システム制御II

目次

----------中間編----------

微分方程式から状態方程式の求め方

一番高い階数の微分以外に状態量を割り当てるだけ。形は

$$\mathbf{X'(t)} = A\mathbf{X(t)} + Bu(t)$$
$$Y(t) = CX(t) + Du(t)$$

なお、$Du(t)$は直立項と呼ばれる。出力に入力が定数倍されてそのまま出る部分 。

例えばRLC直列回路の場合

$$e(t) = Ri(t) + Li(t)' + \frac{1}{c}\int_0^t i(t)dt$$

となるが、変形して

$$\frac{1}{L}e(t) = \frac{R}{L}i(t) + i(t)' + \frac{1}{cL}\int_0^t i(t)dt$$

入力を$e(t)$、出力を$y(t) = \int_0^t i(t)dt$だとおもうと

$$\frac{1}{L}e(t) = y'' + \frac{R}{L}y' + \frac{1}{cL}y$$

となる。ここで一番高い階数の微分以外に状態量を割り当ててる。つまり

$$x_1 = y、x_2 = y'、X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

とおくと、

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{cL} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{pmatrix} u(t)$$

となる。

e^{At}の求め方(対角化で)

公式は

$$e^{At} = Te^{Bt}T^{-1}$$

なお、

$$T^{-1}AT = B$$

である。証明は

$$
\begin{aligned}
e^{At} &= I + At + \frac{A^2}{2!}t^2 + \frac{A^3}{3!}t^3 + \cdots \\
&= TT^{-1} + TBT^{-1}t + \frac{TB^2T^{-1}}{2!}t^2 + \frac{TB^3T^{-1}}{3!}t^3 + \cdots \\
&= T(I + Bt + \frac{B^2}{2!}t^2 + \frac{B^3}{3!}t^3 + \cdots)T^{-1} \\
&= Te^{Bt}T^{-1}
\end{aligned}
$$

ただしBは例えば$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$のような対角行列なので$e^{Bt}$は簡単に

$$e^{Bt} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}$$

となる。

e^{At}の求め方(ラプラス変換で)

公式は

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}]$$

証明は$u(t) = 0$とすると

$$X' = AX$$

となるのでラプラス変換して

$$sX(s) - X_0 = AX(s) \rightarrow (SI - A)X(s) = X_0$$

逆行列を左からかけて

$$X(s) = (SI - A)^{-1}X_0$$

よって$u(t) = 0$ならば

$$X(t) = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}]X_0$$

ここでXの一般解は

$$X(t) = e^{At}X_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}bu(\tau)d\tau \underset{u(\tau)=0}{\longrightarrow} X(t) = e^{At}X_0$$

なので比較して

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}]$$

となる。

状態方程式xの一般解(積分で)

公式は

$$X = e^{At}X_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

なのでe^{At}さえわかれば頑張るだけ。なお、$\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$を忘れたときは、

$$\int_0^t x(t-\tau)y(\tau)d\tau = \mathcal{L}^{-1}[XY]$$

の関係式を思い出して

$$\mathcal{L}^{-1}[(sI-A)^{-1}BU(s)] \underset{X=(sI-A)^{-1}、Y=BU(s)}{\longrightarrow} \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

とすれば導ける。ラプラス変換の式は次の項へ↓

状態方程式xの一般解(ラプラス変換で)

公式は

$$X(t) = \mathcal{L}^{-1}[(sI-A)^{-1}]X_0 + \mathcal{L}^{-1}[(sI-A)^{-1}BU(s)]$$

忘れたときは

$$\mathbf{X'(t)} = A\mathbf{X(t)} + Bu(t)$$

をラプラス変換して

$$sX(s) - X_0 = AX(s) + BU(s) \longrightarrow (sI-A)X(s) = X_0 + BU(s)$$

より$(sI-A)^{-1}$を左からかけて

$$X(s) = (sI-A)^{-1}X_0 + (sI-A)^{-1}BU(s)$$

逆ラプラス変換して

$$X(t) = \mathcal{L}^{-1}[(sI-A)^{-1}]X_0 + \mathcal{L}^{-1}[(sI-A)^{-1}BU(s)]$$

出力方程式の求め方

$$Y(t) = CX(t) + Du(t)$$

に代入するだけ。

フルランク

Aを$n \times m$行列する。Aのフルランクとは

$$rank(A) = min(n, m)$$

のことを言う。なお、**ランクは転置しても変わらない**

もし$n = m$なら

$$rank(A) = n \Leftrightarrow det(A) \neq 0$$

正方行列がフルランクか調べるなら大抵$det(A) \neq 0$を使った方が早い。問題はせいぜい4×4とかの行列だから。

線形独立

Aを$n \times m$行列する。ここで

$$rank(A) = k$$

だったとする。ここで**列ベクトル**が線形独立なのかを調べるには(列は縦)

