Notes de Cours - Algèbre Linéaire

Emulie Chhor

May 5, 2021

Introduction

Le cours d'algèbre linéaire comporte plusieurs chapitres:

1. Systèmes d'Équations Linéaires
2. Matrices
3. Déterminants
4. Espaces et Sous-Espaces Vectoriels
5. Orthogonalité et Projections
6. Diagonalisation

0.1 Pourquoi étudier l'algèbre linéaire?

1 Systèmes d'Équations Linéaires

1.1 Overview

Le but de cette section est de pouvoir résoudre des systèmes d'équations linéaires avec l'algorithme de Gauss et de Gauss-Jordan

1.2 Définition d'un système d'équations linéaires

1.3 Opérations élémentaires sur les lignes

Il existe 3 opérations élémentaires sur les matrices:

1. Multiplier la ligne i par une constante $k \neq 0$: $L_i \to kL_j, k \neq 0$
2. Permuter les lignes i et j : $L_i \leftrightarrow L_j$
3. Ajouter à la linge i un multiple d de la ligne j : $L_i \to L_i + dL_j$

1.4 Forme des matrices

Lorsqu'on essait de résoudre un SEL, on veut transformer notre matrice en l'une des deux formes:

1. Forme échelonée : Gauss
2. Forme échelonée réduite : Gauss-Jordan

1.5 Types de Solutions

Il existe 3 types de solutions:

1. Solution Unique: chaque variable est associée à un pivot
2. Infinité de Solutions: il existe une variable libre ou plus
3. Aucune Solutions: le système est incompatible et on a $[0\,0\,...\,0|\,k]$, $k \neq 0$

1.6 Méthode de Gauss

1.7 Méthode de Gauss-Jordan

Remarque (Méthode de Gauss vs Gauss-Jordan)**.**

2 Matrices

2.1 Overview

Le but de cette section est de se familiariser algébriquement avec la notion de matrice. Cependant, il faut toujours garder en tête qu'une matrice représente une transformation linéaire. Essentiellement, une transformation linéaire est une fonction qui prend un vecteur et en recrache un autre. On verra plus tard les détails.

2.2 Opérations Matricielles

2.2.1 Addition et Multiplication par un scalaire

2.2.2 Multiplication Matricielle

2.2.3 Transposition de Matrice

2.3 Équation Ax=b

2.3.1 Combinaison Linéaire

2.3.2 Indépendance Linéaire

2.3.3 Équation Ax=b

2.4 Inversion de Matrices

3 Déterminants

3.1 Overview

Géométriquement, le déterminant d'une matrice représente le ratio entre l'aire formée par les vecteurs avant et après transormations linéaires. Intuitivement, le déterminant nous dit si une matrice est diagonalisable ou non puisque si $det(A) = 0$, alors la transformation à changer de dimension et n'est pas inversible.

On peut aussi utiliser les déterminants pour évaluer un SEL. On compare le déterminant de chaque vecteur avant et après transformation.

3.2 Définition du Déterminant

3.3 Propriétés du Déterminant

3.4 Règle de Cramer

4 Espaces et Sous-Espaces Vectoriels

4.1 Overview

Un aspect important à comprendre dans l'étude de l'algèbre linéaire est la notion d'espace. Malgré qu'on s'attarde peu à la notion d'anneau, il faut se souvenir qu'on peut manipuler les vecteurs algébriquement, car l'espace dans lequel il se trouve est un field, un ensemble qui comporte certaines propriétés qu'on nomme axiomes.

Un deuxième aspect important est la notion de transformation linéaire. Comme mentionné plus tôt, une matrice peut être interprétée comme une transformation, c-à-d qu'elle est une fonction qui transforme un vecteur en un autre vecteur. Cependant, cette transformation peut changer les propriétés de l'espace. On s'attardera donc aux transformations qui gardent ces propriétés, transformations qu'on nomme linéaire.

Finalement, on veut être capable de changer de base. Décrire un vecteur dans l'espace est assez arbitraire, car chaque personne peut tracer son propre quadrillage et obtenir un vecteur différent. Ainsi, pour s'assurer de parler le même language, on veut être capable de traduire un vecteur/transformation d'un espace à un autre.

4.2 Espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$

4.3 Transformations Linéaires

4.4 Base d'un Espace Vectoriel

4.5 Système de Coordonnées dans $\mathbb{R}^n$

4.6 Changement de Base

5 Orthogonalité et Projections

5.1 Overview

5.2 Orthogonalité et Projection

5.3 Sous-Espace Orthogonal

6 Diagonalisation

6.1 Overview

La diagonalisation est un processus utilisé dans le domaine du Machine Learning, car elle permet de "compresser" les données dans une plus petite dimension. La diagonalisation est notamment utilisée pour le PCA et le SVD.

Géométriquement, lorsqu'on parle de valeurs propres et de vecteurs propres, c'est qu'il existe un vecteur qui reste sur le même axe après transformation linéaire. Ainsi, appliquer la transformation linéaire sur ce vecteur peut être considérer comme une multiplication par un scalaire λ, qui étire la longueur du vecteur. Notre but est donc de trouver le vecteur qui reste dans le même axe, qu'on appelle vecteur propre, et de trouver le facteur de multiplication, qu'on appele valeur propre.

6.2 Valeurs et Vecteurs Propres

6.3 Espace Propre et Multiplicité Géométrique

6.4 Diagonalisation d'une matrice quelconque

6.5 Diagonalisation d'une matrice symétrique