

線形代数

目次

- あるベクトルに垂直なベクトル
- 直線のベクトル方程式
- 平面のベクトル方程式
- 転置行列の性質
- ブロック分割
- 逆行列、行列式
- ケーリー・ハミルトンの定理
- ランク
- 体
- 線形空間(ベクトル空間)
- 線形結合と線形独立
- 部分空間
- 線形写像、像(Imf)、核(Kerf)
- kerfと商空間
- 固有値と固有ベクトル
- 計量線形空間、ノルム、なす角、直行基底

あるベクトルに垂直なベクトル

ベクトル、 b を用いると a に垂直なベクトル h は

$$h = b - \frac{a}{|a|} |b| \cos \Theta = b - \frac{a \cdot b}{|a|^2} a$$

となる。2次元なら垂直なベクトルは大きさを除けば一意に定まるので b は任意だが n 次元の場合、同様に大きさを除けば $n - 1$ の任意性があるためこの公式を使うと一意に定まってしまう点に注意

直線のベクトル方程式

点 A を通る方向ベクトル d の方程式はそのまま

$$p = OA + td$$

である。 OA が0ベクトルなら原点を通る。ここで t は媒介変数でありこの媒介変数を削除するには

$$x = A_x + td_x, y = A_y + td_y, z = A_z + td_z$$

より変形して

$$\frac{x - A_x}{d_x} = \frac{y - A_y}{d_y} = \frac{z - A_z}{d_z}$$

となる。

平面のベクトル方程式

点Aを通る方向ベクトル d_1 、 d_2 の方程式はそのまま

$$p = OA + t_1 d_1 + t_2 d_2$$

ここで t_1 、 t_2 は媒介変数である。法線ベクトル h を用いて

$$h \cdot \overrightarrow{Ap} = 0$$

より変形して

$$\begin{aligned} h_x(p_x - A_x) + h_y(p_y - A_y) + h_z(p_z - A_z) &= 0 \\ h_x p_x + h_y p_y + h_z p_z &= d \end{aligned}$$

ただし、 $d = h_x A_x + h_y A_y + h_z A_z$ となる。

転置行列の性質

$${}^t(AB) = {}^t B {}^t A$$

これは $i \times j$ $j \times k$ の転置は中身を転置する方針の場合、 $k \times j$ $j \times i$ とするしかないので感覚的にも一致する。

ブロック分割

0が固まってる場合は列ベクトルでブロック分割すると結構綺麗めになる。

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$$

のように列ベクトルでブロック分割を行う。例えばこの分割を用いると

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = (\lambda_1 x_1 \quad \lambda_2 x_2 \quad \lambda_3 x_3)$$

のように簡単に表せたり

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = (\lambda_1 x_1 \quad x_1 + \lambda_2 x_2 \quad x_2 + \lambda_3 x_3)$$

のように表せたりする。

逆行列、行列式

逆行列は余因子行列とか掃きだし法とかで求める。

行列式は余因子展開とかサラスとか。

ケーリー・ハミルトンの定理

$\det(A - \lambda I) = 0$ とし、さらに λ を A に置換したものは常に成り立つという定理。特に二次の時は

$$\det(A - \lambda I) = A^2 - \text{tr}(A)A + \det(A)I = 0$$

となる。ただし $\text{tr}(A)$ とは a_{ii} を足したものである。ここで $\det(A) = 0$ ならば、

$$A^2 = \text{tr}(A)A \rightarrow A^n = (\text{tr}(A))^{n-1} A$$

ランク

拡大係数行列のランクが係数行列のランクより大きいなら解なしとなる。ランクは束縛度を表しこの数分だけ(本当に意味で)式がある数に一致する。つまり未知数の数 - ランク = 変数の数となる。

体

K が体であるとは、 K に加法と乗法が定義され、さらにすべての公理を満たす集合を言う。

- 結合則の成立 $(a+b)+c=a+(b+c)$
- 0元の存在
- $a+b=b+a=0$ なる b の存在。ただし a と b は K の要素。ちなみにこの b を $-a$ と表記し減法としている。
- $(ab)c=a(bc)$ の成立。
- 単位元の存在。 $1a=a1=a$
- $ab=ba=1$ なる b の存在。ちなみにこの b を a^{-1} と表記する。 a が0の時は除く

