

# ルベグ積分入門

---

## 目次

---

- 普通の積分(リーマン積分)
- ルベグ積分の概説
- ルベグ外測度
- ルベグ外測度の性質
- 可測集合
- ルベグ可測集合の性質
- ルベグ測度
- $\sigma$ -集合体、可測空間
- $\sigma$ -加法族の生成
- ボレル集合、ボレル集合族
- ルベグ測度の単調性
- 測度空間
- 拡大実数  $\bar{R}$
- 可測関数
- 可測関数により定義される関数の可測性
- いたるところで等しい
- 特性関数と単関数
- 非負値単関数のルベグ積分
- 非負値可測関数のルベグ積分
- 可測関数のルベグ積分
- ファトゥの補題
- 項別積分

## 普通の積分(リーマン積分)

---

我々が普段使っている積分は **リーマン積分** と呼ばれている。詳細は[こちら](#)で見てほしいが、簡単にいうと、リーマン積分とはリーマン和の極限として定義される。

リーマン和  $\sum(f, \Delta, \Delta^*)$  は関数  $f: [a, b] \rightarrow R$  と区間  $[a, b]$  の分割  $\Delta = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  と分割  $\Delta$  の代表値  $\Delta^* = \{x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*\}$  を用いて

$$\sum(f, \Delta, \Delta^*) := \sum_{k=1}^n f(x_k^*)(x_k - x_{k-1})$$

と定義される。さらに $|\Delta| := \max(x_k - x_{k-1})$ とするとこの極限を用いてリーマン積分は **リーマン和の上限と下限が同じ値に収束するならば** 収束値Aを用いて

$$\int_a^b f(x)dx := A = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum(f, \Delta, \Delta^*)$$

と定義される。重要なのは **リーマン和の上限と下限が同じ値に収束するならば** という点である。つまりどのような代表値に依存せず収束することが条件である。この性質より例えば有理数なら1、無理数なら0といった関数(ディレクレ関数という)は代表の幅を限りなく0に近づけても代表値を有理数にするのか無理数にするのかで上限と下限が一致しないため積分不可能。

## ルベグ積分の概説

リーマン和ならぬルベグ和は関数  $f : [a, b] \rightarrow R$  と区間  $[a, b]$  の値域の分割  $\Delta = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  に対し集合  $A_K (K = 1, 2, \dots, m)$  を

$$A_K := \{x \in [a, b] | f(x) \in [y_{k-1}, y_k)\}$$

とし、集合の長さ  $\mu(A_K)$  を適切に定義できればルベグ和を

$$\sum_{K=1}^n y_k \cdot \mu(A_k)$$

とすればリーマン和の近似を与えるだろう。これがルベグ積分の気持ちである。

## ルベグ外測度

ルベグ積分はリーマン積分の拡張として定義したいのだから、

1. 閉区間  $[a, b]$  の長さ  $\mu([a, b]) = b - a$
2. 互いに素な集合の列  $A_n$  に対し、 $\mu(\bigcup_n A_n) = \sum_n \mu(A_n)$
3. 集合  $A$  と数  $x$  に対し  $A + x := \{a + x | a \in A\}$  に対し、 $\mu(A + x) = \mu(A)$

を満たしてほしいのは自然だろう。互いに素な集合の列としたが、例えば  $A_3$  以降は  $\emptyset$  とすれば  $\mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2)$  となる。

ここで任意の冪集合の要素  $A \in \mathfrak{P}(R^n)$  に対し、ルベグ外測度  $\mu^*(A)$  を以下のように定義する。ただし、まだこの段階では条件2は満たさない。

$$\mu^* : \mathfrak{P}(R^n) \rightarrow R, \quad \mu^*(A) := \inf \left( \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| \right)$$

ただし  $I_n$  はそれぞれ直方体  $I_n := \prod_{i=1}^n (a_i, b_i]$  であり、その体積  $|I_n|$  は  $|I_n| := \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$  でありさらに  $I_n$  からなる集合は  $A$  を被膜している。

## ルベグ外測度の性質

ルベグ外測度は以下の性質を満たす。

1.  $A$  が空集合  $\emptyset$  や 1 点集合、1 点集合の可算個の和集合なら  $\mu^*(A) = 0$ 。この時、 $A$  を **零集合** という。ただし非可算個の和には成り立たないので注意。
2.  $A \subset B$  ならば、 $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$
3. 可算劣加法性 ( $\sigma$ -劣加法性) を満たす。  $R$  の部分集合からなる列  $A_n$  に対し、 $\mu^*(\bigcup_n A_n) \leq \sum_n \mu^*(A_n)$
4. 区間  $[a, b]$ ,  $[a, b)$ ,  $(a, b]$ ,  $(a, b)$  の外測度はすべて  $b - a$

