

# 線形代数

---

## 目次

---

- あるベクトルに垂直なベクトル
- 直線のベクトル方程式
- 平面のベクトル方程式
- 転置行列の性質
- ブロック分割
- 逆行列、行列式
- ケーリー・ハミルトンの定理
- ランク
- 体
- 線形空間(ベクトル空間)
- 線形結合と線形独立
- 部分空間
- 線形写像、像(Imf)、核(Kerf)
- kerfと商空間
- 固有値と固有ベクトル、対角化の原理
- 計量線形空間、ノルム、なす角、直行基底
- 直行行列、直行変換
- シュミットの正規直交化法
- 対称行列
- 標準形式
- 複素ベクトル、エルミート行列、ユニタリ行列
- ジョルダン形式、ジョルダン標準形の原理
- ジョルダン形式への変形可能性

## あるベクトルに垂直なベクトル

---

ベクトル、 $b$ を用いると $a$ に垂直なベクトル $h$ は

$$h = b - \frac{a}{|a|} |b| \cos \Theta = b - \frac{a \cdot b}{|a|^2} a$$

となる。シュミット正規直交化法で使う方法の原理となっている。

## 直線のベクトル方程式

---

点Aを通る方向ベクトル $d$ の方程式はそのまま

$$p = OA + td$$

である。OAが0ベクトルなら原点を通る。ここで $t$ は媒介変数でありこの媒介変数を削除するには

$$x = A_x + td_x, y = A_y + td_y, z = A_z + td_z$$

より変形して

$$\frac{x - A_x}{d_x} = \frac{y - A_y}{d_y} = \frac{z - A_z}{d_z}$$

となる。

## 平面のベクトル方程式

---

点Aを通る方向ベクトル $d_1$ 、 $d_2$ の方程式はそのまま

$$p = OA + t_1d_1 + t_2d_2$$

ここで $t_1$ 、 $t_2$ は媒介変数である。法線ベクトル $h$ を用いて

$$h \cdot \overrightarrow{Ap} = 0$$

より変形して

$$\begin{aligned} h_x(p_x - A_x) + h_y(p_y - A_y) + h_z(p_z - A_z) &= 0 \\ h_xp_x + h_y p_y + h_z p_z &= d \end{aligned}$$

ただし、 $d = h_xA_x + h_yA_y + h_zA_z$ となる。

## 転置行列の性質

---

$${}^t(AB) = {}^tB {}^tA$$

これは $i \times j$   $j \times k$ の転置は中身を転置する方針の場合、 $k \times j$   $j \times i$ とするしかないので感覚的にも一致する。

ちなみに、逆行列でも

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

といった似た式が成立する。

## ブロック分割

0が固まっている場合は列ベクトルでブロック分割すると結構綺麗めになる。

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = (\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2 \quad \mathbf{x}_3)$$

のように列ベクトルでブロック分割を行う。例えばこの分割を用いると

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = (\lambda_1 \mathbf{x}_1 \quad \lambda_2 \mathbf{x}_2 \quad \lambda_3 \mathbf{x}_3)$$

のように簡単に表せたり

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = (\lambda_1 \mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 \quad \mathbf{x}_2 + \lambda_3 \mathbf{x}_3)$$

のように表せたり、

$$\mathbf{B} (\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2 \quad \mathbf{x}_3) = (\mathbf{B}\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{B}\mathbf{x}_2 \quad \mathbf{B}\mathbf{x}_3)$$

と表せられる。この1つ目の具体例と3つ目の具体例は対角化行列の導出で、2つ目はジョルダン標準形で使う大事な式である。

また、内積については後で後述するが内積が定義できるような計量線形空間や複素計量線形空間ならば **左側の行列を行ベクトルでブロック分割、右側の行列を列ベクトルでブロック分割することで内積記号を用いると見通しが良くなる**。線形代数改定9マセマP217の使用例が顕著。

## 逆行列、行列式

逆行列は余因子行列とか掃きだし法とかで求める。

行列式は余因子展開とかサラスとか。

## ケーリー・ハミルトンの定理

$\det(\mathbf{A} - \lambda I) = 0$ とし、さらに $\lambda$ を $\mathbf{A}$ に置換したものは常に成り立つという定理。特に二次の時は

$$\det(\mathbf{A} - \lambda I) = \mathbf{A}^2 - \text{tr}(\mathbf{A})\mathbf{A} + \det(\mathbf{A}) = 0$$

