 2 vecteurs*

Angle entre 2 vecteurs

Definition 2.3.4 (Angle entre 2 vecteurs).

Intuition (Angle entre 2 vecteurs). *La formule de l'angle entre 2 vecteurs vient de TODO*

Theorem 2.3.3 (Vecteurs Perpendiculaires). *2 vecteurs u et v sont perpendiculaires si $u \cdot v = 0$*

Proof. La preuve se fait en isolant le produit vectoriel dans la formule de l'angle entre 2 vecteurs. □

Intuition. *Puisqu'on peut interpréter le produit scalaire comme la valeur représentant la similaritude entre la direction de 2 vecteurs, on peut voir $u \cdot v = 0$ comme 2 vecteurs n'allant pas vers la même direction.*

Remarque (Vecteurs Perpendiculaires et Indépendance Linéaire). *TODO*

2.4 Opérations sur les vecteurs: addition, PPS

2.4.1 Overview

Il existe 2 opérations élémentaires sur les vecteurs

1. Addition
2. Multiplication par un scalaire

2.5 Combinaison Linéaire

2.5.1 Overview

On peut utiliser l'addition et la multiplication scalaire de 2 vecteurs ou plus pour exprimer un autre vecteurs dans l'espace. La combinaison linéaire est essentielle pour caractériser un espace vectoriel, car on veut déterminer l'ensemble de vecteur qu'on peut former à partir d'un autre ensemble de vecteurs. On verra plus tard qu'il s'agit de span

2.5.2 Combinaison Linéaire et ses propriétés

Definition 2.5.1 (Combinaison Linéaire)**.** *TODO*

3 Opérations sur les Matrices: Addition, Scalar Multiplication, Matrix Multiplication, transpose

3.1 Overview

Le premier sujet abordés dans le cours d'algèbre linéaire est la notion de matrice. La plupart des professeurs s'attardent davantage à l'interprétation algébrique des matrices, car les matrices peuvent représenter plusieurs objets. On verra plus tard que les matrices peuvent représenter:

1. Transformation
2. Système d'équations Linéaire

Dans cette section, on s'attardera aux opérations algébriques de base des matrices:

1. Addition Matricielle
2. Multiplication par un scalaire
3. Multiplication Matricielle
4. Transposée d'une matrice
5. Power of Matrices

6. Bonus: Block Matrices

Il sera important de

1. Appliquer l'opération
2. Appliquer les propriétés de l'opération
3. Comprendre les preuves algébriques derrière les opérations
4. Bonus: Interpréter géométriquement les propriétés sur les matrices

3.2 Addition Matricielle

Definition 3.2.1 (Addition Matricielle).

Theorem 3.2.1 (Propriétés de l'addition matricielle).

3.3 Multiplication par un scalaire

Definition 3.3.1 (Multiplication par un scalaire).

Theorem 3.3.1 (Propriétés de la multiplication par un scalaire).

3.4 Multiplication Matricielle

Definition 3.4.1 (Multiplication Matricielle).

Theorem 3.4.1 (Propriétés de la multiplication matricielle).

3.5 Transposée d'une matrice

Definition 3.5.1 (Transposée d'une matrice).

Theorem 3.5.1 (Propriétés de la transposée d'une matrice).

3.6 Power of Matrices

3.7 Block of Matrices

3.7.1 Overview

Lorsqu'on doit appliquer des opérations sur des matrices de grandes dimensions, il est possible d'exprimer notre matrice en bloc de matrices, c-à-d des une plus petite matrice dont les éléments sont elles-mêmes des sous-matrices.

Souvent, si on remarque que une des sous-matrices est la matrice identité ou la matrice nulle, il peut être pratique d'exprimer la matrice originelle en sous-blocs.

Notons aussi que l'existence des sous-matrices facilitent la preuve de propriétés matricielles.

3.8 Block of Matrices and its properties

3.9 Proofs with block of matrices

4 System of Linear Equation

4.1 Overview

Les matrices peuvent être aussi utilisées pour résoudre des systèmes d'équations linéaires. Encore une fois, il est important de visualiser ces systèmes géométriquement et algébriquement. Géométriquement, on veut déterminer si 2 vecteurs ou plus s'intersectent ou non. Le même principe s'applique pour des plans. Algèbriquement, on veut déterminer l'ensemble de vecteurs qui vérifient le système. L'étude des équations linéaires se fera donc en quelques temps

1. Types de solutions: compatible vs incompatible, interprétation géométrique des solutions
2. Résolution de SEL avec les méthode de Gauss et de Gauss-Jordan

5 Linear Tranformation

5.1 Overview

Dans la plupart des cas, on peut interpréter une matrice comme une transformation, c-à-d une fonction qui prend en paramètre un vecteur et qui en recrache un autre. Dans notre cas, on se concentrera sur les transformations qu'on dit linéaire, c-à-d qu'ils préservent les propriétés avant et après transformations.

