Lecture Notes - Differential Equations by Professor Macauley

Emulie Chhor

May 30, 2021

Introduction

This document is a summary of concepts I have learned from Professor Macauley's Differential Equations Course.

Essentiellement, le cours d'équation différentielle se distingue en 2 cours:

1. Ordinary Differential Equations
2. Partial Differential Equations

Part I

Ordinary Differential Equations

1 Overview

The first course is separated into the following chapter:

1. Introduction to ODE
2. First Order Differential Equations
3. Second Order Differential Equations
4. Systems of Differential Equations
5. Laplace Transforms
6. Fourier Series and Boundary Value Problems
7. Partial Differential Equations

On distingue les équations linéaires par:

1. Type: ODE vs PDE
2. Order: Normal Form vs
3. Linearity:

2 Introduction to ODE

Overview

Le premier chapitre introduit la notion d'Ordinary Differential Equations, qui sont des equations differentielles à une seule variable. On n'apprend pas encore comment les résoudre, mais on désire les dessiner puisque ça nous donne une bonne idée de l'allure de la famille de solutions.

Notons qu'il existe d'autres tyes d'équations différentielles (ex: PDEs, qui sont des équa diff avec 2 variables), mais on se penche sur les ODEs en premier.

On verra 4 méthodes pour résoudre les ODEs:

1. Separating Variables: isolate dy/y and integrate both sides
2. Integrating Factor: multiplier par une constante d'intégration pour pouvoir intégrer
3. Variables Parameters
4. indetermined coefficient: $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$

2.1 What is a differential equation?

Definition 2.1.1 (Linear Differential Equation). *On dit qu'une transformation est linéaire si les coefficients de l'équation différentielle sont de degré 0 et que y et ses dérivées sont exposant 1*

1. *Forme Différentielle:* $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$
2. *Forme Normale:* $\frac{dy}{dx} = \frac{N(x,y)}{M(x,y)}$ *derivative isolated*

Une équation est linéaire si ses coefficients sont exprimés qu'en fonction de sa variable indépendantes

Definition 2.1.2 (Order of Derivative). *L'ordre d'une équation différentielle est la plus grande dérivée.*

$$g(x) = a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n+1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + ... + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y$$

Definition 2.1.3 (Solution générale et particulière).

1. *Particular Solutions: no arbitrary parameters* $y = 3x$
2. *One-Parameter family of solutions* $y = 3x + c$
3. *Trivial Solution: y=0*

Une solution explicite est une équation qui n'isole pas y. Une solution implicite est une équation avec y qui n'est pas isolée. Plus généralement, si on a une constante, on parle de solutions générale, sinon, on parle de solution particulière.

Une équation différentielle est une équation définie par ses fonctions et ses dérivées. On l'utilise pour modéliser:

1. Growth : $P'(t) = rP(t)$
2. Decay : $P'(t) = r(1 - \frac{P(t)}{M})$
3. Logistic Equation: $P'(t) = r(1 - \frac{P(t)}{M})P(t)$

Éventuellement, le graphe devrait converger vers une valeur quelconque.

Il est à noter qu'on cherche la famille de fonctions qui vérifie l'équation. On pourra choisir la solution parmi cette famille de solutions plus tard.

Problème. *1. Écrire l'équation sous sa forme normale ou différentielle*

2. Classifier l'équation différentielle par son ordre et sa linéarité

3. Verify if function is a solution to differential equation

2.2 Plotting solutions to differential equations.

Présentement, on n'est pas encore capable de résoudre une équation différentielle, mais on peut utiliser les outils du calcul pour tracer le graphe pour avoir une idée de l'allure de la famille de solutions.

On distingue 2 types de solutions:

1. Isocline: y' est une constante: $y' = 0$, with c
2. Autonomous ODEs: y' est une fonction quelconque: $y' = f(y)$

2.2.1 Slope Field

On distingue 3 types de slope field

1. Attractor: toutes les courbes convergent vers une valeur. On dit qu'il y a un équilibre et que les courbes sont stables
2. Repeller: Les courbes divergent et on dit qu'elles sont instables
3. Semi-Stable: Les courbes sont de type "attractor" d'un bord et repeller de l'autre

2.2.2 Comment tracer les solutions

TODO

2.3 Approximating solutions to differential equations.

Présentement, on n'a pas enore les outils pour résoudre une équa diff. Par contre, on peut toujours se servir des concepts vu en calcul pour approximer les solutions à une équations différentielles. Il existe plusieurs méthodes:

1. Euler's method: Approximating using stepwise Linear Approximations
2. Runge-Kutta's Method: skipped

2.3.1 Euler's Method

La méthode d'Euler conciste à tracer la fonction à l'aide d'approximation linéaire. On doit d'abord choisir un "step", qui représente la distance sur lequel on trace notre droite. Plus le step est petit, plus notre graphe aura l'air d'une courbe.

