ルベーグ積分入門

目次

普通の積分(リーマン積分)

我々が普段使っている積分は **リーマン積分** と呼ばれている。詳細はこちらで見てほしいが、簡単にいうと、リーマン積分とはリーマン和の極限として定義される。

リーマン和$\sum(f,\Delta,\Delta^*)$は関数$f:[a,b]\rightarrow R$と区間$[a,b]$の分割$\Delta=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$と分割$\Delta$の代表値$\Delta^*=\{x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*\}$を用いて

$$\sum(f,\Delta,\Delta^*):=\sum_{k=1}^{n}f(x_k^*)(x_k-x_{k-1})$$

と定義される。さらに$|\Delta|:=max(x_k-x_{k-1})$とするとこれの極限を用いてリーマン積分は **リーマン和の上限と下限が同じ値に収束するならば** 収束値Aを用いて

$$\int_a^b f(x)dx:=A=\lim_{|\Delta|\rightarrow 0}\sum(f,\Delta,\Delta^*)$$

と定義される。重要なのは **リーマン和の上限と下限が同じ値に収束するならば** という点である。つまりどのような代表値に依存せず収束することが条件である。この性質より例えば有理数なら1、無理数なら0といった関数(ディレクレ関数という)は代表の幅を限りなく0に近づけても代表値を有理数にするのか無理数にするのかで上限と下限が一致しないため積分不可能。

ルベーグ積分の概説

リーマン和ならぬルベーグ和は関数$f:[a,b]\rightarrow R$と区間$[a,b]$の値域の分割$\Delta=\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$に対し集合$A_K(K=1,2,\cdots,m)$を

$$A_K:=\{x\in[a,b]|f(x)\in[y_{k-1},y_k)\}$$

とし、集合の長さ$\mu(A_K)$を適切に定義できればルベーグ和を

$$\sum_{K=1}^{n}y_k\cdot\mu(A_k)$$

とすればリーマン和の近似を与えるだろう。これがルベーグ積分の気持ちである。

ルベーグ外測度

ルベーグ積分はリーマン積分の拡張として定義したいのだから、

1. 閉区間[a,b]の長さμ([a,b])=b-a
2. 互いに素な集合の列A_nに対し、$\mu(\bigcup_n A_n)=\sum_n\mu(A_n)$
3. 集合Aと数xに対し$A+x:=\{a+x|a\in A\}$に対し、$\mu(A+x)=\mu(A)$

を満たしてほしいのは自然だろう。互いに素な集合の列としたが、例えばA_3以降は$\varnothing$とすれば$\mu(A_1\cup A_2)=\mu(A_1)+\mu(A_2)$となる。

ここで任意の冪集合の要素$A\in\mathfrak{P}(R^n)$に対し、ルベーグ外測度$\mu^*(A)$を以下のように定義する。ただし、まだこの段階では条件2は満たさない。

μ^*:\mathfrak{P}(R^n)→R,\quad μ^*(A):=inf(\sum_{n=1}^∞|I_n|) ただしI_nはそれぞれ直方体$I_n:=\prod_{i=1}^{n}(a_i,b_i]$であり、その体積$|I_n|$は$|I_n|:=\prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i)$でありさらに$I_n$からなる集合はAを被膜している。

ルベーグ外測度の性質

ルベーグ外測度は以下の性質を満たす。

1. Aが空集合$\varnothing$や1点集合、1点集合の可算個の和集合なら$\mu^*(A)=0$。この時、Aを **零集合** という。ただし非可算個の和には成り立たないので注意。

2. $A \subset B$ならば、$μ^(A)\leqq μ^(B)$
3. 可算劣加法性(σ-劣加法性)を満たす。R の部分集合からなる列A_nに対し、$μ^(\bigcup_n A_n)\leqq\sum_nμ^(A_n)$
4. 区間 [a, b]， [a, b)， (a, b]， (a, b) の外測度はすべて b − a

