

位相空間論

目次

- [前提知識](#)
- [距離の公理](#)
- [ユークリッド空間とユークリッド距離](#)
- [開球体、球面、内点、外点、境界、閉包の定義](#)
- [開集合、閉集合](#)
- [双対性](#)
- [開集合系](#)
- [閉集合系](#)
- [距離空間](#)
- [集積点、導集合](#)
- [集合との距離と諸定理](#)
- [近傍系](#)
- [連続写像](#)
- [ここからの流れ](#)

前提知識

ε - δ 論法は既習のものとする。

距離の公理

距離とは何だろうか。"ユークリッド距離"、"マンハッタン距離"、"ハミング距離"など。全部"距離"という名を関している。ここで距離の公理を説明する。集合 X 上の関数 d を

$$d : X \times X \rightarrow R$$

とする。ここで d が以下の条件を満たすとき d を距離関数という。

1. $d(x, y) \geq 0$ (非負性)
2. $d(x, y) = 0 \implies x = y$ (同一律)
3. $d(x, y) = d(y, x)$ (対称律)
4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (三角不等式)

なお、条件1と2を併せて正定値性と言う場合もある。

ユークリッド空間とユークリッド距離

今後、 $R^1 = R$ 、 $R^2 = R \times R$ といった感じで R が n 個の直積を R^n と表記する。

$$d^n : R^n \times R^n \rightarrow R, d^n(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

で定義した距離を導入する。 $d^n(x, y)$ をユークリッド距離と呼び、集合 R^n にユークリッド距離を導入した時、 (R^n, d^n) をユークリッド空間と呼ぶ。

開球体、球面、内点、外点、境界、閉包の定義

R^n の部分集合 $B^n(a, \varepsilon)$ を

$$B^n(a, \varepsilon) = \{x \in R^n \mid d^n(a, x) < \varepsilon\}$$

と定義した時、部分集合 $B^n(a, \varepsilon)$ を a を中心とした ε を半径とする **開球体** という。 ε -**近傍** と呼ばれることもある。

$$S^n(a, \varepsilon) = \{x \in R^n \mid d^n(a, x) = \varepsilon\}$$

なる集合を点 a を中心とした ε を半径とする **球面** といい、 $S^n(a; \varepsilon)$ と表す。

集合 M を $M \subset R^n$ とする。点 a について、

$$B^n(a, \varepsilon) \subset M$$

なる正の実数 ε が存在する時、点 a を M の **内点** という。 M^n の内点全体を M^i と表し **開核** という。よって直ちに

$$M^i \subset M$$

なのは言うまでもないだろう。なお、 M^i は必ずしも M の真部分集合にはならないことに注意。 M の補集合 M^c の内点を M の **外点** という。言い換えれば、点 a について

$$B^n(a, \varepsilon) \cap M = \emptyset$$

なる正の実数 ε が存在する時、点 a を M の外点という。さらに M^i 、 M^c を用いて集合 M^f を

$$M^f = R^n - (M^i \cup M^c)$$

としたとき、 M^f を M の **境界** という。つまり a が境界点であるとは、どんな正の実数 ε に対しても

$$B^n(a, \varepsilon) \cap M = \emptyset \text{ かつ } B^n(a, \varepsilon) \cap M^c = \emptyset$$

となる。

点 a に対し

$$\forall \varepsilon > 0, B^n(a, \varepsilon) \cap M \neq \emptyset$$

の時、点 a を M の **触点** といい、 M の触点全体の集合 M^a (または \bar{M})を M の **閉包** という。つまり定義から明らかに

$$M^a = M^i \cup M^f$$

となる。

例として1次元ユークリッド空間を考え、 $M = (0, 1) \cup \{2\}$ とする。内点の集合 M^i は明らかに $M^i = (0, 1)$ であり、境界点の集合は明らかに $M^f = \{0\} \cup \{1\} \cup \{2\}$ となる。よって閉包 $\bar{M} = [0, 1] \cup \{2\}$ 。

開集合、閉集合

集合 M を $M \subset R^n$ とする。 $M^i = M$ となるならば M を開集合という。

$M^a = M$ となるならば M を閉集合という。

双対性

開集合の補集合は閉集合である。また、閉集合の補集合は開集合である。

例えば、 $R^n = \text{開集合}$ なので両辺の双対を取って $\emptyset = \text{閉集合}$ が成り立つ。

例えば、

一応だが、集合は開集合または閉集合であると言っているわけではないので注意。

開集合系

開集合全体の集合系を開集合系 \mathfrak{O} と表記する。

開集合系では以下の定理が成り立つ。

1. $R^n \subset \mathfrak{O}, \emptyset \subset \mathfrak{O}$
2. 有限個 の元 $\mathfrak{O}_1, \mathfrak{O}_2, \dots, \mathfrak{O}_k$ について $\mathfrak{O}_1 \cap \mathfrak{O}_2 \cap \dots \cap \mathfrak{O}_k \in \mathfrak{O}$
3. \mathfrak{O} からなる集合族 $(\mathfrak{O}_\lambda | \lambda \in \Lambda)$ について $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{O}_\lambda \in \mathfrak{O}$

