システム制御II

目次

微分方程式から状態方程式の求め方

一番高い階数の微分以外に状態量を割り当てるだけ。形は

$$\mathbf{X'(t)} = A\mathbf{X(t)} + Bu(t)$$
$$Y(t) = CX(t) + Du(t)$$

なお、$Du(t)$は直立項と呼ばれる。出力に入力が定数倍されてそのまま出る部分。

例えばRLC直列回路の場合

$$e(t) = Ri(t) + Li(t)' + \frac{1}{c}\int_0^t i(t)dt$$

となるが、変形して

$$\frac{1}{L}e(t) = \frac{R}{L}i(t) + i(t)' + \frac{1}{cL}\int_0^t i(t)dt$$

入力を$e(t)$、出力を$y(t) = \int_0^t i(t)dt$だとおもうと

$$\frac{1}{L}e(t) = y'' + \frac{R}{L}y' + \frac{1}{cL}y$$

となる。ここで一番高い階数の微分以外に状態量を割り当ててる。つまり

$$x_1 = y、x_2 = y'、X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

とおくと、

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{cL} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{pmatrix} u(t)$$

となる。

また、このサイトでは行列の変数は大文字にしている。ラプラス変換した変数と見分けがつかないので極力ラプラス変換の時は$X(s)$と書くようにしてる。けどたまに忘れる。(後たまに大文字を忘れて小文字になる)

e^{At}の求め方(対角化で)

公式は

$$e^{At} = Te^{Bt}T^{-1}$$

なお、

$$T^{-1}AT = B$$

である。証明は

$$\begin{aligned} e^{At} &= I + At + \frac{A^2}{2!}t^2 + \frac{A^3}{3!}t^3 + \cdots \\ &= TT^{-1} + TBT^{-1}t + \frac{TB^2T^{-1}}{2!}t^2 + \frac{TB^3T^{-1}}{3!}t^3 + \cdots \\ &= T(I + Bt + \frac{B^2}{2!}t^2 + \frac{B^3}{3!}t^3 + \cdots)T^{-1} \\ &= Te^{Bt}T^{-1} \end{aligned}$$

ただしBは例えば$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$のような対角行列なので$e^{Bt}$は簡単に

$$e^{Bt} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}$$

となる。

e^{At}の求め方(ラプラス変換で)

公式は

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}[(sI-A)^{-1}]$$

証明は$u(t)=0$とすると

$$X' = AX$$

となるのでラプラス変換して

$$sX(s) - X_0 = AX(s) \to (SI-A)X(s) = X_0$$

逆行列を左からかけて

$$X(s) = (SI-A)^{-1}X_0$$

よって$u(t)=0$ならば

$$X(t) = \mathcal{L}^{-1}[(sI-A)^{-1}]X_0$$

ここでXの一般解は

$$X(t) = e^{At}X_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}bu(\tau)d\tau \underset{u(\tau)=0}{\longrightarrow} X(t) = e^{At}X_0$$

なので比較して

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}[(sI-A)^{-1}]$$

となる。

状態方程式xの一般解(積分で)

公式は

$$X = e^{At}X_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

なのでe^{At}さえわかれば頑張るだけ。なお、$\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$を忘れたときは、

$$\int_0^t x(t-\tau)y(\tau)d\tau = \mathcal{L}^{-1}[XY]$$

の関係式を思い出して

$$\mathcal{L}^{-1}[(sI-A)^{-1}BU(s)] \underset{X=(sI-A)^{-1}、Y=BU(s)}{\longrightarrow} \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

とすれば導ける。ラプラス変換の式は次の項へ↓

状態方程式xの一般解(ラプラス変換で)

公式は

$$X(t) = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}]X_0 + \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}BU(s)]$$

忘れたときは

$$\mathbf{X'(t)} = A\mathbf{X(t)} + Bu(t)$$

をラプラス変換して

$$sX(s) - X_0 = AX(s) + BU(s) \longrightarrow (sI - A)X(s) = X_0 + BU(s)$$

より$(sI - A)^{-1}$を左からかけて

$$X(s) = (sI - A)^{-1}X_0 + (sI - A)^{-1}BU(s)$$

逆ラプラス変換して

$$X(t) = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}]X_0 + \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}BU(s)]$$

出力方程式の求め方

$$Y(t) = CX(t) + Du(t)$$

に代入するだけ。

フルランク

Aを$n \times m$行列する。Aのフルランクとは

$$rank(A) = min(n, m)$$

のことを言う。なお、**ランクは転置しても変わらない**

もし$n = m$なら

$$rank(A) = n \Leftrightarrow det(A) \neq 0$$

正方行列がフルランクか調べるなら大抵$det(A) \neq 0$を使った方が早い。問題はせいぜい4×4とかの行列だから。

線形独立

Aを$n \times m$行列する。ここで

$$rank(A) = k$$

だったとする。ここで**列ベクトル**が線形独立なのかを調べるには(列は縦)

$$k = m \Leftrightarrow \text{列ベクトルが線形独立}$$

を調べればいい。ランクは意味を持つ式の本数なので列数=ランクとなればすべての列ベクトルは意味を持つことになる。

逆に**行ベクトル**が線形独立なのかを調べるには(行は横)

$$k = n \Leftrightarrow \text{行ベクトルが線形独立}$$

を調べればいい。ランクは意味を持つ式の本数なので行数=ランクとなればすべての行ベクトルは意味を持つことになる。

可制御の判定(やり方その1)

定理

$$\text{行列} e^{At}B \text{の行ベクトルが線形独立ならば可制御}$$

よって $e^{At}B$のランクを求めて**行数と一致するか調べる**。問題で既にe^{AT}を求めたならこっちの方が楽かな？

可制御はかせい"ぎょう"で調べる。と覚える。

可制御の判定(やり方その2)

状態変数の数(=Aの列数)をnとする。

$$M_C = \begin{pmatrix} b & Ab & \dots & A^{n-1}b \end{pmatrix}$$

とすると

$$rankM_c = n$$

が成立すれば可制御。e^{AT}を求てないならこっちの方が楽かな？

可観測の判定(やり方その1)

定理

$$\text{行列} Ce^{At} \text{の列ベクトルが線形独立ならば可制御}$$

よって Ce^{At} のランクを求めて**列数と一致するか調べる**。問題で既にe^{AT}を求めたならこっちの方が楽かな？

可観測の判定(やり方その2)

状態変数の数(=Aの列数)をnとする。

$$M_O = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

とすると

$$rank M_c = n$$

が成立すれば可制御。e^{AT}を求てないならこっちの方が楽かな？