Plus généralement, si on a $y' = f(t, y)$ et $y(t_0)$ avec un stepsize de h, on a: $y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)$ Il s'agit donc d'une méthode récursive pour tracer des graphes: on détermine la pente entre deux steps en considérant le triangle rectangle qui forme le point précédent et le point suivant.

2.3.2 Improved Euler's Method

La méthode de Euler a tendance à sous-estimer la valeur de la pente puisqu'on considère que la pente est la même à un certain point donné. Ce qu'on veut faire, c'est de calculer une nouvelle pente

$$m = f(x_0 + h, y_0 + h \cdot f(x_0, y_0))$$

Cependant, cette méthode a tendance à surestimer la pente. Ainsi, on veut trouver un pente moyenne en considérant la pente calculée à partir de l'ancienne méthode et de la nouvelle méthode. $y_{n+1} = y_n + h \cdot [f(x_n, y_n) + f(x_n + h, y_n + h \cdot f(x_n, y_n))]$

3 First Order Differential Equations

Overview

3.1 Separation of variables

Cette setion met l'emphase sur la séparation de variables. En gros, on veut réécrire notre équation différentielle sous la notation de Leibniz afin d'isoler dy/y et dx/x et d'avoir une équation p/r au temps. On voit qu'en intégrant, on obtient les équations suivantes:

1. Exponential Growth: $y' = ky \iff y(t) = Ce^{kt}$
2. Exponential Decay: $y' = -ky \iff y(t) = Ce^{-kt}$
3. Decay to Initial Value: $y' = -k(y - M) \iff y(t) = Ce^{-kt} + M$

Il faut aussi se souvenir que le k, représentant le rate of change, nous dit à quel point le decay/growth se fait rapidement.

Remarque (Stratégies de résolution)**.** *Pour résoudre des intégrales, il est parfois utile d'utiliser*

1. *intégration par fraction partielle*
2. *Rational zero theorem: trouver les facteurs de p et q, et résoudre par division euclidienne une foit qu'on a trouvé le premier zéro*

3.1.1 Models with Separable Method

Newton's Law of Cooling

Newton's Law of cooling is used when we want to model an object whose cooling point is at some degree. The temperature of the object start at T_0 and converge toward a value T. The rate of change is given by

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m)$$

where k is a constant and $(T - T_m)$ is the difference between the object's temperature and the room in which it resides

Using the separable variables method, we get

$$T = ce^{kt} + T_m = (T_0 - T_m)e^{kt} + T_m$$

Exponential Growth

The exponential growth is used when the rate of change grows without restrictions. The rate of change for an exponential growth is given by

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

Using the separable variables method, we get

$$A = A_0 e^k t$$

Remarque. *1. If k¡0, we have a decay*

2. If k¿0, we have a growth

Logistic Growth

The logistic growth correspond to the exponential growth, but we have a restrictions that forbids us to grow/decay after a given point. The rate of change is given by

$$\frac{dP}{dt} = r(\frac{k-P}{k})P$$

where r is a rate of growth, P is the size of the current population, and $(\frac{k-P}{k})$ is the carrying capacity

When solving this equation using separable variables, we get

$$P = \frac{k}{1 + ce^{-rt}}$$

3.2 Initial value problems

Cette section focussait sur la résolution de ODEs. Tout d'abord, on introduisait la notion de valeur initiale. Auparavant, on voulait trouver la solution générale du ODEs. Ici, on nous donne des valeurs intiales $y(t_0) = y_0$. On veut trouver une solution particulière.

