

Lectures Notes for Calculus

Emulie Chhor

May 18, 2021

Introduction

1 Why Study Calculus?

2 Overview of Calculus

Le Calcul se découle en 4 cours:

1. Calcul Différentiel
2. Calcul Intégral
3. Calcul à Plusieurs Variables
4. Vector Calculus

Le premier cours de calcul porte sur les limites, la continuité et la différentiabilité. Puisqu'il s'agit d'un premier cours de calcul, une grande partie est axée sur le calcul des limites et la dérivation et ses applications. C'est dans le cours d'analyse qu'on prend une approche plus rigoureusement les notions de limites, continuité et différentiabilité.

Le deuxième cours de calcul porte sur les techniques d'intégrations et les suites et séries.

Le troisième cours de calcul porte encore sur les limites, la convergence, la continuité et la différentiabilité, mais on ajoute une 3e dimension. On verra comment utiliser les coordonnées polaires et cartésiennes pour changer les bornes d'intégrations et visualiser les intégrales à dessiner.

Finalement, le quatrième cours de calcul porte sur le Vector Calculus.

Part I

Pre-Calculus

1 Overview

Part II

Calcul Différentiel

1 Overview

Le calcul différentiel se découle en plusieurs chapitres:

1. Fonctions
2. Limites et Continuité
3. Dérivées
4. Applications des dérivées

2 Fonctions

- 2.1 Détermination du domaine, des zéros et du graphe d'une fonction
- 2.2 Caractéristiques des fonction algébriques et transcendantes usuelles

3 Limites et continuité

- 3.1 Notion informelle de limite
- 3.2 Calcul des limites
- 3.3 Formes indéterminées
- 3.4 Continuité d'une fonction

4 Dérivées

- 4.1 Définition en terme de limite
- 4.2 Calcul de la dérivée à l'aide de limites
- 4.3 Propriétés des dérivées
- 4.4 Formules de dérivation
- 4.5 Calcul de dérivées à l'aide des formules
- 4.6 Dérivée des fonctions transcendantes
 - 4.6.1 Fonctions Trigonométriques
 - 4.6.2 Fonctions Trigonométriques Inverses
 - 4.6.3 Fonctions Exponentielles
 - 4.6.4 Fonctions Logarithmique
- 4.7 Dérivation implicite

5 Applications des dérivées

- 5.1 Croissance et décroissance
- 5.2 Maximums et minimums
- 5.3 Concavité et points d'inflexion
- 5.4 Tableau de variation et graphes de fonctions
- 5.5 Asymptotes verticales et horizontales
- 5.6 Optimisation

Part III

Calcul Intégral

1 Overview

Le calcul intégral se découle en plusieurs chapitres:

1. Introduction aux Intégrales
2. Fonctions exponentielles, logarithmiques, trigos et inverses trigos
3. Techniques d'intégration
4. Applications d'Intégration
5. Équations différentielles
6. Suites et Séries

2 Limites, continuité et dérivées

2.1 Dérivation logarithmique

2.2 Règle de l'Hospital

2.3 Différentielles

3 Intégrale indéfinie

3.1 Équations différentielles à variables séparables

3.2 Formules d'intégration

3.3 Changement de variable

4 Intégrale définie

4.1 Notation sigma

4.2 Sommes de Riemann

4.3 Théorème fondamental du calcul

4.4 Changement de variable

5 Techniques d'intégration

5.1 Intégration par parties

La technique d'intégration par parties est une technique d'intégration utile lorsqu'on a un produit de fonction avec u facile à dériver et dv facile à intégrer.

Theorem 5.1.1 (Intégration par parties).

