線形代数

目次

あるベクトルに垂直なベクトル

ベクトル、bを用いるとaに垂直なベクトルh は

$$h = b - \frac{a}{|a|}|b|cos\Theta = b - \frac{a \cdot b}{|a|^2}a$$

となる。シュミット正規直交化法で使う方法の原理となっている。

直線のベクトル方程式

点Aを通る方向ベクトルdの方程式はそのまま

$$p = OA + td$$

である。OAが0ベクトルなら原点を通る。ここでtは媒介変数でありこの媒介変数を削除するには

$$x = A_x + td_x、y = A_y + td_y、z = A_z + +td_z$$

より変形して

$$\frac{x - A_x}{d_x} = \frac{y - A_y}{d_y} = \frac{z - A_z}{d_z}$$

となる。

平面のベクトル方程式

点Aを通る方向ベクトルd_1、d_2の方程式はそのまま

$$p = OA + t_1 d_1 + t_2 d_2$$

ここでt_1、t_2は媒介変数である。法線ベクトルhを用いて

$$h \cdot \overrightarrow{Ap} = 0$$

より変形して

$$\begin{aligned} &h_x(p_x - A_x) + h_y(p_y - A_y) + h_z(p_z - A_z) = 0 \\ &h_x p_x + h_y p_y + h_z p_z = d \end{aligned}$$

ただし、$d = h_x A_x + h_y A_y + h_z A_z$となる。

転置行列の性質

$${}^t(AB) = {}^tB^tA$$

これは$i \times j \quad j \times k$の転置は中身を転置する方針の場合、$k \times j \quad j \times i$とするしかないので感覚的にも一致する。

ちなみに、逆行列でも

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

といった似た式が成立する。

ブロック分割

0が固まってる場合は列ベクトルでブロック分割すると結構綺麗めになる。

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$$

のように列ベクトルでブロック分割を行う。例えばこの分割を用いると

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 & \lambda_2 x_2 & \lambda_3 x_3 \end{pmatrix}$$

のように簡単に表せたり

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 & x_1 + \lambda_2 x_2 & x_2 + \lambda_3 x_3 \end{pmatrix}$$

のように表せたりする。

また、内積については後で後述するが内積が定義できるような計量線形空間や複素計量線形空間ならば **左側の行列を行ベクトルでブロック分割、右側の行列を列ベクトルでブロック分割することで内積記号を用いると見通しが良くなる。** 線形代数改定9マセマP217の使用例が顕著。

逆行列、行列式

逆行列は余因子行列とか掃きだし法とかで求める。

行列式は余因子展開とかサラスとか。

ケーリー・ハミルトンの定理

det(A-λI)=0とし、さらにλをAに置換したものは常に成り立つという定理。特に二次の時は

$$det(A - \lambda I) = A^2 - tr(A)A + det(A) = 0$$

となる。ただし$tr(A)$とはa_{ii}を足したものである。ここで$det(A) = 0$ならば、

$$A^2 = tr(A)A \to A^n = (tr(A))^{n-1}A$$

ランク

拡大係数行列のランクが係数行列のランクより大きいなら解なしとなる。ランクは束縛度を表しこの数分だけ(本当に意味で)式がある数に一致する。つまり$\text{未知数の数} - \text{ランク} = \text{変数の数}$となる。

体

Kが体であるとは、Kに加法と乗法が定義され、さらにすべての公理を満たす集合を言う。

- 結合則の成立(a+b)+c=a+(b+c)
- 0元の存在
- a+b=b+a=0なるbの存在。ただしaとbはKの要素。ちなみにこのbを-aと表記し減法としている。
- (ab)c=a(bc)の成立。
- 単位元の存在。1a=a1=a
- ab=ba=1なるbの存在。ちなみにこのbをa^{-1}と表記する。aが0の時は除く
- ab=baの成立。交換側
- 分配法則の成立

例えば体になりうる集合は実数R、虚数C、有理数Qなど、、

線形空間(ベクトル空間)

Kを体とする。集合Vに加法が定義され、Kの元と集合Vによるスカラー倍が定義されているとする。$k_i \in K$としa、$b \in V$とする。

- (a+b)+c=a+(b+c)の成立
- a+b=b+aの成立
- a+0=0+a=a なる元0の存在
- a+x=x+a=0なる元xの存在
- 1a=aの成立
- $k_1(a+b) = k_1a + k_1b$の成立
- $(k_1 + k_2)a = k_1a + k_2a$の成立
- $(k_1k_2)a = k_1(k_2a)$

