Notes de Cours - Analyse I

Emulie Chhor

May 6, 2021

Introduction

Le premier cours d'analyse porte sur la même matière que le calcul différentiel et intégral, mais est plus rigoureux. La majorité du cours met l'emphase sur la démonstration des preuves et théorèmes et très peu sur le calcul.

MAT1000 porte sur les chapitres suivants:

1. Nombres Rationnels et Nombres Réels
2. Inégalités et Valeur Absolue
3. Suprémum et Infimum
4. Axiomes de Complétude
5. Dénombrabilité
6. Suites
7. Continuité et Continuité Uniforme
8. Dérivabilité
9. Séries

1 Nombres Rationnels et Nombres Réels

1.1 Overview

Malgré que le cours ne met pas l'emphase sur la topologie des réels, il est important de comprendre que les réels possèdent certaines propriétés qui nous permettent de manipuler les termes algébriquement. On définit la notion de corps ordonné qui est TODO

1.2 Topologie des Réels

Proposition 1.1. $\forall a \in \mathbb{Q}, a^2 \neq 2$

Lemme 1.2.1. *Soit $b \in \mathbb{Z}$. Si b^2 est pair, alors b est pair*

Axiome 1. *Il existe un corps totalement ordonné de $\mathbb{R}$ tel que:*

1. *$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}$ est un sous-corps de $\mathbb{R}$*
2. *$\mathbb{R}$ possède la propriété de Complétude*

Proposition 1.2. *Soit $a, b \in \mathbb{Q}$ avec a¡b. Alors il existe $c \in \mathbb{Q}$ tel que $a < c < b$*

Théorème 1.2.2 (Propriétés d'un corps)**.** *Un corps possède les propriétés suivantes:*

1. *Commutativité*
2. *Associativité*
3. *Distributivité*
4. *Existence d'éléments neutres*
5. *Existence de l'inverse additif et multiplicatif*
6. *Lien entre les relations d'ordre et opérations*

Problème (Montrer qu'un nombre est irrationnel)**.**

2 Inégalités et Valeur Absolue

2.1 Overview

TODO

2.2 Définition de la Valeur Absolue

Définition 2.2.1 (Valeur Absolue)**.**

2.3 Propriétés des Valeurs Absolues

Remarque. *On peut interpréter la valeur absolue comme la distance entre 2 termes*

2.4 Propriétés des Inégalités

Problème (Montrer l'inégalité)**.** *Lorsqu'on veut montrer une inégalité, on utilise les astuces suivantes:*

1. *Ajouter et Enlever le même terme*
2. $x^2 > 0$
3. *Utiliser la transitivité pour comparer avec un autre terme*

Problème (Résoudre des inégalités)**.** *Lorsqu'on nous demande de résoudre des inégalités, on doit trouver les valeurs qui satisfont l'inégalité. Pour ce faire, il est pratique d'utiliser un tableau pour tester les intervalles de cohérence.*

2.5 Induction

2.6 Inégalité de Bernouilli

Théorème 2.6.1 (Inégalité de Bernouilli)**.** $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t > -1, (1+t)^n \geq 1 + nt$

3 Suprémum et Infimum

3.1 Overview

3.2 Majorant et Minorant

Définition 3.2.1 (Majorant)**.** *Soit* $E \subseteq \mathbb{R}$*.* E *est majoré si* $\exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in E, x \leq c$*. On dit que* c *est un majorant de* E

Définition 3.2.2 (Minorant)**.** *Soit* $E \subseteq \mathbb{R}$*.* E *est minoré si* $\exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in E, x \geq c$*. On dit que* c *en un minorant de* E

Définition 3.2.3 (Ensemble Borné)**.** *Soit* $E \subseteq \mathbb{R}$*.* E *est borné si* E *est majoré et minoré*

Proposition 3.1. E *est borné* $\rightarrow \exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in E, |x| < c$

Remarque. *Un majorant et un minorant sont des valeurs que l'ensemble de peut jamais atteindre. Il peut en exister plusieurs*

3.3 Suprémum et Infimum

Définition 3.3.1 (Supremum)**.** *Soit* $E \subseteq \mathbb{R}$*. On dit que* $c \in \mathbb{R}$ *est le supremum de* E *si c'est le plus petit majorant de* E

Définition 3.3.2 (Infimum)**.** *Soit* $E \subseteq \mathbb{R}$*. On dit que* $c \in \mathbb{R}$ *est l'infimum de* E *si c'est le plus grand minorant de* E

Proposition 3.2. *Soit* $A \subseteq \mathbb{R}, B \subseteq \mathbb{R}$ *tel que Sup* A *et Sup* B *existent. Alors,* $sup(A + B) = supA + supB$

Proposition 3.3. *Le suprémum et l'infimum sont uniques.*

Problème (Montrer que la suite possède un suprémum/infimum)**.** *Pour montrer que la suite possède un supremum/infimum, il faut montrer que:*

1. *c est un majorant/minorant*
2. *c est le plus petit majorant/plus grand minorant*

