システム制御II

目次

中間編

微分方程式から状態方程式の求め方

一番高い階数の微分以外に状態量を割り当てるだけ。形は

$$\mathbf{X}'(\mathbf{t}) = A\mathbf{X}(\mathbf{t}) + Bu(t)$$
$$Y(t) = CX(t) + Du(t)$$

なお、$Du(t)$は直立項と呼ばれる。出力に入力が定数倍されてそのまま出る部分。

例えばRLC直列回路の場合

$$e(t) = Ri(t) + Li(t)' + \frac{1}{c}\int_0^t i(t)dt$$

となるが、変形して

$$\frac{1}{L}e(t) = \frac{R}{L}i(t) + i(t)' + \frac{1}{cL}\int_0^t i(t)dt$$

入力を$e(t)$、出力を$y(t) = \int_0^t i(t)dt$だとおもうと

$$\frac{1}{L}e(t) = y'' + \frac{R}{L}y' + \frac{1}{cL}y$$

となる。ここで一番高い階数の微分以外に状態量を割り当ててる。つまり

$$x_1 = y、x_2 = y'、X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

とおくと、

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{cL} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{pmatrix} u(t)$$

となる。

e^{At}の求め方(対角化で)

公式は

$$e^{At} = Te^{Bt}T^{-1}$$

なお、

$$T^{-1}AT = B$$

である。証明は

$$\begin{aligned} e^{At} &= I + At + \frac{A^2}{2!}t^2 + \frac{A^3}{3!}t^3 + \cdots \\ &= TT^{-1} + TBT^{-1}t + \frac{TB^2T^{-1}}{2!}t^2 + \frac{TB^3T^{-1}}{3!}t^3 + \cdots \\ &= T(I + Bt + \frac{B^2}{2!}t^2 + \frac{B^3}{3!}t^3 + \cdots)T^{-1} \\ &= Te^{Bt}T^{-1} \end{aligned}$$

ただしBは例えば$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$のような対角行列なので$e^{Bt}$は簡単に

$$e^{Bt} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}$$

となる。

e^{At}の求め方(ラプラス変換で)

公式は

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}]$$

証明は$u(t) = 0$とすると

$$X' = AX$$

となるのでラプラス変換して

$$sX(s) - X_0 = AX(s) \rightarrow (SI - A)X(s) = X_0$$

逆行列を左からかけて

$$X(s) = (SI - A)^{-1}X_0$$

よって$u(t) = 0$ならば

$$X(t) = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}]X_0$$

ここでXの一般解は

$$X(t) = e^{At}X_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}bu(\tau)d\tau \underset{u(\tau)=0}{\longrightarrow} X(t) = e^{At}X_0$$

なので比較して

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}]$$

となる。

状態方程式xの一般解(積分で)

公式は

$$X = e^{At}X_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

なのでe^{At}さえわかれば頑張るだけ。なお、$\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$を忘れたときは、

$$\int_0^t x(t-\tau)y(\tau)d\tau = \mathcal{L}^{-1}[XY]$$

の関係式を思い出して

$$\mathcal{L}^{-1}[(sI-A)^{-1}BU(s)] \underset{X=(sI-A)^{-1}、Y=BU(s)}{\longrightarrow} \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

とすれば導ける。ラプラス変換の式は次の項へ↓

状態方程式xの一般解(ラプラス変換で)

公式は

$$X(t) = \mathcal{L}^{-1}[(sI-A)^{-1}]X_0 + \mathcal{L}^{-1}[(sI-A)^{-1}BU(s)]$$

忘れたときは

$$\mathbf{X'(t)} = A\mathbf{X(t)} + Bu(t)$$

をラプラス変換して

$$sX(s) - X_0 = AX(s) + BU(s) \longrightarrow (sI-A)X(s) = X_0 + BU(s)$$

より$(sI-A)^{-1}$を左からかけて

$$X(s) = (sI-A)^{-1}X_0 + (sI-A)^{-1}BU(s)$$

逆ラプラス変換して

$$X(t) = \mathcal{L}^{-1}[(sI-A)^{-1}]X_0 + \mathcal{L}^{-1}[(sI-A)^{-1}BU(s)]$$

出力方程式の求め方

$$Y(t) = CX(t) + Du(t)$$

に代入するだけ。

フルランク

Aを$n \times m$行列する。Aのフルランクとは

$$rank(A) = min(n, m)$$

のことを言う。なお、**ランクは転置しても変わらない**

もし$n = m$なら

$$rank(A) = n \Leftrightarrow det(A) \neq 0$$

正方行列がフルランクか調べるなら大抵$det(A) \neq 0$を使った方が早い。問題はせいぜい4×4とかの行列だから。

線形独立

Aを$n \times m$行列する。ここで

$$rank(A) = k$$

だったとする。ここで**列ベクトル**が線形独立なのかを調べるには(列は縦)

