位相空間論

目次

前提知識

ε-δ論法と集合論は既習のものとする。

あとこれがすごく参考になる。

http://www.rimath.saitama-u.ac.jp/lab.jp/Fukui/lectures/Set _ Topsp.pdf

距離の公理

距離とは何だろうか。"ユークリッド距離"、"マンハッタン距離"、"ハミング距離"など。全部"距離"という名を関している。ここで距離の公理を説明する。集合X上の関数dを

$$d : X \times X \rightarrow R$$

とする。ここでdが以下の条件を満たすときdを距離関数という。

1. $d(x, y) \geqq 0$（非負性）
2. $d(x, y) = 0 \Longrightarrow x = y$（同一律）
3. $d(x, y) = d(y, x)$（対称律）
4. $d(x, z) \geqq d(x, y) + d(y, z)$(三角不等式)

なお、条件1と2を併せて正定値性と言う場合もある。

ユークリッド空間とユークリッド距離

今後、$R^1 = R$、$R^2 = R \times R$といった感じでRがn個の直積をR^nと表記する。

$$d^n : R^n \times R^n \to R、d^n(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

で定義した距離を導入する。$d^n(x, y)$をユークリッド距離と呼び、集合R^nにユークリッド距離を導入した時、(R^n, d^n)をユークリッド空間と呼ぶ。

開球体、球面、内点、外点、境界、閉包の定義

R^nの部分集合$B^n(a, \varepsilon)$を

$$B^n(a, \varepsilon) = \{x \in R^n | d^n(a, x) < \varepsilon\}$$

と定義した時、部分集合$B^n(a, \varepsilon)$をaを中心としたεを半径とする **開球体** という。**ε-近傍** と呼ばれることもある。

$$B^n(a, \varepsilon) = \{x \in R^n | d^n(a, x) = \varepsilon\}$$

なる集合を点aを中心としたεを半径とする **球面** といい、$S^n(a; \varepsilon)$と表す。

集合Mを$M \subset R^n$とする。点aについて、

$$B^n(a, \varepsilon) \subset M$$

なる正の実数εが存在する時、点aをMの **内点** という。Mの内点全体をM^iと表し **開核** という。よって直ちに

$$M^i \subset M$$

なのは言うまでもないだろう。なお、M^iは必ずしもMの真部分集合にはならないことに注意。Mの補集合M^cの内点をMの **外点** という。言い換えれば、点aについて

$$B^n(a, \varepsilon) \cap M = \varnothing$$

なる正の実数εが存在する時、点aをMの外点という。さらにM^i、M^cを用いて集合M^fを

$$M^f = R^n - (M^i \cup M^c)$$

としたとき、M^fをMの **境界** という。つまりaが境界点であるとは、どんな正の実数εに対しても

$$B^n(a, \varepsilon) \cap M = \varnothing かつ B^n(a, \varepsilon) \cap M^c = \varnothing$$

となる。

点aに対し

$$\forall \varepsilon > 0、B^n(a, \varepsilon) \cap \not{M} = \varnothing$$

の時、点aをMの **触点** といい、Mの触点全体の集合M^a(または$\bar{M}$)をMの **閉包** という。つまり定義から明らかに

$$M^a = M^i \cup M^f$$

となる。

例として1次元ユークリッド空間を考え、$M = (0,1) \cup \{2\}$とする。内点の集合M^iは明らかに$M^i = (0,1)$であり、境界点の集合は明らかに$M^f = \{0\} \cup \{1\} \cup \{2\}$となる。よって閉包$\bar{M} = [0,1] \cup \{2\}$。

開集合、閉集合

集合Mを$M \subset R^n$とする。$M = M^i$(開核)となるならばMを開集合という。

$M^a = M$となるならばMを閉集合という。

双対性

開集合の補集合は閉集合である。また、閉集合の補集合は開集合である。

例えば、$R^n = \text{開集合}$なので両辺の双対を取って$\emptyset = \text{閉集合}$が成り立つ。

例えば、

一応だが、集合は開集合または閉集合であると言っているわけではないので注意。

開集合系

開集合全体の集合系を開集合系$\mathfrak{O}$と表記する。

開集合系では以下の定理が成り立つ。

1. $R^n \subset \mathfrak{O}, \emptyset \subset \mathfrak{O}$
2. **有限個** の元$\mathfrak{O}_1, \mathfrak{O}_2, \cdots, \mathfrak{O}_k$について$\mathfrak{O}_1 \cap \mathfrak{O}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{O}_k \in \mathfrak{O}$
3. $\mathfrak{O}$からなる集合族$(\mathfrak{O}_\lambda | \lambda \in \Lambda)$について$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{O}_\lambda \in \mathfrak{O}$