Pour montrer la première étape, il suffit d'utiliser la définition. Pour montrer la deuxième étape, on procède par contradiction. On suppose qu'il existe un plus petit majorant/plus grand minorant et on montre que cela contredit l'hypothèse que S' était un majorant/minorant

Problème (Montrer que la suite ne possède pas un suprémum/infimum)**.** *Une suite de possède pas de suprémum ou d'infimum si elle n'est pas bornée (l'ensemble est infini). On peut supposer qu'elle est bornée et utiliser l'axiome de complétude pour montrer qu'elle est majorée/minorée, puis on montre qu'il s'agit d'une contradiction avec la propriété Archimédienne.*

Problème (Montrer que le suprémum/infimum est atteint)**.**

4 Axiomes de Complétude

4.1 Overview

4.2 Propriété Archimédienne

Théorème 4.2.1 (Propriété Archimédienne)**.** *Pour tout* $x, y \in \mathbb{R}$ *avec* $x > 0$*, il existe* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $nx > y$

Remarque. *La propriété Archimédienne nous dit que les réels ne sont pas bornés. Ainsi, si on prend un nombre arbitraire, on peut en trouver un autre qui est plus petit ou plus grand.*

4.3 Axiome de Complétude

Proposition 4.1 (Axiome de Complétude)**.** *Si* $E \in \mathbb{R}$ *est non-vide et majorée, alors* $\sup E$ *existe dans* $\mathbb{R}$

Corollaire 4.3.1 (Corollaire de l'Axiome de Complétude)**.** *1.* $\forall y \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, n > y$

2. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists! n \in \mathbb{R}$ *tel que* $n \leq x \neq n + 1$ *(fonction plancher)*

3. (Densité de $\mathbb{Q}$ *dans* $\mathbb{Q}$*): Soit* $x, y \in \mathbb{R}$*, alors* $\exists r \in \mathbb{Q}, x < r < y$

4. (Densité de $\mathbb{R}\ \mathbb{Q}$ *dans* $\mathbb{Q}$*): Soit* $x, y \in \mathbb{R}$*, alors* $\exists r \in \mathbb{R}\ \mathbb{Q}, x < r < y$

Théorème 4.3.1. *L'axiome de complétude est faux dans* $\mathbb{Q}$

4.4 Densité des Rationnels

Théorème 4.4.1 (Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$)**.** *Soit* $x, y \in \mathbb{R}$*, alors* $\exists r \in \mathbb{Q}, x < r < y$

Théorème 4.4.2 (Densité de $\mathbb{Q}'$ dans $\mathbb{R}$)**.** *Soit* $x, y \in \mathbb{R}$*, alors* $\exists r \in \mathbb{Q}', x < r < y$

Remarque. *Le densité des rationnels et des irrationnels découle de la propriété d'Archimède. Puisque les réels ne sont pas bornés, alors il existe une infinité de nombre dans un intervalle, alors il existe nécessairement un rationnel et un irrationnel dans cet intervalle.*

Intuition. *La preuve de la densité se fait en construisant un rationnel à partir de la distance entre* x *et* y

4.5 Racine n-ième

Définition 4.5.1 (Definition Racine n-ième)**.**

Théorème 4.5.1 (Racine n-ième)**.** $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \geq 0, \exists! y \geq 0, y^n = x$ $(\sqrt[n]{x} = y)$

5 Dénombrabilité

5.1 Overview

5.2 Injection, Surjection, Bijection

Définition 5.2.1 (Injection).

Définition 5.2.2 (Surjection).

Théorème 5.2.1 (Bijection).

5.3 Cardinalité

Définition 5.3.1 (Cardinalité). *Deux ensembles A et B ont le même cardinal s'il existe une bijection $\Phi : A \to B$*

Corollaire 5.3.1. *Si $\Phi : A \to B$ est une bijection, alors $\Phi^(-1) : B \to A$ existe et est bijective*

Définition 5.3.2 (Dénombrabilité). *Un ensemble A est dénombrable s'il a le même cardinal que $\mathbb{N}$*

Remarque.

$\mathbb{N}$ est dénombrable

Un ensemble dénombrable est infini

Un ensemble est dénombrable $\iff$ on peut former une suite infinie $a_1, a_2, ...$ contenant une et une seule fois chaque élément de A

Théorème 5.3.1. *Soit $f : A \to B$, une fonction:*

1. *si f est surjective, alors $|A| \geq |B|$*
2. *si f est injective, alors $|A| \leq |B|$*
3. *si f est bijective, alors $|A| = |B|$*

Proposition 5.1.

1. *$\mathbb{Z}$ est dénombrable*
2. *$\mathbb{Q}$ est dénombrable*
3. *$\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable*

Remarque (Diagonale de Cantor).

