ルベーグ積分入門

目次

普通の積分(リーマン積分)

我々が普段使っている積分は **リーマン積分** と呼ばれている。詳細はこちらで見てほしいが、簡単にいうと、リーマン積分とはリーマン和の極限として定義される。

リーマン和$\sum(f,\Delta,\Delta^*)$は関数$f:[a,b]\rightarrow R$と区間$[a,b]$の分割$\Delta=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$と分割$\Delta$の代表値$\Delta^*=\{x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*\}$を用いて

$$\sum(f,\Delta,\Delta^*):=\sum_{k=1}^{n}f(x_k^*)(x_k-x_{k-1})$$

と定義される。さらに$|\Delta|:=max(x_k-x_{k-1})$とするとこれの極限を用いてリーマン積分は **リーマン和の上限と下限が同じ値に収束するならば** 収束値Aを用いて

$$\int_a^b f(x)dx:=A=\lim_{|\Delta|\rightarrow 0}\sum(f,\Delta,\Delta^*)$$

と定義される。重要なのは **リーマン和の上限と下限が同じ値に収束するならば** という点である。つまりどのような代表値に依存せず収束することが条件である。この性質より例えば有理数なら1、無理数なら0といった関数(ディレクレ関数という)は代表の幅を限りなく0に近づけても代表値を有理数にするのか無理数にするのかで上限と下限が一致しないため積分不可能。

ルベーグ積分の概説

リーマン和ならぬルベーグ和は関数$f:[a,b]\rightarrow R$と区間$[a,b]$の値域の分割$\Delta=\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$に対し集合$A_K(K=1,2,\cdots,m)$を

$$A_K:=\{x\in[a,b]|f(x)\in[y_{k-1},y_k)\}$$

とし、集合の長さ$\mu(A_K)$を適切に定義できればルベーグ和を

$$\sum_{K=1}^{n}y_k\cdot\mu(A_k)$$

とすればリーマン和の近似を与えるだろう。これがルベーグ積分の気持ちである。

ルベーグ外測度

ルベーグ積分はリーマン積分の拡張として定義したいのだから、期待する性質は、

1. 閉区間[a,b]の長さμ([a,b])=b-a
2. 互いに素な集合の列A_nに対し、$\mu(\bigcup_n A_n) = \sum_n \mu(A_n)$
3. 集合Aと数xに対し$A + x := \{a + x | a \in A\}$に対し、$\mu(A + x) = \mu(A)$

を満たしてほしいのは自然だろう。互いに素な集合の列としたが、例えばA_3以降は$\emptyset$とすれば$\mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2)$となる。

ここで任意の冪集合の要素$A \in \mathfrak{P}(R^n)$に対し、ルベーグ外測度$\mu^*(A)$を以下のように定義する。ただし、まだこの段階では条件2は満たさない。

$$\mu^* : \mathfrak{P}(R^n) \to R, \quad \mu^*(A) := inf(\sum_{n=1}^{\infty} |I_n|)$$

ただしI_nはそれぞれ直方体$I_n := \prod_{i=1}^{n}(a_i, b_i]$であり、その体積$|I_n|$は$|I_n| := \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$でありさらに$I_n$からなる集合はAを被膜している。

ルベーグ外測度の性質

ルベーグ外測度は以下の性質を満たす。

1. Aが空集合$\emptyset$や1点集合、1点集合の可算個の和集合なら$\mu^*(A) = 0$。この時、Aを **零集合** という。ただし非可算個の和には成り立たないので注意。
2. $A \subset B$ならば、$\mu^*(A) \leqq \mu^*(B)$
3. 可算劣加法性(σ-劣加法性)を満たす。R の部分集合からなる列A_nに対し、$\mu^*(\bigcup_n A_n) \leqq \sum_n \mu^*(A_n)$
4. 区間 [a, b], [a, b), (a, b], (a, b) の外測度はすべて b − a

ここで性質3について、列の話つまり **可算個** についての話であって有限個の話や非可算個の話はしていないので注意。

5. 性質3において$A_n = \emptyset (3 \leqq N)$とすれば任意の$A_1, A_2$に対し$\mu^*(A_1 \cup A_2) \leqq \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2)$

ここで性質5について、等号成立条件は$A_1 \cap A_2 = \emptyset$ではないので注意。要は$A_1 \cap A_2 = \emptyset$でも$\mu^*(A_1 \cup A_2) < \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2)$ **となる場合が存在する。** ただし、やはりそれでは性質がよろしくないので互いに素の時、性質3及び性質5で等号をなりたたせる事が目標となる。つまりルベーグ外測度の項で述べた2つめの条件のことである。

