Résumé des Cours - Processus Stochastiques

Emulie Chhor

May 11, 2021

Introduction

Ce document est un résumé des idées importantes présentées lors de chaque cours de MAT2717

1 Semaine 1

1.1 Théorie 1

Big Idea

Dans le premier cours de probabilité, on s'est penché sur la notion de variable aléatoire. Dans ce cours-ci, on voit qu'on doit ajouter un autre paramètre à ces variables aléatoires: le temps. On ne parle donc plus de variables aléaoires, mais de processus stochastiques, qui sont des variables aléatoires prenant en considération le temps. Ainsi, on parle donc de processus stochastique à temps discrete et à temps continu, dépendemment si on considère le temps discret ou continu.

Outline

1. Processus Stochastiques
2. Marche Aléatoire

1.2 Processus Stochastiques

Un processus stochastique est une v.a aléatoire qui est dépendante du temps. Elle peut être discrète ou continue (dépendemment à quelle fréquence on observe la valeur de la v.a)

On dit que le temps est déterministe. Why?

On peut écrire un p.s. $X(\omega, t)$, avec omega: les scenarios possibles et t, le temps. Si on fixe le temps, on parle de variable aléatoire. Si on fixe l'évènement et on laisse le temps libre, on parle de trajectoire.

1.3 Marche Aléatoire

La marche aléatoire représente la valeur d'un p.s. discret à un temps donnée. On peut la modéliser de deux façons:

1. Conditionnement: valeur à la dernière position $\pm$ 1
2. Somme de variables indicatrices: $X_n = Y_1 + ... + Y_n$

Il est à noter qu'on préfère représenter une marche aléatoire par une somme de variable indicatrice puisque ça rend le calcul plus facile.

Espérance: $\mathbb{E}(X_n) = n(2p-1)$ Variance: $Var(X_n) = 4np(1-p)$

1.4 D'ou vient la formule de l'esperance et de la variance d'une marche aleatoire

Il s'agit de l'esperance et de la variance pour une somme de variable indicatrice.

$E(x) = n(1 * p + (-1)(1-p))$: nombre de pas x esperance succes/echec au i-ème pas $V(X) =$ somme des variances $= n[E(Y^2) - E(Y)^2]$

1.5 Théorie 2

Big Idea

Ce cours introduisait les chaines de Markov. Comme on l'a vu au dernier cours, les processus stochastiques sont des v.a. qui sont en fonction du temps. Certaine PS ont la propriété de Markov, c-à-d qu'on n'a que besoin de la dernière valeur pour déterminer la prochaine position et non tout l'historique. On introduit la notion de matrice de transition pour modéliser la probabilité de transitionner d'un état à l'autre, et la notion d'état absorbant, qui est un état duquel on ne peut se sortir une fois atteinte.

Outline

1. Rappel: Processus Stochastiques
2. Marche Aléatoire
3. Processus de Branchement
4. Chaines de Markov: Proba de transition et État absorbant

1.5.1 Marche Aléatoire

Il faut se rappeler que la marche aléatoire sert à modéliser un p.s discret. On a vu qu'il y avait deux façons de l'interpréter:

1. Conditionnement: previous +/- 1 dépendemment du succès/échec
2. Somme de variables indicatrices (bernouilli)

Essentiellement, la probabilité est déterminer par une Bernouilli, puisqu'on considère que chaque coin flip est iid. On peut aussi visualiser la marche aléatoire comme un arbre de décision.

Exemple: t=2, coin flip: +1 si Head, -1 si Tail

1. $x_2 = 2$ avec proba p^2 : HH
2. $x_2 = 0$ avec proba $2p(1-p)$: HT, TH
3. $x_2 = -2$ avec proba $(1-p)^2$: TT

Notons qu'après 2 coins flip, on ne peut pas avoir 1 ou -1, car apres le premier coin flip, on est à 1 ou -1, et on ne peut que se déplacer de 1 vers le haut ou vers le bas

On a aussi vu qu'on peut tracer la trajectoire de la marche aléatoire, qui représente la valeur de x_n selon le temps.

1.5.2 Processus de Branchement

Le processus de Banchament est une façon de modéliser la générations d'évènement. Par exemple, en reinforcement learning, ça représente la transition d'état. Visuellement, on a un arbre et chaque branche mène à un autre état, associé à une certaine probabilité.