6 Suites

6.1 Overview

Dans cette section, on essaie de déterminer si une suite converge et si oui, on veut calculer sa limite

6.2 Convergence d'une suite

Définition 6.2.1 (Suite Borné). *La suite* (a_n),

1. *majorée si* $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, (a_n) \leq M$
2. *minorée si* $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, (a_n) \geq M$
3. *bornée si* $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |(a_n)| \leq M$

Définition 6.2.2 (Croissance et Décroissance d'une Suite). *La suite* (a_n) *est*

1. *strictement croissante si* $a_(n+1) > a_n, \forall n \in \mathbb{N}$
2. *croissante si* $a_(n+1) \geq a_n, \forall n \in \mathbb{N}$
3. *strictement décroissante si* $a_(n+1) < a_n, \forall n \in \mathbb{N}$
4. *décroissante si* $a_(n+1) \leq a_n, \forall n \in \mathbb{N}$

Définition 6.2.3 (Suite Monotone). *La suite est monotone si la suite est croissante ou décroissante*

Définition 6.2.4 (Convergence d'une Suite). *Une suite* (a_n) *est convergente s'il existe un nombre* $L \in \mathbb{R}$ *tel que pour* $\varepsilon > 0$, *il existe* $N \in \mathbb{N}$ *pour lequel* $|a_n - L| < \varepsilon$ *lorsque* $n \geq \mathbb{N}$.
On dit que L est la limite de (a_n), *et on écrit*

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L$$

Définition 6.2.5 (Divergence d'une suite). *Si* (a_n) *n'est pas convergente, on dit qu'elle est divergente*

$$\lim_(n \to \infty) a_n \neq L \iff \exists \varepsilon 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, |a_n - L| \geq \varepsilon$$

Problème (Montrer que la suite converge). *Pour montrer que la suite converge, il faut trouver un N qui satisfait l'inégalité* $|a_n - L| < \varepsilon$. *Pour ce faire, il est pratique de partir avec* $|a_n - L|$ *et de poser N en fonction de* ε.
Comme en différentielle, on peut évaluer la limite d'une suite en calculant sa limite lorsqu'elle tend vers l'infini

Intuition. *On s'imaginer que les valeurs de la suite se trouvent à l'intérieur d'un tube* $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ *à partir d'un certain N.*

Théorème 6.2.1 (La limite est unique)**.** *Si (a_n) est convergente, alors la limite est unique*

Théorème 6.2.2 (La limite est bornée)**.** *Si (a_n) est convergente, alors $a_n | n \in \mathbb{N}$ est bornée*

Corollaire 6.2.1. *Si (a_n) n'est pas bornée, alors elle diverge*

Remarque. *Si (a_n) converge, alors elle est bornée, mais le contraire n'est pas vrai*

Théorème 6.2.3 (Théorème des suites monotones)**.**

Si (a_n) est croissante et majorée , alors $\lim_{n\to\infty} a_n = supa_n | n \in \mathbb{N} =: L$. On écrit $a_n \nearrow L$

Si (a_n) est décroissante et minorée, alors $\lim_{n\to\infty} a_n = inf a_n | n \in \mathbb{N} =: L$. On écrit $a_n \searrow L$

Remarque. *On peut tracer le graphique pour voir que la limite tend vers sup/inf. De plus, le premier terme de la suite correspond à l'inf/sup respectivement*

Théorème 6.2.4. *Pour tout $M \in \mathbb{N}$, on a $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_(n + M - 1)$*

6.3 Limites suppérieures et Limites Inférieures

Définition 6.3.1. *Soit (a_n), une suite*

1. $\sup m \geq n a_m := \sup a_m | m \in \mathbb{N}, m \geq n$
2. $\inf m \geq n a_m := \inf a_m | m \in \mathbb{N}, m \geq n$

Proposition 6.1. *Soit (a_n), une suite bornée. On pose $b_n := \sup_{m\geq n} a_m$ et $c_n := \inf_{m\geq n} a_m$, alors*

1. *(b_n) est décroissante et convergente et $\lim_{n\to\infty} b_n = \inf_{n\geq 1} \sup_{m\geq n} a_m$*
2. *(b_n) est croissante et convergente et $\lim_{n\to\infty} c_n = \sup n \geq 1 \inf m \geq n a_m$*

6.4 Limites Infinies

Définition 6.4.1 (Limite à l'infinie)**.** *On dit qu'une suite (a_n) tend (diverge) vers l'infinie si $\forall M \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, a_n \geq M$*

Remarque. *Si a_n tend vers $-\infty$, alors $a_n \leq M$*

6.5 Opérations Élémentaire des Limites

Théorème 6.5.1. *Supposons que $\lim_{n\to\infty} a_n$ et $\lim_{n\to\infty} b_n = b, a, b, \in \mathbb{R}$, alors*

1. $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$
2. $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$

3. $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = ab$
4. *Si* $b_n \neq 0, b \neq 0, \forall n > N$, *alors* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$
5. *Si* $a_n \leq b_n \forall n \geq N$, *alors* $a \leq b$
6. *Si* $a_n \geq 0$, *alors* $\lim^p_{n\to\infty} \sqrt{(}a_n) =^p \sqrt{(}a) \forall p \in \mathbb{N}$

Corollaire 6.5.1. 1. $\lim_{n\to\infty}(ka_n) = ka, \forall k \in \mathbb{R}$

2. $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = a - b$

6.6 Critère de Comparaison

Théorème 6.6.1 (Théorème des 2 Gendarmes)**.** *Soit* $(a_n), (b_n), (c_n)$, *des suites tel que* $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$ *et* $a_n \leq b_n \leq c_n$, *alors* $\lim_{n\to\infty} b_n = L$