ここで性質3について、列の話つまり **可算個** についての話であって有限個の話や非可算個の話はしていないので注意。

5. 性質3において$A_n = \varnothing (3 \leqq N)$とすれば任意の$A_1, A_2$に対し$μ^(A_1\cup A_2)\leqqμ^(A_1)+μ^*(A_2)$

ここで性質5について、等号成立条件は$A_1 \cap A_2 = \varnothing$ではないので注意。要は$A_1 \cap A_2 = \varnothing$でも$μ^(A_1\cup A_2)<μ^(A_1)+μ^*(A_2)$ **となる場合が存在する。** ただし、やはりそれでは性質がよろしくないので互いに素の時、性質3及び性質5で等号をなりたたせる事が目標となる。つまりルベーグ外測度の項で述べた2つめの条件のことである。

可測集合

$A_1 \cap A_2 = \varnothing$の時、$μ^(A_1\cup A_2)=μ^(A_1)+μ^*(A_2)$を成り立たせるために、**可測集合** を考える。

集合$E \subset R^n$が **可測集合** であるとは、任意の$F \subset R^n$に対し μ^(F\cap E)+μ^(F\cap E^c) =μ^*(F) を満たすことを言う。**可測集合全体からなる集合** を$\mathfrak{M}$と今後表す。

例えば、$A_1 = F \cap E, A_2 = F \cap E^c$とすれば$A_1 \cap A_2 = \varnothing$かつ、$μ^(A_1\cup A_2)=μ^(A_1)+μ^*(A_2)$になるし、

新たに可測集合A'を用いて$A_1' := A_1, A_2' := A_2 \cap A', A_3' := A_2 \cap (A')^c$,と置けば$μ^(A_1'\cup A_2'\cap A_3')=μ^(A_1)+μ^(A_2)+μ^(A_3')$となる。

ルベーグ可測集合の性質

ルベーグ可測集合及び$\mathfrak{M}$の基本性質として以下が成り立つ。

- $A \in \mathfrak{M}$ならば$A^c \in \mathfrak{M}$
- 空集合$\varnothing$は$\varnothing \in \mathfrak{M}$
- ルベーグ集合列を$\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$とすると、$\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$もルベーグ可測集合である。(つまりルベーグ可測集合の可算無限和集合もルベーグ可測集合)

また、以下の可算加法性が成り立つ。

$A_1, A_2, \cdots \in \mathfrak{M}$は互いに素であるとする。この時、任意の$B \in \mathfrak{P}(R^n)$に対し、μ^(B\cap \bigcup_{i=1}^∞A_i)=\sum_{i=1}^∞μ^(B\cap A_i) $$ が成り立つ。特に$B=R^n$とすれば $$ μ^(\bigcup_{i=1}^∞A_i)=\sum_{i=1}^∞μ^(A_i)

が成り立つ。また、空集合はルベーグ可測集合なのでi=n以降を空集合とすれば有限加法性も成り立つのは明らかだろう。

ルベーグ測度

ルベーグ外測度の始域を$\mathfrak{M}$にした写像μを **ルベーグ測度** という。

$$\mu : \mathfrak{M} \to R, \quad \mu(A) = \mu^*(A)$$

σ-集合体、可測空間

集合XとXの部分集合の族$\mathfrak{M}$が以下の性質を満たすとき、$\mathfrak{M}$を **σ-集合体** 、**σ-代数** 、**σ-加法族** などという。また$(X, \mathfrak{M})$を **可測空間** と呼ぶ。

1. $\varnothing \in \mathfrak{M}$
2. $A \in \mathfrak{M}$ならば$A^c \in \mathfrak{M}$
3. $A_1, A_2, \cdots \in \mathfrak{M}$ならば、$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathfrak{M}$

また、条件2,3より$A_1, A_2, \cdots \in \mathfrak{M}$ならば、$\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathfrak{M}$も示される。

ここで条件3の∞をnに変えたもの条件3'とすると、条件1、2、3'を満たす$\mathfrak{M}$を有限加法族と呼ぶ。条件1と条件3より明らかにσ-集合体は有限加法族である。