となる。ただし $\text{tr}(\mathbf{A})$ とは $\mathbf{a}_{ii}$ を足したものである。ここで $\det(\mathbf{A}) = 0$ ならば、

$$\mathbf{A}^2 = \text{tr}(\mathbf{A})\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}^n = (\text{tr}(\mathbf{A}))^{n-1}\mathbf{A}$$

## ランク

---

拡大係数行列のランクが係数行列のランクより大きいなら解なしとなる。ランクは束縛度を表しこの数分だけ(本当に意味で)式がある数に一致する。つまり未知数の数  $-$  ランク  $=$  変数の数となる。

## 体

---

$K$ が体であるとは、 $K$ に加法と乗法が定義され、さらにすべての公理を満たす集合を言う。

- 結合則の成立  $(a+b)+c=a+(b+c)$
- 0元の存在
- $a+b=b+a=0$ なる $b$ の存在。ただし $a$ と $b$ は $K$ の要素。ちなみにこの $b$ を $-a$ と表記し減法としている。
- $(ab)c=a(bc)$ の成立。
- 単位元の存在。  $1a=a1=a$
- $ab=ba=1$ なる $b$ の存在。ちなみにこの $b$ を $a^{-1}$ と表記する。 $a$ が0の時は除く
- $ab=ba$ の成立。交換側
- 分配法則の成立

例えば体になりうる集合は実数 $R$ 、虚数 $C$ 、有理数 $Q$ など、

## 線形空間(ベクトル空間)

---

$K$ を体とする。集合 $V$ に加法が定義され、 $K$ の元と集合 $V$ によるスカラー倍が定義されているとする。 $k_i \in K$ とし $a, b \in V$ とする。

- $(a+b)+c=a+(b+c)$ の成立
- $a+b=b+a$ の成立
- $a+0=0+a=a$  なる元 $0$ の存在
- $a+x=x+a=0$ なる元 $x$ の存在
- $1a=a$ の成立
- $k_1(a+b) = k_1a + k_1b$ の成立
- $(k_1 + k_2)a = k_1a + k_2a$ の成立
- $(k_1k_2)a = k_1(k_2a)$

を満たすとき、 $V$ を $K$ 上の線形空間やベクトル空間と言ったり、普通は $K$ は実数全体のことが多いので、 $R$ 上とついたり単に 線形空間やベクトル空間 という。

## 線形結合と線形独立

---

$a_i \in V$ 、 $c_i \in K$ とする。 $V$ は線形空間(ベクトル空間)、 $K$ は体である。

$$\sum_{k=1}^n c_k a_k$$

を $a_i$ の線形結合と呼ぶ。ベクトルの集合 $a_i$ が線形結合とは

$$\sum_{k=1}^n c_k a_k = 0$$

を満たす $c_i$ が $c_i = 0$ しか存在しない場合、ベクトルの集合 $a_i$ が **線形独立** という。あるベクトル空間の任意の元が **線形独立** ベクトルの集合  $\{v_k\}_{k=1}^{i=n}$  で表せるとき、ベクトルの集合 $\{v_k\}_{k=1}^{i=n}$ を **基底**と呼び、次元は $n$ となる。

## ちょっとだけ例題

$$a_1 = {}^t[1, 2, -1], a_2 = {}^t[2, 3, 1], a_3 = {}^t[1, 3, 4]$$

は線形独立か？

$$[a_1, a_2, a_3] {}^t[c_1, c_2, c_3] = {}^t[0, 0, 0]$$

のランクを調べると3より自明解0、0、0のみ。よって線形独立。

## 部分空間

集合 $V$ を $K$ 上のベクトル空間とする。集合 $W$ について $W \in V$ とする。 $x, y \in W$ とする。

$$x + y \in W$$

$$kx \in W$$

または同じ意味だが

$$k_1 x + k_2 y \in W$$

の時、 $W$ を $V$ の部分空間という。なお、本当は(書籍 線形代数の世界より)上二つの条件のみだと空集合も部分空間となってしまうため、

$$0 \in W$$

も満たすべきらしい。

ちなみに部分空間になるには例えば二次元平面なら0を通る直線しかない。3次元なら0を通る平面か直線。 $n$ 次元でも同じ。集合 $W$ が $V$ ( $n$ 次元ベクトル空間)の部分空間になりたい場合、0を必ず含めないと部分空間になれないはず。多分。