Corollaire 6.6.1. *Si* $|a_n| \to 0$, *alors* $a_n \to 0$

Théorème 6.6.2. *Si* $a_n \to \infty$ *et* $b_n \geq a_n$, *alors* $b_n \to \infty, \forall n \geq N$

6.7 Progression Géométrique

Définition 6.7.1 (Progression Géométrique)**.** *Une progession géométrique de raison* $q \neq 1$ *est une suite de la forme* $(a, aq, aq^2, ...) = (aq^(n-1))_{n\in\mathbb{N}}$

Théorème 6.7.1. 1. *Si* $|q| > 1$, *alors* $|q|^n \to \infty$

2. *Si* $|q| < 1$, *alors* $|q|^n \to 0$

Théorème 6.7.2. *Soit* $q \neq 1$. *On pose* $S_n = 1 + q + q^2 + ... + q^(n-1)$

1. $S_n = \frac{1-q^n}{1-q}$
2. $|q| < 1$, *alors* $S_n \to \frac{1}{1-q}$
3. $|q| > 1$, *alors* S_n *diverge et* $|S_n| \to \infty$

6.8 Racine n-ième

Théorème 6.8.1. 1. $n^(1/n) \to 1\, (n \to \infty)$

2. *Si* $a > 0$, *alors* $a^(\frac{1}{n}) \to 1$

6.9 Sous-suites

Définition 6.9.1 (Sous-suites)**.**

Remarque. *Lorsque* $k \to \infty$, *alors* $n_k \to \infty$, *car* $n_{k-1} < n_k$

Théorème 6.9.1. $a_n \to L \iff$ *toutes sous-suites de* (a_n) *convergent vers* L

Corollaire 6.9.1. 1. *Si une sous-suite diverge, alors* (a_n) *diverge*

2. *Si* (a_n) *converge et* $(a_{n_k}) \to L$, *alors* $a_n \to L$

3. *Si* (a_n) *est monotone et* $(a_{n_k}) \to L$*, alors* $a_n \to L$

Théorème 6.9.2 (Théorème de Bolzano-Weistrass)**.** *Soit* (a_n)*, une suite. Si* (a_n) *est bornée, alros* (a_n) *possède une sous-suite convergente*

Remarque (Méthode de Dichotomie)**.** *La preuve du théorème de Bolzano se fait avec la méthode de la dichotomie. On prend l'intervalle fermé et on le sépare en 2 jusqu'à temps d'avoir un intervalle tellement petit qu'on peut le considérer comme un point, et on dit qu'un point converge vers la même valeur.*

6.10 Suites de Cauchy

Définition 6.10.1 (Suite de Cauchy)**.** *On dit que* (a_n) *est une suite de Cauchy si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq N, |a_{n+k} - a_n| < \varepsilon$$

Remarque (Définition alternative de la suite de Cauchy)**.**

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq N, |a_m - a_n| < \varepsilon$$

Théorème 6.10.1. (a_n) *est une suite de Cauchy* $\Longleftrightarrow$ (a_n) *est une suite convergente*

Intuition. *Intuitivement, la suite de Cauchy mesure la distance entre 2 termes consécutifs. Pour que la suite converge, on veut que la distance deviennent de plus en plus petite et converge vers 0.*

6.11 Suites définies par récurrence

Proposition 6.2 (Nombre d'Euler)**.**

Problème (Calculer la limite d'une suite définie par récurrence)**.**

7 Continuité et Continuité Uniforme

7.1 Overview

7.2 Definition de la Limite d'une fonction

Définition 7.2.1 (Domaine et Image).

Définition 7.2.2 (Intervalle Ouvert et Fermé).

Définition 7.2.3 (Limite d'une fonction). *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ et $a \in \bar{D}$. On dit que f(x) tend vers L lorsque x tend vers a si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D, 0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

On écrit $lim_{x \to a} f(x) = L$

Remarque (Interprétation Graphique). *La définition de la limite d'une fonction nous dit que pour nimporte quel epsilon, on peut trouver delta à l'intérieur de l'intervalle $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$*

Remarque. *Si $f(x) \not\to L, \exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in D, 0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - L| \geq \varepsilon$*

Problème (Montrer que la fonction converge). *Pour montrer que la fonction converge, on doit reverse engineer et trouver $\delta(\varepsilon)$. On part avec $|f(x) - L|$ et on essait d'isoler $|x - a|$ pour pouvoir poser δ en fonction de epsilon.*

Problème (Montrer que la fonction ne converge pas).

Théorème 7.2.1. *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ et $a \in \bar{D}$. Les énoncés suivants sont équivalents:*

1. *$lim_{x \to \infty} f(x) = L$*
2. *Pour toute suite $(x_n) \subseteq D$ a tel que $x_n \to a$, on a $lim_{x \to \infty} f(x_n) = L$*

Intuition. *Essentiellement, le théorème ci-haut nous dit que la définition des limites est équivalente à la définition de la suite. Intuitivement, Si la suite x_n converge, alors on peut travailler à l'intérieur de cet intervalle et trouver la fonction qui converge aussi (on fixe $|x_n - a| < \varepsilon$)*

Définition 7.2.4 (Limite à gauche et à droite).