1.5.3 Chaine de Markov

Comme mentionné, une chaine de Markov est une p.s qui satisfait à la propriété de Markov, c-à-d qu'on n'a que besoin de l'état précédant pour déterminer le futur et non tout l'historique. Dans la vraie vie, une chaine de markov ne représente pas nécessairement la situation, mais on fait cette hypothèse afin de simplifier les calculs et éviter de trainer trop d'information. On écrit:

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j) = (X_{n+1} = j|X_n + ... + X_0) = (X_{n+1} = j|X_n)$$

Pour représenter la probabilité de transition d'un état à un autre, on utilise une matrice de transition.

Finalement, il est important de comprendre la notion d'état absorbant. Une fois qu'on entre dans cet état, on ne peut plus en sortir. L'exemple donné en classe concernait le casino: une fois qu'on a plus d'argent à gamble, on ne peut plus gagner d'argent et on reste à zéro.

Notons que si une chaine de Markov à un état absorbant, il est fort probable qu'il y ait plusieurs états absorbant et qu'on puisse observer un pattern.

1.6 TP

Cette semaine, le TP se penchait sur 2 sujets:

1. Rappel sur les concepts en probabilité
2. Intro aux Processus Stochastiques

1.6.1 Rappel sur les concepts en probabilité

1. Principe Inclusion-Exclusion
2. Probilités Totales pour généraliser le nombre de tirage avec et sans remise: $P(A_1|B)P(B) + P(A_2|B)P(B)$

3. Trouver la densité marginale d'une v.a: si continues, on doit essayer de retrouver une fonction de densité pour éviter d'avoir à résoudre l'intégrale

1.6.2 Intro aux Processus Stochastiques

1. Déterminer si une p.s. est Markov ou non
2. Trouver/Lire une Matrice de Transition
3. Tracer le Graphe

1.7 Intro aux Processus Stochastiques

2 Semaine 2

2.1 Théorie 1: Probabilité de Transition à plusieurs étapes

Big Idea

Ce cours-ci nous présentait certaines méthodologies pour déterminer la probabilité de transition à plusieurs étapes pour des P.S discrets à temps homogène satisfaisant la propriété de Markov

Outline

1. Modèles: Marche aléatoire, Processus de Branchement, Modèle de diffusion de Gaz
2. Probabilité de transition avec probabilité conditionnelle
3. Probabilité de transition avec Relation Chapman-Kolmogrov

2.1.1 Modèles: Marche aléatoire, Processus de Branchement, Modèle de diffusion de Gaz

Dans un premier temps, on a réviser les notions de marche aléatoire, processus de branchement et modèle de diffusion de gaz. Essentiellement, on voulait s'apercevoir que

1. La valeur de X_n ne peut que se déplacer de 1 (dans la plupart du temps)
2. Conditionnement: on peut trouver la probabilité de transition d'un état à l'autre par conditionnement p/r à l'étape précédante

2.1.2 Probabilité de transition avec probabilité conditionnelle

Dans les cours précédants, on nous donnait la matrice de transition pour déterminer la probabilité de se déplacer d'un état à l'autre. Ici, on voit 2 résultats importants:

1. si P.S Markov et homogène (même proba peu import le temps), alors

   $$P[X_2 = 3, X_1 = 2 | X_0 = 1] = P[X_{n+2} = 3, X_{n+1} = 2 | X_n = 1]$$

   , ce qui veut dire que la proba de transition d'état ne dépend pas d'un temps quelconque, mais que de la "distance" (nombres de pas) entre 2 états, si P.S Markov est homogène
2. On peut utiliser la probabilité conditionnelle pour déterminer la proba de transition entre 2 états

Preuve pour 1

Puisqu'on a une chaine de Markov, les les 2 états sont indépendants et on peut utiliser la règle de multiplication:

$$P[X_2 = 3, X_1 = 2 | X_0 = 1]$$
$$= \frac{P(X_2 = 3, X_1 = 2, X_0 = 1)}{P(X_0 = 1)}$$
$$= (\frac{P(X_2 = 3, X_1 = 2, X_0 = 1)}{P(X_0 = 1)})(\frac{P(X_1 = 3, X_1 = 2)}{P(X_0 = 1)})$$
$$...$$