ここで性質3について、列の話つまり **可算個** についての話であって有限個の話や非可算個の話はしていないので注意。

5. 性質3において  $A_n = \emptyset$  ( $3 \leq N$ ) とすれば任意の  $A_1, A_2$  に対し  $\mu^*(A_1 \cup A_2) \leq \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2)$

ここで性質5について、等号成立条件は  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$  ではないので注意。要は  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$  でも  $\mu^*(A_1 \cup A_2) < \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2)$  となる場合が存在する。ただし、やはりそれでは性質がよろしくないで互いに素の時、性質3及び性質5で等号をなりたたせる事が目標となる。つまりルベグ外測度の項で述べた2つめの条件のことである。

## 可測集合

$A_1 \cap A_2 = \emptyset$  の時、 $\mu^*(A_1 \cup A_2) = \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2)$  を成り立たせるために、**可測集合** を考える。

集合  $E \subset R^n$  が **可測集合** であるとは、任意の  $F \subset R^n$  に対し

$$\mu^*(F \cap E) + \mu^*(F \cap E^c) = \mu^*(F)$$

を満たすことを言う。**可測集合全体からなる集合** を  $\mathfrak{M}$  と今後表す。

例えば、 $A_1 = F \cap E, A_2 = F \cap E^c$  とすれば  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$  かつ、 $\mu^*(A_1 \cup A_2) = \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2)$  になるし、

新たに可測集合  $A'$  を用いて  $A'_1 := A_1, A'_2 := A_2 \cap A', A'_3 := A_2 \cap (A')^c$  と置けば  $\mu^*(A'_1 \cup A'_2 \cup A'_3) = \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) + \mu^*(A'_3)$  となる。

## ルベグ可測集合の性質

ルベグ可測集合及び $\mathfrak{M}$ の基本性質として以下が成り立つ。

- $A \in \mathfrak{M}$ ならば $A^c \in \mathfrak{M}$
- 空集合 $\emptyset$ は $\emptyset \in \mathfrak{M}$
- ルベグ集合列を $\{E_j\}_{j=1}^\infty$ とすると、 $\bigcup_{j=1}^\infty E_j$ もルベグ可測集合である。(つまりルベグ可測集合の可算無限和集合もルベグ可測集合)

また、以下の可算加法性が成り立つ。

$A_1, A_2, \dots \in \mathfrak{M}$ は互いに素であるとする。この時、任意の $B \in \mathfrak{P}(R^n)$ に対し、

$$\mu^*(B \cap \bigcup_{i=1}^\infty A_i) = \sum_{i=1}^\infty \mu^*(B \cap A_i)$$

が成り立つ。特に $B = R^n$ とすれば

$$\mu^*(\bigcup_{i=1}^\infty A_i) = \sum_{i=1}^\infty \mu^*(A_i)$$

が成り立つ。また、空集合はルベグ可測集合なので $i=n$ 以降を空集合とすれば有限加法性も成り立つのは明らかだろう。

## ルベグ測度

ルベグ外測度の始域を $\mathfrak{M}$ にした写像 $\mu$ を **ルベグ測度** という。

$$\mu : \mathfrak{M} \rightarrow R, \quad \mu(A) = \mu^*(A)$$

## $\sigma$ -集合体、可測空間

集合 $X$ と $X$ の部分集合の族 $\mathfrak{M}$ が以下の性質を満たすとき、 $\mathfrak{M}$ を  **$\sigma$ -集合体**、 **$\sigma$ -代数**、 **$\sigma$ -加法族** などという。また $(X, \mathfrak{M})$ を **可測空間** と呼ぶ。

1.  $\emptyset \in \mathfrak{M}$
2.  $A \in \mathfrak{M}$ ならば $A^c \in \mathfrak{M}$
3.  $A_1, A_2, \dots \in \mathfrak{M}$ ならば、 $\bigcup_{j=1}^\infty A_j \in \mathfrak{M}$

また、条件2,3より $A_1, A_2, \dots \in \mathfrak{M}$ ならば、 $\bigcap_{j=1}^\infty A_j \in \mathfrak{M}$ も示される。