可測集合

$A_1 \cap A_2 = \varnothing$の時、$\mu^*(A_1 \cup A_2) = \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2)$を成り立たせるために、**可測集合** を考える。

集合$E \subset R^n$が **可測集合** であるとは、任意の$F \subset R^n$に対し

$$\mu^*(F \cap E) + \mu^*(F \cap E^c) = \mu^*(F)$$

を満たすことを言う。**可測集合全体からなる集合** を$\mathfrak{M}$と今後表す。

例えば、$A_1 = F \cap E, A_2 = F \cap E^c$とすれば$A_1 \cap A_2 = \varnothing$かつ、$\mu^*(A_1 \cup A_2) = \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2)$になるし、

新たに可測集合A'を用いて$A_1' := A_1, A_2' := A_2 \cap A', A_3' := A_2 \cap (A')^c$,と置けば$\mu^*(A_1' \cup A_2' \cap A_3') = \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) + \mu^*(A_3')$となる。

ルベーグ可測集合の性質

ルベーグ可測集合及び$\mathfrak{M}$の基本性質として以下が成り立つ。

- $A \in \mathfrak{M}$ならば$A^c \in \mathfrak{M}$
- 空集合$\varnothing$は$\varnothing \in \mathfrak{M}$
- ルベーグ集合列を$\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$とすると、$\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$もルベーグ可測集合である。(つまりルベーグ可測集合の可算無限和集合もルベーグ可測集合)

また、以下の可算加法性が成り立つ。

$A_1, A_2, \cdots \in \mathfrak{M}$は互いに素であるとする。この時、任意の$B \in \mathfrak{P}(R^n)$に対し、

$$\mu^*(B \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(B \cap A_i)$$

が成り立つ。特に$B = R^n$とすれば

$$\mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$$

なる完全加法性が成り立つ。また、空集合はルベーグ可測集合なのでi=n以降を空集合とすれば有限加法性も成り立つのは明らかだろう。

ルベーグ測度

ルベーグ外測度の始域を$\mathfrak{M}$にした写像μを **ルベーグ測度** という。

$$\mu : \mathfrak{M} \to R, \quad \mu(A) = \mu^*(A)$$

σ-集合体、有限加法族、可測空間

集合XとXの部分集合の族$\mathfrak{M}$が以下の性質を満たすとき、$\mathfrak{M}$を **σ-集合体** 、**σ-代数** 、**σ-加法族** 、**完全加法族** などという。また$(X, \mathfrak{M})$を **可測空間** と呼ぶ。

1. $\varnothing \in \mathfrak{M}$
2. $A \in \mathfrak{M}$ならば$A^c \in \mathfrak{M}$
3. $A_1, A_2, \cdots \in \mathfrak{M}$ならば、$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathfrak{M}$

また、条件2,3より$A_1, A_2, \cdots \in \mathfrak{M}$ならば、$\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathfrak{M}$も示される。**つまり、$\cup, \cap, ^c, -$について閉じている。**

ここで条件3を緩くして∞をnに変えたもの条件3'とする。条件1、2、3'を満たす$\mathfrak{M}$を **有限加法族** と呼ぶ。条件1と条件3より明らかにσ-集合体は有限加法族である。

σ-加法族の生成

集合XとXの部分集合の族をFとする。Fを含むようなσ-加法族全体の集合を$\mathfrak{F}$とすると$F_0 = \bigcap_{f \in \mathfrak{F}} f$とすればこれは最小のσ-加法族となる。これを$\sigma(F)$と書き、Fによって生成されるσ-加法族という。

ボレル集合、ボレル集合族

$(X, \mathfrak{O})$を位相空間とする。$\mathfrak{O}$で生成されるσ-加法族を **ボレル集合族** といい、$B(X) = \sigma(\mathfrak{O})$と書く。$B(X)$の元を **ボレル集合** という。**ただし、基本的にボレル集合族といったらユークリッド空間の通常の位相から生成されるσ加法族と思っていい。**ボレル集合とは開集合の(高々)可算回の合併、交叉、差を取ることによって得られる集合ともいえる。さらに、**ユークリッド空間において開集合系は開区間の集まりなので開区間の(高々)可算回の合併、交叉、差を取ることによって得られる集合ともいえる。**