L'étude des transformations linéaires se fera en plusieurs étapes:

1. Interprétation géométrique et linéaire d'une transformation linéaire
2. Tranformation Linéaire d'une matrice standard
3. Common Linear Transformations: Rotation, Translation, Projection, ...
4. Composition de Transformation Linéaire

5.2 Interprétation géométrique et linéaire d'une transformation linéaire

Interprétation Géométrique d'une transformation linéaire

On peut identifier géométriquement une transformation linéaire si:

1. Origine reste au même endroit avant et après transformation
2. Les lignes sont mappées à des lignes

Remarque. *La transformation linéaire change le quadrillage de notre espace vectoriel. Plus tard, on verra qu'il existe plusieurs façons d'exprimer un vecteur dépendamment des bases de l'espace choisie, et on verra qu'on peut utiliser les transformations linéaires pour traduire ce vecteur d'un espace à l'autre.*

Proposition 5.1 (f(x) = ax+b n'est pas une transformation linéaire)**.** *La fonction affine n'est pas une transformation linéaire, car elle change l'origine de place. Plus tard, on verra qu'il est possible d'exprimer une fonction affine par une transformation linéaire.*

Interprétation Algèbrique d'une transformation linéaire

On peut identifier algébriquement une transformation linéaire si:

1. Addition: $T(v+u) = T(v) + T(u)$
2. Multiplication: $T(cv) = cT(v)$

Remarque. *Pour déterminer si une matrice représente une transformation linéaire, on peut vérifier les 2 conditions d'addition et de multiplication d'un coup*

$$T(cu + dv) = cT(u) + dT(v)$$

5.3 Tranformation Linéaire d'une matrice standard

Pourquoi veut-on calculer la transformation linéaire d'une matrice standard

Une propriété des transformation linéaire est qu'on peut représenter toutes transformations linéaires dans la forme $T(v) = [T]v, [T] = [T(e_1)...T(e_n)]$

Essentiellement, cette propriété nous dit qu'on peut construire la matrice de transformation linéaire standard en appliquant la transformation linéaire sur chacun des vecteurs standard de la base

Intuition (Pourquoi peut-on calculer la transformation linéaire d'une matrice standard de cette façon)**.** *TO REVIEW*

5.4 Common Linear Transformations: Rotation, Translation, Projection, ...

TODO

5.5 Composition de Transformation Linéaire

Pourquoi calculer la composition de transformation linéaire

On peut appliquer plusieurs transformations linéaires successivement en appliquant successivement le produit de matrice de transformation linéaire. Cependant, il existe une façon plus efficace d'appliquer toutes les transformations linéaire d'un coup: la composition de transformation linéaire

Essentiellement, la composition de transformation linéaire nous dit qu'on peut trouver la matrice qui performe toutes les transformations d'un coup en multipliant les matrices de transformations une à la suite de l'autre (gauche vers la droite: transformation 1 x transformation 2 x ...)

Lien entre Composition de Transformation et Matrices Élémentaires

6 Inverse of a Matrix

6.1 Overview

Dans la section sur la combinaison linéaire, on a vu qu'il était possible d'exprimer une matrice sous la forme Ax=b: on pouvait obtenir le nouveau vecteur b en appliquant une multiplication entre la matrice A et le vecteur x.

Dans cette section, on cherche le contraire: on connait la matrice de transformation A et le vecteur après transformation b, et on veut trouver le vecteur originel x. Pour ce faire, un peu comme dans les réels lorsqu'on doit appliquer les opérations de soustraction et de division pour défaire les opérations d'addition et de soustraction, on veut défaire ce que la transformation linéaire a fait sur x en appliquant la matrice inverse de A sur le vecteur b, qu'on note A^-1

Cependant, il n'est pas toujours possible de trouver un inverse pour la matrice A, un peu comme dans le multiplication, ou on ne peut pas trouver une valeur unique pour $x \cdot 0 = 0$. Ainsi, cette section comportera 2 buts principaux:

1. Déterminer si une matrice est inversible
2. Trouver la matrice inverse si elle existe

Pour ce faire, on doit d'abord se familiariser avec certains concepts préliminaires, notamment la matrice élémentaire

6.2 Matrices Élémentaires

6.2.1 Overview

Pour comprendre et trouver les matrices inversibles, il faut d'abord comprendre la notion de matrice élémentaire, car elles permettent de "renverser" les opérations lignes faites sur les matrices.