ここで条件3の $\infty$ を $n$ に変えたもの条件3'とすると、条件1、2、3'を満たす $\mathfrak{M}$ を有限加法族と呼ぶ。条件1と条件3より明らかに $\sigma$ -集合体は有限加法族である。

## $\sigma$ -加法族の生成

集合 $X$ と $X$ の部分集合の族を $F$ とする。 $F$ を含むような $\sigma$ -加法族全体の集合を $\mathfrak{F}$ とすると $F_0 = \bigcap_{f \in \mathfrak{F}} f$ とすればこれは最小の $\sigma$ -加法族となる。これを $\sigma(F)$ と書き、 $F$ によって生成される $\sigma$ -加法族という。

## ボレル集合、ボレル集合族

$(X, \mathfrak{O})$ を位相空間とする。 $\mathfrak{O}$ で生成される $\sigma$ -加法族をボレル集合族といい、 $B(X) = \sigma(\mathfrak{O})$ と書く。 $B(X)$ の元をボレル集合という。

例えば以下はすべてボレル集合 $B(\mathbb{R})$ である。

1.  $(a, b)$
2.  $[a, b]$
3.  $[a, b)$
4.  $\{a\}$
5.  $\mathbb{Q}$
6.  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

など。証明は[こちら](#)。

また、 $B(\mathbb{R}) \subset \mathfrak{M}$ であり、 $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$ は可測空間である。一応 $B(\mathbb{R})$ に含まれないが $\mathfrak{M}$ には含まれる病的な可測集合 $X$ もあるが、基本的に可測集合かどうかはボレル集合に含まれるかどうかを見ればいい。

## ルベーグ測度の単調性

可測集合列 $A_n$ に対し、次の定理が成り立つ。

1.  $A_n \subset A_{n+1}$ ならば  $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$
2.  $A_{n+1} \subset A_n$ かつ $\mu(A_1) = \infty$ ならば

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$$

## 測度空間

可測空間 $(X, \mathfrak{M})$ に写像 $\mu : \mathfrak{M} \rightarrow \mathbb{R}$ が以下を満たすとき、 $\mu$ を測度といい、 $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ を測度空間という。

1.  $\mu(\emptyset) = 0$
2. 互いに素な集合の列 $A_n \in \mathfrak{M}$ に対し、 $\mu(\bigcup_n A_n) = \sum_n \mu(A_n)$

よってルベーグ測度を入れた空間 $(\mathbb{R}, \mathfrak{M}, \mu)$ は測度空間である。

また、他にも

## 拡大実数 $\bar{R}$

$R = (-\infty, \infty)$ であるが拡大実数  $\bar{R}$ とは $\infty$ を認めた実数である。つまり  $\bar{R} = R \cup \{-\infty, \infty\}$ となる。

## 可測関数

$(R, \mathfrak{M})$ の可測空間において、 $X \in \mathfrak{M}$ 上の関数  $f : X \rightarrow \bar{R}$ が **可測関数** であるとは、任意の  $a \in R$ に対して

$$\{x \in X \mid f(x) > a\}$$

が可測集合であることを言う。

また、 $f : X \rightarrow \bar{R}$ を拡張して  $f' : R \rightarrow \bar{R}$ ,  $f'(x) = f(x) (x \in X)$ ,  $f'(x) = 0 (x \in X^c)$ とすればリーマン積分の場合を考えれば分かるように、積分の値に影響しない。よって **関数の定義域はRに限定しても一般性を失わない**。

ちなみに

$$\{x \in X \mid f(x) > a\}$$

の  $f(x) > a$ を  $f(x) \geq a$ ,  $f(x) < a$ ,  $f(x) \leq a$ などに変えても同値である。

## 可測関数により定義される関数の可測性

$f, g$ を可測関数とする。ここで関数の四則演算を  $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$ のように定義すると以下の性質が成り立つ。

- $kf$ のように定数倍しても可測関数。
- 関数  $f+g$ も可測関数
- 関数  $f \cdot g$ も可測関数
- 関数  $\frac{f}{g}$ も可測関数。ただし  $g(x) \neq 0$

また、 $f_+ := \max(f(x), 0)$ と置き、これを  $f$ の **正成分** という。要は  $f(x)$ が0以上なら  $f_+ = f$ でそうでない  $x$ については  $f_+ = 0$ である。同様に  $f_-$ を関数  $-f$ の正成分を **負成分** という。以下の定理が成り立つ。