例えば以下はすべてボレル集合B(R)である。

1. (a,b)
2. [a,b]
3. [a,b)
4. {a}
5. Q
6. R\Q

など。証明はこちらにあるが大体明らかだろう。開区間の高々可算回の合併、交叉、差で作れるかが証明である。感覚的にはまず開集合は即座にボレル集合なのは明らか。開集合の補集合もボレル集合でな

ければσ-加法族になれないので閉集合もボレル集合。あとは和集合や共通部分を取るなり(必要なら可算無限回)すれば雰囲気的には成り立つ。

また、$B(R) \subset \mathfrak{M}$であり、$(R, B(R))$は可測空間である。一応B(R)に含まれないが$\mathfrak{M}$には含まれる病的な可測集合Xもあるが、基本的に可測集合かどうかはボレル集合に含まれるかどうかを見ればいい。

ルベーグ測度の単調性

可測集合列A_nに対し、次の定理が成り立つ。

1. $A_n \subset A_{n+1}$ならば μ(\bigcup *{n=1}^∞A_n)=\lim*{n→∞}μ(A_n)
2. $A_{n+1} \subset A_n$かつ$\mu(A_1) = \infty$ならば

$$\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n)$$

測度、有限加法的測度、測度空間

可測空間$(X, \mathfrak{M})$に$m \in \mathfrak{M}$を考え、写像$\mu : m \in \rightarrow R$が以下を満たすとき、μを **測度** といい、$(X, \mathfrak{M}, \mu)$を **測度空間** という。

1. $\mu(\varnothing) = 0$
2. 完全加法性を満たす。つまり、互いに素な集合の列$A_n \in \mathfrak{M}$に対し、$\mu(\bigcup_n A_n) = \sum_n \mu(A_n)$

よってルベーグ測度を入れた空間$(R, \mathfrak{M}, \mu)$は測度空間である。

また、他にも測度が有限なら有限測度、測度が1以下しかとらないなら確率(測度)と呼ばれる。また上記の2つの公理より

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$$

が導かれる。

また、条件2を緩めて∞をnにしたものを満たす場合、**有限加法的測度** という。ただし、測度→有限加法的測度は成り立つが、有限加法的測度→測度は成り立たないため、有限加法的測度は測度の名を冠するにふさわしくない。よって **有限加法的集合関数** と呼ばれる事もある。

ホップの拡張定理

ホップの拡張定理はある条件下なら、ある測度が存在することを保証する定理である。

今、(X, Σ_0, μ')のΣ_0を **有限加法族** 、$\mu' : \Sigma_0 \rightarrow \bar{A}$を **有限加法的測度(有限加法的集合関数)** とする。このμ'がΣ_0内の互いな素な集合列に対し完全加法性を満たすならば、σ加法族$\Sigma = \sigma(\Sigma_0)$

上に測度$\mu : \Sigma \to \bar{A}$が存在する。さらにμは定義域をΣからΣ_0に制限した場合、$\mu = \mu'$となる。

つまり(X, Σ, μ)なる測度空間は存在し、さらにμはΣ_0に制限した場合、$\mu = \mu'$

さらにμ_0がσ-有限ならばその拡張は一意となる。σ-有限とは何かは後述する。

使用例は原P27など。

拡大実数$\bar{R}$

$R = (-\infty, \infty)$であるが拡大実数$\bar{R}$とは∞を認めた実数である。つまり$\bar{R} = R \cup \{-\infty, \infty\}$となる。

(Σ-)可測関数

可測空間$(X, \sum)$、(Y, T)に対し、$\Sigma_X \in \Sigma$とすると写像$f : \Sigma_X \to Y$が **(Σ-)可測** であるとは全ての$E \in T$の逆像$f^{-1}(E)$が$f^{-1}(E) \in \sum$になることを言う。また、Tも強調するため、Σ/T可測関数と呼ばれることもある。特に、ただ **可測関数** と呼ぶ場合、$Y = R^n$かつ、$T = B(R^n)$である場合が多い。

$Y = R$、$T = B(R)$とすると以下と同値である。可測空間$(X, \sum)$、$(R, B(R))$に対し、$\Sigma_X \in \Sigma$なる写像$f : \Sigma_X \to Y$を考える。