Intuition. *Graphiquement, c'est comme si on calculait la famille de solutions générale, et on choisissait la courbe qui passait par le point initial*

Pour ce faire, on doit trouver:

1. C: initial rate of change that can be found by solving initial value (t=0)
2. k: constant rate of change that can be found by using initial and end time (t=0 and t=5 for exemple)
3. t: time an which we measure value
4. P(t): value of function given using for all parameters

Dépendemment du problème, on doit solve for une des 4 variables

1. Find Initial Rate of Change : solve for C
2. Find how much x is worth at time t: use C, k, t to find P(t)
3. Find half live: use P(t), P(0), C, k to find t, the time when P has value of P(t)

Remarque. *On utilise souvent les logs pour abaisser l'exposant. On préfère travailler avec des fractions positives*

Theorem 3.2.1 (Existence and Uniqueness Theorem for first order IVP)**.** *Let* $\frac{dy}{dx} = f(x,y), y(x_0) = y_0$. *If f(x,y) and* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *are both continuous in a neighborhood of* (x_0, y_0)*, then there is a unique solution definied on an interval containing* x_0

Intuition. *Before integrating to find a solution to a differential equation, we want to determine wether:*

1. *Is there a solution?*
2. *Are there more solutions?*

Problème. 1. *Determine if the IVP has a unique solution*

3.3 Falling objects with air resistance: Newton's 2nd Law

Dans cette section, on voit que la 2e loi de Newton F=ma qui considère la résistance de l'air, peut être modéliser avec une ODEs: exponential decay to value. ON voit aussi pourquoi on voudrait intégrer une ODEs

Comment trouver modéliser v(t) avec une ODE

La deuxième loi de Newton nous dit que

1. Sans résistance de l'air: $F = ma = -mg$
2. Avec résistance de l'air: $F = -mg - R(v)$, R(v): résistance de l'air

De plus, on peut considérer que la résistance à l'air est proportionnelle à la vitesse (dans le sens inverse):

$$R(v) = -rv$$

Aussi, il faut se souvenir que

1. Vitesse: $v(t) = d'(t)$, d: distance
2. Accélération: $a(t) = v'(t)$, v: vitesse

Ainsi, on a que la 2nd loi de Newton qui considère la résistance de l'air est

$$v' = -g - \frac{r}{m}v$$

, qui peut être remodelée pour obtenir un exponential decay to a value

$$v' = -g - \frac{r}{m} = \frac{r}{m}(\frac{-mg}{r} - v), k = \frac{r}{m}, A = \frac{-mg}{r}$$

, avec v: vitesse limitante, A: terminal velocity

Ainsi, on a que

$$V(t) = -\frac{mg}{r} + Ce^{\frac{-r}{m}t}$$

Problèmes

Dépendemment du problème, on nous demande de trouver:

1. terminal velocity: $A = \frac{-mg}{r}$
2. Limiting velocity: $v' = 0$
3. C: initial value
4. m: masse
5. g: constante de gravité
6. v(t): velocity after t time
7. rate of change r: use terminal velocity and solve for r
8. distance d(t): on n'a qu'à intégrer la fonction de vitesse

$$\int_a^b v(t)\, dt$$

Bref

1. Comment on a trouver la ODE pour modéliser l'accélération en considérant le frottement de l'air
2. Résoudre des problèmes en utilisant la modélisation de F=ma en ODE

3.4 Solving 1st order inhomogeneous ODEs.

Depuis le début du cours, on a vu comment résoudre des équations homogènes à l'aide de la méthode par séparation. Cependant, cette stratégie ne peut pas être utilisée pour résoudre des équations inhomogènes

Rappel: la différence entre une équation homogène et inhomogène est que f(t) = 0

1. Homogenous Equation: $y' + a(t)y(t) = 0$
2. Inhomogenous Equation: $y' + a(t)y(t) = f(t)$

On discerne deux méthodes pour résoudre des ODEs inhomogènes:

1. Integrating Factor
2. Variation of Parameters

Notons que les 2 méthodes sont équivalentes, mais il est préférable d'utiliser la deuxième, puisqu'elle possède un "built-in correction" nous permettant de voir si on a fait des erreur

3.4.1 Integrating Factor

La première méthode consiste à multiplier par un facteur d'intégration afin de pouvoir intégrer. Pour choisir ce facteur d'intégration, on doit regarder a(t), le coefficient qui multiplie y(t). Cette méthode nous permet de simuler une équation différentielle homogène et utiliser la séparation de variable.