2について、有限個としているのは例えば、無限個にすると共通部分が一点のみの集合にすることも可能であり、一点集合はユークリッド空間では閉集合なのが例。

閉集合系

閉集合全体の集合系を閉集合系$\mathfrak{A}$と表記する。

閉集合系では以下の定理が成り立つ。

1. $R^n \subset \mathfrak{A}, \varnothing \subset \mathfrak{A}$
2. **有限個** の元$\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \cdots, \mathfrak{A}_k$について$\mathfrak{A}_1 \cup \mathfrak{A}_2 \cup \cdots \cup \mathfrak{A}_k \in \mathfrak{A}$
3. $\mathfrak{A}$からなる集合族$(\mathfrak{A}_\lambda | \lambda \in \Lambda)$について$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{A}_\lambda \in \mathfrak{A}$

なお、閉集合系の定理は開集合系の定理に両辺補集合を取って、必要ならドモルガンの定理(補集合の定理)を適用したものとなる。

開集合系の基底

開集合について、以下の定理が成り立つ。

任意の開集合は開球体の和集合としてあらわされるとき、またそのときに限って開集合となる。

まあ開集合系の定理↓

$\mathfrak{O}$からなる集合族$(\mathfrak{O}_\lambda | \lambda \in \Lambda)$について$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{O}_\lambda \in \mathfrak{O}$

を見れば何となく証明しなくても納得できるだろう。ここで開集合系の部分集合を$\mathfrak{P}$とし、任意の開集合である$O \in \mathfrak{O}$が$\mathfrak{P}$の元の和集合で表せる時、$\mathfrak{P}$を$\mathfrak{O}$の基底と呼ぶ。

距離空間

集合Xと距離関数dの対(X,d)、または単にXを距離空間という。例えば先ほどまで議論していたn次元ユークリッド空間(R^n, d^n)は距離空間である。ユークリッド空間で定義していた"開球体、球面、内点、外点、境界、閉包、開集合、閉集合"などの定義は一般の距離空間でも同様なので割愛する。

有名なものにはユークリッド空間のほかにヒルベルト空間などがある。

https://detail.chiebukuro.yahoo.co.jp/qa/question _ detail/q12242848217

集積点、導集合

(X,d)を距離空間とし、$A \subset X$とする。点xが集積点であるとは点xが差集合$A \backslash \{x\}$の触点であるときのことをいう。Aの集積点の集まりをAの導集合と言いA^dとあらわす。また、集合$A - A^d$の点を孤立点という。閉包$\bar{M}$と導集合M^dには以下の関係が成り立つ。

$$\bar{M} = M \cup M^d$$

具体例として閉包の時の例と同じように1次元ユークリッド空間を考え、$M = (0,1) \cup \{2\}$とする。導集合M^dは明らかに$M^d = [0,1]$であるので閉包$\bar{M}$は$\bar{M} = M \cup M^d = [0,1] \cup \{2\}$となる。これは内点と境界点から求めた閉包と一致する。

集合との距離と諸定理

(X,d)を距離空間とし、点xと集合$A \subset X$との距離を

$$d(x,A) = inf\{d(x,a) | a \in A\}$$

と定義すると以下の定理が成り立つ。

$$x\text{が}A\text{の触点} \iff d(x,A) = 0$$
$$x\text{が}A\text{の内点} \iff d(x,A^c) > 0$$

まあ、inf自体に一種の極限操作のようなものが含まれるのでおなじみの$M = (0,1) \cup \{2\}$で少し考えれば明らかだと思う。

近傍系

(X,d)を距離空間とする。部分集合$U \subset X$が点aの **近傍** であるとはUの内点にaを含む時のことをいう。点aの近傍すべての集合を点aの近傍系と言い$\mathfrak{R}(a)$とあらわす。よって例えば点aのε-近傍$N(a;\varepsilon)$はどんなεをとっても$N(a;\varepsilon) \in \mathfrak{R}(a)$である。

$\mathfrak{R}(a)$について以下の定理が成り立つ。

1. $a \in X$ならば$X \in \mathfrak{R}(a)$であり、$U \in \mathfrak{R}(a)$ならば$a \in U$
2. $U_1, U_2 \in \mathfrak{R}(a)$なら$U_1 \cap U_2 \in \mathfrak{R}(a)$
3. $U \in \mathfrak{R}(a)$かつ$U \subset V$なら$V \in \mathfrak{R}(a)$