を満たすとき、VをK上の線形空間やベクトル空間と言ったり、普通はKは実数全体のことが多いので、R上とつけたり単に **線形空間やベクトル空間** という。

線形結合と線形独立

$a_i \in V$、$c_i \in K$とする。Vは線形空間(ベクトル空間)、Kは体である。

$$\sum_{k=1}^{n} c_i a_i$$

をa_iの線形結合と呼ぶ。ベクトルの集合a_iが線形結合とは

$$\sum_{k=1}^{n} c_i a_i = 0$$

を満たすc_iが$c_i = 0$しか存在しない場合、ベクトルの集合a_iが **線形独立** という。あるベクトル空間の任意の元が **線形独立** ベクトルの集合${v_k}*{k=1}^{i=n}$ で表せるとき、__ ベクトルの集合${v_k}*{k=1}^{i=n}$を基底と呼び、次元はnとなる。__

ちょっとだけ例題

$$a_1 = {}^t[1、2、-1]、a_2 = {}^t[2、3、1]、a_3 = {}^t[1、3、4]$$

は線形独立か？

$$[a_1、a_2、a_3]^t[c_1、c_2、c_3] = {}^t[0、0、0]$$

のランクを調べると3より自明解0、0、0のみ。よって線形独立。

部分空間

集合VをK上のベクトル空間とする。集合Wについて$W \in V$とする。$x, y \in W$とする。

$$x + y \in W$$
$$kx \in W$$

または同じ意味だが

$$k_1 x + k_2 y \in W$$

の時、WをVの部分空間という。なお、本当は(書籍 線形代数の世界より)上二つの条件のみだと空集合も部分空間となってしまうため、

$$0 \in W$$

も満たすべきらしい。

ちなみに部分空間になるには例えば二次元平面なら0を通る直線しかない。3次元なら0を通る平面か直線。n次元でも同じ。集合WがV(n次元ベクトル空間)の部分空間になりたい場合、0を必ず含めないと部分空間になれないはず。多分。

部分空間の例

線形空間Vの$a_1、\cdots、a_k \in V$に対し、集合Wを

$$W = x | x = c_1 a_1 + \cdots + c_k a_k、c_i \in R$$

なる集合WはVの部分空間である。ここで、Wはa_1、〜、a_kで"張られる空間"とよび、a_1、$\cdots$、a_kをWの生成元という。**生成元は線形独立でなくてもいい点に注意。**

線形写像、像(Imf)、核(Kerf)

$V = R^n$と$V' = R^m$とする。つまり線形空間である。x、$y \in V$とすると

$$
f(x+y) = f(x) + f(y) \\
f(\lambda x) = \lambda f(x)
$$

または

$$
f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)
$$

を満たす時、fをVからV'($f : \mathbf{V} \to \mathbf{V'}$)への **線形写像** という。ちなみに$\lambda = \mu = 1$とすれば1式に帰着し$\mu = 0$とすれば2式に帰着するので証明する際はどちらを証明しても構わない。

また特に、$f : \mathbf{R^n} \to \mathbf{R^n}$の場合、**線形変換** という。

先ほどの定義より、線形写像は

$$
f(0) = 0' \\
f(c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n) = c_1 f(x_1) + \cdots + c_n f(x_n)
$$

となることもわかる。また、Imfは

$$
Imf = f(V) = f(x)|x \in V
$$

と定義される。つまり **線形空間Vの任意の元xの線形写像の集合** である。なお、Imfは **V'の部分空間** となる。証明は部分空間の定義より$\lambda f(x_1) + \mu f(x_2) \in V'$を示せばよくそれは$\lambda x_1 + \mu x_2 \in V$より示せる。

核(Kerf)は

$$
Kerf = f^{-1}(0') = x \in V|f(x) = 0'
$$

となる。$kerf$は$f(\lambda x_1 + \mu x_2) = 0'$より$\lambda x_1 + \mu x_2 \in Kerf$より部分空間である。

線形写像の一例として、VをR^n、V'をR^mとすると

$$
x_m = A x_n
$$

で変換できる。**Aはm×n行列である。この行列を表現行列** という。

kerfと商空間

線形写像V→V'が全単射(1対1対応)の時、同型写像と言いう。条件は

$$dimV = dimV' \Leftrightarrow V と V' が同型$$

なお、$V = R^n$、$V' = R^n$でも次元が等しいとは限らないので注意。また、

$$\begin{aligned} & dimV - dim(Kerf) = dim(Imf) \\ & dim(Imf) = rankA \end{aligned}$$

となる。線形写像fが全単射となる（逆写像が存在する）条件、全射になる条件、単射になる条件は

$$\begin{aligned} & rankA = dimV \Leftrightarrow 単射 \\ & rankA = dimV' \Leftrightarrow 全射 \\ & rankA = dimV = dimV' \end{aligned}$$

