

# システム制御II

---

## 目次

---

- 中間編
- 微分方程式から状態方程式の求め方
- $e^{At}$ の求め方(対角化で)
- $e^{At}$ の求め方(ラプラス変換で)
- 状態方程式 $\mathbf{x}$ の一般解(積分で)
- 状態方程式 $\mathbf{x}$ の一般解(ラプラス変換で)
- 出力方程式の求め方
- フルランク
- 線形独立
- 可制御の判定(やり方その1)
- 可制御の判定(やり方その2)
- 可観測の判定(やり方その1)
- 可観測の判定(やり方その2)
- 期末編
- 座標変換

## 中間編

---

### 微分方程式から状態方程式の求め方

---

一番高い階数の微分以外に状態量を割り当てただけ。形は

$$\begin{aligned}\mathbf{X}'(t) &= A\mathbf{X}(t) + Bu(t) \\ Y(t) &= C\mathbf{X}(t) + Du(t)\end{aligned}$$

なお、 $Du(t)$ は直立項と呼ばれる。出力に入力が定数倍されてそのまま出る部分。

例えばRLC直列回路の場合

$$e(t) = Ri(t) + Li(t)' + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt$$

となるが、変形して

$$\frac{1}{L}e(t) = \frac{R}{L}i(t) + i(t)' + \frac{1}{cL} \int_0^t i(t)dt$$

入力を $e(t)$ 、出力を $y(t) = \int_0^t i(t)dt$ だとおもうと

$$\frac{1}{L}e(t) = y'' + \frac{R}{L}y' + \frac{1}{cL}y$$

となる。ここで一番高い階数の微分以外に状態量を割り当ててる。つまり

$$x_1 = y, x_2 = y', X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

とおくと、

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{cL} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{pmatrix} u(t)$$

となる。

## $e^{At}$ の求め方(対角化で)

---

公式は

$$e^{At} = Te^{Bt}T^{-1}$$

なお、

$$T^{-1}AT = B$$

である。証明は

$$\begin{aligned} e^{At} &= I + At + \frac{A^2}{2!}t^2 + \frac{A^3}{3!}t^3 + \dots \\ &= TT^{-1} + TBT^{-1}t + \frac{TB^2T^{-1}}{2!}t^2 + \frac{TB^3T^{-1}}{3!}t^3 + \dots \\ &= T(I + Bt + \frac{B^2}{2!}t^2 + \frac{B^3}{3!}t^3 + \dots)T^{-1} \\ &= Te^{Bt}T^{-1} \end{aligned}$$

ただしBは例えば $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ のような対角行列なので $e^{Bt}$ は簡単に

$$e^{Bt} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}$$

となる。

## $e^{At}$ の求め方(ラプラス変換で)

---

公式は

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}]$$

証明は $u(t) = 0$ とすると

$$X' = AX$$

となるのでラプラス変換して

$$sX(s) - X_0 = AX(s) \rightarrow (sI - A)X(s) = X_0$$

逆行列を左からかけて

$$X(s) = (sI - A)^{-1}X_0$$

よって $u(t) = 0$ ならば

$$X(t) = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}]X_0$$

ここで $X$ の一般解は

$$X(t) = e^{At}X_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}bu(\tau)d\tau \xrightarrow{u(\tau)=0} X(t) = e^{At}X_0$$

なので比較して

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}]$$

となる。

## 状態方程式 $x$ の一般解(積分で)

---

公式は

$$X = e^{At}X_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

なので $e^{At}$ さえわかれば頑張るだけ。なお、 $\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$ を忘れたときは、

$$\int_0^t x(t-\tau)y(\tau)d\tau = \mathcal{L}^{-1}[XY]$$

の関係式を思い出して

$$\mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}BU(s)] \xrightarrow{X=(sI-A)^{-1}, Y=BU(s)} \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau$$

とすれば導ける。ラプラス変換の式は次の項へ↓

## 状態方程式 $\mathbf{x}$ の一般解(ラプラス変換で)

---

公式は

$$X(t) = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}]X_0 + \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}BU(s)]$$