Plus généralement, les étapes sont les suivantes:

1. Identifier a(t) afin de trouver le facteur d'intégration
2. Calculer le facteur d'intégration: $e^(\int A(t)\, dt)$
3. Multiplier l'équation inhomogène par le facteur d'intégration des deux côtés: on obtient "l'inverse du produit de la dérivée"
4. Écrire le produit de la dérivée comme une dérivée
5. Intégrer des deux bords, et isoler y pour trouver la solution générale

Notons pour que cette stratégie fonctionne, on doit savoir intégrer la partie de droite

Problème. *1. Mixing Problems:* $\frac{dA}{dt} = (ratein) - (rateout)$

2. RL Ciruit:

3.4.2 Variation of Parameters

La deuxième méthode consiste à trouver l'équation homogène en ignorant la constante f(t), puis à plugger le guess dans l'équation inhomogène

Les étapes sont les suivantes:

1. Trouver la solution à l'équation homogène en ignorant f(t)
2. Guesser la solution générale pour trouver y et y': $y(t) = v(t)y_h(t) = ve^t$
3. Solve for v by isolating v' and integrating both sides
4. Plugger y et y' dans l'équation inhomogène: il devrait y avoir des termes qui s'annulent
5. Substitutionner v dans l'équation générale $y(t) = v(t)y_h(t) = ve^t$

En d'autres mots, on devrait retrouver la constante f(t) dans le v

TO REVIEW

3.5 Linear differential equations

Cette section nous présente 2 résultas cachés des équations différentielles:

1. Superposition: Les solutions des équations différentielles homogènes sont linéairement indépendants

2. Inhomogenous ODEs: on peut trouver la solution générale d'une ODEs inhomogènes en additionnant son équation homogène et une équation particulière

3.5.1 Superposition

La superposition nous dit que si une ODE homogène $y' + a(t)y(t) = 0$ a comme solution $y_1(t)$ et $y_2(t)$, alors $C_1y_1(t) + C_2y_2(t)$ est une solution $\forall c_1, c_2$

Pourquoi c'est vrai?

Si on plug $C_1y_1(t)+C_2y_2(t)$ dans l'équation homogène initiale $y'+a(t)y(t) = 0$, on obtient que $C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0$

3.5.2 Quick Trick to solve Inhomogenous ODEs

On peut trouver la solution générale d'une ODE inhomogène en additionnant son équation homogène et une équation particulière:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

Les étapes sont les suivantes:

1. Trouver la solution Homogène y_h
2. Trouver la solution particulière y_p (choisir 0)
3. Trouver la solution générale:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

Pourquoi ça marche

Si y est la solution générale $y' + a(t)y(t) = f(t)$ et la solution particulière $y_p' + a(t)y_p(t) = f(t)$, alors en les soustrayant, on obtient

$$(y - y_p)' + a(t)(y - y_p) = 0$$

, et $(y - y_p)$ est une solution à l'équation homogène

3.6 Basic mixing problems.

Dans un problème de mixing problem, on veut déterminer la concentration de soluté dans un solvant à un temps donné. Le problème le plus simple est le cas suivant: on ajoute de l'eau à la même concentration qu'il n'en sort. On caractérise le volume à un temps donné par

$$Concentration(t) = \frac{x(t)}{Vol(t)}$$

De plus, on sait que le rate of change à un temps t est donné par

$$x'(t) = (ratein) - (rateout)$$

Ainsi, on doit calculer

1. Rate In := (volume rate) x (concentration) := (volume qui sort dans un intervalle de temps) x (concentration du solvant)
2. Rate Out := (volume rate) x (concentration) := (volume qui sort) x (concentration du solvant dans le tank) := (volume) x ($\frac{x(t)}{Vol(t)}$)
3. Solve for x and for C using one of the 4 methods: on cherche x pour pouvoir trouver C

3.7 Advanced mixing problems.

TODO

3.8 The logistic equation.

3.9 Substitution

3.9.1 Overview

When we have a first order differential equations that is nonlinear and cannot be solved by separating variables, we use substitution. There are two methods:

1. Homogeneous equations: if differential equation is homogeneous, substitute by y=vx to get turn it into separating variables
2. Bernouilli Equations

Homogeneous Equations

If a differential equation of first order is a homogeneous equations, then we can use the following substitution to turn the ODE into a separable equation

1. Determine if the equations is homogeneous: f(tx,ty) = f(x,y)
2. If it is homogeneous, substitute equation by y=vx
3. Solve

Bernouilli Equations

ODEs that are nonlinear and cannot be solved by separating variables are Bernouilli if they take the following form

$$\frac{dy}{dx} + f(x)y = g(x)y^n$$

If the ODE is Bernouilli, then we can substitute with $v = y^{1-n}$, which will make the equation linear. Finally, we solve using Integrating Factor (or another method to solve linear first order ODEs)

