--------------2進数について---------------

補数とは

n進法において、**桁上りが発生する最小の数** を(n進数における)nの補数という。普段は(n進数における)は省略する。

ついでに、**桁上りが発生しない最小の数** を(n進数における)n-1の補数という。普段は(n進数における)は省略する。

例えば2進数$10010_2 = 18_{10}$について 2の補数は1110_2となり、1の補数は1101_2

負数の表現

以下2進数の話とする。負数の表現は2進数aの表現方法を2の補数表現 、1の補数表現 、サインマグニチュード(絶対値表現)、オフセットバイナリ(オフセット表現)などにすることによって異なってくる。

2の補数表現

2進数nbitで表された数a($0 < a < 2^n - 1$)に対し、aはmbitで表せるとする。aに対し、-aをaの2の補数(足りない部分mbitまでは0埋めそこから先は1埋め)としたものとして定義する表現方法 。 例えばn=8、

$$a = 00001101_2 (= 13_{10})$$

とすると13の2補数は

$$13の2の補数 = 11_2$$

aは4bitで表せる数なのでm=4であるので、-aは4bitまでは0埋めそこから先は1埋めとなり

$$-a := 11110011_2$$

となる。

1の補数表現

2進数nbitで表された数a($0 < a < 2^n - 1$)に対し、aはmbitで表せるとする。aに対し、-aをaの1の補数(足りない部分mbitまでは0埋めそこから先は1埋め)としたものとして定義する表現方法 。 例えばn=8、

$$a = 00001101_2 (= 13_{10})$$

とすると13の1補数は

$$13の2の補数 = 10_2$$

aは4bitで表せる数なのでm=4であるので、-aは4bitまでは0埋めそこから先は1埋めとなり

$$-a := 11110010_2$$

となる。

サインマグニチュード(絶対値表現)

2進数nbitで表された数a($0 < a < 2^n - 1$)に対し、-aを先頭bitを1にしたものとして定義する表現方法。例えばn=8とすると 例えば

$$a = 00001111_2 \to -a := 10001111_2$$

となる。

オフセットバイナリ(オフセット表現)

$読み取った値 - オフセット値$として数を定義する方法。 例えばオフセット値を10000000とし、3を表したい場合

$$10000011 - 10000000 = 00000011$$

なので$3 := 10000011$と定義される。

---------------ブール代数の前提知識---------------

代数系

まず、少しだけ代数系の記号の意味について説明していく。

無限集合と有限集合

集合Aの要素が無限個ある場合、Aを無限集合といい、有限個の場合を有限集合という。有限集合の場合、演算子等の定義が楽に出来る。

演算

Aを集合とし、$x, y \in A$とする。写像○(x,y)を考え、

$$写像○ : A \times A \quad \to \quad A \quad | \quad ○(x, y) = z$$

をA上の演算というう、〇(x,y)をx〇yと表記する。集合Aと一つ以上の演算〇が定義されている時(A,〇)を **代数系** という。

作用

Aを集合とし、$x \in A$とする。写像☆(x)を考え、

$$\text{写像☆} : A \quad \rightarrow \quad A \quad | \quad ☆(x) = y$$

を作用という。

ブール代数

Bは少なくても記号(0,1)を含むとする。$x, y \in B$に対し、演算$+$、$\cdot$と作用 $^{-}$ が定義され、以下の4つの性質が成り立つとき、(B,+,×, $^{-}$)をブール代数 、または単にBをブール代数という。

1. 交換則

$$x \cdot y = y \cdot x\text{、} \quad x + y = y + x$$

2. 単位元の存在(単位元律)

$$x \cdot 1 = x\text{、} \quad x + 0 = x$$

3. 相補則

$$x \cdot \bar{x} = 0\text{、} \quad x + \bar{x} = 1$$

4. 分配測

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c\text{、}a + b \cdot c = (a + b) \cdot (a + c)$$

この性質を満たせばブール代数を名乗れるため、演算$+$、$\cdot$と作用 $^{-}$ の定義方法は色々あるが例えば

$$\begin{aligned}
&0 + 0 = 0\text{、}0 + 1 = 1\text{、}1 + 0 = 1\text{、}1 + 1 = 1 \\
&0 \cdot 0 = 0\text{、}0 \cdot 1 = 0\text{、}1 \cdot 0 = 0\text{、}1 \cdot 1 = 1 \\
&\bar{0} = 1\text{、}\bar{1} = 0
\end{aligned}$$

が各演算及び作用の定義となる。

双対定理

双対定理はたまに役に立つので紹介する。ブール代数において$"+"$と$"\cdot"$、$"0"$と$"1"$を交換しても恒等式は成り立つという定理が公理から導ける。ただし計算順序はそのままにしなければならない。