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D, 0 < x - a < \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon (resp - \delta < x - a < 0)$$

Définition 7.2.5 (Limite infinie).

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D, 0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow f(x) - L > M (resp < M)$$

Définition 7.2.6 (Limite à l'infini).

$$lim_{x \to \infty} f(x) = L \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in D, x > M \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon (resp < M)$$

7.3 Propriétés des limites

Théorème 7.3.1 (Propriétés des limites de fonctions continues). *Soit* $f, g : D \to \mathbb{R}$. *Si* $f(x) \to L$ *et* $g(x) \to M$, *alors*

1. $|f(x)| \to L$
2. $f(x) + g(x) \to L + M$
3. $f(x)g(x) \to LM$
4. $\frac{f(x)}{g(x)} \to \frac{L}{M}$, *si* $M \neq 0$
5. $f(x) \leq g(x)$, *alors* $L \leq M$
6. $\forall n \in \mathbb{N}, ^n\sqrt(L)$ *si* $f(x) \geq L, \forall x \in D$

Corollaire 7.3.1. *Soient* P *et* Q, *des polynomes et* $Q(a) \neq 0$. *Alors* $lim_{x \to a} \frac{P(a)}{Q(a)}$

7.4 Definition de la Limite d'une fonction

Définition 7.4.1 (Fonction Continue en un point). *f est continue en* $a \in D$ *si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D, 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon$$

Définition 7.4.2 (Fonction Discontinue en un point). *f est discontinue en* $a \in D$ *si elle n'est pas continue en a*

Définition 7.4.3 (Fonction Continue). *f est continue sur D si* $\forall a \in D$, *f est continue en a. On dit que f est continue*

Proposition 7.1. *Les énoncés suivants sont équivalents:*

1. *f est continue en a*
2. $lim_{x \to a} f(x) = f(a)$
3. $\forall (x_n) \subseteq D, x_n \to a \implies f(x_n) \to f(a)$

Intuition. *La proposition nous dit que la définition de la continuité implique la définition de la limite et vice-versa*

7.5 Propriétés de fonctions continues

Proposition 7.2. *Soit* $f, g : D \to \mathbb{R}$ *sont continues,* $a \in D$, *alors* $|f|, f + g, fg, f/g(sig(a) \neq 0), ^n\sqrt(f)(sif \geq 0)$ *sont continues en a*

Proposition 7.3. *Les fonctions transcendantes suivantes sont continues en chaque point de leur domaine:* $e^x, logx, sin(x), cos(x), tan(x), arcsin(x), arccos(x), arctan(x)$

Proposition 7.4. *La composition de fonctions continues est aussi continues*

Proposition 7.5. 1. $lim_{x \to -\infty} e^x = 0$

2. $lim_{x \to \infty} e^x = \infty$
3. $lim_{x \to 0^{(+)}} log(x) = -\infty$
4. $lim_{x \to \infty} log(x) = \infty$

7.6 Théorème des Valeurs Intermédiaires

Théorème 7.6.1 (Théorème des Valeurs Intermédiaires)**.** *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continues sur [a,b] et tel que $f(a) < f(b)$. Alors, $\forall c$ tel que $f(a) < c < f(b)$, il existe $x \in (a,b)$ tel que f(x)=c*

Intuition. *Le TVI nous dit que si la fonction est continue dans un intervalle, alors on peut atteindre toutes les images à l'intérieur de l'intervalle donné par f(a) et f(b)*

Remarque (Algorithme de Bissection)**.** *La preuve du TVI se fait avec l'algorithme de bissection, qui marche de façon similaire à l'algorithme de dichotomie pour le théorème de Bolzano-Weistrass.*

Problème (Point Fixe)**.** *Lorsqu'on résout des problèmes de points fixes, on veut transformer le problème en problème de zéro. Par exemple, si on a $f(x) = x$, alors on veut travailler avec $g(x) = f(x) - x$ et montrer qu'il y a un changement de signe dans cet intervalle pour que g possède un zéro*

Problème (Trouver les racines de la fonction)**.** *On peut utiliser le théorème des valeurs intermédiaires pour montrer qu'il y a une racine dans l'intervalle. Essentiellement, on veut montrer que s'il y a un changement de signe dans un intervalle, et que la fonction est continue, nécessairement, on passe par l'axe des x et la fonction possède un zéro dans cet intervalle.*
Si on nous demande de trouver la racine à au plus (erreur), on n'a qu'à définir un intervalle dont la moitié est moins que ce terme d'erreur

7.7 Continuité Uniforme

Définition 7.7.1 (Continuité Uniforme)**.** *Soit $f : D \to \mathbb{R}$, une fonction. On dit qu'elle est uniformément continue si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in D, |x - y| \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Théorème 7.7.1. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Si f est continue, alors f est uniformément continue. En d'autres mots, si f est une fonction continue définie sur un compact (intervalle fermé et borné), alors elle est uniformément continue sur cet intervalle.*