Remarque. *1. If n=0: not an ODEs*

2. If n=1: Separable Variables

3.10 Exact Equations

Les équations exactes sont des équations qui prennent la forme de

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

Pour les résoudre, on doit:

1. Écrire l'équation sous sa forme normale: $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$
2. Déterminer si l'équation différentielle est exacte: $\frac{M(x,y)}{\partial y} = \frac{N(x,y)}{\partial x}$
3. Si l'équationest exacte, on trouve la solution en intégrant $\int M(x, y)dy, \int N(x, y)dx$
4. Additionner les termes différents

4 Second Order Differential Equations

Overview

4.1 Second order linear ODEs.

4.1.1 Overview

Il existe plusieurs stratégies pour résoudre des équations différentielles de 2e ordre

1. Reduction of Order: substitution pour réduire rendre le ODE 2nd à un 1rst ODE
2. The method of undetermined coefficients.

Il faut aussi se souvenir du concept de combinaison linéaire: on peut générer une famille de solutions avec la combinaison linéaire des solutions générales trouvées.

4.1.2 Reduction of Order

On peut utiliser la méthode de reduction of order si on connait une des solutions. Pour ce faire, on doit

1. Trouver la substitution: $y = uy_1$ et trouver la nouvelle équation en terme de cette substitution
2. Réduire l'ordre en posant une autre substitution: $v = u'$
3. Résoudre pour v=u'
4. Intégrer v pour obtenir u pour ensuite substituer dans l'équation originale $y = uy_1$

Remarque. *Si l'équation est*

1. *Homogène: devient first order et se résout avec separating variables*
2. *Nonhomogène: devient first order et se résout avec integrating factor*

4.2 Equations with constant coefficients.

4.2.1 Overview

Lorsqu'on a une ODE de deuxième ordre qui prend la forme $ay''+by'+cy = 0$, on dit que'on a une équation linéaire avec des coefficients constants. Intuitivement, pour résoudre cette ODE, on veut que la fonction y soit une exponentielle, car ses dérivées existent et peuvent être exprimées comme une combinaison linéaire des précédantes. On a donc $y = e^{mx}, y' = me^{mx}, y'' = m^2e^{mx}$. Ainsi, on obtient

$$ay'' + by' + cy = 0$$

$$a(m^2e^{mx}) + b(me^{mx}) + c(e^{mx}) = 0$$

$$e^{mx}(am^2 + bm + c) = 0$$

Puisque $e^{mx} \neq 0$ (sinon f n'existe pas), il faut que le polynome caractéristique $(am^2 + bm + c) = 0$ et donc trouver ses racines.

On distingue 3 types de solutions pour le polynome caractéristique:

1. Distinct Real Root
2. Repeated Real Root
3. Complex Roots

4.2.2 Distinct Real Root

Si on obtient des racines réelles distinctes (avec formule quadratique ou en factorisant), on n'a qu'à substituer m_1 et m_2 dans

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}$$

4.2.3 Repeated Real Root

Si la racine trouvée est unique, on dit que la racine est de multiplicité 2. Cependant, on ne peut pas utiliser la formule $y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}$, car les solutions générales e^{mx}, e^{mx} ne sont pas linéairement indépendantes, et on ne peut pas écrire notre combinaison linéaire.

À la place, on utilise la formule suivante:

$$y = c_1 e^{mx} + c_2 x e^{mx}$$

Pour s'en convaincre, on n'a qu'à vérifier que $y = xe^{mx}$ est une solution

4.2.4 Complex Roots

Lorsqu'on a une racine négative, on doit faire appel à des racines complexes. Cependant, on ne veut pas trainer des nombres complexes. il est donc pratique d'utiliser la formule suivante: si $m = \alpha \pm \beta i$, alors la solution générale est

$$y = e^{\alpha x}(c_1 cos(\beta x) + c_2 sin(\beta x))$$

4.3 The method of undetermined coefficients.

4.3.1 Overview

La méthode undertermined coefficients nous permet de résoudre des équations différentielles non-homogène en additionnant la solution complémentaire et la solution particulière. On veut résoudre $ay'' + by' + cy = g(x)$

4.3.2 Étapes de résolution

Notons que la solution générale est donnée par $y = y_c + y_p$, où y_c est la solution complémentaire trouvée en résolvant l'équation homogène et y_p est l'équation particulière trouvée en résolvant TODO. Notons que l'ensemble de solutions fondamental doit être linéairement indépendant.

