測度論的確率論

目次

前提知識

初歩的な集合論や位相空間論、測度論、ルベーグ積分などは既習とする。

標本、事象、確率の定義

(Ω, F, P)なる測度空間を考える。ここでさらに$P(\Omega) = 1$の時、(Ω, F, P)を **確率空間** と呼び、Pを **確率(測度)** 、Fの元を **事象** 、Ωの元を **標本** と呼ぶ。また、$P(A)$を **事象Aの確認と呼ぶ。**

確率変数

(Ω, F, P)なる確率空間と$(\bar{R}, A)$なる測度空間を考える。さらに写像$X : \Omega \to \bar{R}$を考えこれがF-可測関数ならば、Xを **(実)確率変数** という。F-可測関数とは数式にすると任意の$A' \in A$に対し

$$f^{-1}(B) = \{x \in \Omega | f(x) \in A'\} \in F$$

が成り立つこととなる。

$A = B(R)$ならば(?正直条件が不明だが多分こういうこと、原P39)任意の$\lambda \in R$に対し

$$\{x \in \Omega | f(x) \leqq \lambda\} \in F$$

が成り立つことが必要十分条件である。

確率変数への新たな動機付け

まず動機付けをしよう。確率変数を今回、(Ω, F, P)が先に定義されている前提で定義をした。つまり確率空間が先に定義されることになる。しかし、確率空間を定義する行為は具体的すぎる。例えばサイコロを振る場合、事象としては「偶数が出る」、「奇数である」などを導入するだろう。これではサイコロ投げとい

う子いう行為自体に数学的な考察をしたいときに自然に記述できない。よって確率変数を介在してそこで適宜事象を定義してやればいい。(詳しくは"測度、確率、ルベーグ積分(著:原)"P40)

確率変数から生成されるσ加法族

(Ω, F, P)なる確率空間と$(\bar{R}, A)$なる測度空間を考える。まず、確率変数$X : \Omega \to R$は可測関数の条件より任意の$A' \in A$に対し

$$X^{-1}(B) = \{x \in \Omega | f(x) \in A'\} \in F, \forall B \in B(R)$$

の性質を満たす。よって逆に確率変数Xが与えられたとき

$$\sigma(X) := \{X^{-1}(A') | A' \in A\}$$

と定義すると$\sigma(X)$はσ加法族になる。証明は逆像の性質とσ加法族Aの性質を用いれば簡単にできる。よって **確率変数Xで記述される事象は$\sigma(X)$で必要十分である。**