$$k = m \Leftrightarrow \text{列ベクトルが線形独立}$$

を調べればいい。ランクは意味を持つ式の本数なので列数=ランクとなればすべての列ベクトルは意味を持つことになる。

逆に**行ベクトル**が線形独立なのかを調べるには(行は横)

$$k = n \Leftrightarrow \text{行ベクトルが線形独立}$$

を調べればいい。ランクは意味を持つ式の本数なので行数=ランクとなればすべての行ベクトルは意味を持つことになる。

可制御の判定(やり方その1)

定理

$$\text{行列}e^{At}B\text{の行ベクトルが線形独立ならば可制御}$$

よって $e^{At}B$のランクを求めて**行数と一致するか調べる**。問題で既にe^{AT}を求めたならこっちの方が楽かな？

可制御はかせい"ぎょう"で調べる。と覚える。

可制御の判定(やり方その2)

状態変数の数(=Aの列数)をnとする。

$$M_C = \begin{pmatrix} b & Ab & \dots & A^{n-1}b \end{pmatrix}$$

とすると

$$rankM_c = n$$

が成立すれば可制御。e^{AT}を求てないならこっちの方が楽かな？

可観測の判定(やり方その1)

定理

$$\text{行列}Ce^{At}\text{の列ベクトルが線形独立ならば可制御}$$

よって Ce^{At} のランクを求めて**列数と一致するか調べる**。問題で既にe^{AT}を求めたならこっちの方が楽かな？

可観測の判定(やり方その2)

状態変数の数(=Aの列数)をnとする。

$$M_O = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

とすると

$$rank M_c = n$$

が成立すれば可制御。e^{AT}を求てないならこっちの方が楽かな？

期末編

座標変換

$$\begin{aligned} \mathbf{X'(t)} &= A\mathbf{X(t)} + Bu(t) \\ Y(t) &= CX(t) + Du(t) \end{aligned}$$

に対し、$\mathbf{X(t)} = \mathbf{TZ(t)}$の線形変換を定義すると

$$\begin{aligned} \mathbf{TZ'(t)} &= A\mathbf{TZ(t)} + Bu(t) \\ Y(t) &= C\mathbf{TZ(t)} + Du(t) \end{aligned}$$

の左から$\mathbf{T^{-1}}$をかけて

$$\begin{aligned} \mathbf{Z'(t)} &= \mathbf{T^{-1}ATZ(t)} + \mathbf{T^{-1}}Bu(t) \\ Y(t) &= C\mathbf{TZ(t)} + Du(t) \end{aligned}$$

となる。$\bar{A} = \mathbf{T^{-1}AT}$、$\bar{B} = \mathbf{T^{-1}}B$、$\bar{C} = C\mathbf{T}$と置けば

$$\mathbf{Z}'(\mathbf{t}) = \bar{A}\mathbf{Z}(\mathbf{t}) + \bar{B}u(t)$$
$$Y(t) = \bar{C}Z(t) + Du(t)$$

となる。なお、$\bar{A} = \mathbf{T^{-1}AT}$は相似な行列の定義そのもので固有値(=固有多項式)や行列式等の行列関係の諸量は等しくなる。固有ベクトルは$\mathbf{T^{-1}}$を掛けた値となる。

可制御正準形

座標変換のうち特に

$$\mathbf{Z}'(\mathbf{t}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix} \mathbf{Z}(\mathbf{t}) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t)$$

$$Y(t) = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \end{pmatrix} Z(t) + Du(t)$$

と表せる時、この表現形式を可制御正準形という。固有方程式は$\mathbf{A}$、$\bar{\mathbf{A}}$について、座標変換後も相似な行列の性質より不変な事に注意すると

$$|sI - A| = |sI - \bar{A}| = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0$$

となり、伝達関数は

$$G(s) = \frac{\beta_n s^{n-1} + \beta_{n-1}s^{n-2} + \cdots + \beta_2 s + \beta_1}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

となる。分子の方が次数が小さいので注意・テストで出るようなシステム制御の問題は基本プロパー(分子の次数 < 分母の次数)になる(気がする)。