Essentiellement, on peut associer chaque opération ligne à une matrice élémentaire, qui est le produit entre cette opération et la matrice identité. Ainsi, puisque chaque matrice élémentaire et inversible, on peut multiplier la matrice de transformation A par chacune des matrices élémentaires inverses pour obtenir la matrice inverse de A, qui nous permettra de trouver le vecteur orignial x

6.3 Matrice Inversible et ses propriétés: Comment déterminer si une matrice est inversible

6.4 Calculer l'inverse d'une matrice

6.4.1 Overview

Il existe plusieurs façons de calculer l'inverse d'une matrice:

1. Méthode de Gauss: $[A|I]$ $[I|A^-1]$
2. Formule de l'inverse d'une matrice 2x2

7 Determinants

7.1 Overview

Le déterminant est un concept assez important en algèbre linéaire, car il nous permet de :

1. Calculer l'aire d'un parallélogramme
2. Déterminer si la matrice est inversible ou non
3. Résoudre un SEL avec la règle de Cramer

7.2 Déterminant d'une matrice et propriétés

Definition 7.2.1 (Déterminant d'une matrice)**.**

Intuition (Interprétation Géométrique du déterminant)**.** *Le déterminant nous donne une valeur numérique qui nous dit à quel point l'aire de chaque quadrillage a grandit/rapetissé:*

$$det(A) = \frac{area/volume\ parallélogramme}{area/volume\ square/cube}$$

1. *Si det(A)=1, alors le quadrillage est resté de la même taille. Il y aurait pu avoir rotation*
2. *Si det(A)¡0 : le quadrillage a flippé de bord verticalement, alors les vecteurs sont inversés*
3. *Si det(A)¿0 : le quadrillage n'a pas flippé*
4. *Si* $|det(A)| > 1$ *: les vecteurs de la base se sont allongés*
5. *Si* $0 < |det(A)| < 1$ *: les vecteurs de la base se sont racourcis*

Definition 7.2.2 (Matrice Orthogonale)**.** *On dit qu'une matrice est orthonale si* $AA^T = A^TA = I$
Le déterminant d'une matrice orthogonale est de $det(A) = 1 \ ou \ -1$

Intuition. *Si une matrice est orthogonale, alors sa transformation est probablement une rotation ou un réflexion.*

7.2.1 Propriétés du déterminant d'une matrice

Theorem 7.2.1 (Propriétés du déterminant)**.**

Produit de Matrice: $det(AB) = det(A)det(B)$

Transposée de Matrice:

Remarque. *Encore une fois, les propriétés peuvent être interprétées géométriquement. Puisqu'on sait que le déterminant représente l'aire, on peut TODO*

7.3 Calcul du déterminant

7.3.1 Overview

Il existe plusieurs méthodes pour calculer le déterminant d'une matrice:

1. Diagonale d'une matrice triangulaire: on applique les opérations élémentaires sur la matrice et on multiplie la diagonale
2. Formule d'une matrice 2x2
3. Matrices de cofacteurs

7.4 Calculer l'aire d'un parallélogramme

7.5 Déterminer si la matrice est inversible ou no

Theorem 7.5.1 (Déterminant d'une matrice inversible)**.** *Une matrice est inversible si* $det(A) \neq 0$

Intuition. *Puisqu'on peut interpréter le déterminant comme le ratio après/avant la transformation, ça veut donc dire que la transformation nous a fait perdre une dimension ou plus et qu'il est impossible de retrouver le vecteur original puisqu'il en existe plusieurs. Ce n'est pas one-onto one*

7.6 Résoudre un SEL avec la règle de Cramer

Remarque (Pourquoi résoudre un SEL avec Cramer plutôt qu'avec Gauss)**.** *TODO*

8 Eigenvalues and Eigenvectors

8.1 Overview

Les eigenvalues et les eigenvectors combinent les concepts vus précédemment (déterminant, inverse, noyau) afin de mieux comprendre les effets d'une transformation linéaire sur le quadrillage.