まあ全部当たり前。

連続写像(連続関数)、必要十分条件と開集合

写像fを

$$f : X_1 \to X_2$$

とし、$(X_1, d_1), (X_2, d_2)$を距離空間とする。fが$a \in X_1$で連続とは

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \quad S.T. \quad d_1(x,a) < \delta \implies d_2(f(x), f(a)) < \varepsilon$$

となることである。X_1全体で連続ならそれを連続写像という。要は普通のイプシロン-デルタ論法の絶対値だったところが距離関数に代わっているだけ。

さて、これではいつもと変わり映えないためもう少し位相空間論ぽく言い換えてみよう。fが$a \in X_1$で連続とは

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \quad S.T. \quad f(B_{X_1}(a,\delta)) \subset B_{X_2}(f(a), \varepsilon)$$

となる。ただし、$B_{X_1}(a,\delta)$はX_1の開球体(または点aのδ-近傍)である。ここで$X_1\subset R^n, X_2\subset R^m$として具体例を図に示す。この図を使って先ほどの定義を日本語で説明すると、どんな中心f(a)半径εの球を持ってきてもそこに写像がすっぽり収まるような中心a半径δの球が存在する。という意味になる。

さらに先ほどの連続の条件に対し、両辺の **逆像** をとる。逆写像ではない点に注意。逆像を忘れた場合は集合論に戻ろう。すると

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0\quad S.T.\quad f^{-1}(f(B_{X_1}(a,\delta)))\subset f^{-1}(B_{X_2}(f(a),\varepsilon))$$

となるが、$B_{X_1}(a,\delta)\subset f^{-1}(f(B_{X_1}(a,\delta)))$なので

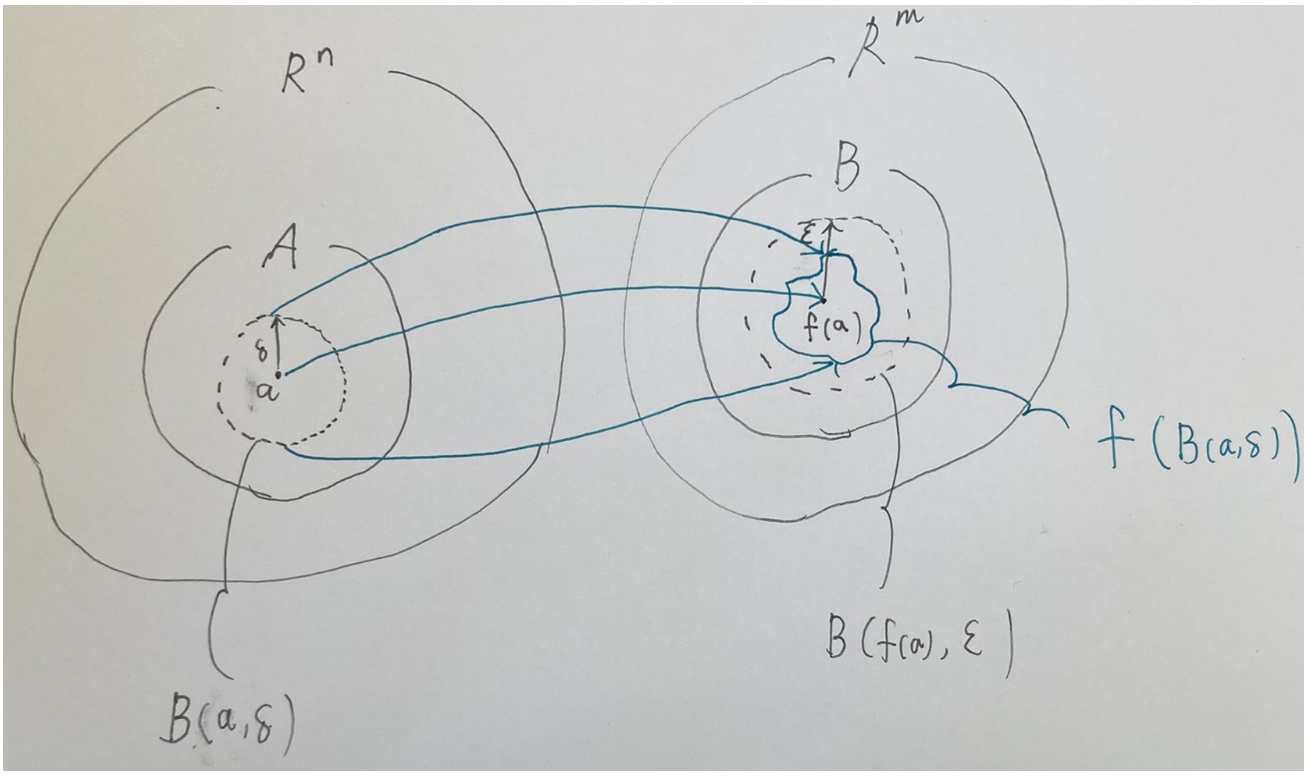
$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0\quad S.T.\quad B_{X_1}(a,\delta)\subset f^{-1}(B_{X_2}(f(a),\varepsilon))$$