Théorème 7.7.2 (Une Fonction Lipschitz est uniformément continue)**.** *Soit $f : D \to \mathbb{R}$. S'il existe une constante K tel que $K >)$ telle que*

$$|f(x) - f(y)| < K|x - y|$$

alors elle est uniformément continue

Remarque. *Une fonction Lipschitz est bornée, et on sait que toute fonction continue qui est fermé et bornée dans un intervalle est convergente, et donc continuement uniforme*

Problème (Montrer que la fonction n'est pas uniformément continue)**.** *Une fonction est uniformément continue si on peut fermer les extrémités. En d'autres mots, il faut que la limite aux extrémités existent et soient égale à f(a)*

8 Dérivabilité

8.1 Overview

8.2 Définition de la dérivabilité

Définition 8.2.1 (Dérivée)**.** *Soit I =(a,b), un intervalle. Soit $F : I \to \mathbb{R}$, une fonction et soit $c \in I$. ALors f est dérivable en c si*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \text{ existe}$$

La valeur de la limite s'appelle a dérivée de f en a, notée $f'(A)$

Remarque. *La définition de la dérivée nous dit que si la dérivée est équivalent à prendre deux points et de les rapprocher à une distance très petite, qui tend vers 0. Une définition équivalente serait la suivante:*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ existe}$$

Remarque (Interprétation Analytique)**.** *On sait que la dérivée représente la pente de la fonction en un point donné, mais on peut réécrire la fonction de la façon suivante:*

$$f(c+h) = f(c) + f'(c)h + \epsilon(h)h, \epsilon(h)h \to 0 \text{ lorsque } h \to 0$$

Ainsi, puisque f(c+h) = constante + pente + erreur, on peut considérer que f ressemble à une fonction affine localement

Théorème 8.2.1 (Règles de Calcul)**.** *Soit I, un intervalle ouvert et $f, g : I \to \mathbb{R}$. Si f et g sont dérivables en $a \in I$, alors*

1. *Somme:*
2. *Produit:*
3. *Quotient:*

Théorème 8.2.2 (Règle de Dérivation en Chaine)**.** *Si f et g sont dérivables en b = f(a), alors $g(f(x))$ est dérivable en a et*

$$(g \cdot f)'(a) = g'(f(a))f'(a) = g'(b)f'(a)$$

8.3 Extremums Relatifs et Absolues

Définition 8.3.1 (Extremums Locaux)**.** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$, une fonction et soit $a \in I$. On dit que a est un maximum local s'il existe un intervalle*

$$(c, d) \subseteq I \text{ tel que } a \in \ (c, d) \text{ et } f(x) \leq f(a)$$

On dit que a est un minimum local s'il existe un intervalle

$$(c, d) \subseteq I \text{ tel que } a \in \ (c, d) \text{ et } f(x) \geq f(a)$$

Remarque. *Pour que le maximum/minimum existent, il faut que le maximum/minimum soit atteint*

Définition 8.3.2 (Points Critiques)**.** *Les points critiques de f sont les points x lorsque f(x)=0*

Théorème 8.3.1. *Supposons $f : I \to \mathbb{R}$ atteint un minimum ou un maximum en un point $a \in I$ et que a est un point intérieur de I. Supposons aussi que f est dérivable dans l'intervalle. On a que $f'(a) = 0$*

Remarque. *La pente d'un maximum et d'un minimum est nulle*

Remarque. *La fonction f peut atteindre un min/max au bout d'un intervalle sans avoir f'(a)=0, car si a est au bout, il n'est pas inclu dans l'intervalle*

Théorème 8.3.2. *f dérivable en a $\Longrightarrow$ f est continue en a, mais la contraposée est fausse.*

8.4 Propriété des fonctions dérivables

8.4.1 Théorème de Rolle

Définition 8.4.1 (Théorème de Rolle)**.** *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, une fonction telle que*

1. *f est continue sur [a,b]*
2. *f est dérivable sur (a,b)*
3. *f(a)=f(b)*

alors $\exists c \in (a, b)$ tel que $f'(c) = 0$

Remarque. *Le Théorème de Rolle nous dit que si deux points ont la même image et que la fonction est continue et dérivable, alors il y a un extremums local. On sait que ce ne sera pas un point d'inflexion, car la fonction ne peut pas avoir d'asymptote verticale dans l'intrervalle si elle est continue.*

Corollaire 8.4.1 (Corollaire du Théorème de Rolle)**.** *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, une fonction continue sur [a,b] et n fois dérivable sur (a,b). Supposons que $f^(n) \neq 0, \forall x \in (a, b)$. Alors l'équation f(x)=0 possède au plus n solutions dans l'intervalle [a,b]*

Remarque. *Le corollaire nous dit qu'un polynôme a au plus n zéros*

Problème (Montrer que f possède au plus n racines réelles)**.** *Pour trouver les zéros, on peut utiliser le théorème des valeurs intermédiaires pour construire les intervalles avec changement de signe. Pour montrer qu'il n'y a pas un deuxième zéro dans cet intervalle, on peut utiliser le théorème de Rolle pour montrer qu'il y a une contradiction. On montre que la racine trouvée est à l'extérieur de l'intervalle définie.*