例えば

$$a \cdot (b + c) + 0 = (a \cdot b) + (a \cdot c) + 0$$

が成り立っているとき

$$a + (b \cdot c) \cdot 1 = (a + b) \cdot (a + c) \cdot 1$$

も成り立つ。

例えば問題として

$$A + \bar{A} \cdot B = A + B \text{を示せ。}$$

とあった場合、双対を取って

$$A \cdot (\bar{A} + B) = A \cdot B$$

を示せば問題を解いたことになる。

その他のブール代数の性質

具体的な説明は省くが、等式を証明する場合、機械的な方法で証明が出来るシャノン展開という方法もある。興味があったら調べてみよう。

完全系という概念を導入すると(and-or-not)系は(nand)系と同様完全なことが分かったり(つまりすべての論理式はnandのみで表せる)とそーゆうのもある。

最小項、最大項、主加法標準形、主乗法標準、ドモルガンの法則など。。

論理演算とブール代数の関係

命題変数pは真なら1、偽なら0を取るとする。例えば

$$p(x) = \begin{cases} 1(\text{電圧}x\text{がしきい値を超える。}) \\ 0(\text{電圧}x\text{がしきい値を超えない。}) \end{cases}$$

などとなる。ここで集合Bを

$$\mathrm{B} = \{\mathrm{p} \mid \mathrm{p}:\text{命題変数}\} \cup \{0, 1\}$$

とし(つまりBは論理変数pと論理定数0,1の和集合)、演算+、·と作用 ¯ を

$$+:\text{論理和、}\quad \cdot:\text{論理積、}\quad \bar{}\ :\text{否定}$$

と定義するとBはブール代数となる。よって論理演算がブール代数の構造を持つのでブール代数が適応できる。

デジタル回路におけるブール代数

さすがに記号だけじゃわかりにくいかなと思ったので具体例ものせた追加資料参照 。

カルノー図の気持ち

例えば以下のようなf(x,y,z)を考えてみる。

x	y	z	f(x,y,z)
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

これに対しf_1、f_2、f_3、f_4を以下のように定義する。

x	y	z	f(x,y,z)	f_1	f_2	f_3	f_4
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	1	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	1	0	0	0	1

とすると

$$f(x、y、z) = f_1(x、y、z) + f_2(x、y、z) + f_3(x、y、z) + f_4(x、y、z)$$

となり、後は見れば簡単に

$$f(x、y、z) = \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot z + \bar{x} \cdot y \cdot z + x \cdot y \cdot \bar{z} + x \cdot y \cdot z$$

となる。ちなみにこの表し方を主加法標準形と言ったりする。ここで式を簡略化することを考える。具体的には、吸収則

$$a \cdot b + a \cdot \bar{b} = a$$

の性質を用いる。すると

$$\bar{x} \cdot \bar{y} \cdot z + \bar{x} \cdot y \cdot z = \bar{x} \cdot z$$
$$x \cdot y \cdot \bar{z} + x \cdot y \cdot z = x \cdot y$$

より

$$f(x、y、z) = \bar{x} \cdot z + x \cdot y$$

となる。ここで先ほどの真理値表の順番を意図的に変えてもう一度見てみる。

x	y	z	f(x,y,z)
0	0	0	0
0	1	0	0
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

f(x,y,z)が1の部分に注目する。まず

x	y	z	f(x,y,z)
0	0	1	1
0	1	1	1

を見るとx、y、zは1bitのずれ(yだけ異なる。)でf(x,y,z)=1である。よって吸収則を適用し、f(x,y,z)は$\bar{x} \cdot z$を含む事がすぐわかる。同様に

x	y	z	f(x,y,z)
1	1	0	1
1	1	1	1

もx、y、zは1bitのずれ(zだけ異なる。)でf(x,y,z)=1である。よって吸収則を適用し、f(x,y,z)は$x \cdot y$を含む事がすぐわかる。

ここでポイントとなるのは **1bit分だけ入力が異なる** という点にある。真理値表の問題点はf(x,y,z)の場合すべての(x,y,z)について1bit分だけ入力が異なる入力が3つ存在するにもかかわらず、隣り合せに出来ない点にある。カルノー図はそこを克服している。

x/yz	00	01	11	10
0	0	1	0	0
1	0	1	1	1

カルノー図を見るとすべての入力に対し境界がつながっていると仮定すれば、1bit分だけ入力が異なる入力が3つ隣り合っている。本質は1bit差で隣り合うことだけなので表記は色々方法があり例えば

x/yz	11	01	00	10
1	1	1	0	1
0	0	1	0	0

でも

x/yz	00	10	11	01
0	0	0	0	1
1	0	1	1	1

でも構わないことが分かるだろう。