となる。これをX1の任意の点が満たすならfは **連続関数** であると呼ぶ。

さらに証明は省く(内田P65)が以下の定理が連続関数fには成り立つ。

1. fが連続写像である。
2. (X_2,d_2)の任意の開集合Oに対して、$f^{-1}(O)$は常に(X_1,d_1)の開集合。(Oの逆像がない場合、空集合となるが空集合は開集合)
3. (X_2,d_2)の任意の閉集合Fに対して、$f^{-1}(F)$は常に(X_1,d_1)の閉集合。(Fの逆像がない場合、空集合となるが空集合は閉集合)

ここで重要なのは、**開集合(または同じ意味だが閉集合)がいっぱいあるような距離の定義のほうが連続写像になりやすい** という事実である。ここまでくると、個々の距離ではなくて開集合系についての性質を調べた方がいいのではないかというモチベーションがわいてくるだろう。ここからは開集合系の話になっていく。



位相とは

位相とは集合の中における「構造・判断」である. わかりやすい構造として, 例えば距離がある. そして, 集合 Eの二つの元 x,yの関係が「近いのか遠いのか」という「判断」を与えるのが位相である。なお、判断を与えれればいいので位相とは開集合系、閉集合系、開核演算子、閉包 演算子、近傍系を指すが基本的には開集合系を与えることが便利な場合が多いので普通は開集合系を位相と呼ぶ。

とはいえ, 距離が測れない場合があるかもしれないので, 位相の定め方はなるべく抽象的である方が何かと好都合である. そこで, 位相空間は開集合を使って特徴づけられることが多い。

ちょっと整理

今までは、距離の公理を満たす距離関数を集合に定義し、そこから閉包や開核を定義し開集合を開核で定義していった。つまりスタートは距離である。

逆にここからは、開集合系の公理を満たす集合系を定義し、そこから開集合を定義し、開核や閉包を定義していく。

なぜそんなことをするのかはこちらが参考になります。

開核、閉包の特徴づけ

今度は開集合、閉集合は定義されているものとして開核M^i及び閉包$\bar{M}$における定理を述べる。まず前提としてMをR^nの部分集合とする。その時、

$$\text{開核}M^i\text{は}M\text{に含まれる最大の開集合である。}$$

$$\text{閉包}\bar{M}\text{は}M\text{を含む最小の閉集合である。}$$

位相空間と開集合

Sを空でない集合とし、Sのベキ集合$\mathfrak{P}(S)$の部分集合$\mathfrak{O}$が以下の三条件を満たすとき、$\mathfrak{O}$はSにおける1つの **位相** という。

1. $R^n \subset \mathfrak{O}, \varnothing \subset \mathfrak{O}$
2. **有限個** の元$\mathfrak{O}_1, \mathfrak{O}_2, \cdots, \mathfrak{O}_k$について$\mathfrak{O}_1 \cap \mathfrak{O}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{O}_k \in \mathfrak{O}$
3. $\mathfrak{O}$からなる集合族$(\mathfrak{O}_\lambda | \lambda \in \Lambda)$について$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{O}_\lambda \in \mathfrak{O}$

集合Sと1つの位相$\mathfrak{O}$との組$(S, \mathfrak{O})$を **位相空間** といい、位相の元を **開集合** という。以下に$X = \{1, 2, 3\}$位相となりうる集合の具体例を示す。ちなみに画像にもあるように自明な二つの位相には名前がありそれぞれ密着位相、離散位相という。2つの元が同じ開集合にいる場合それを距離0と見れば密着位相はすべての元同士がが距離0、離散位相は全て元同士が距離非0となる。

問 15.1 集合 $X = \{1, 2, 3\}$ の上の位相を，その位相に含まれる二点集合と一点集
の個数に注目して，数え上げよう．次の表の通り，位相は合計 29 種類である．