On peut aussi se servir du eigenvalue et du eigenvector pour "compresser" l'information (ex: SVD), qu'on verra plus tard

Que représente le eigenvalue et le eigen vector

En fait, le eigenvalue et le eigenvector sont le vecteur v et le scalaire λ satisfaisant l'équation suivante:

$$Av = \lambda v$$

Intuitivement, cette équation représente l'ensemble des vecteurs v qui, en appliquant la matrice de transformation A, est équivalent à multiplier le vecteur par un scalaire, qui "stretch" le vecteur. Autrement dit, la direction du vecteur ne change pas, seul sa longueur change.

Notons qu'un eigenvalue et un eigenvector sont toujours associé ensemble. Si on trouve un eigenvalue, alors on peut trouver son eigenvector et vice-versa.

Quel est le lien entre le déterminant, inverse, noyau et eigenvector/ eigenvalue?

En transformant l'équation vue précédemment en problème de zéro, on a que

$$(A - \lambda I)v = 0$$

, ce qui implique que $A - \lambda I$ n'est pas inversible, car

1. $dim(null(A - \lambda I)) > 0$
2. $det(A - \lambda I) = 0$

Intuitivement, on peut se dire que la transformation linéaire n'est pas inversible, car la transformation linéaire nous fait perdre au moins une dimension: on passe de $\mathbb{R}^n$ à $\mathbb{R}$. Ainsi, si on perd une dimension, alors le déterminant est nécessairement nul, car l'aire formé par les vecteurs est nulle, et le noyau est nécessairement non-vide, car il il existe des vecteurs pour lesquels la transformation linéaire fait perdre des dimensions.

Grandes Lignes du chapitre

Le but de ce chapitre est d'apprendre à trouver les eigenvectors et les eigenvalues associés à une matrice. Plus généralement, on parlera de eigenspace, c-à-d la base représentant la famille de ces vecteurs.

Habituellement, on trouve le eigenspace en suivant les étapes suivantes:

1. Trouver le Eigenvector en résolvant $det(A - \lambda I) = 0$
2. Trouver le eigenvector en résolvant le SEL $(A - \lambda I)v = 0$ pour chacune des valeurs propres trouvées
3. Former la base avec les vecteurs propres trouvés.

8.2 Eigenvalue

8.3 Eigenvector

8.4 Eigenspace

8.5 Nombre Complexes et eigenvalues

Parfois, lorsqu'on calcule les eigenvalues, on obtient $\lambda^2 = -1$, qui ne se trouve pas dans les réels. On doit donc introduire les nombres complexes pour résoudre cette équation.

Intuitivement, on peut se dire qu'on ne peut pas trouver de vecteurs dont la transformation linéaire ne fait que stretch le vecteur, mais on peut quand même trouver une solution.

Que représente un eigenvalue imaginaire?

TODO

8.6 Multiplicity

Definition 8.6.1 (Algebraic Multiplicity)**.** *Each eigenvalue is associated with an algebraix multiplicity ie how many time the eigenvalue occurs. It is the exponant on* λ

Definition 8.6.2 (Geometric Multiplicity)**.** *Dimension of Eigenspace (how many vectors are in the eigenspace)*

Why do we care about multiplicity: Fundamental Theorem Algebra

Theorem 8.6.1 (Geometric Multiplicity *leq* Algebraic Multiplicity)**.**

Le théorème fondamental de l'algèbre nous dit que tout polynôme de degré n a exactement n racines, comptées par la multiplicité (si on accepte les nombres irrationnels).

Ainsi, la somme des multiplicités algébriques d'une matrice carrée est toujours égales à n.

Remarque. *La matrice est toujours réelle même si les valeurs propres sont complexes.*

9 Diagonalization

9.1 Overview

Pourquoi veut-on diagonaliser une matrice

On peut utiliser les eigenvectors pour diagonaliser une matrice, ce qui nous permet d'évaluer les puissances de matrices A^k plus facilement, car $A^k = (PDP^-1)(PDP^-1)(...)(PDP^-1) = PD^kP^-1$

Grandes Lignes

1. Déterminer si la matrice est diagonalisable: $A = PDP^-1$

9.2 Diagonalizable Matrices

Definition 9.2.1 (Matrice Diagonalisable)**.** *Une matrice est diagonalisable si A possède une famille de n vecteurs linéairement indépendants.*

9.2.1 How to determine if matrix is diagonalizable

Pour déterminer si une matrice est diagonalisable, il faut que ses vecteurs propres soient linéairement indépendants. En d'autres mots, il faut que les valeurs propres soient différentes.

