

集合論

目次

- 集合とは
- 集合の表記方法
- 空集合
- 集合の演算
- 普遍集合と補集合
- 集合系(本によっては集合族)
- ベキ集合
- 順序対と直積
- 対応
- 写像
- 包括写像と恒等写像
- 逆写像
- 単射、全射、全単射
- 数列、元の族、集合族
- (族の)和集合、共通部分
- 一般の直積

集合とは

集合とはものの集まりのことである。ここでいう"ものとは論理的考察の対象となるものなら何でもよく、例えば数、点、関数、文字などがあげられる。ただし、数学における集合はものの **範囲がはっきりとしていない** ければならない。

例えば、"大きい数の集まり"、"細長い三角形全体"、"美人全体"は集合ではない。

逆に"日本人全体"、"整数全体"などは集合である。

集合の表記方法

外延的記法

$$\{a, b, c, \dots\}$$

内包的記法

$$\{x|xの条件\}$$

空集合

空集合は集合であって要素ではないので注意。つまり任意の集合Aに対し、

$$\emptyset \subset A$$

だが、集合Aに \emptyset を意図的に要素として入れない限り、

$$\emptyset \in A$$

とはならないので注意。これを頭に入れとかなないと対応の定義域、値域の説明でつまずくので注意。

集合の演算

$$A \cup B = \{x|x \in A \text{または} x \in B\}$$

↑これを和集合という。とくにAとBが交わらない時AとBの直和という。

$$A \cap B = \{x|x \in A, x \in B\}$$

↑条件部分のコンマ「,」は"かつ"を表す。 $A \cap B = \emptyset$ の時、互いに素という。

$$A - B = \{x|x \in A, x \notin B\}$$

普遍集合と補集合

数学の理論において、その時考えている集合はすべて1つの定まった集合Xの部分集合であるとわかっているケースが多い。この集合Xを考察における普遍集合という。

集合Aに対し、 $X - A$ を集合Aの補集合 A^c という。

集合系(本によっては集合族)

元がすべて集合の集合を集合系という。元の集合と区別するためにしばしばドイツ大文字(特にベキ集合)が使われる。 $\mathfrak{P}(A)$

集合族とは別の概念であるが混同される場合も多い。

ベキ集合

集合Aに考えられるすべての部分集合の集合(つまり部分集合の集合系)をベキ集合という。すべての要素の含む/含まないの組み合わせになるのでAの要素数をnとするとベキ集合は 2^n 個の要素になる。

順序対と直積

二つのもの a, b から作られた対 (a, b) を順次対という。ただし、順次対は以下の性質を満たさなければならない。

$$(a, b) = (a', b') \text{ならば } a = a', b = b'$$

A と B の元が作る順序対全体の作る集合を A と B の直積と言いその集合を $A \times B$ とあらわす。

$R \times R$ の元 (x, y) はデカルト座標を設けた平面上の点としてあらわされることがよくある。これは $R \times R$ の幾何学的複写である。(幾何学的な映像を与える。)

対応

始めに断っておくが、"対応"とは"写像"とは別なので注意。

対応

A, B を2つの集合とする。 A の各元 a を1つずつ B の **部分集合** に対応させる規則を対応 f という。(もちろん空集合も B の部分集合なことに注意。つまり実質的に A の元が B の元に対応しない(空集合)が許されるのが"対応")

像

元 a に対して定まる部分集合 $b = f(a) \subset B$ を a の f による像という。

始集合、終集合

A を始集合といい、 B を終集合という。

二項関係

直積に対し満たすか満たさないかの規則を二項関係という。例えば

$$2x = 3y$$

が与えられたとき $(3, 2)$ は満たすが $(1, 1)$ は満たさない。

グラフ

直積 $f : A \times B$ の部分集合を f のグラフ $G(f)$ という。

$$G(f) = \{(a, b) | a \in A, b \in f(a)\}$$

定義より同じ a に対し (a,b) 、 (a,b') 、 (a,b'') などのように無数に存在が許される点にも注意。直積 $f : A \times B$ はすべての (a,b) の組み合わせなのでまあ、これは納得。ただし、"対応"は部分集合を写像先としているので、"線"がグラフなのではなく、閉曲線の面積そのものがグラフになるので注意。

定義域、値域

$(a, b) \in G$ となる $b \in B$ が存在するような A の元 a 全体の集合を G の **定義域** という。开区間や閉区間は集合の特別な場合に過ぎない。グラフの定義より $(a, b) \in G$ となる $b \in B$ が存在するには $f(a) = \emptyset$ となるのと等しいので