1. fが可測関数である。つまり、任意の$B \in B(R)$の逆像$f^{-1}(B)$が$f^{-1}(B) \in \sum$
2. 任意の区間Iの逆像$f^{-1}(I)$が$f^{-1}(I) \in \sum$
3. 任意の$a \in R$に対し、$\{x \in X | f(x) > a\} \in \sum$。つまり$f^{-1}((a, \infty)) \in \sum$
4. 任意の$a \in R$に対し、$\{x \in X | f(x) \geqq a\} \in \sum$。つまり$f^{-1}([a, \infty)) \in \sum$
5. 任意の$a \in R$に対し、$\{x \in X | f(x) < a\} \in \sum$。つまり$f^{-1}((-\infty, a)) \in \sum$
6. 任意の$a \in R$に対し、$\{x \in X | f(x) \leqq a\} \in \sum$。つまり$f^{-1}((-\infty, a]) \in \sum$

となる。証明は$1 \to \text{その他}$は明らかだろう。ボレル集合は全ての区間を含む。逆の証明は例えば3が成り立つことを仮定すれば逆像の性質の良さと可算無限回の和や積を使うことで開区間→閉区間などを作れることを示せばいい。また、可算無限回の積で閉区間→1点集合が作れるが

- 任意の$a \in R$に対し、$\{x \in X | f(x) = a\} \in \sum$。つまり$f^{-1}(\{a\}) \in \sum$

では、逆は示せない(1点集合の可算無限回の和では区間は作れない)ためである。

さらに、$(X, \sum)$を$(R, B(R))$にすればfは特にボレル可測関数、$(X, \sum)$を$(R, \mathfrak{M})$にすればfは特にルベーグ可測関数と呼ばれる。

ボレル可測関数

可測空間$(R, B(R)), (R, B(R))$に対し、Xは可測集合とすると写像$f : X \rightarrow \bar{R}$が **ボレル可測** であるとは任意の区間$I$の逆像$f^{-1}(I)$が$f^{-1}(I) \in B(R)$になることを言う。$B(R)$はボレル集合族である。

ルベーグ可測関数

可測空間$(R, \mathfrak{M}), (R, B(R))$に対し、$X$は可測集合とすると写像$f : X \rightarrow \bar{R}$が **ルベーグ可測** であるとは任意の区間$I$の逆像$f^{-1}(I)$が$f^{-1}(I) \in \mathfrak{M}$になることを言う。$\mathfrak{M}$はルベーグ可測集合族である。

言い換えると、$(R, \mathfrak{M})$、$(\bar{R}, B(\bar{R}))$の可測空間において、$X \in \mathfrak{M}$上の関数$f : X \rightarrow \bar{R}$が **ルベーグ可測関数** であるとは、任意の$a \in R$に対して

$$\{x \in X | f(x) > a\} \in \mathfrak{M}$$

であることを言う。また、この時fは$\mathfrak{M}$ **可測** とも呼ばれる。必要十分条件として任意のボレル集合$B \in B(R)$の逆像が$\mathfrak{M}$に含まれると言ってもいい。式にすると

$$f^{-1}(B) = \{x \in R | f(x) \in B\} \in \mathfrak{M}$$

となる。

また、σ-加法族の性質よりX^cも$X^c \in \mathfrak{M}$なので、$f : X \rightarrow \bar{R}$を拡張して$f' : R \rightarrow \bar{R}, f'(x) = f(x)(x \in X), f'(x) = 0(x \in X^c)$とすればよって **関数の定義域はRに限定しても可測性の一般性を失わない。**

なぜなら、$a > 0$ならば$\{x \in X | f'(x) > a\} = \{x \in X | f(x) > a\}$となり、$a \leqq 0$の時は$\{x \in X | f'(x) > a\} = \{x \in X | f(x) > a\} \cup X^c$となるがこれもσ-加法族の性質より$\{x \in X | f(x) > a\} \in \mathfrak{M}$ならば$\{x \in X | f'(x) > a\} \in \mathfrak{M}$となる為である。

ちなみに

$$\{x \in X | f(x) > a\}$$

の$f(x) > a$を$f(x) \geqq a, f(x) < a, f(x) \leqq a$などに変えても同値である。

ボレル可測関数とルベーグ可測関数

ボレル可測関数f_Bは$(R, B(R))$、$(\bar{R}, B(R))$間の写像

ルベーグ可測関数f_Lは$(R, \mathfrak{M})$、$(\bar{R}, B(R))$間の写像

ボレル可測関数ならばルベーグ可測関数なのはすぐに分かるだろう。逆は成り立たないのも明らかだろう。

可測関数により定義される関数の可測性

ここから可測関数といったらルベーグ可測関数のことを指すとする。f,gを可測関数とする。ここで関数の四則演算を$(f+g)(x) := f(x)+g(x)$のように定義すると以下の性質が成り立つ。

