メモ

目次

自然数における加法の定義

自然数の定義

集合N、定数0、関数Sについて

1. $0 \in N$
2. $\forall n \in N$について$S(n) \in N$
3. $\forall n \in N$について$S(n) \not= 0$
4. $\forall n, m \in N$について$S(n) \not= S(m)$
5. Nの部分集合Eについて、$0 \in E$かつ$\forall n \in E$について$S(n) \in E$ならば$E = N$

これら(ペアノの公理と呼ぶ)を満たすとき、**Nの元を自然数と呼び**、nに対し$s(n)$を後者と呼ぶ。

ちなみにS()はsuc()と書かれることもあり、後者（successor）の略。自然数を0からにするか1からにするかは流儀による。最初に発表されたペアノの公理は1派。

後は記号1、2、3、$\cdots$を

$$
\begin{aligned}
1 &:= suc(0) \\
2 &:= suc(1) \\
3 &:= suc(2) \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

と定義すればいい。

公理の解釈

公理1は0という記号の存在。0という記号には他の公理を見れば分かるように他の要素とは異なる性質が付随する。

公理2はどの自然数にも後者(次の要素)の存在。

公理3は0はいかなる自然数の後者にもならない。

公理4は異なる自然数には異なる後者が存在。

公理5は数学的帰納法の原理。部分集合は自然数の中でもある性質を持つ集合を指している。それが公理5を満たすなら自然数全てがはある性質を満たす(つまりE=N)ことになる。

ちなみに忠実にペアノの公理の最初の発表を訳すと

1. 1という元をもつNという集合が存在する。
2. NからNへの写像fが存在する。
3. 自然数a,bに対し、f(a)=f(b)ならばa=bである。
4. 1はf(N)の元ではない。
5. Kという類に対し、1∈K, f(K)⊂K ならば N⊂K である。

になるらしい。類というのはある性質をもつ集合の集まりのことらしい。集合論はやりたいけどまだ知りません。5番目は類Kに1を含み任意のKの元をfで写像したものもKの元ならば類Kは集合Nを含む(つまり自然数Nは類Kの性質を持つ)と言っている多分。なんかこっちのほうがしっくりくるような気もする。

加法

$x, y \in N$に対し、演算+を

$$\begin{aligned}&+: N \times N \to N \\ &x + 0 := x \\ &x + suc(y) := suc(x + y)\end{aligned}$$

と定義する。やったね演算+の定義が出来た。

1+1=2だけ証明しよう。$1 := suc(0)$、$2 := suc(1) = suc(suc0))$なので

$$\begin{aligned}1 + 1 &= suc(0) + suc(0) \\ &= suc(suc(0) + 0) \\ &= suc(suc(0)) \\ &= 2\end{aligned}$$