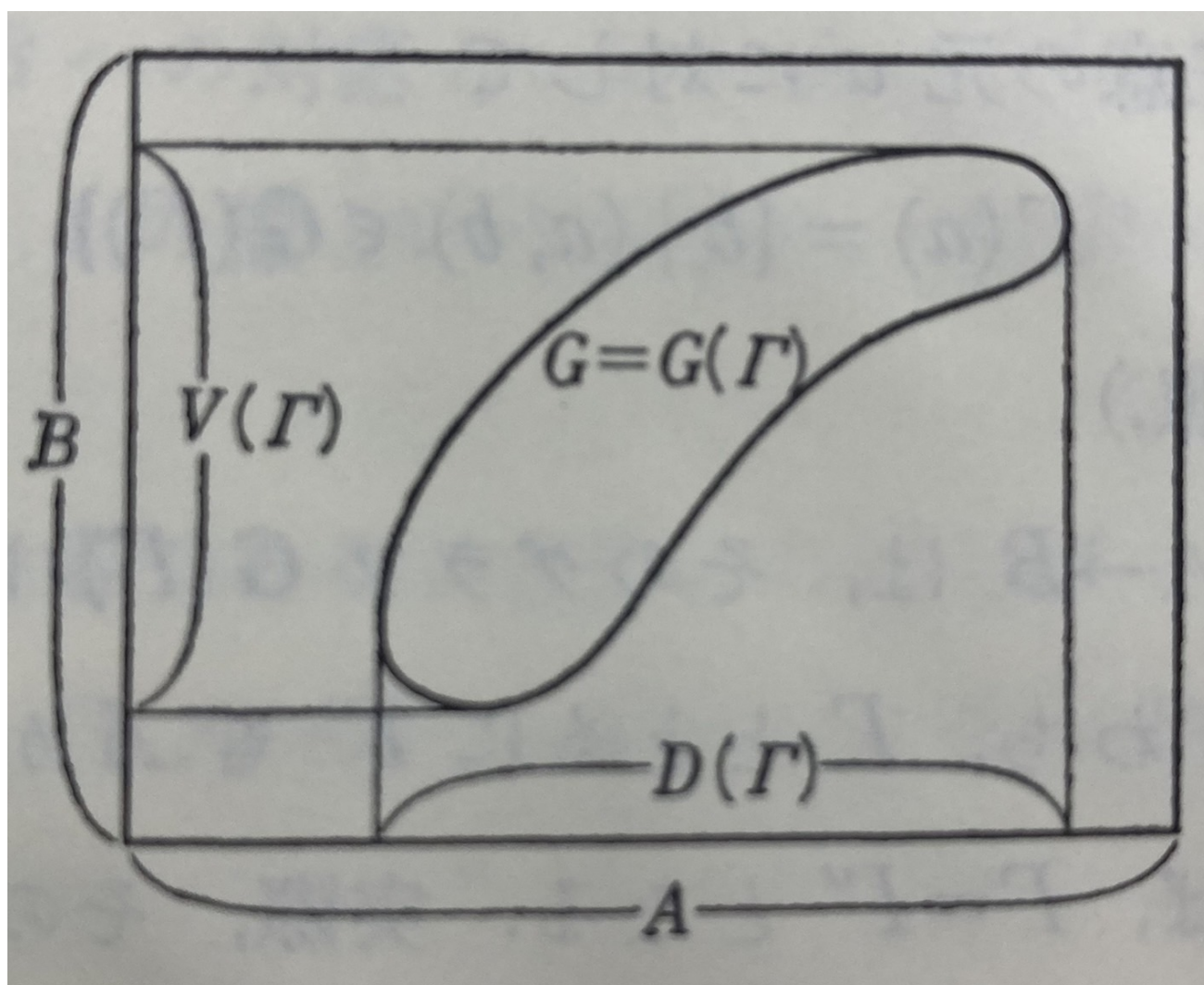
$$f(a) = \emptyset \text{ となる } a \text{ 全体の集合}$$

を定義域としても正しい。定義域を $D(G)$ とすると

$$D(G) = \{a | \exists b \text{ S.T. } ((a, b) \in G)\}$$

となる。同様に値域 $V(G)$ は

$$V(G) = \{b | \exists a \text{ S.T. } ((a, b) \in G)\}$$



画像は松坂より引用。

写像

写像

$A \rightarrow B$ の"対応"のうち、任意の a に対し、 $f(a)$ が B のただ一つの元で構成される部分集合になる場合 f を **写像**という。つまり、 $f(a) = \emptyset$ となる a がある場合は写像ではないし $f(a) = \{b_1, b_2\}$ となる a がある場合も写像ではない。常に1対1または多体1対応でなければならない。よって定義域は A そのものになる点も注意。