- kfのように定数倍しても可測関数。
- 関数f+gも可測関数
- 関数$f \cdot g$も可測関数
- 関数$\frac{f}{g}$も可測関数。ただし$g(x) \neq 0$

また、$f_+ := max(f(x), 0)$と置き、これをfの **正成分** という。要は$f(x)$が0以上なら$f_+ = f$でそうでないxについては$f_+ = 0$である。同様にf_-を関数$-f$の正成分を **負成分** という。以下の定理が成り立つ。

- fが可測関数なら、fの正成分及びfの負成分も可測関数。

fの正成分及びfの負成分も可測関数なので$f_+ f_- = |f|$より

- fが可測関数なら、$|f|$も可測関数。

また、**fが連続関数なら可測関数**。

いたるところで等しい

2つの関数f,gが **いたるところで等しい** とは

$$\mu^*(\{x | f(x) \neq g(x)\}) = 0$$

が成り立つ時をいい、fが可測関数ならgも可測関数になる。

特性関数と単関数

特性関数 $\chi_A(x)$とは$A \subset X$に対し、

$$\chi_A : X \to R \quad \chi_A(x) = 1(x \in A), 0(x \in A^c)$$

なる関数を言う。

単関数 $s(x)$とは、関数sが互いに素な$A_1, \cdots, A_N \subset X$に対し、

$$s : X \to R \quad s(x) = \sum_{i=1}^{N} a_i \chi_{A_i}$$

と表されることをいう。A_iに特に制限はないため、$s(x)$は一意には定まらないので注意。

定義より単関数が可測関数になるには任意のiに対し、

$$\{x \in X | f(x) = a_i\}$$

が可測集合になることを言う。

非負値単関数のルベーグ積分

非負値単関数$s(x) = \sum_{i=1}^{N} a_i \chi_{A_i}$が可測関数の時、そのルベーグ積分は

$$\int_A s(x)dx = \sum_{i=1}^{N} a_i \times \mu(A_i)$$

を可測単関数sのA上の **ルベーグ積分** という。ちなみに、積分の結果は拡張実数で扱われるため、∞を含む値も有効な結果として扱われます。ただし、拡張実数にはいくつかの演算規則があるので、注意が必要です。例えば、$0 \times \infty = 0$、$\infty + \infty = \infty$、$\infty - \infty = notdefined$などが挙げられます。また、$a_i \times \mu(A_i) > 0$から、シグマの中に$-\infty$が含まれることはないので、可測単関数sの積分結果は必ず存在することになります。

非負値可測関数のルベーグ積分

非負値可測関数のルベーグ積分は、fをA上の関数としAを任意の$A_i(i = 1, 2, \cdots .n)$に直和分割する。$a_k := inf_{x \subset A_k}(f(x))$とすると、

$$\int_A f(x)dx := sup(\sum_{i=1}^{n} a_k \mu(A_k))$$

と定義される。

非負値可測関数fは、ある非負単関数列$\{f_n\}$が存在し、以下の定理が成り立つ。

- 任意のnに対してf_nは可測関数
- $\{f_n\}$は広義単調増加(ただしいたるところで等しい場合も広義単調増加と認める)
- $\lim_{n \to \infty} f_n = f \quad a.e.$(a.e.とはいたるところで等しい場合の記号)

が成り立つ。

可測関数のルベーグ積分

可測関数fは可測な正成分と負成分によって$f = f_+ - f_-$と分解出来る為、一般の可測関数の積分は以下のように定義される。

$$\int_A f(x)dx = \int_A f_+(x)dx - \int_A f_-(x)dx$$

よって積分結果は$\int_A f_+(x)dx \not= \infty$または$\int_A f_-(x)dx \not= \infty$となる場合に存在します。また、$\int_A f_+(x)dx \not= \infty$かつ$\int_A f_-(x)dx \not= \infty$の場合、つまり$\int_A f(x)dx$が **有限値** の場合、fは **ルベーグ可積分** という。

よってルベーグ可積分になるための必要十分条件は

$$\int_A |f(x)|dx = \text{有限値}$$

である。

ファトゥの補題

非負可測関数列$\{f_n\}$に対し、

$$\int (\liminf_{n\to\infty} f_n)dx \leqq \liminf_{n\to\infty} \int f_n dx$$

が成り立つ。$\liminf_{n\to\infty} a_n$は$\inf(a_\infty(x))$のことである。

項別積分

非負可測関数列$\{f_n\}$とする。この時、

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} f_n dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n dx$$