$$k = m \Leftrightarrow \text{列ベクトルが線形独立}$$

を調べればいい。ランクは意味を持つ式の本数なので列数=ランクとなればすべての列ベクトルは意味を持つことになる。

逆に**行ベクトル**が線形独立なのかを調べるには(行は横)

$$k = n \Leftrightarrow \text{行ベクトルが線形独立}$$

を調べればいい。ランクは意味を持つ式の本数なので行数=ランクとなればすべての行ベクトルは意味を持つことになる。

可制御の判定(やり方その1)

定理

$$\text{行列}e^{At}B\text{の行ベクトルが線形独立ならば可制御}$$

よって $e^{At}B$のランクを求めて**行数と一致するか調べる**。問題で既にe^{AT}を求めたならこっちの方が楽かな？

可制御はかせい"ぎょう"で調べる。と覚える。

可制御の判定(やり方その2)

状態変数の数(=Aの列数)をnとする。

$$M_C = \begin{pmatrix} b & Ab & \dots & A^{n-1}b \end{pmatrix}$$

とすると

$$rank M_c = n$$

が成立すれば可制御。行フルランクともいうらしい。e^{AT}を求てないならこっちの方が楽かな？

可観測の判定(やり方その1)

定理

$$行列Ce^{At}の列ベクトルが線形独立ならば可制御$$

よって Ce^{At} のランクを求めて**列数と一致するか調べる**。問題で既にe^{AT}を求めたならこっちの方が楽かな？

可観測の判定(やり方その2)

状態変数の数(=Aの列数)をnとする。

$$M_O = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

とすると

$$rank M_c = n$$

が成立すれば可制御。列フルランクともいうらしい。e^{AT}を求てないならこっちの方が楽かな？

----------期末編----------

座標変換

$$\mathbf{X'(t)} = A\mathbf{X(t)} + Bu(t)$$
$$Y(t) = CX(t) + Du(t)$$

に対し、$\mathbf{X(t)} = \mathbf{TZ(t)}$の線形変換を定義すると

$$\begin{aligned}\mathbf{TZ'(t)} &= A\mathbf{TZ(t)} + Bu(t)\\ Y(t) &= C\mathbf{TZ(t)} + Du(t)\end{aligned}$$

となり、左から$\mathbf{T^{-1}}$をかけて

$$\begin{aligned}\mathbf{Z'(t)} &= \mathbf{T^{-1}ATZ(t)} + \mathbf{T^{-1}}Bu(t)\\ Y(t) &= C\mathbf{TZ(t)} + Du(t)\end{aligned}$$

となる。$\bar{A} = \mathbf{T^{-1}AT}$、$\bar{B} = \mathbf{T^{-1}}B$、$\bar{C} = C\mathbf{T}$と置けば

$$\begin{aligned}\mathbf{Z'(t)} &= \bar{A}\mathbf{Z(t)} + \bar{B}u(t)\\ Y(t) &= \bar{C}Z(t) + Du(t)\end{aligned}$$

となる。なお、$\bar{A} = \mathbf{T^{-1}AT}$は相似な行列の定義そのもので固有値(=固有多項式)や行列式等の行列関係の諸量は等しくなる。固有ベクトルは$\mathbf{T^{-1}}$を掛けた値となる。

可制御正準形とは

座標変換のうち特に

$$\mathbf{Z'(t)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & 0\\ 0 & 0 & 1 & & 0\\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0\\ \vdots & & & \ddots & 1\\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_{n-1}\end{pmatrix}\mathbf{Z(t)} + \begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\\1\end{pmatrix}u(t)$$

$$Y(t) = \begin{pmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n\end{pmatrix}Z(t) + Du(t)$$

と _ _ 表せる時 _ _ 、この表現形式を可制御正準形という。固有方程式は$\mathbf{A}$、$\bar{\mathbf{A}}$について、座標変換後も相似な行列の性質より不変な事に注意すると

$$|sI - A| = |sI - \bar{A}| = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0$$

となり、伝達関数は

$$G(s) = \frac{\beta_n s^{n-1} + \beta_{n-1}s^{n-2} + \cdots + \beta_2 s + \beta_1}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

となる。分子の方が次数が小さいので注意 ◦ テストで出るようなシステム制御の問題は基本プロパー(分子の次数 < 分母の次数)になる(気がする)。

伝達関数

伝達関数は

$$G(s)=\frac{\beta_n s^{n-1}+\beta_{n-1}s^{n-2}+\cdots+\beta_2 s+\beta_1}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