つまり微分積分学などの1価関数と等しい。

像

元 a に対して定まる"元 b "($b = f(a)$)を a の f による像という。 b は集合であったが、写像の定義より1つの元による集合になるため $\{\}$ は省くことになっている。

写像の拡大、縮小

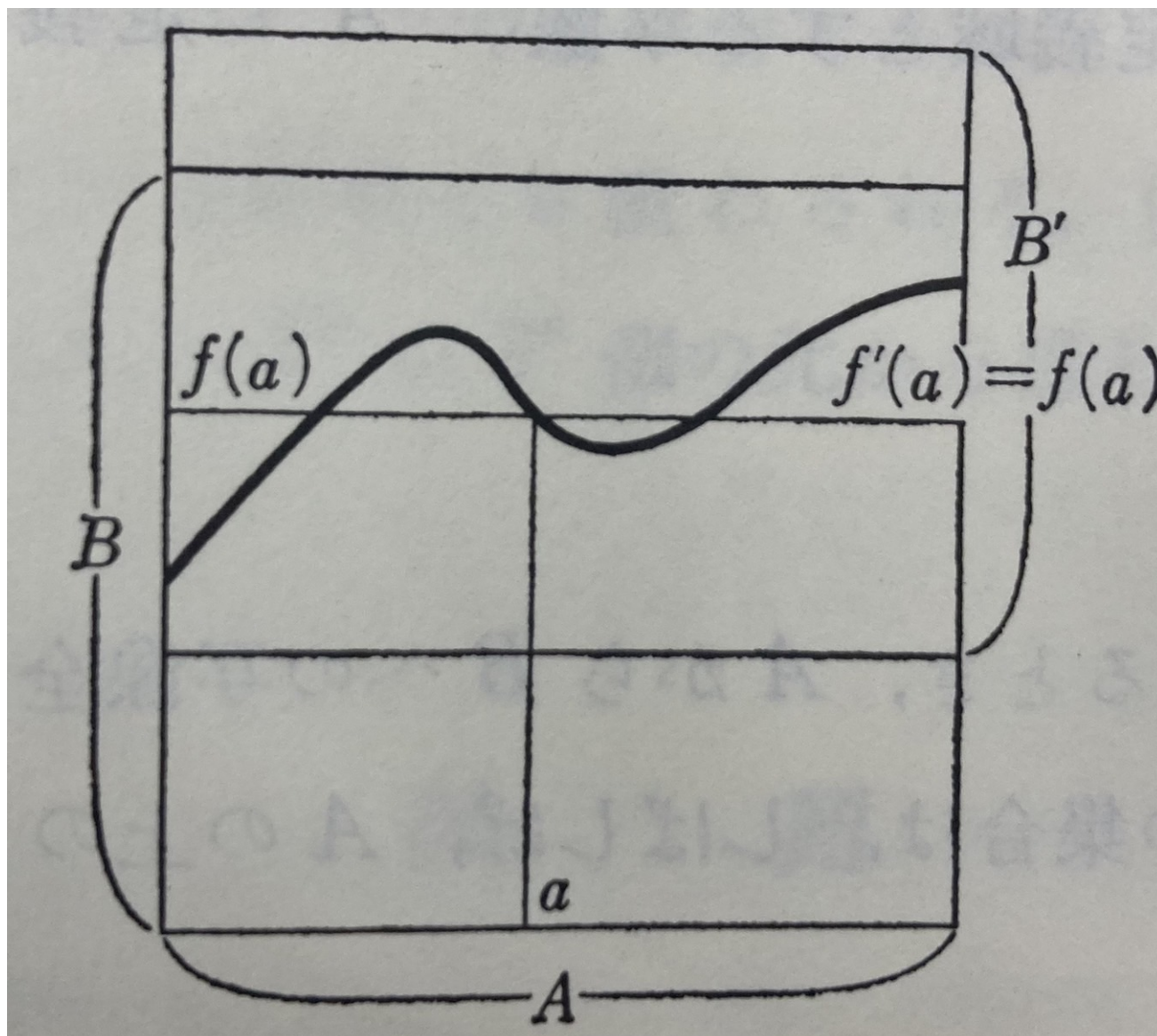
$f : A \rightarrow B$ 、 $f' : A' \rightarrow B$ とし、 $A \subset A'$ とする。 $a \in A$ に対し、