が成り立つ。ただし、$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$は収束する(拡大実数なので∞及び-∞も収束である。)か$\infty - \infty$領域の測度は0でなければ左辺の積分値は存在しないため、右辺も存在しなくなる。

また、より一般に可測関数列$\{f_n\}$とする。ここで

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n|dx < \infty$$

ならば積分結果は存在し、

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} f_n dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n dx$$

測度の完備性

測度空間$(X, \mathfrak{M}, \mu)$に対し、零集合Aの任意の部分集合A'が零集合となる時、これを測度空間$(X, \mathfrak{M}, \mu)$が **完備** であるという。ただし、測度が定義されている時点で単調性($A \in \mathfrak{M}, B \in$

$\mathfrak{M}, A \subset B \to \mu(A) \leqq \mu(B)$)が成り立つため、**要は完備性とは零集合の任意の部分集合に測度が定義できるのか？と言っている。**

ボレル集合族と可測集合族

以下Rでの話をするがR^nでも同じである。

まず正確には「$(R, B(R), \mu)$ボレル集合族上のルベーグ測度」と「$(R, \mathfrak{M}, \mu)$ルベーグ可測集合族上のルベーグ測度」は異なるものである。なぜならルベーグ測度の定義域が違うからである。さらにこの違いによって完備性に影響が出てくる。具体的にはボレル集合族上のルベーグ測度は完備ではないがルベーグ可測集合族上のルベーグ測度は完備である。

測度空間の完備化

完備ではない測度空間(S, M, μ)に対し新しく集合$\bar{M}$を

$$\bar{M} = \{B \cup Z | B \in M, Z \subset N, \mu(N) = 0\}$$

とする。つまり零集合のすべての部分集合と集合Mの元の和もMに入れてるだけである。さらに$\mu : \bar{M} \to \bar{R}$として定義域を拡張してやれば$(S, \bar{M}, \bar{\mu})$は完備な測度空間である。

ルベーグ測度の定義方法

今回はルベーグ外測度を定義し、そこからルベーグ可測集合なる概念を導入し、定義域を冪集合からルベーグ可測集合族$2^R \to \mathfrak{M}$に狭めることでルベーグ測度の定義を行った。つまり測度空間$(R, \mathfrak{M}, \mu)$の定義を外測度及びルベーグ可測集合族により行った。

ここでもう一つの定義方法を紹介する。これを知ることでよりボレル集合族と可測集合族の違いがわかると思ったからである。

可測空間$(R, B(R))$において、測度$\mu'((a, b]) = b - a$なる測度が一意に存在する。証明はホップの拡張定理を用いて行う。これで測度空間$(R, B(R), \mu')$が定まった。さらに測度空間の完備化を行うことで$(R, B(R)', \mu'')$となる。これは実は外測度より定義した$(R, \mathfrak{M}, \mu)$と一致する。(最後にもう一回述べる)

ルベーグ可測でない例

ルベーグ可測集合でない例の方が圧倒的に分かりにくいが実は非可算個存在する。なのにもかかわらずなぜ見つけられないかというと選択公理が支配的だからである(らしい。ソロヴェイの定理より。)。正直ソロヴェイの定理は今の自分には手に負えないのでこれは認めることとする。選択公理を用いた具体例は"測度、確率、ルベーグ積分(著:原)"のP32~P33にのっている。意外と簡単に分かるので見てみよう。

σ-有限性

本題に行く前にまず一つ記号を定義する。集合列$A_n \uparrow X$とは$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots$かつ$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$となるような集合列とする。

測度空間(X, F, μ)に対し、μが **σ-有限** であるとはある集合列$A_n \uparrow X$(ただし$A_n \in F$)が存在し、さらに

$$\mu(A_n) < \infty、n \geqq 1$$

を満たすときを言う。これは **有限測度のことではないので注意。** 例えばルベーグ測度はσ有限だが有限測度ではない。

また、σ-有限でない測度空間を扱うことは少なくとも確率論においてはほとんどない事を念頭に置いておこう。

直積測度空間

2つの測度空間(X, F, μ)、(Y, G, v)に対し$f \in F$、$g \in G$の直積$f \times g \subset X \times Y$全体のなす集合を$F \times G$とおく。つまり

$$F \times G := \{f \times g | f \in F, g \in G\}$$

とおく。さらに測度$m = \mu \times v$を

$$m(F \times G) = \mu(F)v(G)$$

となる測度と置く。この時$(X \times Y, F \times G, \mu \times v)$を直積測度空間という。

なお、直積測度$\mu \times v$は存在するか、存在しても一意なのか自明でないが、μ、vがともに **σ-有限性なら一意に存在する。**

また、(後述する切り口の記号を用いて)、$Q \in F \times G$とおくと

$$(\mu \times v)(Q) = \int_X v(Q_x)\mu(dx) \qquad (= \int_Y \mu(Q_y)v(dy))$$

となる。(熊谷P171)

