集合論

目次

集合とは

集合とはものの集まりのことである。ここでいう"ものとは論理的考察の対象となるものなら何でもよく、例えば数、点、関数、文字などがあげられる。ただし、数学における集合はものの **範囲がはっきりとしていなければならない。**

例えば、"大きい数の集まり"、"細長い三角形全体"、"美人全体"は集合ではない。

逆に"日本人全体"、"整数全体"などは集合である。

集合の表記方法

外延的記法

$$a, b, c, \cdots$$

内包的記法

$$x | x の条件$$

空集合

空集合は集合であって要素ではないので注意。つまり任意の集合Aに対し、

$$\varnothing \subset A$$

だが、集合Aに$\varnothing$を意図的に要素として入れない限り、

$$\varnothing \in A$$

とはならないので注意。これを頭に入れとかないと対応の定義域、値域の説明でつまずくので注意。

集合の演算

$$A \cup B = x|x \in A\text{または}x \in B$$

$$A \cap B = x|x \in A, x \in B$$

↑条件部分のコンマ「,」は"かつ"を表す。$A \cap B = \varnothing$の時、互いに素という。

$$A - B = x|x \in A, x \notin B$$

普遍集合と補集合

数学の理論において、その時考えている集合はすべて1つの定まった集合Xの部分集合であるとわかっているケースが多い。この集合Xを考察における普遍集合という。

集合Aに対し、$X - A$を集合Aの補集合A^cという。

集合系(本によっては集合族)

元がすべて集合の集合を集合系という。元の集合と区別するためにしばしばドイツ大文字(特にベキ集合)が使われる。($\mathfrak{P}(A)$)

ベキ集合

集合Aに考えられるすべての部分集合の集合(つまり部分集合の集合系)をベキ集合という。すべての要素の含む/含まないの組み合わせになるのでAの要素数をnとするとベキ集合は2^n個の要素になる。

順序対と直積

二つのものa,bから作られた対(a,b)を順次対という。ただし、順次対は以下の性質を満たさなければならない。

$$(a,b)=(a',b')ならばa=a'、b=b'$$

AとBの元が作る順序対全体の作る集合をAとBの直積と言いその集合を$A \times B$とあらわす。

$R \times R$の元(x,y)はデカルト座標を設けた平面上の恬としてあらわわされることがよくある。これは$R \times R$の幾何学的複写である。(幾何学的な映像を与える。)

対応

始めに断っておくが、"対応"とは"写像"とは別なので注意。

対応

A,Bを2つの集合とする。Aの各元aを1つずつBの **部分集合** を対応させる規則を対応fという。(もちろん空集合もBの部分集合なことに注意。つまり実質的にAの元がBの元に対応しない(空集合)が許されるのが"対応")

像

元aに対して定まる部分集合$b=f(a) \subset B$をaのfによる像という。

始集合、終集合

Aを始集合といい、Bを終集合という。

グラフ

(松坂)直積$f:A \times B$の部分集合をfのグラフという。

$$fのグラフ=(a,b)|a \in A, b \in f(a)$$

定義より同じaに対し(a,b)、(a,b')、(a,b'')などのように無数に存在が許される点にも注意。直積$f:A \times B$はすべての(a,b)の組み合わせなのでまあ、これは納得。ただし、"対応"は部分集合を写像先としているので、"線"がグラフなのではなく、閉曲線の面積そのものがグラフになるので注意。

定義域、値域

$fのグラフ=(a,b)|a \in A, b \in f(a)$をGと置く。

$(a,b) \in G$となる$b \in B$が存在するようなAの元a全体の集合をGの **定義域** という。グラフの定義より$(a,b) \in G$となる$b \in B$が存在するには$f(a) \neq \emptyset$となるのと等しいので

