

Lecture Notes - Differential Equations by Professor Macauley

Emulie Chhor

May 10, 2021

Introduction

This document is a summary of concepts I have learned from Professor Macauley's Differential Equations Course.

His course is separated into the following chapter:

1. Introduction to ODE
2. First Order Differential Equations
3. Second Order Differential Equations
4. Systems of Differential Equations
5. Laplace Transforms
6. Fourier Series and Boundary Value Problems
7. Partial Differential Equations

1 Introduction to ODE

Overview

Le premier chapitre introduit la notion d'Ordinary Differential Equations, qui sont des équations différentielles à une seule variable. On n'apprend pas encore comment les résoudre, mais on désire les dessiner puisque ça nous donne une bonne idée de l'allure de la famille de solutions.

Notons qu'il existe d'autres types d'équations différentielles (ex: PDEs, qui sont des équations différentielles avec 2 variables), mais on se penche sur les ODEs en premier.

1.1 What is a differential equation?

Une équation différentielle est une équation définie par ses fonctions et ses dérivées. On l'utilise pour modéliser:

1. Growth : $P'(t) = rP(t)$
2. Decay : $P'(t) = r(1 - \frac{P(t)}{M})P(t)$

Éventuellement, le graphe devrait converger vers une valeur quelconque.

Il est à noter qu'on cherche la famille de fonctions qui vérifie l'équation. On pourra choisir la solution parmi cette famille de solutions plus tard.

1.2 Plotting solutions to differential equations.

Présentement, on n'est pas encore capable de résoudre une équation différentielle, mais on peut utiliser les outils du calcul pour tracer le graphe pour avoir une idée de l'allure de la famille de solutions.

On distingue 2 types de solutions:

1. Isocline: y' est une constante
2. Autonomous ODEs: y' est une fonction quelconque

1.2.1 Comment tracer les solutions

TODO

1.3 Approximating solutions to differential equations.

Présentement, on n'a pas encore les outils pour résoudre une équation différentielle. Par contre, on peut toujours se servir des concepts vus en calcul pour approximer les solutions à une équation différentielle. Il existe plusieurs méthodes:

1. Euler's method: Approximating using stepwise Linear Approximations

2. Runge-Kutta's Method: skipped

1.3.1 Euler's Method

La méthode d'Euler consiste à tracer la fonction à l'aide d'approximation linéaire. On doit d'abord choisir un "step", qui représente la distance sur lequel on trace notre droite. Plus le step est petit, plus notre graphe aura l'air d'une courbe.

Plus généralement, si on a $y' = f(t, y)$ et $y(t_0)$ avec un stepsize de h , on a:

$$(t_{k+1}, y_{k+1}) = (t_k + h, y_k + f(t_k, y_k) \cdot h)$$

Il s'agit donc d'une méthode récursive pour tracer des graphes: on détermine la pente entre deux steps en considérant le triangle rectangle qui forme le point précédent et le point suivant.

2 First Order Differential Equations

Overview

2.1 Separation of variables

Cette section met l'emphasis sur la séparation de variables. En gros, on veut réécrire notre équation différentielle sous la notation de Leibniz afin d'isoler dy/y et d'avoir une équation p/r au temps. On voit qu'en intégrant, on obtient les équations suivantes:

1. Exponential Growth: $y' = ky \iff y(t) = Ce^{kt}$
2. Exponential Decay: $y' = -ky \iff y(t) = Ce^{-kt}$
3. Decay to Initial Value: $y' = -k(y - M) \iff y(t) = Ce^{-kt} + M$

Il faut aussi se souvenir que le k , représentant le rate of change, nous dit à quel point le decay/growth se fait rapidement.

2.2 Initial value problems

Cette section focussait sur la résolution de ODEs. Tout d'abord, on introduisait la notion de valeur initiale. Auparavant, on voulait trouver la solution générale du ODEs. Ici, on nous donne des valeurs initiales $y(t_0) = y_0$.