集合及び関数の切り口の定義と可測性

σ有限の測度空間の直積からなる直積測度空間$(X \times Y, F \times G, \mu \times v)$において、$E \subset X \times Y$を考える。$x \in X$に対して$E_x$を

$$E_x = \{y \in Y | (x, y) \in E\} \quad (\subset Y)$$

と定義する。これを$x \in X$によるEの切り口(切断)という。

ここで定理として、Eが$F \times G$可測なら、$E_x(\subset Y)$はG可測となり、$E_y(\subset X)$はF可測となる。

また関数の切り口も考える。$f(x,y): X \times Y \to R$を考える。$A \in X$に対し(今回は分かりやすくするためにAと書いたがxとするのが普通)、$f_A(y)$を

$$f_A(y): Y \to R \quad f_A(y) = f(A,y)$$

と定義する。これを切り口関数といい、$f(x,y)$が可測関数なら$f_x(y)$はG可測、$f_y(x)$はF可測となる。

フビニの定理

σ有限の測度空間の直積からなる直積測度空間$(X \times Y, F \times G, \mu \times v)$において、$f(x,y): X \times Y \to R$が **可積分** なら

$$g(y) = \int_X f(x,y)\mu(dx)、h(x) = \int_Y f(x,y)v(dy)、$$

はそれぞれ非負でG可測、F可測となる。さらに積分結果は

$$\begin{aligned}
&\int_{X \times Y} f(x,y)\mu \times v(dx,dy) \\
&= \int_x h(x)\mu(dx) = \int_x (\int_Y f(x,y)v(dy))\mu(dx) \\
&= \int_Y g(y)v(dy) = \int_x (\int_X f(x,y)\mu(dx))\mu(dx)
\end{aligned}$$

が成り立つ。

残念な点は$f(x,y)$が **可積分** なのを示さなければいけないので

$$\int_{X \times Y} |f(x,y)|\mu \times v(dx,dy)$$

が有限であることを示さなければいけない。重積分をそのままやるのは普通難しく、これ単体ではあまり使い物にならない。

トネリの定理

σ有限の測度空間の直積からなる直積測度空間$(X \times Y, F \times G, \mu \times v)$において、$f(x,y): X \times Y \to R$が **可測かつ非負** なら

$$
\begin{aligned}
&\int_{X\times Y} f(x,y)\mu\times v(dx,dy)\\
&\qquad = \int_x(\int_Y f(x,y)v(dy))\mu(dx)\\
&\qquad = \int_x(\int_X f(x,y)\mu(dx))\mu(dx)
\end{aligned}
$$

が成り立つ。もし∞ならそれも含めて等号が成り立つ。

トネリの定理のいいところはフビニの定理のような可積分性の条件を必要とせず、ただが可測かつ非負でさえあれば重積分と累次積分が一致することを主張している点になる。

フビニ-トネリの定理

フビニの定理とトネリの定理のいいとこどりをします。中にはこれをフビニの定理と言っている場合もあります。

σ有限の測度空間の直積からなる直積測度空間$(X\times Y, F\times G, \mu\times v)$において、$f(x,y):X\times Y\to R$が可測関数なら

$$
\begin{aligned}
&\int_{X\times Y} |f(x,y)|\mu\times v(dx,dy)\\
&\qquad = \int_x(\int_Y |f(x,y)|v(dy))\mu(dx)\\
&\qquad = \int_x(\int_X |f(x,y)|\mu(dx))\mu(dx)
\end{aligned}
$$

が成り立つ(トネリの定理より)。さらにこの値が有限なら(ここからはフビニの定理)

$$
g(y)=\int_X f(x,y)\mu(dx)、h(x)=\int_Y f(x,y)v(dy)、
$$

はそれぞれ非負でG可測、F可測となる。さらに積分結果は

$$
\begin{aligned}
&\int_{X\times Y} f(x,y)\mu\times v(dx,dy)\\
&\qquad = \int_x h(x)\mu(dx) = \int_x(\int_Y f(x,y)v(dy))\mu(dx)\\
&\qquad = \int_Y g(y)v(dy) = \int_x(\int_X f(x,y)\mu(dx))\mu(dx)
\end{aligned}
$$