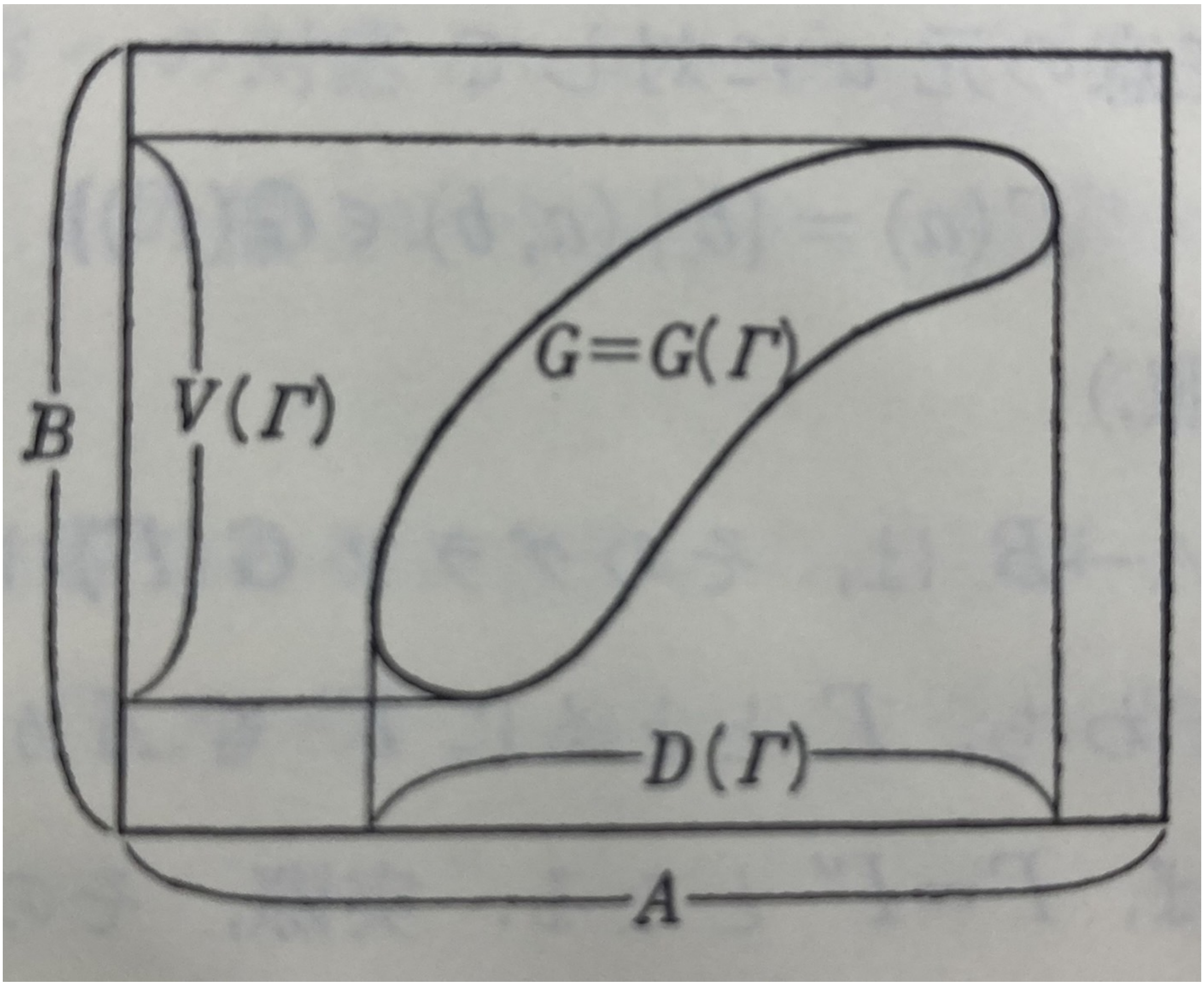
$$f(a) \neq \emptyset となるa全体の集合$$

を定義域としても正しい。定義域をD(G)とすると

$$D(G) = a|\exists b \quad S.T.((a,b) \in G)$$

となる。同様に値域V(G)は

$$V(G) = b|\exists a \quad S.T.((a,b) \in G)$$



画像は松坂より引用。

写像

写像

A→Bの"対応"のうち、任意のaに対し、f(a)がBのただ一つの元で構成される部分集合になる場合fを **写像** という。つまり、$f(a) = \varnothing$ となるaがある場合は写像ではないし$f(a) = b_1, b_2$ t なるaがある場合も写像ではない。常に1対1または多体1対応でなければならない。よって定義域はAそのものになる点も注意。

つまり微分積分学などの1価関数と等しい。

像

元aに対して定まる"元b"($b = f(a)$)をaのfによる像という。bは集合であったが、写像の定義より1つの元による集合になるため{}は省くことになっている。