σ-加法族の生成

集合XとXの部分集合の族をFとする。Fを含むようなσ-加法族全体の集合を$\mathfrak{F}$とすると$F_0 = \bigcap_{f \in \mathfrak{F}} f$とすればこれは最小のσ-加法族となる。これを$\sigma(F)$と書き、Fによって生成されるσ-加法族という。

ボレル集合、ボレル集合族

$(X, \mathfrak{O})$を位相空間とする。$\mathfrak{O}$で生成されるσ-加法族をボレル集合族といい、$B(X) = \sigma(\mathfrak{O})$と書く。$B(X)$の元をボレル集合という。

例えば以下はすべてボレル集合B(R)である。

1. (a,b)
2. [a,b]
3. [a,b)
4. {a}
5. Q
6. R\Q

など。証明はこちら。

また、$B(R) \subset \mathfrak{M}$であり、$(R, B(R))$は可測空間である。一応B(R)に含まれないが$\mathfrak{M}$には含まれる病的な可測集合Xもあるが、基本的に可測集合かどうかはボレル集合に含まれるかどうかを見ればいい。

ルベーグ測度の単調性

可測集合列A_nに対し、次の定理が成り立つ。

1. $A_n \subset A_{n+1}$ならば μ(\bigcup *{n=1}^∞A_n)=\lim*{n→∞}μ(A_n)
2. $A_{n+1} \subset A_n$かつ$\mu(A_1) = \infty$ならば

$$\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

測度空間

可測空間$(X, \mathfrak{M})$に写像$\mu : \mathfrak{M} \to R$が以下を満たすとき、$(X, \mathfrak{M}, \mu)$を **測度空間** という。

1. $\mu(\varnothing) = 0$
2. 互いに素な集合の列$A_n \in \mathfrak{M}$に対し、$\mu(\bigcup_n A_n) = \sum_n \mu(A_n)$

よってルベーグ測度を入れた空間$(R, \mathfrak{M}, \mu)$は測度空間である。

拡大実数$\bar{R}$

$R = (-\infty, \infty)$であるが拡大実数$\bar{R}$とは∞を認めた実数である。つまり$\bar{R} = R \cup \{-\infty, \infty\}$となる。

可測関数

$(R, \mathfrak{M})$の可測空間において、$X \in \mathfrak{M}$上の関数$f : X \to \bar{R}$が **可測関数** であるとは、任意の$a \in R$に対して

$$\{x \in X | f(x) > a\}$$

が可測集合であることを言う。

また、$f : X \to \bar{R}$を拡張して$f' : R \to \bar{R}, f'(x) = f(x)(x \in X), f'(x) = 0(x \in X^c)$とすればリーマン積分の場合を考えれば分かるように、積分の値に影響しない。よって **関数の定義域はRに限定しても一般性を失わない。**

ちなみに

$$\{x \in X | f(x) > a\}$$

の$f(x) > a$を$f(x) \geqq a, f(x) < a, f(x) \leqq a$などに変えても同値である。

可測関数により定義される関数の可測性

f,gを可測関数とする。ここで関数の四則演算を$(f+g)(x) := f(x) + g(x)$のように定義すると以下の性質が成り立つ。

- kfのように定数倍しても可測関数。
- 関数f+gも可測関数
- 関数$f \cdot g$も可測関数
- 関数$\frac{f}{g}$も可測関数。ただし$g(x) \not= 0$

また、$f_+ := max(f(x), 0)$と置き、これをfの正成分という。要は$f(x)$が 0 以上なら$f_+ = f$でそうでないxについては$f_+ = 0$である。同様にf_-をfの負成分という。以下の定理が成り立つ。

- fが可測関数なら、fの正成分及びfの負成分も可測関数。

fの正成分及びfの負成分も可測関数なので$f_+ + (-f_-) = |f|$より

- fが可測関数なら、$|f|$も可測関数。

また、**fが連続関数なら可測関数**。

いたるところで等しい

2つの関数f,gが **いたるところで等しい** とは

$$\mu^*(\{x | f(X) \not= g(x)\}) = 0$$

が成り立つ時をいい、fが可測関数ならgも可測関数になる。