が成り立つ。

ルベーグ積分の性質まとめ

証明はぐぐったり、例えば"測度、確率、ルベーグ積分(著:原)"P59以降に書いてある。

関数列の極限の可測性

可測関数列 f_nがある時、$\sup f_n$、$\inf f_n$、$\limsup f_n$、$\liminf f_n$、(存在するなら)$\lim f_n$はすべて可測関数である。

関数列の無限和と積分の交換性

非負可測関数列 f_nがある時、無限和(つまり極限操作)と積分を交換できる。

$$\int_s \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\mu(dx) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_s f_n(x)\mu(dx)$$

単調収束定理

非負可測関数列 f_nが **広義単調増加** の時、極限操作と積分を交換できる。

$$\int_s \lim_{n\to\infty} f_n(x)\mu(dx) = \lim_{n\to\infty} \int_s f_n(x)\mu(dx)$$

両辺無限になる場合も成立する。

優収束定理

可測関数列 f_nが$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$に **(各点)収束** し、任意の$n$と$x$について

$$|f_n(x)| \leqq g(x)$$

なる **可積分関数** $g(x)$が存在するならば、極限操作と積分を交換できる。

$$\int_s \lim_{n\to\infty} f_n(x)\mu(dx) = \lim_{n\to\infty} \int_s f_n(x)\mu(dx)$$

ここでf_nが非負で広義単調増加なら$g(x) = f(x)$と置けば条件を満たす。

有界収束定理

優収束定理において、$g(x) = M$とおくとこの場合有界収束定理と呼ばれる。単純に定数の方が条件チェックが

$$|f_n(x)| \leqq M$$

を調べればいいだけになるため簡単なのでわざわざ別名が付けられている。

微分と積分の交換

$f(t,x)$について、各$t=T\in(a,b)$ごとに$f(T,x)$が可積分で、各xごとに微分可能とする。さらに任意のtとxについて

$$|\frac{d}{dt}f(t,x)| \leqq g(x)$$

なる **可積分関数** $g(x)$が存在するならば、微分と積分を交換できる。

$$\int_s \frac{d}{dt}f(t,x)\mu(dx) = \frac{d}{dt}\int_s f(t,x)\mu(dx)$$

微分積分学の基本定理

[a,b]上の関数Fが(a,b)上で微分可能で、導関数F'が同区間で有界ならば、F'は同区間上でルベーグ積分可能で、任意の$\varepsilon\in[a,b]$に対し以下が成り立つ。

$$F(\varepsilon)-F(a) = \int_{[a,\varepsilon]} F'(x)\mu(dx)$$

フビニ-トネリの定理

長いので省略。

(おまけ)積分の証明問題の定石

例えば

$$\int_\Omega g(X(\omega))dP(\omega) = \int_R g(x)dP_X(x)$$

を調べたいとき

1. 定義関数$g(x)=1_A$について調べる
2. 非負単関数について調べる。(1番のシグマ大抵示せる)
3. 非負可測関数を単関数の関数列によって近似して単調収束定理を使う
4. $g=G_+ + g_-$を用いて一般の場合について調べる。

ルベーグ-スティルチェス測度

関数Fは以下の性質を持つとする。

1. Fは単調非減少関数
2. $F(x)$は右連続関数

左半開区間($(-\infty,a]$、$(a,b],(a,\infty)$)を用いて、Aを$A=\{\bigcup_{i=1}^m A_i|A_i\text{は、互いに素である半開区間}, m\in N\}$と置くと明らかに$A$は$R$上有限加法族。ここで$A_i$の元$\bigcup_{i=1}^m A_i$に対し$\mu$を以下のように定める。μ(\bigcup *{i=1}^mA_i)=\sum*{i=1}^m(F(b_i)-F(a_i)) $$ するとこの$μ$はA上σ加法的であることを示すことが出来る。よってカラテオドリ(ホップ)の拡張定理より$σ(A)$上の以下のように測度$μ$を定めることが出来る。$$ μ(E):=inf(\lbrace \sum_iμ(A_i)|E\subset\bigcup_iA_i\rbrace) これを **ルベーグ-スティルチェス測度** という。特に$F(x)=x$の時、**ルベーグ測度** という。なお、これは多次元でも成り立つ。