二点集合の個数	一点集合の個数	sample	種類数	
0	0	密着位相	1	~ $\{\phi, X\}$
0	1	$\{1\}$	3	~ $\{\{1\}, \phi, X\}$
1	0	$\{1, 2\}$	3	$\{\{2\}, \phi, X\}$
1	1	$\{1, 2\}, \{1\}$	6	$\{\{3\}, \phi, X\}$
		$\{1, 2\}, \{3\}$	3	
1	2	$\{1, 2\}, \{1\}, \{2\}$	3	
2	1	$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1\}$	3	⋮
2	2	$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1\}, \{2\}$	6	
3	3	離散位相	1	
			合計 29	

通常の位相、距離位相、距離化可能

n次ユークリッド空間(距離空間)の開集合系を **通常の位相** という。

(X,d)を距離空間とする。この距離空間の開集合系を **距離位相** という。

集合X上の位相$\mathfrak{O}$が距離位相に一致する時、この位相$\mathfrak{O}$は **距離化可能** という。

位相空間における開核の定義

Sの部分集合Mの開核M^iを **Mに含まれる開集合全体の和集合** と定義する。よって以下の性質が成り立つ。

1. $M^i \subset M$
2. $M^i \in \mathfrak{O}$
3. $O \subset M, O \in \mathfrak{O} \Longrightarrow O \subset M^i$

まあどれも当たり前。なお、MをM^iに対応させるのはベキ集合からベキ集合への写像と考えられるためこの$\mathfrak{P}(S) \to \mathfrak{P}(S) \quad M \to M^i$なる写像を開核演算子という。開核作用素は以下の性質を持つ。

1. $S^i = S$
2. $M \subset S$とすると$M^i \subset M$
3. $M, N \subset S$とすると$(M \cap N)^i = M^i \cap N^i$
4. $M \subset S$とすると$(M^i)^i = M^i$
5. 開核作用素は一意に存在する。

位相空間における閉集合、閉包の定義

開集合の補集合を位相空間の **閉集合** という。Mを含むようなすべての閉集合の共通部分を閉包$\bar{M}(=M^a)$と定義する。MをM^aに対応させる$\mathfrak{P}(S) \to \mathfrak{P}(S) \quad M \to M^a$なる写像を閉核演算子という。これは以下の性質を満たす。

1. $\varnothing^a = \varnothing$
2. $M \subset S$とすると$M \subset M^a$
3. $M, N \subset S$とすると$(M \cup N)^a = M^a \cup N^a$
4. $M \subset S$とすると$(M^a)^a = M^a$
5. 閉核演算子は一意に存在する。

内点、外点、境界点、触点、集積点、孤立点

例えばM^iの元を内点という。その他も同じなのでわかるだろう。割愛する。

近傍と近傍系

$(X, \mathfrak{O})$を位相空間とする。Xの部分集合Nが点aの **近傍** であるとは$a \in N^i$の時をいう。つまり言い換えれば

$$\exists O \subset \mathfrak{O} \quad S.T. \quad a \in O, O \subset N$$

であるとき、Nを点aの近傍であるという。特に点aを含む開集合を点aの **開近傍** という。

よって以下の定理が成り立つ。

$$X\text{の部分集合}N\text{が開集合} \iff \forall n \in N\text{に対し}N\text{が点}n\text{の近傍}$$

点aの近傍全体を点aの **近傍系** といい、$\mathfrak{N}(a)$とあらわす。点aを$\mathfrak{N}(a)$に対応させる$X \to \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(S)) \quad a \to \mathfrak{N}(a)$なる写像が **一意に存在する。** ちなみに、間違えやすいが写像先が$\mathfrak{P}(S)$だとSの部分集合に対応することになり、部分集合系にならないので注意。

位相の強弱

1つの集合Xに対し複数の位相が考えられるが、$\mathfrak{O}_1 \subset \mathfrak{O}_2$の時、$\mathfrak{O}_1 \leqq \mathfrak{O}_2$と表記し強弱を表す。つまり順序$a \leqq b := a \subset b$を定義する。

完備束

集合Xにおいて定義される位相すべての集合を$\mathfrak{J}(S) = \mathfrak{J}$とおく。ここに先ほどの位相の強弱を導入すると、強弱を順序とすれば$\mathfrak{J}$は **半順序集合** となるのは明らかだろう。