1. Trouver la solution complémentaire: $y_p = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}$ (ou autre dépendemment des valeurs de m)
   - Résoudre le polynôme caractéristique: $am^2 + bm + c = 0$ (donné par la solution homogène: $ay'' + by' + cy = g(x)$) pour obtenir m_1 et m_2
   - Remplacer m_1, m_2 pour obtenir y_c
2. Trouver la solution particulière en s'assurant de poser y_p linéairement indépendant
   - Poser y_p et trouver ses dérivées première et deuxième
   - Remplacer dans l'équation initiale $ay'' + by' + cy = g(x)$
   - Résoudre le système pour obtenir la valeur de A

4.3.3 Types de problèmes

Comme pour la méthode à coefficients déterminé, il y a 3 types de solutions:

1. Distinct Real Root
2. Repeated Real Root
3. Complex Roots

4.4 Simple harmonic motion.

4.5 Damped and driven harmonic motion.

4.6 Variation of parameters.

4.6.1 Overview

La méthode de variation de paramètres est utilisée pour résoudre des équations non-homogène $ay'' + by' + cy = g(x)$. Essentiellement, c'est une méthode qui combine à la fois la règle de Cramer et la méthode d'ordre de réduction en utilisant les "Wronskian" pour évaluer les déterminants

4.6.2 Étapes de Résolution

Encore une fois, on trouve la solution générale en additionnant la solution complémentaire et la solution particulière: $y = y_c + y_p$

1. Trouver la solution complémentaire en résolvant l'équation homogène: $ay'' + by' + cy = 0 \Longrightarrow am^2 + bm + c = 0$
    - Résoudre le polynôme caractéristique: $ay'' + by' + cy = 0 \Longrightarrow am^2 + bm + c = 0$
    - $y_c = c_1(...) + c_2(...)$ (dépendemment du type de solution homogène)
2. Trouver la solution particulière: $y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$
    - Trouver y_1 et y_2 à partir de la solution complémentaire
    - Construire la Wronskian : w, w_1, w_2 à l'aide de la règle de Cramer

$$w = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

$$w_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ g(x) & y_2' \end{vmatrix}$$

$$w_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & g(x) \end{vmatrix}$$

    - Calculer $u_1' et u_2'$: $u_1' = \frac{w_1}{w}$, $u_2' = \frac{w_2}{w}$
    - Intégrer u_1 et u_2 pour obtenir u_1 et u_2
3. La solution générale: $y = y_c + y_p$

Remarque. *Si* $a \neq 1$, *on n'a qu'à diviser* $\frac{g(x)}{a}$

4.7 Cauchy-Euler equations.

4.7.1 Overview

Les équations de Cauchy-Euler sont des équations différentielles qui peuvent être homogène ou non-homogène. La méthode de résolution dépend de la forme de l'équation différentielle:

1. homogène: poser $y = m^x$
2. inhomogène: utiliser la wronskian

4.7.2 Homogeneous Cauchy-Euler Equations

On peut résoudre une équation Cauchy-Euler homogène en posant $y = x^m$, $y' = mx^{m-1}$, $y'' = m(m-1)x^{m-2}$. En remplacant dans l'équation homogène $a^2xy'' + bxy' + cy = 0$, on obtient

$$ax^2[m(m-1)x^{m-2}] + bx[mx^{m-1}] + cx^m = 0$$

$$x^m(am^2 + (b-a)m + c) = 0$$

et on n'a qu'à résoudre le polynôme caractéristique $(am^2 + (b-a)m + c)$ pour obtenir la solution $y = c_1x^{m_1} + c_2x^{m_2}$

Types de solutions:

1. Solutions réelles différentes: $y = c_1x^{m_1} + c_2x^{m_2}$
2. Solution réelle unique: $y = c_1x^m + c_2x^m ln|x|$
3. Solution complexe: $y = c_1x^\alpha cos(\beta ln|x|) + c_2x^\alpha sin(\beta ln|x|)$

4.7.3 Inhomogeneous Cauchy-Euler Equations

Pour résoudre des équations de Cauchy-Euler non-homogène $a^2xy'' + bxy' + cy = g(x)$, on utilise les Wronskian

$$w = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

$$w_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ \frac{g(x)}{ax^2} & y_2' \end{vmatrix}$$

$$w_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & \frac{g(x)}{ax^2} \end{vmatrix}$$

4.8 Power series solutions.

4.9 The method of Frobenius.

5 Systems of Differential Equations

Overview

5.1 Basic matrix algebra.

5.2 Eigenvalues and eigenvectors.

5.3 Mixing with two tanks.

5.4 Solving a 2x2 system of ODEs.

5.5 Phase portraits with real eigenvalues.

5.6 Phase portraits with complex eigenvalues.

5.7 Phase portraits with repeated eigenvalues.

5.8 Stability of phase portraits.

5.9 of parameters for systems.