## 部分空間の例

線形空間 $V$ の $a_1, \dots, a_k \in V$ に対し、集合 $W$ を

$$W = \{x | x = c_1 a_1 + \dots + c_k a_k, c_i \in R\}$$

なる集合 $W$ は $V$ の部分空間である。ここで、 $W$ は $a_1, \dots, a_k$ で"張られる空間"とよび、 $a_1, \dots, a_k$ を $W$ の生成元という。生成元は線形独立でなくてもいい点に注意。

## 線形写像、像(Imf)、核(Kerf)

$V = R^n$ と $V' = R^m$ とする。つまり線形空間である。 $x, y \in V$ とすると

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

$$f(\lambda x) = \lambda f(x)$$

または

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$$

を満たす時、 $f$ を $V$ から $V'$  ( $f: V \rightarrow V'$ )への **線形写像** という。ちなみに $\lambda = \mu = 1$ とすれば1式に帰着し $\mu = 0$ とすれば2式に帰着するので証明する際はどちらを証明しても構わない。

また特に、 $f: R^n \rightarrow R^n$ の場合、**線形変換** という。

先ほどの定義より、線形写像は

$$f(0) = 0'$$

$$f(c_1 x_1 + \dots + c_n x_n) = c_1 f(x_1) + \dots + c_n f(x_n)$$

となることもわかる。また、 $Imf$ は

$$Imf = f(V) = \{f(x) | x \in V\}$$

と定義される。つまり **線形空間 $V$ の任意の元 $x$ の線形写像の集合** である。なお、 $Imf$ は $V'$ の部分空間となる。証明は部分空間の定義より $\lambda f(x_1) + \mu f(x_2) \in V'$ を示せばよくそれは $\lambda x_1 + \mu x_2 \in V$ より示せる。

核(Kerf)は

$$Kerf = f^{-1}(0') = \{x \in V | f(x) = 0'\}$$

となる。 $kerf$ は $f(\lambda x_1 + \mu x_2) = 0'$ より $\lambda x_1 + \mu x_2 \in Kerf$ より部分空間である。

線形写像の一例として、 $V$ を $R^n$ 、 $V'$ を $R^m$ とすると

$$x_m = Ax_n$$

で変換できる。 $A$ は $m \times n$ 行列である。この行列を**表現行列** という。

## kerfと商空間

線形写像  $V \rightarrow V'$  が全単射 (1対1対応) の時、同型写像という。条件は

$$\dim V = \dim V' \Leftrightarrow V \text{ と } V' \text{ が同型}$$

なお、 $V = R^n$ 、 $V' = R^n$  でも次元が等しいとは限らないので注意。また、

$$\dim V - \dim(\operatorname{Ker} f) = \dim(\operatorname{Im} f)$$

$$\dim(\operatorname{Im} f) = \operatorname{rank} A$$

となる。線形写像  $f$  が全単射となる (逆写像が存在する) 条件、全射になる条件、単射になる条件は

$$\operatorname{rank} A = \dim V \Leftrightarrow \text{単射}$$

$$\operatorname{rank} A = \dim V' \Leftrightarrow \text{全射}$$

$$\operatorname{rank} A = \dim V = \dim V'$$

となる。

## 固有値と固有ベクトル、対角化の原理

$n$  次正方行列  $\mathbf{A}$  に対し、固有値  $\lambda$  と固有ベクトル  $\mathbf{x}$  を

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

を満たすものと定義する。固有値の計算方法は同じみの方法

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0$$

を計算し  $\lambda_i (i = 1, 2, \dots)$  を求め、各  $\lambda_i$  に対し、

$$(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{E})\mathbf{x} = 0$$

を満たす  $\mathbf{x}$  を求めることで固有ベクトルとなる。なお、

$$\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{E} = \mathbf{T}_i$$

とあらわすこともよくあるので注意。固有化は  $\lambda_i$  に **重解がない場合は対角化可能** であり、仮に  $j$  次の重解があった場合その固有値を  $\lambda_i$  とすると、