次に$\mathfrak{I}$の元からなる任意の族$(\mathfrak{O}_\alpha)_{\alpha\in A}$を定義し、$\mathfrak{I}$の部分集合$\{\mathfrak{O}_\alpha\}_{\alpha\in A}$を定義する。$\mathfrak{O}^{(1)}$を

$$\mathfrak{O}^{(1)}=\bigcap_{\alpha\in A}\mathfrak{O}_a$$

と定義すればこれも位相になる。よってこの位相が$\{\mathfrak{O}_\alpha\}_{\alpha\in A}$の下限となる。

$$\mathfrak{O}^{(1)}=inf\{\mathfrak{O}_\alpha|a\in A\}$$

$\mathfrak{O}^{'}$をどの$\mathfrak{O}_\alpha$よりも強い位相とすれば明らかに

$$\bigcup_{\alpha\in A}\mathfrak{O}_a\subset\mathfrak{O}^{'}$$

となる。ここで$\mathfrak{O}^{'}$は複数存在する場合がある(存在自体は冪集合が必ず全てを内包できるので保障されている)があるのでそのような$\mathfrak{O}^{'}$全部の共通部分を$\mathfrak{O}^{(2)}$と置けば、この位相が$\{\mathfrak{O}_\alpha\}_{\alpha\in A}$の上限となる。よって

$$\mathfrak{O}^{(2)}=sup\{\mathfrak{O}_\alpha|a\in A\}$$

ここで順序集合Mの任意の空でない部分集合がMの中に上限と下限を有するならMは **完備束** という。よって$\mathfrak{I}(S)=\mathfrak{I}$は完備束である。

位相の生成

集合Sの冪集合$\mathfrak{P}(S)$の部分集合$\mathfrak{M}$が与えられたとする。さらに部分集合$\mathfrak{M}$を含むようなSの位相全体の集合を$\{\mathfrak{O}|\mathfrak{M}\subset\mathfrak{O},\mathfrak{O}\text{は位相}\}$とすると、これは先ほどの議論より完備束なので下限が存在する。その下限も位相なのでそれを$\mathfrak{O}(\mathfrak{M})$とする。つまり言い換えると$\mathfrak{M}\subset\mathfrak{O}$ **となる位相のうち最弱のものが $\mathfrak{O}(\mathfrak{M})$ である。** この$\mathfrak{O}(\mathfrak{M})$を$\mathfrak{M}$で **生成される位相** という。この議論からわかるように$\mathfrak{M}$がもし位相なら$\mathfrak{M}=\mathfrak{O}(\mathfrak{M})$である。

ここで$\mathfrak{M}$に属する **有限個** の集合の共通部分を$\mathfrak{M}_0$とする。

$$\mathfrak{M}_0=\bigcap_{i\in I}A_i\quad(A_i\in\mathfrak{M},I\text{は有限集合})$$

ただし有限個→0個($I=\varnothing$)とした場合は$\mathfrak{M}_0=S$とする。さらに$\mathfrak{M}_0$に属する **任意個** (つまり濃度は任意)の集合の共通部分を $\mathfrak{M}$とする。

$$\mathfrak{M}=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda\quad(B_\lambda\in\mathfrak{M}_0,\Lambda\text{の濃度は任意})$$

ただし任意個→0個($\Lambda=\varnothing$)とした場合は$\mathfrak{M}_0=\varnothing$とする。このようにして作った $\mathfrak{M}$は証明は省くが$\mathfrak{O}(\mathfrak{M})=\mathfrak{M}$となる。

位相の準基底、基底

Sにおけるある位相$\mathfrak{O}$が与えられたとする。$\mathfrak{O} = \mathfrak{O}(\mathfrak{M})$となるような$\mathfrak{M}$を位相$\mathfrak{O}$の **準基底** (または準開基)という。(準基底は一意に定まらない。)

ここで、$\mathfrak{B} \subset \mathfrak{O}$とし、$\mathfrak{O}$の任意の元Oは

$$O = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} W_\lambda \quad W_\lambda \in \mathfrak{B}$$

となるとする。この時、$\mathfrak{B}$は$\mathfrak{O}$の **基底** 、あるいは$(S, \mathfrak{O})$の基底、または **開基底** という。(これも一意には定まらない。)

ここで$\mathfrak{B}$に対する定理を述べておく。任意の$O \in \mathfrak{O}$及び任意の$x \in O$に対して、

$$x \in W, W \subset O$$

となるような$W \in \mathfrak{B}$が存在することが$\mathfrak{B}$が$\mathfrak{O}$の基底になるための必要十分条件である。なお、$\mathfrak{B}$がたかだか可算の集合となるならば$(S, \mathfrak{O})$は **第2可算公理** を満足するという。