Probabilité Conditionnelle pour trouver la probabilité de transition

Plus généralement, pour trouver la probabilité de transition à plusieurs étapes, on doit conditionner par les étapes intermédiaires:

1. 2 étapes: $P(X_2 = 1 | X_0 = 1) = \sum_{i=1}^{n} P(X_2 = 2, X_1 = k | X_0 = 1)$
2. 3 étapes: $P(X_3 = 1, X_2 = 1 | X_0 = 1) = P(X_3 = 1, X_2 = 1)P(X_2 = 1 | X_1 = 1)P(X_1 = 1 | X_0 = 2)$
3. m étapes: $P(X_{n+m} = j | X_n = i) = P(n = j | X_0 = i)$

2.1.3 Probabilité de transition avec Relation Chapman-Kolmogrov

La relation de Chapman-Kolmogrov est pratique, car elle nous permet de généraliser le calcul pour la probabilité de transition en m étapes. Au lieu de multiplier individuellement les intermédiaires à chaque étapes, on peut utiliser la multiplication matricielle pour obtenir la matrice de transition après m étapes. On note $P^(m) = P^m$, P: matrice de transition.

Par exemple, si on veut la proba de transition à 3 étapes, on n'a qu'à faire

$$P \times P \times P$$

2.2 Théorie 2

Big Idea

Outline

1.
2.
3.

2.3 TP

3 Semaine 3

3.1 Théorie 1

Big Idea

Outline

1.
2.
3.

3.2 Théorie 2

Big Idea

Outline

1.
2.
3.

3.3 TP

4 Semaine 4

4.1 Théorie 1

Big Idea

Outline

1.
2.
3.

4.2 Théorie 2

Big Idea

Outline

1.
2.
3.

4.3 TP

5 Semaine 5

5.1 Théorie 1

Big Idea

Outline

1.
2.
3.

5.2 Théorie 2

Big Idea

Outline

1.
2.
3.

5.3 TP

6 Semaine 6

6.1 Théorie 1

Big Idea

Outline

1.
2.
3.

6.2 Théorie 2

Big Idea

Outline

1.
2.
3.

6.3 TP

7 Semaine 7

7.1 Théorie 1

Big Idea

Outline

1.
2.
3.

7.2 Théorie 2

Big Idea

Outline

1.
2.
3.

7.3 TP

8 Semaine 8

8.1 Théorie 1

Big Idea

Outline

1.
2.
3.

8.2 Théorie 2

Big Idea

Outline

1.
2.
3.

8.3 TP

9 Semaine 9

9.1 Théorie 1

Big Idea

Outline

1.
2.
3.

9.2 Théorie 2

Big Idea

Outline

1.
2.
3.

9.3 TP

10 Semaine 10

10.1 Théorie 1

Big Idea

Outline

1.
2.
3.

10.2 Théorie 2

Big Idea

Outline

1.
2.
3.

10.3 TP

11 Semaine 11

11.1 Théorie 1

Big Idea

Outline

1.
2.
3.

11.2 Théorie 2

Big Idea

Outline

1.
2.
3.

11.3 TP

12 Semaine 12

12.1 Théorie 1

Big Idea

Outline

1.
2.
3.

12.2 Théorie 2

Big Idea

Outline

1.
2.
3.

12.3 TP

13 Semaine 13

13.1 Théorie 1

Big Idea

Outline

1.
2.
3.

13.2 Théorie 2

Big Idea

Outline

1.
2.
3.

13.3 TP

14 Semaine 14

14.1 Théorie 1

Big Idea

Outline

1.
2.
3.

14.2 Théorie 2

Big Idea

Outline

1.
2.
3.

14.3 TP

15 Semaine 15

15.1 Théorie 1

Big Idea

Outline

1.
2.
3.

15.2 Théorie 2

Big Idea

Outline

1.
2.
3.

15.3 TP

16 Semaine 16

16.1 Théorie 1

Big Idea

Outline

1.
2.
3.

16.2 Théorie 2

Big Idea

Outline

1.
2.
3.

16.3 TP