写像の拡大、縮小

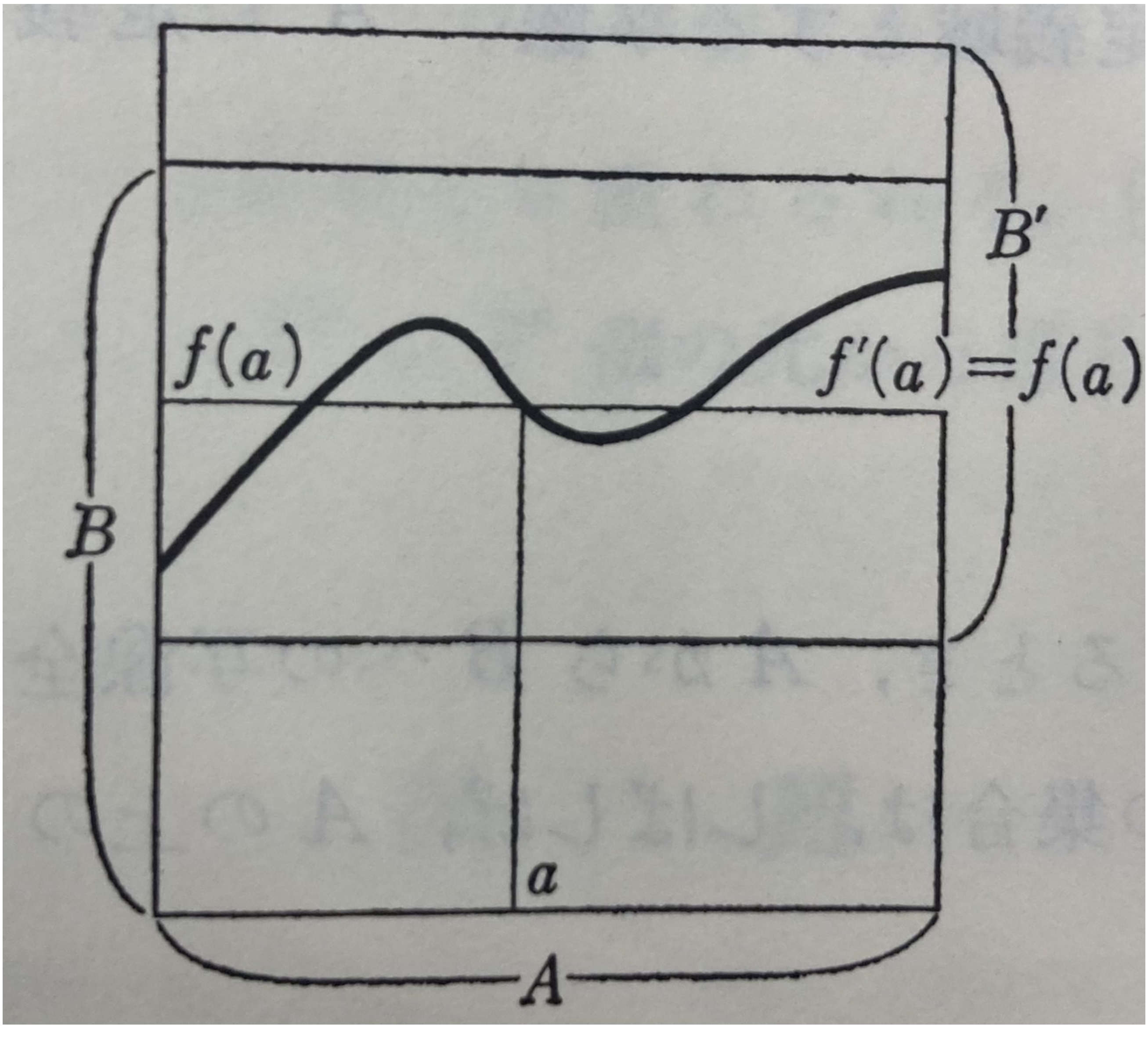
$f : A \to B$、$f' : A' \to B$とし、$A \subset A'$とする。$a \in A$に対し、

$$f(a) = f'(a)$$

ならばAに定義域を縮小した写像、または単に縮小した写像という。逆の場合は拡大となる。

写像の終集合の厳密性

本来写像(対応)は定義域(対応なら始集合)と終集合が定義されて初めて写像及び対応を名乗ることができる。逆に写像が等しいとは規則だけでなく始集合と終集合も等しくて初めて同じ写像ということができる。しかし終集合は図のように値域V(G)を含む集合ならなんでもいいため無数に存在する。これらの写像f及びf'は違う写像だが常にf(a)=f'(a)のため本質的には同じととることもできる、よって終集合は値域を含む集合であれば気にしないという立場をとる場合もある。



包括写像と恒等写像

$$i : A \to B \quad i(a) = a$$

の写像iを包括写像という。必然的に$A \subset B$となる。特にA=Bの時

$$1_A : A \to A \quad 1_A(a) = a$$

と書いて写像1_Aを恒等写像という。

逆写像

$(f \circ g)(a) = f(g(a)) = 1_A(a)$ならば写像fとgは全単射であり、さらにg(またはf)はf(またはg)の逆写像であるという。

単射、全射、全単射

単射

$a_1 \not= a_2$ならば$f(a_1) \not= f(a_2)$の時、fは単射であるという。つまり

全射

Bの任意の元bに対し、$b = f(a)$なるaが存在するならば、fは全射という。

全単射

単射かつ全射の場合、fを全単射といい、一対一対応という。