なお、準基底は開基(基底)を用いて言い換えると集合$X \subset S$が準基底であるとは、Xの有限個の共通部分が開基になることをいう。

基本近傍系

$(S, \mathfrak{O})$なる位相空間に対し、V(x)を点xの近傍系とする。V(x)の部分集合$V^*(x)$が次の性質を持つとき、xの **基本近傍系** という。

$$\forall V \in V(x) \implies \exists U \in V^*(x) \quad S.T. \quad U \subset V$$

例えば$V^*(x)$を点xを含む開集合全体とすれば明らかに成り立つ。このような$V^*(x)$を特にxの **基本開近傍系** と呼ぶ。基本近傍系$V^*(x)$を知れば近傍系$V(x)$は

$$V(x) = \{V | \exists U \in V^*(x) \quad S.T. \quad U \subset V\}$$

と求まるため **実質的に近傍系を与えるのと基本近傍系を与えることに変わりはない。** 特に、Sの各点xがたかだか可算の基本近傍系を持つとき、$(S, \mathfrak{O})$は **第1可算公理** を満足するという。

連続写像

前の連続写像は距離空間での必要十分性だったが位相空間でも開集合の性質は変わらない(ように定義している)ので変わらない。

$(S, \mathfrak{O})$、$(S', \mathfrak{O}')$の二つの位相空間について、f:S→S'が連続写像であるとは以下の条件を満たすことである。

1. S'の任意の開集合O'に対して、$f^{-1}(O')$は常にSの開集合になる。

2. S'の任意の閉集合F'に対して、$f^{-1}(F')$は常にSの閉集合になる。
3. xをSの任意の点とし、f(x)=x'とする。そのとき、x'の任意の近傍 V'に対して、$f^{-1}(x')$は常にxの近傍となる。

3番より、写像fが点xで連続であるとは以下を満たすことである。

- S上の点xが連続であるとは、f(x)=x'とすると、そのときx'の任意の近傍V'に対して、$f^{-1}(x')$は常にxの近傍となる。

これを記号で書くと

$$\forall V' \in V_{S'}(x'_0) \Longrightarrow f^{-1}(V') \in V_S(x_0)$$

となる。ただし$V_{S'}(x'_0)$はx_0の近傍系である。近傍系の指定と基本近傍系の指定は結局等価なので基本近傍系$V^*_{S'}(x'_0)$を用いて

\forall V'\in V _ {S'}^*(x _ 0')\Longrightarrow f^{-1}(V')\in V _ S^*(x _ 0)

としても同じ。

また、連続であるための定理として以下が成り立つ。

- 写像f:S→S'が連続であるためのには、S'のベキ集合の部分集合$\mathfrak{M}'$を位相空間S'の準基底とするとき、つまり$\mathfrak{O}' = \mathfrak{O}(\mathfrak{M}')$とするとき、任意の$M \in \mathfrak{O}'$に対して$f^{-1}(M) \in \mathfrak{O}$となることが必要十分条件である。

実連続関数

今後、位相空間R^nまたは単にR^nと言ったら(nは任意。例えばn=1の場合はRとなる。)、n次ユークリッド空間R^nによって定義される開集合系$\mathfrak{O}(R^n)$を用いた位相空間$(R^n, \mathfrak{O}(R^n))$を指す事とする。

位相空間SからRへの写像を(S上の) **実数値関数** といい、さらにそれが連続写像なら **実連続関数** という。

位相空間Rの準基底は例えば、開区間(a,b)全体の集合$\{(a,b)|a,b \in R, a < b\}$や、$\{(a,\infty),(-\infty,b)|a,b \in R\}$などが考えられる。

ここで先ほど述べた定理↓のS'をRに書き換える。

- 写像f:S→S'が連続であるためのには、S'のベキ集合の部分集合$\mathfrak{M}'$を位相空間S'の準基底とするとき、つまり$\mathfrak{O}' = \mathfrak{O}(\mathfrak{M}')$とするとき、任意の$M \in \mathfrak{O}'$に対して$f^{-1}(M) \in \mathfrak{O}$となることが必要十分条件である。

これを

- 写像f:S→Rが連続であるためのには、$\mathfrak{M}$を位相空間Rの準基底とするとき、任意の$M\in\mathfrak{O}$に対して$f^{-1}(M)\in\mathfrak{O}$となることが必要十分条件である。