となるが、普通に元の式をラプラス変換すれば

$$\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}U(s)$$

となることにも注意。

可制御正準形の求め方その1

$$\begin{aligned}\mathbf{X'(t)}&=A\mathbf{X(t)}+Bu(t)\\ Y(t)&=CX(t)+Du(t)\end{aligned}$$

を

$$\mathbf{Z'(t)}=\begin{pmatrix}0&1&0&&0\\0&0&1&&0\\0&0&0&\ddots&0\\\vdots&&&\ddots&1\\-\alpha_0&-\alpha_1&-\alpha_2&\cdots&-\alpha_{n-1}\end{pmatrix}\mathbf{Z(t)}+\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}u(t)$$

$$Y(t)=\begin{pmatrix}\beta_1&\beta_2&\cdots&\beta_n\end{pmatrix}Z(t)+Du(t)$$

に可制御正準形に座標変換するには$\mathbf{X(t)}=\mathbf{TZ(t)}$の$\mathbf{T}$を知る必要がある。$\mathbf{T}$は

$$\mathbf{T}=\begin{pmatrix}b&Ab&\dots&A^{n-1}b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1&\cdots&a_{n-1}&1\\\vdots&a_{n-1}&1&0\\a_{n-1}&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$$

で求められる。

$$\mathbf{M_c}=\begin{pmatrix}b&Ab&\dots&A^{n-1}b\end{pmatrix}、\mathbf{Q}=\begin{pmatrix}a_1&\cdots&a_{n-1}&1\\\vdots&a_{n-1}&1&0\\a_{n-1}&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$$

と置くと、可制御正準形にするには$\mathbf{T}$には逆行列が存在しなければならないため、

$$|T|=|M_c||Q|\not=0\quad\rightarrow|M_c|\not=0$$

となりこれはまさに可制御の判定(やり方その2)と同じことを言っている。

可制御正準形の求め方その2

$$\begin{aligned}\mathbf{X}'(\mathbf{t}) &= A\mathbf{X}(\mathbf{t}) + Bu(t) \\ Y(t) &= CX(t) + Du(t)\end{aligned}$$

に対し、$\mathbf{t}_i \quad (i = n、n-1、\cdots、2)$を列ベクトルとする。ここで

$$\mathbf{t}_n = B, \mathbf{t}_{i-1} = A\mathbf{t}_i + \alpha_{i-1}\mathbf{t}_i$$

とすると

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix}\mathbf{t}_n & \mathbf{t}_{n-1} & \cdots & \mathbf{t}_1\end{bmatrix}$$

となる。やってること自体はその1と同じ。例としてn=3ならば

$$\begin{aligned}\mathbf{t}_3 &= B \\ \mathbf{t}_2 &= A\mathbf{t}_3 + \alpha_2\mathbf{t}_3 \\ \mathbf{t}_1 &= A\mathbf{t}_2 + \alpha_1\mathbf{t}_2 \\ \mathbf{T} &= \begin{bmatrix}\mathbf{t}_3 & \mathbf{t}_2 & \mathbf{t}_1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

となる。

可制御正準形の求め方その3

まず、可制御行列M_c

$$M_C = \begin{pmatrix}b & Ab & \dots & A^{n-1}b\end{pmatrix}$$

の逆行列M_c^{-1}を求める。M_c^{-1}の第n行目の行ベクトルをeとおく。つまり一番下の行のことである。このeを用いるとT^{-1}は

$$T^{-1} = \begin{pmatrix}e \\ eA \\ \dots \\ eA^{n-1}\end{pmatrix}$$

と求まる。ここで求まるのはT^{-1}なことに注意 。

この求め方を見るとM_c^{-1}の存在がないと可制御正準形に出来ないことが分かる。

正定値行列の定義

まず用語として、正定値とは符号が正のことを言う。

$a > 0$	**aは正定**
$a \geqq 0$	aは半正定値
$a < 0$	aは負定値
$a \leqq 0$	aは半負定値

ここでまず$\mathbf{A} \in M(n,n)$、$\mathbf{x} \in R^n$とする。つまり$\mathbf{A}$はn次正方行列、$\mathbf{x}$はn次元列ベクトルである。さらに$\mathbf{A}$は対称行列とする。つまり${}^t\mathbf{A} = \mathbf{A}$である。ここで列ベクトル$\mathbf{x}$、$\mathbf{y}$の内積$< \mathbf{x}、\mathbf{y} >$は

$$< \mathbf{x}、\mathbf{y} >= {}^t\mathbf{x}\mathbf{y} = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