$$\mathbf{T}_i\mathbf{x}_i = \mathbf{0}$$

を解くことで固有ベクトルが求まるわけだがここで、自由度  $j$  ならば固有ベクトルが  $j$  個求まるので対角化可能。なお、自由度は  $\mathbf{A}$  を  $n$  次正方行列とすると、

$$n - \operatorname{rank}(\mathbf{T}_i)$$

と求まる。

また、定理として異なる固有値 $\lambda_i$ 、 $\lambda_j$ に対応する固有ベクトル $\mathbf{x}_i$ 、 $\mathbf{x}_j$ は **線形独立** となる。証明は難しくないが書くのがめんどいのでマセマP177を参照。

今の状況を整理すると(固有値はすべて異なるとする。なお、実際は **保証したいのはPの列ベクトルの線形独立性** なので固有値は同じでもいい。)

$$\mathbf{A}\mathbf{X}_1 = \lambda_1\mathbf{X}_1, \mathbf{A}\mathbf{X}_2 = \lambda_2\mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{A}\mathbf{X}_n = \lambda_n\mathbf{X}_n,$$

となるのでブロック分割の考え方をういて(忘れていたらブロック分割に戻ろう)

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \dots & \mathbf{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}\mathbf{x}_1 & \mathbf{A}\mathbf{x}_2 & \dots & \mathbf{A}\mathbf{x}_n \end{pmatrix}$$

とあらわせる。さらに右辺を変形して(これもブロック分割の項に載せてます)

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \dots & \mathbf{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \dots & \mathbf{x}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

と変換できる。いま $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \dots & \mathbf{x}_n \end{pmatrix}$ はフルランクである。つまり正則であり逆行列が存在する。ので左側からかけて

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

となる。これが対角化の理論である。

## 計量線形空間、ノルム、なす角、直行基底

$k$ を体とし、 $k$ 上の線形空間 $V$ に対し任意の元 $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ に対して、内積 $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \in R$ が定まりかつ、

- $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$
- $(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}$ 、 $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}_1 + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}_2$
- $(k\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = k(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ 、 $\mathbf{a} \cdot (k\mathbf{b}) = k(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$
- $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \geq 0$

を満たす時、線形空間 $V$ を **計量線形空間**または**内積空間** という。例えば $V$ を $R^n$ とし、 $R^n$ の任意の2つの元



$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

に対して、内積  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  を

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

とすると  $R^n$  は計量線形空間となる。なお、内積は行列の積を用いて

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = {}^t \mathbf{a} \mathbf{b}$$

とあらわせる事も知っておこう。

**ノルム** とは計量線形空間  $V$  の  $0$  でない2つの元  $\mathbf{a}$  に対して、

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$$

で定義される。

**なす角** とは計量線形空間  $V$  の  $0$  でない2つの元  $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$  に対して、

$$\cos \Theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{||\mathbf{a}|| ||\mathbf{b}||}$$

で定義される。

$n$ 次元の計量線形空間  $V$  を考えると、勿論  $n$ 次元と言っているわけだから基底は  $n$ 個あり、基底  $\mathbf{u}_i$  は

- $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$  は線形独立
- $V$  の任意の元は  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$  の線形結合で表せる。

$$\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = \begin{cases} 1 (i = j \text{ の時}) \\ 0 (i \neq j \text{ の時}) \end{cases}$$

を満たすわけだが、さらに

を満たすとき、その基底を **正規直交基底** と呼ぶ。ぱっと思いつくのは  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$  だろうが別に正規直交基底の取り方は無限にいっぱいあるので注意。

## 直行行列、直行変換

$R^n$  の正規直交基底  $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$  を列ベクトル成分にもつ行列

$$U = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n]$$

を直行行列という。また、直行行列は

$$\begin{aligned} {}^t\mathbf{U}\mathbf{U} &= \mathbf{U}^t\mathbf{U} = \mathbf{E} \\ {}^t\mathbf{U} &= \mathbf{U}^{-1} \end{aligned}$$

となる。直行行列 $\mathbf{U}$ を表現行列とする $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ の線形変換を特に、**直行変換**という。直行変換の場合