8.4.2 Théorème des Accroissements Finis

Théorème 8.4.1 (Théorème des Accroissements Finis)**.** *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, une fonction telle que*

1. *f est continue sur [a,b]*
2. *f est dérivable sur (a,b)*

alors $\exists c \in (a, b)$ tel que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Intuition. *Le théorème des accroissements finis nous dit que si on a une fonction continue et dérivable et qu'on relie les 2 extrémités de l'intervalle, on peut trouver un point intérieur c qui possède la même pente que la droite formée par a et b*

Remarque. *Le théorème des accroissements finis est le théorème de Rolle généralisé. C'est comme si on rotationnait notre graphique*

Remarque. *Le théorème des accroissements finis est pratique, car il nous permet de rendre notre fonction Lipschitienne:*

$$|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|, \forall x \in \mathbb{R}, |f'(x) \leq M$$

Ainsi, si on peut appliquer le théorème des accroissements finis sur une fonction, la fonction est uniformément continue, car elle est Lipschitienne

Théorème 8.4.2 (Fonction Constante)**.** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$, une fonction dérivable avec I, un intervalle ouvert. Alors, f est constante $\iff f'(x) = 0 \forall x \in I$*

Intuition. *La preuve se fait avec le théorème de Rolle*

Problème (Calculer approximativement $\sqrt{(}24)$)**.** *On peut utiliser le théorème des accroissements finis pour approximer une racine en posant $f(x) = \sqrt{(}x)$ et en travaillant avec l'intervalle [16,25], car on sait calculer $\sqrt{(}16)$ et $\sqrt{(}25)$*

Corollaire 8.4.2 (Formule de Cauchy)**.** *Soit f et g, deux fonctions continues sur [a,b] et différentiables sur (a,b). Si $g'(x) \neq 0 \forall x \in (a, b)$, il existe au moins un point $c \in (a, b)$ tel que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Remarque. *On peut retrouver la formule de Cauchy à partir du théorème des accroissements finis ou de la règle de l'Hospital*

8.5 Croissance et Décroissance

Définition 8.5.1 (Fonction Croissante et Décroissante)**.** *Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite*

1. *croissante si $a \leq b \implies f(a) \leq f(b)$*

2. *strictement croissante si* $a < b \Longrightarrow f(a) < f(b)$
3. *décroissante si* $a \geq b \Longrightarrow f(a) \geq f(b)$
4. *strictement décroissante si* $a > b \Longrightarrow f(a) > f(b)$

Théorème 8.5.1. *Une fonction* $f : I \to \mathbb{R}$*, dérivable sur un intervalle I ouvert.*

1. f *est croissante* $\Longleftrightarrow f'(x) \geq 0, \forall x \in I$
2. $f'(x) > 0 \forall x \in I$*, alors* f *est strictement croissante sur* I
3. f *est décroissante* $\Longleftrightarrow f'(x) \leq 0, \forall x \in I$
4. $f'(x) < 0 \forall x \in I$*, alors* f *est strictement décroissante sur* I

Intuition. *La preuve se fait avec le théorème des accroissements finis.*

Remarque. f *strictement croissante* $\not\Longrightarrow f'(x) > 0 \forall x$

8.6 Règle de l'Hospital

Théorème 8.6.1 (Règle de l'Hospital)**.** *Soient* $f, g : I \to \mathbb{R}$*, des fonctions dérivables. Soit* $a \in I$ *et supposons que f(a)=0 et g(a)=0. Soit* $a \in I$ *et supposons que* $f(a) = 0, g(a) = 0$*. Si*

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l, \text{ alors } \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

Remarque. *L'hypothèse que* $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *existe suppose aussi que* $g'(x) \neq 0 \forall x$ *assez proche de a. La règle de l'hospital marche quand même s'il y a une discontinuité dans l'intervalle I, on ne veut juste pas que ce soit autour de a*

Intuition. *La règle de l'hospital nous permet d'évaluer la limite de forme indéterminée avec la dérivée*

Lemme 8.6.2. *Soient* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$*, deux fonctions continues sur [a,b] et dérivales sur (a,b). Alors, il existe* $c \in (a, b)$ *tel que*

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c)$$

Remarque. *Le cas g(x)=x est le théorème des accroissements finis*

Remarque (Lien entre théorème des accroissements finis et Règle de l'Hospital)**.**

8.7 Approximation

8.7.1 Théorème des Développements Limités

Définition 8.7.1 (Théorème des Développements Limités)**.**

8.7.2 Théorème de Taylor

Théorème 8.7.1 (Théorème de Taylor)**.**

8.7.3 Méthode de Newton

Théorème 8.7.2 (Méthode de Newton)**.**

Intuition.

Remarque (Convergence Quadratique)**.**

8.8 Tracés de Graphe

9 Séries

9.1 Overview

Le but de cette section est de déterminer la convergence d'une série, et si elle converge, de calculer sa somme. L'importance de la convergence d'une série est p/r à l'approximation. On utilise les séries pour estimer les fonctions transcendantes.