となる。

固有値と固有ベクトル

n次正方行列$\mathbf{A}$に対し、固有値λと固有ベクトル$\mathbf{x}$を

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

を満たすものと定義する。固有値の計算方法は同じみの方法

$$det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0$$

を計算し$\lambda_i(i = 1、2、\cdots)$を求め、各$\lambda_i$に対し、

$$(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{E})\mathbf{x} = 0$$

を満たす$\mathbf{x}$を求めることで固有ベクトルとなる。なお、

$$\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{E} = \mathbf{T_i}$$

とあらわすこともよくあるので注意。固有化はλ_iに **重解がない場合は対角化可能** であり、仮にn次の重解があった場合その固有値をλ_iとすると、

$$\mathbf{T_i}\mathbf{x_i} = \mathbf{0}$$

を解くことで固有ベクトルが求まるわけだがここで、**自由度n** ならば固有ベクトルがn個求まるので対角化可能。なお、自由度は$\mathbf{A}$をm次正方行列とすると、

$$m - rank(\mathbf{T_i})$$

と求まる。

計量線形空間、ノルム、なす角、直行基底

kを体とし、k上の線形空間Vに対し任意の元$\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$に対して、内積$(a \cdot b) \in R$が定まりかつ、

- $\mathbf{a \cdot b = b \cdot b}$
- $\mathbf{(a_1 + a_2) \cdot b = a_1 \cdot b + a_2 \cdot b}$、$\mathbf{a \cdot (b_1 + b_2) = a \cdot b_1 + a \cdot b_2}$
- $(k\mathbf{a}) \cdot b = k(\mathbf{a \cdot b})$、$\mathbf{a} \cdot (k\mathbf{b}) = k(\mathbf{a \cdot b})$
- $\mathbf{a \cdot a} \geqq 0$

を満たす時、線形空間Vを **計量線形空間または内積空間** という。例えばVをR^nとし、R^nの任意の2つの元

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}、\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

に対して、内積$\mathbf{a \cdot b}$を

$$\mathbf{a \cdot b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

とするとR^nは計量線形空間となる。なお、**内積は行列の積** を用いて

$$\mathbf{a \cdot b} = {}^t\mathbf{ab}$$

とあらわせる事も知っておこう。

ノルム とは計量線形空間Vの0でない2つの元$\mathbf{a}$に対して、

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a \cdot a}$$

で定義される。

なす角 とは計量線形空間Vの0でない2つの元$\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$に対して、

$$cos\Theta = \frac{\mathbf{a \cdot b}}{||a||||b||}$$

で定義される。

n次元の計量線形空間Vを考えると、勿論n次元と言っているわけだから基底はn個あり、基底$\mathbf{u_i}$は

- $\mathbf{u_1}$、$\mathbf{u_2}$、...、$\mathbf{u_n}$は線形独立
- Vの任意の元は$\mathbf{u_1}$、$\mathbf{u_2}$、...、$\mathbf{u_n}$の線形結合で表せる。

を満たすわけだが、さらに \bold{u_i\cdot u_j}= { \begin{aligned} 1(i=jの時) \cr 0(i\neq jの時) \end{aligned} を満たすとき、その基底を **正規直交基底** と呼ぶ。ぱっと思いつくのは$\mathbf{e_1}$、$\cdots \mathbf{e_n}$ だろう

が別に正規直交基底の取り方は無限にいっぱいあるので注意。

直行行列、直行変換

R^nの正規直交基底$\mathbf{u_1}$、$\mathbf{u_2}$、$\cdots$、$\mathbf{u_n}$を列ベクトル成分にもつ行列

$$U = [\mathbf{u_1}、\mathbf{u_2}、\cdots、\mathbf{u_n}]$$

を直行行列という。また、直行行列は

$$\begin{aligned}&{}^t\mathbf{U}\mathbf{U} = \mathbf{U}{}^t\mathbf{U} = \mathbf{E}\\&{}^t\mathbf{U} = \mathbf{U}^{-1}\end{aligned}$$

となる。直行行列$\mathbf{U}$を表現行列とする$f : \mathbf{R^n} \to \mathbf{R^n}$の線形変換を特に、**直行変換** という。直行変換の場合

$$\begin{aligned}&\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = f(\mathbf{x})\cdot f(\mathbf{y})\\&|\mathbf{x}| = |f(\mathbf{x})|\\&\mathbf{x}、\mathbf{y}\text{のなす角} = f(\mathbf{x})、f(\mathbf{y})\text{のなす角}\end{aligned}$$