- $f$ が可測関数なら、 $f$ の正成分及び  $f$ の負成分も可測関数。

$f$ の正成分及び  $f$ の負成分も可測関数なので  $f_+ f_- = |f|$ より

- $f$ が可測関数なら、 $|f|$ も可測関数。

また、 $f$ が連続関数なら可測関数。

## いたるところで等しい

2つの関数 $f, g$ がいたるところで等しいとは

$$\mu^*(\{x|f(X) \neq g(x)\}) = 0$$

が成り立つ時をいい、 $f$ が可測関数なら $g$ も可測関数になる。

## 特性関数と単関数

特性関数  $\chi_A(x)$ とは $A \subset X$ に対し、

$$\chi_A : X \rightarrow R \quad \chi_A(x) = 1(x \in A), 0(x \in A^c)$$

なる関数を言う。

単関数  $s(x)$ とは、関数 $s$ が互いに素な $A_1, \dots, A_N \subset X$ に対し、

$$s : X \rightarrow R \quad s(x) = \sum_{i=1}^N a_i \chi_{A_i}$$

と表されることをいう。 $A_i$ に特に制限はないため、 $s(x)$ は一意には定まらないので注意。

定義より単関数が可測関数になるには任意の $i$ に対し、

$$\{x \in X | f(x) = a_i\}$$

が可測集合になることを言う。

## 非負値単関数のルベグ積分

非負値単関数 $s(x) = \sum_{i=1}^N a_i \chi_{A_i}$ が可測関数の時、そのルベグ積分は

$$\int_A s(x) dx = \sum_{i=1}^N a_i \times \mu(A_i)$$

を可測単関数 $s$ の $A$ 上の **ルベグ積分** という。ちなみに、積分の結果は拡張実数で扱われるため、 $\infty$ を含む値も有効な結果として扱われます。ただし、拡張実数にはいくつかの演算規則があるので、注意が必要です。例えば、 $0 \times \infty = 0$ 、 $\infty + \infty = \infty$ 、 $\infty - \infty = \text{not defined}$ などが挙げられます。また、 $a_i \times \mu(A_i) > 0$ から、シグマの中に $-\infty$ が含まれることはないので、可測単関数 $s$ の積分結果は必ず存在することになります。

## 非負値可測関数のルベグ積分

非負値可測関数のルベグ積分は、 $f$ を $A$ 上の関数とし $A$ を任意の $A_i (i = 1, 2, \dots, n)$ に直和分割する。 $a_k := \inf_{x \in A_k} (f(x))$ とすると、

$$\int_A f(x) dx := \sup \left( \sum_{i=1}^n a_k \mu(A_k) \right)$$

と定義される。

非負値可測関数 $f$ は、ある非負単関数列 $\{f_n\}$ が存在し、以下の定理が成り立つ。

- 任意の $n$ に対して $f_n$ は可測関数
- $\{f_n\}$ は広義単調増加(ただしいところで等しい場合も広義単調増加と認める)
- $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f \quad a.e.$  (a.e.とはいたるところで等しい場合の記号)

が成り立つ。また、積分結果は単関数の表示形式によらない事が知られている。さらにファトゥの補題(後述する)と組み合わせれば

$$\int_A f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n(x)$$

が成り立つ。

## 可測関数のルベグ積分

可測関数 $f$ は可測な正成分と負成分によって $f = f_+ - f_-$ と分解出来る為、一般の可測関数の積分は以下のように定義される。

$$\int_A f(x) dx = \int_A f_+(x) dx - \int_A f_-(x) dx$$

よって積分結果は $\int_A f_+(x) dx = \infty$ または $\int_A f_-(x) dx = \infty$ となる場合に存在します。

## ファトゥの補題

非負可測関数列 $\{f_n\}$ に対し、

$$\int (\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n) dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n dx$$

が成り立つ。 $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$ は $\inf(a_\infty(x))$ のことである。

## 項別積分



非負可測関数列  $\{f_n\}$  とする。この時、

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} f_n dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n dx$$

が成り立つ。ただし、 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  は収束する(拡大実数なので  $\infty$  及び  $-\infty$  も収束である。)が  $\infty - \infty$  領域の測度は0でなければ左辺の積分値は存在しないため、右辺も存在しなくなる。

また、より一般に可測関数列  $\{f_n\}$  とする。ここで

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n| dx < \infty$$

ならば積分結果は存在し、

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} f_n dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n dx$$