- $ab=ba$ の成立。交換側
- 分配法則の成立

例えば体になりうる集合は実数 R 、虚数 C 、有理数 Q など、

線形空間(ベクトル空間)

K を体とする。集合 V に加法が定義され、 K の元と集合 V によるスカラー倍が定義されているとする。 $k_i \in K$ とし $a, b \in V$ とする。

- $(a+b)+c=a+(b+c)$ の成立
- $a+b=b+a$ の成立
- $a+0=0+a=a$ なる元 0 の存在
- $a+x=x+a=0$ なる元 x の存在
- $1a=a$ の成立
- $k_1(a+b) = k_1a + k_1b$ の成立
- $(k_1 + k_2)a = k_1a + k_2a$ の成立
- $(k_1k_2)a = k_1(k_2a)$

を満たすとき、 V を K 上の線形空間やベクトル空間と言ったり、普通は K は実数全体のことが多いので、 R 上とつけたり単に **線形空間**や**ベクトル空間** という。

線形結合と線形独立

$a_i \in V$ 、 $c_i \in K$ とする。 V は線形空間(ベクトル空間)、 K は体である。

$$\sum_{k=1}^n c_i a_i$$

を a_i の線形結合と呼ぶ。ベクトルの集合 a_i が線形結合とは

$$\sum_{k=1}^n c_i a_i = 0$$

を満たす c_i が $c_i = 0$ しか存在しない場合、ベクトルの集合 a_i が **線形独立** という。あるベクトル空間の任意の元が **線形独立** ベクトルの集合 $\{v_k\}_{k=1}^n$ で表せるとき、ベクトルの集合 $\{v_k\}_{k=1}^n$ を基底と呼び、次元は n となる。

ちょっとだけ例題

$$a_1 = {}^t[1, 2, -1], a_2 = {}^t[2, 3, 1], a_3 = {}^t[1, 3, 4]$$

は線形独立か？

$$[a_1, a_2, a_3]^t [c_1, c_2, c_3] = {}^t[0, 0, 0]$$

のランクを調べると3より自明解0、0、0のみ。よって線形独立。

部分空間

集合 V を K 上のベクトル空間とする。集合 W について $W \in V$ とする。 $x, y \in W$ とする。

$$x + y \in W$$

$$kx \in W$$

または同じ意味だが

$$k_1x + k_2y \in W$$

の時、 W を V の部分空間という。なお、本当は(書籍 線形代数の世界より)上二つの条件のみだと空集合も部分空間になってしまうため、

$$0 \in W$$

も満たすべきらしい。

ちなみに部分空間になるには例えば二次元平面なら0を通る直線しかない。3次元なら0を通る平面か直線。 n 次元でも同じ。集合 W が V (n 次元ベクトル空間)の部分空間になりたい場合、0を必ず含めないと部分空間になれないはず。多分。

部分空間の例

線形空間 V の $a_1, \dots, a_k \in V$ に対し、集合 W を

$$W = \{x \mid x = c_1a_1 + \dots + c_ka_k, c_i \in R\}$$

なる集合 W は V の部分空間である。ここで、 W は a_1, \dots, a_k で"張られる空間"とよび、 a_1, \dots, a_k を W の生成元という。生成元は線形独立でなくてもいい点に注意。

線形写像、像(Imf)、核(Kerf)

$V = R^n$ と $V' = R^m$ とする。つまり線形空間である。 $x, y \in V$ とすると

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

$$f(\lambda x) = \lambda f(x)$$

または

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$$

を満たす時、 f を V から V' への線形写像という。ちなみに $\lambda = \mu = 1$ とすれば1式に帰着し $\mu = 0$ とすれば2式に帰着するので証明する際はどちらを証明しても構わない。

先ほどの定義より、線形写像は

$$\begin{aligned} f(0) &= 0' \\ f(c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n) &= c_1 f(x_1) + \cdots + c_n f(x_n) \end{aligned}$$