が成立する。

シュミットの正規直交化法

計量線形空間$\mathbf{R^n}$の正規直交でない基底$\mathbf{a_1}$、$\cdots$、$\mathbf{a_n}$は正規直交基底$\mathbf{u_1}$、$\cdots$、$\mathbf{u_m}$、$\cdots$、$\mathbf{u_n}$に変換可能。具体的にはm=1の時は単純に

$$\mathbf{u_1} = \frac{\mathbf{1}}{|\mathbf{a_1}|}\mathbf{a_1}$$

となり、それ以外の場合は

$$\mathbf{b_m} = \mathbf{a_m} - \sum_{k=1}^{m-1}(\mathbf{u_k}\cdot\mathbf{a_m})\mathbf{u_k} \to \mathbf{u_k} = \frac{\mathbf{1}}{|\mathbf{a_k}|}\mathbf{a_k}$$

となる。m=2の場合を考えると何をやっているのかイメージはすぐつかめるはず。

対称行列

${}^t\mathbf{A} = \mathbf{A}$なる行列$\mathbf{A}$は対称行列と呼ばれ、この行列は対角化可能である。また、固有ベクトル$\mathbf{x_i}$、$\mathbf{x_j}$は **それぞれ直交する。** つまり、行列$\mathbf{A}$は(正規)直交行列$\mathbf{U} = [\mathbf{x_1}、\mathbf{x_2}、\cdots、\mathbf{x_n}]$を用いて、$\mathbf{U^{-1}}\mathbf{A}\mathbf{U}$で対角化可能。

標準形式

対称行列の使い道を紹介する。2次の同次多項式を考える。2次の同次多項式とは全ての項が2次式の多項式のことである。つまり

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$$

である。ただし$a_{ij}=a_{ji}$である。

例えばn=2ならば

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{12} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$$

となるので真ん中は対称行列である。対称行列は(正規)直交行列$\mathbf{U}=[\mathbf{x_1}、\mathbf{x_2}、\cdots、\mathbf{x_n}]$を用いて、$\mathbf{U^{-1}AU}$で対角化可能なので

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\mathbf{U}\begin{pmatrix}x'_1\\ x'_2\end{pmatrix}$$

とおくと、

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}x_1 & x_2\end{pmatrix}&={}^t\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}x'_1 & x'_2\end{pmatrix}\mathbf{{}^tU}\\ &=\begin{pmatrix}x'_1 & x'_2\end{pmatrix}\mathbf{U^{-1}}\end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}x_1 & x_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{12} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}x'_1 & x'_2\end{pmatrix}\mathbf{U^{-1}}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{12} & a_{22}\end{pmatrix}\mathbf{U}\begin{pmatrix}x'_1\\ x'_2\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}x'_1 & x'_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'_1\\ x'_2\end{pmatrix}\\ &=\lambda_1x_1'^2+\lambda_2x_2'^2\end{aligned}$$

となり標準系に直せる。さらにこれは直交行列$\mathbf{U}$による線形変換$f:R^2\rightarrow R^2$なのでなす角や大きさは保存される。**よってこの式によって表せられる図形は変数変換した後も同じ形である。**

複素ベクトル、エルミート行列、ユニタリ行列

VをC上の線形空間とする。VをR^nとする。つまりベクトルの各要素は今、複素数である。ここで内積を以下のように定義する。

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = {}^t\mathbf{x}\bar{\mathbf{y}}$$

なお、**右辺は行列としてxおよびyを見ている。**これは内積の公理を満たさない(交換側)ため計量線形空間ではないが複素内積の公理を満たすため複素計量線形空間などと呼ばれる。公理が見たい方はこちら。交換側は成り立たないが

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = \overline{\mathbf{y}\cdot\mathbf{x}}$$

といった交換側ぽいものは成り立つのも注意。内積結果は$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} \in C$となるので注意。

また、ノルムは

$$|\sqrt{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}}|$$

と定義され結果は必ず$|\sqrt{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}}| \in R$となり、実数となるので注意。

n次複素行列$\mathbf{A_H}$が

$${}^t\overline{\mathbf{A_H}} = \mathbf{A_H}$$

を満たすとき、これを **エルミート行列** という。条件より **対角成分(一番長い斜めのとこ)は実数** となりほかの場所は共役とって転置すると等しくなる。エルミート行列は **対角化可能であり固有値は実数となる。**

n次複素行列$\mathbf{U_U}$が

$$\mathbf{{}^t\overline{U_U}U_U = U_U{}^t\overline{U_U} = E}$$

の時、これを **ユニタリ行列** と呼ぶ。難しく見えるが、要は$\mathbf{U_U}$の列ベクトルの内積が自分自身となら1、それ以外なら0という一身であり直交行列の複素数版である。線形代数改定9マセマP217にわかりやすい図が乗っている。

対称行列を直交行列で対角化可能だったように、エルミート行列もユニタリ行列で以下のように対角化可能である。

$$\mathbf{U^{-1}A_HU_U}$$