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} &= f(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{y}) \\ |\mathbf{x}| &= |f(\mathbf{x})| \\ \mathbf{x}, \mathbf{y} \text{のなす角} &= f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y}) \text{のなす角} \end{aligned}$$

が成立する。

## シュミットの正規直交化法

計量線形空間 $\mathbf{R}^n$ の正規直交でない基底 $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$ は正規直交基底 $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m, \dots, \mathbf{u}_n\}$ に変換可能。具体的には $m=1$ の時は単純に

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{|\mathbf{a}_1|} \mathbf{a}_1$$

となり、それ以外の場合は

$$\mathbf{b}_m = \mathbf{a}_m - \sum_{k=1}^{m-1} (\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{a}_m) \mathbf{u}_k \rightarrow \mathbf{u}_k = \frac{1}{|\mathbf{a}_k|} \mathbf{a}_k$$

となる。 $m=2$ の場合を考えると何をやっているのかイメージはすぐつかめるはず。

## 対称行列

${}^t\mathbf{A} = \mathbf{A}$ なる行列 $\mathbf{A}$ は対称行列と呼ばれ、この行列は対角化可能である。また、固有ベクトル $\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j$ はそれぞれ直交する。つまり、行列 $\mathbf{A}$ は(正規)直交行列 $\mathbf{U} = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n]$ を用いて、 $\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U} = {}^t\mathbf{U}\mathbf{A}\mathbf{U}$ で対角化可能。

## 標準形式

対称行列の使い道を紹介する。2次の同次多項式を考える。2次の同次多項式とは全ての項が2次式の多項式のことである。つまり

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$$

である。ただし  $a_{ij} = a_{ji}$  である。

例えば  $n=2$  ならば

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

となるので真ん中は対称行列である。対称行列は(正規)直交行列  $\mathbf{U} = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n]$  を用いて、 $\mathbf{U}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{U}$  で対角化可能なので

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbf{U} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}$$

とおくと、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} &= {}^t \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x'_1 & x'_2 \end{pmatrix} {}^t \mathbf{U} \\ &= \begin{pmatrix} x'_1 & x'_2 \end{pmatrix} \mathbf{U}^{-1} \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x'_1 & x'_2 \end{pmatrix} \mathbf{U}^{-1} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \mathbf{U} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x'_1 & x'_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} \\ &= \lambda_1 x'^2_1 + \lambda_2 x'^2_2 \end{aligned}$$

となり標準系に直せる。さらにこれは直交行列  $\mathbf{U}$  による線形変換  $f: R^2 \rightarrow R^2$  なのでなす角や大きさは保存される。よってこの式によって表せられる図形は変数変換した後も同じ形である。

## 複素ベクトル、エルミート行列、ユニタリ行列

$V$  を  $\mathbb{C}$  上の線形空間とする。 $V$  を  $R^n$  とする。つまりベクトルの各要素は今、複素数である。ここで内積を以下のように定義する。

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = {}^t \mathbf{x} \bar{\mathbf{y}}$$

なお、**右辺は行列として  $\mathbf{x}$  および  $\mathbf{y}$  を見ている**。これは内積の公理を満たさない(交換側)ため計量線形空間ではないが複素内積の公理を満たすため複素計量線形空間などと呼ばれる。[公理が見たい方はこちら](#)。交換側は成り立たないが

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \overline{\mathbf{y} \cdot \mathbf{x}}$$

といった交換側ばいものは成り立つのも注意。内積結果は  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \in \mathbb{C}$  となるので注意。

また、ノルムは

$$|\sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}|$$

と定義され結果は必ず $|\sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}| \in R$ となり、実数となるので注意。

$n$ 次複素行列 $\mathbf{A}_H$ が

$${}^t\overline{\mathbf{A}_H} = \mathbf{A}_H$$

を満たすとき、これを **エルミート行列** という。条件より **対角成分(一番長い斜めのところ)は実数** となりほかの場所は共役として転置すると等しくなる。エルミート行列は **対角化可能であり固有値は実数**となる。

$n$ 次複素行列 $\mathbf{U}_U$ が

$${}^t\overline{\mathbf{U}_U}\mathbf{U}_U = \mathbf{U}_U{}^t\overline{\mathbf{U}_U} = \mathbf{E}$$