Idéalement, on serait capable d'exprimer toutes les séries en termes des séries célèbres, mais ce n'est pas le cas. On verra donc qu'on peut utiliser des critères pour déterminer si la série converge ou non.

9.2 Convergence des séries

Définition 9.2.1 (Série de terme général)**.** *La série S de termes général a_n est l'expression*

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$$

Définition 9.2.2 (Sommes Partielles)**.** *Soit $S_n = \sum k = 1^n a_k$. On appelle S_n la suite des sommes partielles de S*

Définition 9.2.3 (Convergence de Série)**.** *Si S_n converge, alors on dit que la série S converge et on écrit $\lim_{n\to\infty} S_n = S$. Si S_n diverge, alors on dit que la série S diverge*

Intuition. *Une suite et une série est essentiellement le même objet, seulement pour les suites, on considère la valeur de chaque terme, alors que pour les séries, on considère la distance entre 2 termes consécutifs.*
La convergence d'une suite signifie que si on est assez loin dans la suite, le terme a_n prend une certaine valeur, alors que la convergence d'une série nous dit que si on additionne la distance entre deux termes consécutifs une infinité de fois, on obtient une valeur réelle.

Remarque. *Commencer l'itération d'une série change uniquement la valeur de sa somme, pas sa convergence*

9.3 Séries célèbres

Proposition 9.1 (Série Géométrique)**.**

Proposition 9.2 (Série Harmonique)**.**

Proposition 9.3 (Série de Téléscopique)**.**

Proposition 9.4 (Série de Riemann)**.**

Théorème 9.3.1 (Convergence d'une suite). *Si* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge, alors* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Corollaire 9.3.1. *Si* $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$*, alors la série diverge*

Intuition. *Pour la convergence d'une suite, on se disait qu'on voulait que la distance entre 2 termes consécutifs deviennent de plus en plus petit pour que le n-ième terme reste sur place. L'intuition pour la convergence d'une suite est similaire: si la distance entre deux termes consécutifs n'est pas de 0, on continue d'ajouter des termes à l'infini, ce qui veut dire que la somme tend vers l'infini*

Théorème 9.3.2 (Propriétés de Séries). *Soient* $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *et* $T = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$*, deux séries convergentes. Alors,*

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(ca_n + db_n) = cS + dT, c, d \in \mathbb{R}$
2. *Si* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverge, alors* $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ *diverge si* $c \neq 0$

Théorème 9.3.3. *Si une série converge, alors on peut regrouper ses termes en blocs sans changer l'ordre. La réciproque est fausse*

9.4 Critères de Convergence pour les séries à termes positifs

Définition 9.4.1 (Série à termes positifs). *Une série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *est dite à termes positifs si* $a_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$

Remarque. 1. *Si S est à termes positifs, alors* (S_n) *est croissante*

2. *S converge* $\iff (S_n)$ *est majoré*

1. Critère de Comparaison
2. Critère de Condensation de Cauchy
3. Critère du Quotient
4. Critère d'Alembert (du rapport)
5. Critère de la Racine de Cauchy
6. Critère de Dirichlet

9.5 Convergence des séries alternées et Critère de Leibniz

Définition 9.5.1 (Convergence Absolue et Conditionnelle). *Une série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *est dite*

1. *Absolument Convergente si* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *converge*
2. *Conditionnellement Convergente si* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *diverge*

Théorème 9.5.1 (Critère de Leibniz).

Théorème 9.5.2. *Si une série est absolument convergente, alors elle converge*

Théorème 9.5.3 (Produit de Cauchy)**.** *Soient* $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *et* $T = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$. *On pose*

$$P := \sum_{n=1}^{\infty}(a_n b_n + a_1 b_{n-1} + ... + a_{n-1} b_1 + a_n b_n) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{n}(a_k - b_{n-k})$$

1. *Si S est absolument convergente et T converge, alors P converge et P=ST*
2. *Si S et T sont absolument convergentes, alors p est absolument convergente et P=ST*

9.6 Séries Entières

Définition 9.6.1 (Série Entière)**.** *Une série entière est une série de la forme*

$$\sum a_n x^n, a_n, x \in \mathbb{R}$$

Théorème 9.6.1. *Soit* $\sum a_n x^n$*, une série entière. Il existe un unique* $R \in [0, \infty]$ *tel que*

1. $\sum a_n x^n$ *est absolument convergente si* $|x| < R$
2. $\sum a_n x^n$ *est divergente si* $|x| > R$

On dit que R est le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ *et (-R,R) est son intervalle de convergence*

Remarque. *On parle de rayon de convergence, car on a un cercle en analyse complexe.*

Remarque. *On utilise les séries entières (ou de puissance) pour estimer des fonctions transcendantes* $(sin, cos, tan, e^x, logx, ...)$ *à l'aide d'une somme de fonctions polynômiales. Cependant, la fonction est similaire que sur un certain intervalle, d'ou l'intervalle de convergence. Plus on ajoute de termes, plus notre estimation est précise et plus notre intervalle grandit.*