となることもわかる。また、 $Im f$ は

$$Im f = f(V) = \{f(x) | x \in V\}$$

と定義される。つまり線形空間 V の任意の元 x の線形写像の集合である。なお、 $Im f$ は V' の部分空間となる。証明は部分空間の定義より $\lambda f(x_1) + \mu f(x_2) \in V'$ を示せばよくそれは $\lambda x_1 + \mu x_2 \in V$ より示せる。核($Ker f$)は

$$Ker f = f^{-1}(0') = \{x \in V | f(x) = 0'\}$$

となる。 $ker f$ は $f(\lambda x_1 + \mu x_2) = 0'$ より $\lambda x_1 + \mu x_2 \in Ker f$ より部分空間である。

V を R^n 、 V' を R^m とすると

$$x_m = Ax_n$$

で変換できる。 A は $m \times n$ 行列である。この行列を表現行列という。

kerfと商空間

線形写像 $V \rightarrow V'$ が全単射(1対1対応)の時、同型写像という。条件は

$$\dim V = \dim V' \Leftrightarrow V \text{と} V' \text{が同型}$$

なお、 $V = R^n$ 、 $V' = R^n$ でも次元が等しいとは限らないので注意。また、

$$\begin{aligned} \dim V - \dim(Ker f) &= \dim(Im f) \\ \dim(Im f) &= rank A \end{aligned}$$

となる。線形写像 f が全単射となる（逆写像が存在する）条件、全射になる条件、単射になる条件は

$$\begin{aligned} rank A = \dim V &\Leftrightarrow \text{単射} \\ rank A = \dim V' &\Leftrightarrow \text{全射} \\ rank A = \dim V = \dim V' &\end{aligned}$$

となる。

固有値と固有ベクトル

n 次正方行列 \mathbf{A} に対し、固有値 λ と固有ベクトル \mathbf{x} を

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

を満たすものと定義する。固有値の計算方法は同じみの方法

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0$$

を計算し $\lambda_i (i = 1, 2, \dots)$ を求め、各 λ_i に対し、

$$(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{E})\mathbf{x} = 0$$

を満たす \mathbf{x} を求めることで固有ベクトルとなる。なお、

$$\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{E} = \mathbf{T}_i$$

とあらわすこともよくあるので注意。固有化は λ_i に **重解がない場合は対角化可能** であり、仮に n 次の重解があった場合その固有値を λ_i とすると、

$$\mathbf{T}_i\mathbf{x}_i = 0$$

を解くことで固有ベクトルが求まるわけだがここで、**自由度 n** ならば固有ベクトルが n 個求まるので対角化可能。なお、自由度は \mathbf{A} を m 次正方行列とすると、

$$m - \text{rank}(\mathbf{T}_i)$$

と求まる。

計量線形空間、ノルム、なす角、直行基底

k を体とし、 k 上の線形空間 V に対し任意の元 \mathbf{a} 、 \mathbf{b} に対して、内積 $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \in R$ が定まりかつ、

- $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$
- $(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}$ 、 $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}_1 + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}_2$
- $(k\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = k(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ 、 $\mathbf{a} \cdot (k\mathbf{b}) = k(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$
- $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \geq 0$

を満たす時、線形空間 V を **計量線形空間**または**内積空間** という。例えば V を R^n とし、 R^n の任意の2つの元

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

に対して、内積 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ を

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

とすると R^n は計量線形空間となる。

ノルム とは計量線形空間 V の 0 でない2つの元 \mathbf{a} に対して、

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$$

で定義される。

なす角 とは計量線形空間 V の 0 でない2つの元 \mathbf{a} 、 \mathbf{b} に対して、

$$\cos \Theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{||\mathbf{a}|| ||\mathbf{b}||}$$

で定義される。

n 次元の計量線形空間 V を考えると、勿論 n 次元と言っているわけだから基底は n 個あり、基底 \mathbf{u}_i は

- $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ は線形独立
- V の任意の元は $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ の線形結合で表せる。

を満たすわけだがさらに $\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = \begin{cases} 1 & (i=j \text{ の時}) \\ 0 & (i \neq j \text{ の時}) \end{cases}$ を満たす。