の時、これを **ユニタリ行列** と呼ぶ。難しく見えるが、要は $\mathbf{U}_U$ の列ベクトルの内積が自分自身となら1、それ以外なら0という一身分であり直交行列の複素数版である。線形代数改定9マセマP217にわかりやすい図が乗っている。

対称行列を直交行列で対角化可能だったように、エルミート行列もユニタリ行列で以下のように対角化可能である。

$$\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}_H\mathbf{U}_U$$

## ジョルダン形式、ジョルダン標準形の原理

$k$ 次のジョルダン細胞 $\mathbf{J}(\lambda, k)$ は

$$\mathbf{J}(\lambda, k) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \lambda \end{pmatrix}$$

となる。 $k = 1$ ならば $[\lambda]$ になることに注意。つまり、重解無しの場合にあたる。

**ジョルダン形式**とはジョルダン細胞で構成される行列をいう。ジョルダン細胞は $k=1$ の場合も認めるので、なお、**ジョルダン標準形**とは対角化された行列も内包する広い概念である。例としては

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}(\lambda_1, 1) & & & & \\ & & & & \mathbf{0} \\ & & \mathbf{J}(\lambda_2, 3) & & \\ & & & & \\ \mathbf{0} & & & & \mathbf{J}(\lambda_3, 1) \end{pmatrix}$$

などである。

### ジョルダン標準形の解法

- とりあえず固有値を求める
- $\lambda_i$ のn重解が見つかったら、 $\mathbf{T}_i \mathbf{x}_i = \mathbf{0}$ の $\mathbf{T}_i$ のランクを調べ、自由度を調べる。
- 自由度mがn未満ならm-n個の線形独立な固有ベクトルがたりないのでジョルダン標準形へ
- 足りない分だけ $\mathbf{T}_i \mathbf{x}'_i = \mathbf{X}_i$ 、 $\mathbf{T}_i \mathbf{x}''_i = \mathbf{X}'_i$ 等を計算していった、固有ベクトルを作る。なお、この操作で固有ベクトルを作る(正確には **一般固有ベクトル** と呼ばれる。)ことで各固有ベクトルは線形独立となる。つまりPに逆行列の存在が保証される。(証明P236)
- 足りない分だけ作った列ベクトルに対応する固有値の上に1をつける。

ジョルダン標準形の原理はほぼ対角化と同じである。3次正方行列が3重解で自由度が1だった場合を例に考えると今、解法にのっとった操作を経たことにより

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \mathbf{X}_1 &= \lambda_1 \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{A} \mathbf{X}'_1 &= \mathbf{x}_1 + \lambda_1 \mathbf{X}'_1 \\ \mathbf{A} \mathbf{X}''_1 &= \mathbf{x}'_1 + \lambda_1 \mathbf{X}''_1\end{aligned}$$

の関係式が成り立っているので(成り立つことのしっかりした解説はP247)

$$\begin{aligned}\mathbf{A} [\mathbf{X}_1 \quad \mathbf{X}'_1 \quad \mathbf{X}''_1] &= [\lambda_1 \mathbf{X}_1 \quad \mathbf{x}_1 + \lambda_1 \mathbf{X}'_1 \quad \mathbf{x}'_1 + \lambda_1 \mathbf{X}''_1] \\ &= [\mathbf{X}_1 \quad \mathbf{X}'_1 \quad \mathbf{X}''_1] \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

より $\mathbf{P} = [\mathbf{X}_1 \quad \mathbf{X}'_1 \quad \mathbf{X}''_1]$ の逆行列を左側からかければ

$$\mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

結局のところ、対角化もジョルダン標準形も固有ベクトルと固有値の関係性をブロック分割の項の例で書いたような要領で行列で書き換えて、線形独立性を保証して逆行列をかけているだけである。

## ジョルダン形式への変形可能性

結論としてはすべてできる。定理として以下が成り立つ。(らしい。証明は見えない。)

異なる固有値を持つ一般固有ベクトルは線形独立  $\Leftrightarrow$   
 任意の正方行列はジョルダン形式に変形可能  $\Leftrightarrow$   
 任意の正方行列はジョルダン形式と相似な行列

詳しくは書籍へ。