6 Laplace Transforms

Overview

6.1 What is a Laplace transform?

6.2 Properties and applications of Laplace transforms

6.3 Discontinuous forcing terms

6.4 Periodic forcing terms

6.5 Impulse functions

6.6 Convolution

7 Fourier Series and Boundary Value Problems

7.1 Introduction to Fourier series

7.2 Computing Fourier series

7.3 Fourier sine and cosine series

7.4 Complex Fourier series

7.5 Applications of Fourier series

7.6 Boundary value problems

Overview

8 Partial Differential Equations

Overview

8.1 The heat equation

8.2 Different boundary conditions

8.3 The transport equation

8.4 The wave equation

8.5 Harmonic functions

8.6 Laplace's equation

8.7 The 2D heat equation

8.8 2D wave equation

9 Systems of Nonlinear Differential Equations

Overview

9.1 Modeling with nonlinear systems

9.2 Linearization and steady-state analysis

9.3 Predator-prey models

Part II

Partial Differential Equations

10 Overview

1. Some Linear Algebra
2. Linear Differential Equations
3. Fourier Series
4. Boundary Value Problems and Sturm-Liouville Theory
5. Partial Differential Equations (PDE) on bounded domains
6. Partial Differential Equations (PDE) on unbounded domains
7. Higher-Dimensional PDEs

11 Some linear algebra

Overview

11.1 Vector spaces

11.2 Linear independence and spanning sets

11.3 Linear maps.

11.4 Inner products and orthogonality

12 Linear differential equations

Overview

12.1 The fundamental theorem of linear ODEs

12.2 Linear independence and the Wronskian

12.3 Inhomogeneous ODEs and affine spaces

12.4 Undetermined coefficients

12.5 Power series solutions to ODEs

12.6 Singular points and the Frobenius method

12.7 Bessel's equation

13 Fourier series

Overview

13.1 Fourier series and orthogonality.

13.2 Computing Fourier series and exploiting symmetry.

13.3 Solving ODEs with Fourier series

13.4 Fourier sine and cosine series.

13.5 Complex inner products and Fourier series.

13.6 Real vs. complex Fourier series.

13.7 Fourier transforms.

13.8 Pythagoras, Parseval, and Plancherel.

14 Boundary value problems and Sturm-Liouville theory

Overview

15 Partial differential equations (PDEs) on bounded domains

Overview

15.1 Fourier's law and the diffusion equation

15.2 Boundary conditions for the heat equation

15.3 The transport and wave equations

15.4 The Schrödinger equation

16 PDEs on unbounded domains

Overview

16.1 The heat and wave equations on the real line.

16.2 Semi-infinite domains and the reflection method.

16.3 Solving PDEs with Laplace transforms.

16.4 Solving PDEs with Fourier transforms.

17 Higher-dimensional PDEs

Overview

17.1 Harmonic functions and Laplace's equation.

17.2 Eigenfunctions of the Laplacian.

17.3 The heat and wave equations in higher dimensions.

17.4 The Laplacian in polar coordinates.

17.5 Three PDEs on a disk

18 Ressources

18.1 Books

1. A First Course in Differential Equations by Dennis G. Zill
2. Ordinary and Partial Differential Equations by John Cain (intuition for harder ODEs)

18.2 Courses

1. Edgar Haley Math 24 - Differential Equations
2. Professor Macauley - Differential Equations
3. Professor Macauley - Advanced Maths for Engineering: A course on Partial Differential Equations
4. Houston Math Prep - Differential Equations

18.3 Exercices

1. Math Sorcerer - Differential Equations Playlist: great for easier problems, but seems like drilling rather than actually learning
2. Elementary Differential Equations (+solutions) by William Trench: lots of exercices (recommended)
3. Timothy Norflok's Math2080 - Differential Equations: Worksheet with detailed solutions (recommended)
4. Schaum's Differential Equations