2について、有限個としているのは例えば、無限個にすると共通部分が一点のみの集合にすることも可能であり、一点集合はユークリッド空間では閉集合なのが例。

閉集合系

閉集合全体の集合系を閉集合系 \mathfrak{A} と表記する。

閉集合系では以下の定理が成り立つ。

1. $R^n \subset \mathfrak{A}, \emptyset \subset \mathfrak{A}$
2. 有限個 の元 $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_k$ について $\mathfrak{A}_1 \cup \mathfrak{A}_2 \cup \dots \cup \mathfrak{A}_k \in \mathfrak{A}$
3. \mathfrak{A} からなる集合族 $(\mathfrak{A}_\lambda | \lambda \in \Lambda)$ について $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{A}_\lambda \in \mathfrak{A}$

なお、閉集合系の定理は開集合系の定理に両辺補集合を取って、必要ならドモルガンの定理(補集合の定理)を適用したものとなる。

距離空間

集合 X と距離関数 d の対 (X, d) 、または単に X を距離空間という。例えば先ほどまで議論していた n 次元ユークリッド空間 (R^n, d^n) は距離空間である。ユークリッド空間で定義していた"開球体、球面、内点、外点、境界、閉包、開集合、閉集合"などの定義は一般の距離空間でも同様なので割愛する。

有名なものにはユークリッド空間のほかにヒルベルト空間などがある。

https://detail.chiebukuro.yahoo.co.jp/qa/question_detail/q12242848217

集積点、導集合

(X, d) を距離空間とし、 $A \subset X$ とする。点 x が集積点であるとは点 x が差集合 $A \setminus \{x\}$ の触点であるときのことをいう。 A の集積点の集まりを A の導集合と言い A^d とあらわす。また、集合 $A - A^d$ の点を孤立点という。閉包 \bar{M} と導集合 M^d には以下の関係が成り立つ。

$$\bar{M} = M \cup M^d$$

具体例として閉包の時の例と同じように1次元ユークリッド空間を考え、 $M = (0, 1) \cup \{2\}$ とする。導集合 M^d は明らかに $M^d = [0, 1]$ であるので閉包 \bar{M} は $\bar{M} = M \cup M^d = [0, 1] \cup \{2\}$ となる。これは内点と境界点から求めた閉包と一致する。

集合との距離と諸定理

(X, d) を距離空間とし、点 x と集合 $A \subset X$ との距離を

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) | a \in A\}$$

と定義すると以下の定理が成り立つ。

$$\begin{aligned} x \text{が} A \text{の触点} &\iff d(x, A) = 0 \\ x \text{が} A \text{の内点} &\iff d(x, A^c) > 0 \end{aligned}$$

まあ、inf自体に一種の極限操作のようなものが含まれるのでおなじみの $M = (0, 1) \cup \{2\}$ で少し考えれば明らかだと思う。

近傍系

(X, d) を距離空間とする。部分集合 $U \subset X$ が点 a の **近傍** であるとは U の内点に a を含む時のことをいう。点 a の近傍すべての集合を点 a の近傍系と言い $\mathfrak{R}(a)$ とあらわす。よって例えば点 a の ε -近傍 $N(a; \varepsilon)$ はどんな ε をとっても $N(a; \varepsilon) \in \mathfrak{R}(a)$ である。

$\mathfrak{R}(a)$ について以下の定理が成り立つ。

1. $a \in X$ ならば $X \in \mathfrak{R}(a)$ であり、 $U \in \mathfrak{R}(a)$ ならば $a \in U$
2. $U_1, U_2 \in \mathfrak{R}(a)$ なら $U_1 \cap U_2 \in \mathfrak{R}(a)$
3. $U \in \mathfrak{R}(a)$ かつ $U \subset V$ なら $V \in \mathfrak{R}(a)$

まあ全部当たり前。

連続写像

写像 f を

$$f : X_1 \rightarrow X_2$$

とし、 $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$ を距離空間とする。 f が $a \in X_1$ で連続とは


$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \quad S.T. \quad d_1(x, a) < \delta \implies d_2(f(x), f(a)) < \varepsilon$$

となることである。 X_1 全体で連続ならそれを連続写像という。要は普通のイプシロン-デルタ論法の絶対値だったところが距離関数に代わっているだけ。

さて、これではいつもと変わり映えないためもう少し位相空間論っぽく定義してみよう。 f が $a \in X_1$ で連続とは

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \quad S.T. \quad f(B_{X_1}(a, \delta)) \subset B_{X_2}(f(a), \varepsilon)$$

とする。ただし、 $B_{X_1}(a, \delta)$ は X_1 の開球体(または点 a の δ -近傍)である。ここで $X_1 \subset \mathbb{R}^n, X_2 \subset \mathbb{R}^m$ として具体例を図に示す。この図を使って先ほどの定義を日本語で説明すると、どんな中心 $f(a)$ 半径 ε の球を持ってきてもそこに写像がすっぽり収まるような中心 a 半径 δ の球が存在する。という意味になる。

 画像がなかった時の代替テキスト

ここからの流れ