Theorem 9.2.1. *A matrix is diagonalizable is its eigenvalues are distinct*

9.2.2 How to Diagonalize a matrix

1. Trouver les eigenvalues et eigenvectors
2. Construire la matrice inversible P avec les eigenvectors
3. Construire la matrice diagonale D formée des eigenvalues
4. Trouver l'inverse de la matrice P, P^-1

9.2.3 Trouver la formule pour A^k

9.3 Undiagonalize a Matrix

TODO

10 Spaces and Subspaces

10.1 Overview

Pourquoi la notion d'espace et de sous-espace est important

La chair de l'algèbre linéaire commence à partir de ce chapitre. Tout d'abord, on définit ce qu'est la notion d'espace et de sous-espace linéaire, car cela nous permet de définir l'espace dans lequel on travaille.

Plus généralement, on veut définir les caractéristiques d'un espace vectoriel afin de généraliser les propriétés d'une matrice sur d'autres objets que des vecteurs (polynômes, fonctions, ...)

10.2 Espace Vectoriel

Definition 10.2.1 (Axiomes d'un Espace Vectoriel)**.** *Un espace vectoriel doit satisfaire les 10 propriétés suivantes, qu'on nomme axiome:*

1.

Remarque. *Les axiomes proviennent du fait qu'un espace euclidien* $\mathbb{R}^n$ *est un field.*

10.3 Sous-Espace Vectoriel

Definition 10.3.1 (Sous-Espace Vectoriel)**.**

10.4 Noyau et Image

11 Bases et Changements de Bases

11.1 Overview

11.2 Bases

11.2.1 Overview Bases

Pour comprendre la notion de Base, il faut comprendre les notions préliminaires suivantes:

1. Espaces Générateurs (span)
2. Indépendance Linéaire

11.2.2 Espace Générateur

11.2.3 Indépendance Linéaire

11.3 Changement de Bases

11.3.1 Overview Changement de Base

On décrit un vecteur à l'aide de ses composantes qu'on lit à partir des coordonnées de la base. Cependant, ces coordonnées sont assez arbitraires. Ainsi, 2 personnes voulant décrire le même vecteur peuvent mal se comprendre si elles n'utilisent pas les mêmes vecteurs pour "tracer leur quadrillage". Par conséquent, il nous faut un moyen pour traduire les vecteurs d'une base à l'autre, ce qu'on appelle les matrices de changement de bases. Essentiellement, cette matrice n'est qu'une transformation linéaire qui nous permet de convertir un vecteur d'une base à l'autre.

Changement de Base

Theorem 11.3.1 (Changement de Base).

$$[T]_{E\leftarrow C} = P_{E\leftarrow D}[T]_{D\leftarrow B}P_{B\leftarrow C}$$

12 Sous-Espaces Orthogonaux

12.1 Overview

Il existe plusieurs bases pour un même espace, mais il est toujours plus pratique de travailler avec une base orthogonale ie avec un quadrillage qui est rectangulaire. Dans ce chapitre, on veut donc

1. Déterminer si un espace est orthogonal
2. Former un base orthogonale avec le Procédé de Gram-Schmidt

12.2 Déterminer si un espace est orthogonal

Theorem 12.2.1 (Famille Orthogonale). *Une famille de vecteurs est orthogonale si chaque paire de vecteur sont orthogonaux entre eux:* $u_i \cdot u_j = 0$

Theorem 12.2.2. *Une famille orthogonale de vecteurs non-nuls est une base de l'espace qu'elle engendre*

Theorem 12.2.3 (Coordonnées dans une base orthogonale).

Problème (Trouver les coordonnées de y dans la base B).

12.3 Former un base orthogonale avec le Procédé de Gram-Schmidt

Intuition du Procédé de Gram-Schmidt

Le procédé de Gram-Schmidt nous permet de former une base orthogonale à l'aide d'une base qui n'est pas orthogonale en projettant chaque vecteur sur un sous-espace orthogonal, ce qu'on apelle la projection orthogonale sur un sous-espace.

Étapes de Procédé Gram-Schmidt

TODO