Pour ce faire, on doit trouver:

1. C: initial rate of change that can be found by solving initial value ($t=0$)
2. k: constant rate of change that can be found by using initial and end time ($t=0$ and $t=5$ for exemple)
3. t: time at which we measure value
4. P(t): value of function given using for all parameters

Dépendamment du problème, on doit solve for une des 4 variables

1. Find Initial Rate of Change : solve for C
2. Find how much x is worth at time t: use C, k, t to find P(t)
3. Find half live: use P(t), P(0), C, k to find t, the time when P has value of P(t)

Remarque. On utilise souvent les logs pour abaisser l'exposant. On préfère travailler avec des fractions positives

2.3 Falling objects with air resistance: Newton's 2nd Law

Dans cette section, on voit que la 2e loi de Newton $F=ma$ qui considère la résistance de l'air, peut être modéliser avec une ODEs: exponential decay to value. ON voit aussi pourquoi on voudrait intégrer une ODEs

Comment trouver modéliser $v(t)$ avec une ODE

La deuxième loi de Newton nous dit que

1. Sans résistance de l'air: $F = ma = -mg$
2. Avec résistance de l'air: $F = -mg - R(v)$, $R(v)$: résistance de l'air

De plus, on peut considérer que la résistance à l'air est proportionnelle à la vitesse (dans le sens inverse):

$$R(v) = -rv$$

Aussi, il faut se souvenir que

1. Vitesse: $v(t) = d'(t)$, d: distance
2. Accélération: $a(t) = v'(t)$, v: vitesse

Ainsi, on a que la 2nd loi de Newton qui considère la résistance de l'air est

$$v' = -g - \frac{r}{m}v$$

, qui peut être remodelée pour obtenir un exponential decay to a value

$$v' = -g - \frac{r}{m}v = \frac{r}{m}\left(\frac{-mg}{r} - v\right), k = \frac{r}{m}, A = \frac{-mg}{r}$$

, avec v: vitesse limitante, A: terminal velocity

Ainsi, on a que

$$V(t) = -\frac{mg}{r} + Ce^{\frac{-r}{m}t}$$

Problèmes

Dépendamment du problème, on nous demande de trouver:

1. terminale velocity: $A = \frac{-mg}{r}$
2. C: initial value
3. m: mass
4. g: constante de gravité
5. $v(t)$: velocity after t time
6. rate of change r: use terminal velocity and solve for r
7. distance $d(t)$: on n'a qu'à intégrer la fonction de vitesse

$$\int_a^b v(t) dt$$

Bref

1. Comment on a trouver la ODE pour modéliser l'accélération en considérant le frottement de l'air
2. Résoudre des problèmes en utilisant la modélisation de $F=ma$ en ODE

2.4 Solving 1st order inhomogeneous ODEs.

2.5 Linear differential equations.

2.6 Basic mixing problems.

2.7 Advanced mixing problems.

2.8 The logistic equation.

3 Second Order Differential Equations

Overview

- 3.1 Second order linear ODEs.
- 3.2 Equations with constant coefficients.
- 3.3 The method of undetermined coefficients.
- 3.4 Simple harmonic motion.
- 3.5 Damped and driven harmonic motion.
- 3.6 Variation of parameters.
- 3.7 Cauchy-Euler equations.
- 3.8 Power series solutions.
- 3.9 The method of Frobenius.

4 Systems of Differential Equations

Overview

- 4.1 Basic matrix algebra.
- 4.2 Eigenvalues and eigenvectors.
- 4.3 Mixing with two tanks.
- 4.4 Solving a 2x2 system of ODEs.
- 4.5 Phase portraits with real eigenvalues.
- 4.6 Phase portraits with complex eigenvalues.
- 4.7 Phase portraits with repeated eigenvalues.
- 4.8 Stability of phase portraits.
- 4.9 of parameters for systems.

5 Laplace Transforms

Overview

- 5.1 What is a Laplace transform?
- 5.2 Properties and applications of Laplace transforms
- 5.3 Discontinuous forcing terms
- 5.4 Periodic forcing terms
- 5.5 Impulse functions
- 5.6 Convolution

6 Fourier Series and Boundary Value Problems

6.1 Introduction to Fourier series

6.2 Computing Fourier series

6.3 Fourier sine and cosine series

6.4 Complex Fourier series

6.5 Applications of Fourier series

6.6 Boundary value problems

Overview

7 Partial Differential Equations

Overview

- 7.1 The heat equation
- 7.2 Different boundary conditions
- 7.3 The transport equation
- 7.4 The wave equation
- 7.5 Harmonic functions
- 7.6 Laplace's equation
- 7.7 The 2D heat equation
- 7.8 2D wave equation

8 Systems of Nonlinear Differential Equations

Overview

8.1 Modeling with nonlinear systems

8.2 Linearization and steady-state analysis

8.3 Predator-prey models