位相空間論

目次

前提知識

ε-δ論法は既習のものとする。

距離の公理

距離とは何だろうか。"ユークリッド距離"、"マンハッタン距離"、"ハミング距離"など。全部"距離"という名を関している。ここで距離の公理を説明する。集合X上の関数dを

$$d : X \times X \to R$$

とする。ここでdが以下の条件を満たすときdを距離関数という。

1. $d(x, y) \geqq 0$（非負性）
2. $d(x, y) = 0 \Longrightarrow x = y$（同一律）
3. $d(x, y) = d(y, x)$（対称律）
4. $d(x, z) \geqq d(x, y) + d(y, z)$(三角不等式)

なお、条件1と2を併せて正定値性と言う場合もある。

ユークリッド空間とユークリッド距離

今後、$R^1 = R$、$R^2 = R \times R$といった感じでRがn個の直積をR^nと表記する。

$$d^n : R^n \times R^n \to R、d^n(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}$$

で定義した距離を導入する。$d^n(x,y)$をユークリッド距離と呼び、集合R^nにユークリッド距離を導入した時、(R^n, d^n)をユークリッド空間と呼ぶ。

開球体、球面、内点、外点、境界、閉包の定義

R^nの部分集合$B^n(a,\varepsilon)$を

$$B^n(a,\varepsilon) = \{x \in R^n | d^n(a,x) < \varepsilon\}$$

と定義した時、部分集合$B^n(a,\varepsilon)$をaを中心としたεを半径とする **開球体** という。**ε-近傍** と呼ばれることもある。

$$B^n(a,\varepsilon) = \{x \in R^n | d^n(a,x) = \varepsilon\}$$

なる集合を点aを中心としたεを半径とする **球面** といい、$S^n(a;\varepsilon)$と表す。

集合Mを$M \subset R^n$とする。点aについて、

$$B^n(a,\varepsilon) \subset M$$

なる正の実数εが存在する時、点aをMの **内点** という。M^nの内点全体をM^iと表す。よって直ちに

$$M^i \subset M$$

なのは言うまでもないだろう。なお、M^iは必ずしもMの真部分集合にはならないことに注意。Mの補集合M^cの内点をMの **外点** という。言い換えれば、点aについて

$$B^n(a,\varepsilon) \cap M = \varnothing$$

なる正の実数εが存在する時、点aをMの外点という。さらにM^i、M^cを用いて集合M^fを

$$M^f = R^n - (M^i \cup M^c)$$

としたとき、M^fをMの **境界** という。つまりaが境界点であるとは、どんな正の実数εに対しても

$$B^n(a,\varepsilon) \cap M = \varnothing かつ B^n(a,\varepsilon) \cap M^c = \varnothing$$

となる。

点aに対し

$$\forall \varepsilon > 0、B^n(a,\varepsilon) \cap M \not= \varnothing$$

の時、点aをMの **触点** といい、Mの触点全体の集合M^a(または$\bar{M}$)をMの **閉包** という。つまり定義から明らかに

$$M^a = M^i \cup M^f$$

となる。

開集合、閉集合

集合Mを$M \subset R^n$とする。$M^i = M$となるならばMを開集合という。

$M^a = M$となるならばMを閉集合という。

双対性

開集合の補集合は閉集合である。また、閉集合の補集合は開集合である。

例えば、$R^n = 開集合$なので両辺の双対を取って$\varnothing = 閉集合$が成り立つ。

例えば、

一応だが、集合は開集合または閉集合であると言っているわけではないので注意。

開集合系

開集合全体の集合系を開集合系$\mathfrak{O}$と表記する。

開集合系では以下の定理が成り立つ。

1. $R^n \subset \mathfrak{O}, \varnothing \subset \mathfrak{O}$
2. **有限個** の元$\mathfrak{O}_1, \mathfrak{O}_2, \cdots, \mathfrak{O}_k$について$\mathfrak{O}_1 \cap \mathfrak{O}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{O}_k \in \mathfrak{O}$
3. $\mathfrak{O}$からなる集合族$(\mathfrak{O}_\lambda | \lambda \in \Lambda)$について$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{O}_\lambda \in \mathfrak{O}$

2について、有限個としているのは例えば、無限個にすると共通部分が一点のみの集合にすることも可能であり、一点集合はユークリッド空間では閉集合なのが例。

閉集合系

閉集合全体の集合系を閉集合系$\mathfrak{A}$と表記する。

閉集合系では以下の定理が成り立つ。

1. $R^n \subset \mathfrak{A}, \varnothing \subset \mathfrak{A}$
2. **有限個** の元$\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \cdots, \mathfrak{A}_k$について$\mathfrak{A}_1 \cup \mathfrak{A}_2 \cup \cdots \cup \mathfrak{A}_k \in \mathfrak{A}$
3. $\mathfrak{A}$からなる集合族$(\mathfrak{A}_\lambda | \lambda \in \Lambda)$について$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{A}_\lambda \in \mathfrak{A}$

なお、閉集合系の定理は開集合系の定理に両辺補集合を取って、必要ならドモルガンの定理(補集合の定理)を適用したものとなる。

距離空間

集合Xと距離関数dの対(X,d)、または単にXを距離空間という。例えば先ほどまで議論していたn次元ユークリッド空間(R^n, d^n)は距離空間である。ユークリッド空間で定義していた"開球体、球面、内点、外点、境界、閉包、開集合、閉集合"などの定義は一般の距離空間でも同様なので割愛する。

有名なものにはユークリッド空間のほかにヒルベルト空間などがある。

集積点