である。$\mathbf{A}$が正定値行列であるとは列ベクトルの内積を用いて

$$< \mathbf{A}\mathbf{x}、\mathbf{x} > \quad > 0$$

となる時を言う。ここで転置行列の性質とAは対称行列なので

$${}^t(\mathbf{A}\mathbf{x}) = {}^t\mathbf{x}{}^t\mathbf{A} \quad \rightarrow \quad {}^t(\mathbf{A}\mathbf{x}) = {}^t\mathbf{x}\mathbf{A}$$

となるので

$$< \mathbf{A}\mathbf{x}、\mathbf{x} >= {}^t\mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{x} > 0$$

となる。なお$\mathbf{X}$は任意である。つまり2次形式が常に0より大きいと言ってもいい。

正定値行列の性質

$$対称行列\mathbf{A}が正定値行列 \iff 固有値がすべて正$$

この性質は色々考え方はあるが例えば、固有値がすべて正でない場合、2次形式の変数は任意のため変数変換をして2次形式の中でも特に標準形に変換した場合、それらの係数の中に正でないものが含まれてしまい2次形式が常に0より大きいに明らかに反してしまう。

または、対称行列は必ず直行行列で対角化可能であり、相似な行列の行列式は一定値より行列式とはすべての固有値の積であるので仮に固有値が0以下のものがある場合、主座小行列の行列式に0以下のものが出てしまいこれはシルベスターの判定法に反する。

正定値行列の判定法(シルベスターの判定法)

$\mathbf{A}$が正定値行列がどうか調べたいとする。

1. $\mathbf{A}$が対称行列なら次へ
2. $\mathbf{A}$の対角成分(a_{ii}のこと)がすべて正なら次へ
3. 主座小行列を取り出し、それらの行列式がすべて正ならば$\mathbf{A}$は正定値行列

例えば

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

の場合、対角成分は2、3、1よりすべて正なのでstep3へ

$$a_{11} = 2 > 0、det(\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}) = 5 > 0、det(\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}) = -30 < 0$$

よりこの行列は正定値行列でない。

半正定値行列の判定法

正定値行列の判定法で紹介した方法の"正なら"の部分を"0以上なら"に置き換えたものとなる。ただしステップ2か3に一回も0を含まない場合それは正定値行列なので一回は0が出てくる必要あり。

安定性

安定性には漸近安定やリアプノフ安定、不安定が存在する。これらの安定性は$\mathbf{A}$固有値を見ることで判定可能である。

- 固有値の実部がすべて0以下ならリアプノフ安定
- 固有値の実部がすべて負なら漸近安定
- 固有値の実部に正を含むなら不安定

リアプノフの定理は固有値を見ずに漸近安定なのか不安定なのかを見ようというコンセプトの定理・おそらくシステム制御においては入力を0にした際の安定性のことを言っており入力を0にしてほっといたら0に行くのかそれともどっかに発散するのかを聞いている。例えばドローンの電源の落としたら落ち続ける。これは発散であり逆に電気回路なんかは電源を0にすれば出力もいずれ0になる。これは安定・システム制御における安定性は"入力を0にしたら出力も0にいくのか？"やステップ関数を入力したらある一定値に収束するのか？"や"有限値を入力したら出力も有限値になるのか？"等の指標がある。全部等価だったような気がしなくもない。。。

なお、リアプノフ安定は遠ざかりはしない、漸近安定は収束する、不安定は発散するといったイメージ

さらに、イメージとして$\mathbf{A}$を表現行列とした線形変換を考えると固有値に虚数を含む場合は渦巻き状になるが実部が正の場合は外方向に放出される感じの渦巻き、負の場合は渦潮のように内側に吸い込まれ

る渦巻き、0の場合は位置ベクトルに常に垂直に回る円模様になるのでイメージに一致するし、固有値がすべて実数で正ならその固有ベクトルの写像は常に外側に伸びて発散し、負ならその固有ベクトルは常に原点に戻されるかの様な形になるので収束する。これもイメージと一致する。イメージ図はこちら

リアプノフの定理

任意の正定行列$\mathbf{Q}$に対して

$$ {}^t\mathbf{A}\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} = -\mathbf{Q} $$

を満足する 正定行列 $\mathbf{P}$が存在する時 、漸近安定となる。これをリアプノフの定理という。

よって$\mathbf{A}$を与えられたとき、てきとうに正定行列$\mathbf{Q}$を決め$\mathbf{P}$を求め、その$\mathbf{P}$が正定行列なのかシルベスターの判定法で判定する。