$$f(a) = f'(a)$$

ならば A に定義域を縮小した写像、または単に縮小した写像という。逆の場合は拡大となる。

写像の終集合の厳密性

本来写像(対応)は定義域(対応なら始集合)と終集合が定義されて初めて写像及び対応を名乗ることができる。逆に写像が等しいとは規則だけでなく始集合と終集合も等しくて初めて同じ写像ということができる。しかし終集合は図のように値域 $V(G)$ を含む集合ならなんでもいいため無数に存在する。これらの写像 f 及び f' は違う写像だが常に $f(a) = f'(a)$ のため本質的には同じとすることもできる、よって終集合は値域を含む集合であれば気にしないという立場をとる場合もある。



包括写像と恒等写像

$$i : A \rightarrow B \quad i(a) = a$$

の写像*i*を包括写像という。必然的に $A \subset B$ となる。特に $A=B$ の時

$$1_A : A \rightarrow A \quad 1_A(a) = a$$

と書いて写像 1_A を恒等写像という。

逆写像

$(f \circ g)(a) = f(g(a)) = 1_A(a)$ ならば写像*f*と*g*は全単射であり、さらに*g*(または*f*)は*f*(または*g*)の逆写像であるという。

単射、全射、全単射

単射

$a_1 \neq a_2$ ならば $f(a_1) \neq f(a_2)$ の時、 f は単射であるという。つまり

全射

B の任意の元 b に対し、 $b = f(a)$ なる a が存在するならば、 f は全射という。

全単射

単射かつ全射の場合、 f を全単射といい、一対一対応という。

数列、元の族、集合族

数列とは

(実数の)数列とは高校数学では数を並べたものとして扱ってきた。例えば

$$1 \quad 4 \quad 9 \quad 16 \dots$$

ここで自然数の集合 N を考える。写像 $\gamma : N \rightarrow R$ を考え、

$$\gamma(n) = n^2$$

とすればその写像した要素は数列そのものである。よって数列とは N から R の写像ととらえることができる。
像 $a(n)$ を通常 a_n と書き、**写像 a** を

$$\begin{aligned} & a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \\ & (a_n \mid n \in N), (a_n)_{n \in N} \end{aligned}$$
 などと書く。つまり $(a_n)_{n \in N}$ は **写像のこと** である。像 a_n を集めたもの、つまり値域は $\{a_n \mid n \in N\}$ などと書くがこれ自体を数列 $(a_n)_{n \in N}$ と見る書物もよくある。が正確には間違いである。例えば

$$(-1^n)_{n \in N}$$

の値域は2元のみなので

$$\{1, -1\}$$

となるので明確な違いがあるのは明らかだろう。

写像が等しいこと = 数列が等しい なので順番にも意味がある。 A, B, C と B, A, C は違う列である。

元の族

N を一般的なものに拡張し Λ としたものは $a(\lambda) = a_\lambda$ と元を表記し、写像 a を $(a_\lambda \mid \lambda \in \Lambda), (a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ などと表記する。 $(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ を **A の元の族** という。つまり元の族とは写像 a のことを指す。 Λ を添

付集合という。 λ が添数である。

族

族とは添字付けされた元の集合である。系と呼ばれることもある。元によっては点族、集合族（集合系）、関数族などの別名がつくこともある。

集合族

添付集合は $\gamma:\Lambda\rightarrow A$ への"写像"だったが、集合族は $\gamma:\Lambda\rightarrow A$ への"対応"としたもののことを言う。つまり像が(A の部分)集合であり、値域は集合系になることに注意。小文字は元、大文字は集合という意味合いが通常あるので

$$(A_\lambda|\lambda\in\Lambda), (A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$$

などのように集合族は定義される。

すべての像が集合 X の部分集合の場合、つまり $A_\lambda\subset X$ の場合、 $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を X の部分集合族という。

(族の)和集合、共通部分

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda := \{x|\exists\lambda\in\Lambda \text{ S.T. } x\in A_\lambda\}$$

これを(族の)和集合という。要は $A_1\cup A_2\cup\cdots$ である。


族の共通部分は $A_1\cap A_2\cap\cdots$ となる。

一般の直積

一般の直積 $\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$ は

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \{a|a:A\rightarrow\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \text{ } a:=(\exists\lambda\in\Lambda, a(\lambda):=a_\lambda\in A_\lambda)\}$$

と定義される。写像 a の集合な事に注意。以下に具体例を添付する。

画像がなかった時の代替テキスト