忘れたときは

$$\mathbf{X}'(t) = A\mathbf{X}(t) + Bu(t)$$

をラプラス変換して

$$sX(s) - X_0 = AX(s) + BU(s) \longrightarrow (sI - A)X(s) = X_0 + BU(s)$$

より $(sI - A)^{-1}$ を左からかけて

$$X(s) = (sI - A)^{-1}X_0 + (sI - A)^{-1}BU(s)$$

逆ラプラス変換して

$$X(t) = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}]X_0 + \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}BU(s)]$$

## 出力方程式の求め方

---

$$Y(t) = CX(t) + Du(t)$$

に代入するだけ。

## フルランク

---

$A$ を $n \times m$ 行列する。 $A$ のフルランクとは

$$\text{rank}(A) = \min(n, m)$$

のことを言う。なお、ランクは転置しても変わらない

もし $n = m$ なら

$$\text{rank}(A) = n \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$$

正方行列がフルランクか調べるなら大抵 $\det(A) = 0$ を使った方が早い。問題はせいぜい $4 \times 4$ とかの行列だから。

## 線形独立

$A$ を $n \times m$ 行列する。ここで

$$\text{rank}(A) = k$$

だったとする。ここで列ベクトルが線形独立なのかを調べるには(列は縦)

$$k = m \Leftrightarrow \text{列ベクトルが線形独立}$$

を調べればいい。ランクは意味を持つ式の本数なので列数=ランクとなればすべての列ベクトルは意味を持つことになる。

逆に行ベクトルが線形独立なのかを調べるには(行は横)

$$k = n \Leftrightarrow \text{行ベクトルが線形独立}$$

を調べればいい。ランクは意味を持つ式の本数なので行数=ランクとなればすべての行ベクトルは意味を持つことになる。

## 可制御の判定(やり方その1)

定理

行列 $e^{At} B$ の行ベクトルが線形独立ならば可制御

よって $e^{At} B$ のランクを求めて行数と一致するか調べる。問題で既に $e^{AT}$ を求めたならこっちの方が楽かな？

可制御はかせい"ぎょう"で調べる。と覚える。

## 可制御の判定(やり方その2)

状態変数の数(= $A$ の列数)を $n$ とする。

$$M_C = (b \quad Ab \quad \dots \quad A^{n-1}b)$$

とすると

$$\text{rank} M_C = n$$

が成立すれば可制御。  $e^{AT}$  を求てないならこっちの方が楽かな？

## 可観測の判定(やり方その1)

---

定理

行列  $Ce^{At}$  の列ベクトルが線形独立ならば可制御

よって  $Ce^{At}$  のランクを求めて列数と一致するか調べる。問題で既に  $e^{AT}$  を求めたならこっちの方が楽かな？

## 可観測の判定(やり方その2)

---

状態変数の数(=Aの列数)をnとする。

$$M_O = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

とすると

$$\text{rank} M_c = n$$

が成立すれば可制御。  $e^{AT}$  を求てないならこっちの方が楽かな？

## 期末編

---

### 座標変換

---

$$\mathbf{X}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}u(t)$$

$$Y(t) = \mathbf{C}\mathbf{X}(t) + \mathbf{D}u(t)$$

に対し、 $\mathbf{X}(t) = \mathbf{T}\mathbf{Z}(t)$  の線形変換を定義すると

$$\mathbf{T}\mathbf{Z}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{Z}(t) + \mathbf{B}u(t)$$

$$Y(t) = \mathbf{C}\mathbf{T}\mathbf{Z}(t) + \mathbf{D}u(t)$$

の左から  $\mathbf{T}^{-1}$  をかけて

$$\mathbf{Z}'(t) = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{Z}(t) + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}u(t)$$

$$Y(t) = \mathbf{C}\mathbf{T}\mathbf{Z}(t) + \mathbf{D}u(t)$$

となる。 $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$ 、 $\bar{\mathbf{B}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}$ 、 $\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{T}$  と置けば

$$\mathbf{Z}'(\mathbf{t}) = \bar{A}\mathbf{Z}(\mathbf{t}) + \bar{B}u(t)$$

$$Y(t) = \bar{C}Z(t) + Du(t)$$

となる。なお、 $\bar{A} = \mathbf{T}^{-1}AT$ は!