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Remarque (Intégrale par parties circulaire). *Parfois, on obtient la même équation de part et d'autres de l'équation, alors on peut isoler et résoudre algébriquement,*

5.2 Intégrale trigonométrique

Lorsqu'on doit résoudre des intégrales trigos, qui sont des intégrales écrites uniquement avec des fonctions trigos (ou inverse trigos?), on utilise les identité trigos pour substituer pour exprimer la fonction en une seule fonction trigo (et utiliser substitution u)

Habituellement, on regarde la la parité de l'exposant pour déterminer quelle stratégie utiliser.

1. si m pair et n impair: on utilise $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$
2. si m et n sont pair: on remplace $\cos^2 x$ et $\sin^2(x)$
3. si m et n sont impair: $\sin(x)\cos(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$
4. si m et n ont le même exposant:
5. si a et b prennent des valeurs différentes

Theorem 5.2.1 (Identités trigos). 1. $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$

2. $\sec^2(\theta) = 1 + \tan^2(\theta)$
3. $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$
4. $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$
5. $\sin(x)\cos(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$
6. $\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\sin(a-b) + \sin(a+b)]$
7. $\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$
8. $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\cos(a-b) + \cos(a+b)]$
1. $\cos(-A) = \cos(A)$
2. $\sin(-A) = -\sin(A)$
3. $\sin(A+B) = \sin(A) \cdot \cos(B) + \cos(A) \cdot \sin(B)$
4. $\sin(A-B) = \sin(A) \cdot \cos(B) - \cos(A) \cdot \sin(B)$
5. $\cos(A+B) = \cos(A) \cdot \cos(B) - \sin(A) \cdot \sin(B)$
6. $\cos(A-B) = \cos(A) \cdot \cos(B) + \sin(A) \cdot \sin(B)$

Remarque. On obtient l'identité $\sec^2(\theta) = 1 + \tan^2(\theta)$ en divisant $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$ par $\cos^2 x$ de chaque côté.

5.3 Substitution trigonométrique

Parfois, même avec des u-substitution, il n'est pas possible de résoudre l'intégrale, car on est encore pris avec la racine. Ainsi, on veut utiliser le lien entre les propriétés trigos (algébriques) et le théorème de pythagore pour pouvoir se débarrasser de la racine.

5.3.1 Intuition derrière la substitution trigo

Le premier concept à se souvenir est qu'on veut partir des identités trigos pour construire notre triangle et poser u. En appliquant la racine des 2 côtés, on obtient:

1. $1 - \sin^2(\theta) = \cos^2(\theta) \implies \sqrt{1 - \sin^2(\theta)} = \cos(\theta)$

$$2. \sec^2(\theta) = 1 + \tan^2(\theta) \implies \sqrt{1 + \tan^2(\theta)} = \sec(\theta)$$

$$3. \sec^2(\theta) - 1 = \tan^2(\theta) \implies \sqrt{\tan^2(\theta)}$$

Ainsi, on veut poser u pour satisfaire

5.4 Décomposition en fractions partielles

1. Équation linéaire
2. Équation quadratique

6 Applications de l'intégrale définie

6.1 Aire entre deux courbes

6.2 Volume de solides de section connue

6.3 Surfaces et volumes de révolution

6.4 Longueur d'une courbe

7 Suites et séries

7.1 Suites — définition et notion de convergence

7.2 Séries — définition

7.3 Séries Notables

7.4 Critères de convergence

7.4.1 Séries à termes positifs

7.4.2 Séries alternées

7.5 Séries de puissance

7.5.1 Séries de Taylor et de MacLaurin

Part IV

Calcul à plusieurs variables

1 Overview

Le calcul à plusieurs variables se découle en plusieurs chapitres:

1. Suites et Séries
2. Vecteurs et Matrices
3. Équations des droites et des plans
4. Fonctions de plusieurs variables
5. Equations Paramétriques et Coordonnées Polaires
6. Dérivées Partielles
7. Optimisation
8. Intégrales Multiples

Part V

Vector Calculus

1 Overview

Part VI

Ressources

1 Books

2 Lectures

1. Progfessor Butler

3 Exercices

1. Paul's Lectures Notes