これに先ほどの準基底を導入するとfが連続写像になる必要十分条件は

1. Rの任意の開区間(a,b)に対して

$$f^{-1}((a,b))=\{x|x\in S,a<f(x)<b\}$$

   なる逆像f^{-1}がSの開集合になること。

2. 任意の実数a,bに対して

$$f^{-1}((a,\infty))=\{x|x\in S,a<f(x)\}$$

   なる逆像f^{-1}がSの開集合になり、さらに

$$f^{-1}((-\infty,b))=\{x|x\in S,f(x)<b\}$$

   なる逆像f^{-1}がSの開集合になること。

となる。

また基本近傍系での連続写像の判断は任意のx_0に対し、

\forall V'\in V _ {S'}^*(x _ 0')\Longrightarrow f^{-1}(V')\in V _ S^*(x _ 0)

が成立することなのでこれもRに直す。なお、Rの点x_0の基本近傍系としては$\{(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)|\varepsilon>0\}$を採用するとfが連続写像になる必要十分条件は、

- x_0を任意のSの点とし任意の正の実数εに対して、

$$\begin{aligned}
&f^{-1}((f(x_0)-\varepsilon,f(x_0)+\varepsilon))\\
&\quad=\{x|x\in S,f(x_0)-\varepsilon<f(x)<f(x_0)+\varepsilon\}\\
&\quad=\{x|x\in S,|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon\}
\end{aligned}$$

  なる逆像f^{-1}がx_0の近傍になることである。

言い換えると

- x_0を任意のSの点とし任意の正の実数εに対して、x_0の適当な近傍Vをとれば、Vに属するすべての点xについて

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

  が成り立つ。

なお、実連続関数同士を加減乗除しても実連続関数となる。例えば実連続関数f,gに対して、

$$(f+g)(x) := f(x)+g(x)$$

と定義すれば実数値関数(f+g)も実連続関数となる。

開写像、閉写像

$(S,\mathfrak{O})$、$(S',\mathfrak{O}')$の二つの位相空間について、f:S→S'がSの任意の開集合による像がS'の開集合となるとき、fを 開写像という。閉写像の場合は閉写像という。

同相写像、位相同型

$(S,\mathfrak{O})$、$(S',\mathfrak{O}')$の二つの位相空間について、f:S→S'が全単射かつf,f^{-1}がともに連続ならば、fを **同相写像** という。また、これと同等な条件としてfが全単射かつ連続かつ開く写像であるとも言い換えられる。

$(S,\mathfrak{O})$から$(S',\mathfrak{O}')$への同相写像が少なくとも1つ存在する時、位相空間は **同相**、または **位相同型** であるという。

同相の場合、位相的性質は同じになる。コンパクト性や連結性など。

いったん整理

最初に張ったpdfから引用。

位相空間での議論は， 距離空間において位相的性質を議論する場合と， 並行にいく場合が多い． しかし， 開球の概念は距離空間でのみ定義され， 位相空間では考えることができないので， 開球を使った議論を， 位相空間に一般化することはできない． しかしながら， 位相空間で位相的性質を論ずる際， 開集合すべてを記述して， それを証明に用いるのは， 現実的とは言えない場合が多い． 位相空間でも， 距離空間において開球が果たす役割を演ずる概念を導入しておくのが便利である． ここではそれに相当するものとして， 開基底の概念と近傍基底の概念を導入しよう.

第 1 章の距離空間に於ける議論で， 「a 中心の開球」や「開球」としたところは， それぞれ「a の基本近傍 (近傍基底)」や「基本開集合 (開基底)」と読み替えることにすれば， 位相空間に於いても距離空間と並行に議論できる場合が多い.

誘導位相

動機付けとして集合Sから$(S',\mathfrak{O}')$なる位相空間S'と写像f:S→S'が与えられたとする。これを連続写像としたい場合$\mathfrak{O}$は一意に定まらない。例えば$\mathfrak{O}$を離散位相にしたりすれば必ず連続になるし、$\mathfrak{O}$で連続写像になるなら$\mathfrak{O} \subset \mathfrak{O}'$なる位相$\mathfrak{O}'$でも連続写像になるからである。よって我々連続写像となるような **最弱** の位相を見つけたいという気持ちになる。

集合S及び$(S',\mathfrak{O}')$なる位相空間S'と写像f:S→S'が与えられたとする。ここで$\mathfrak{O}$を

$$\mathfrak{O} = \{f^{-1}(O) | O \in \mathfrak{O}'\}$$

とすると$\mathfrak{O}$はfを連続写像とする位相のうち最も弱い位相になる。まあ$\mathfrak{O}$が位相なのかどうかは直感敵にわからないにしろ、もし位相なら連続写像の定義から見れば最弱なのは直感的にそうなるのは明らかだろう。この位相$\mathfrak{O}$をfによってS'の位相$\mathfrak{O}'$から誘導される位相という。

相対位相

誘導位相の応用例として相対位相を上げる。$(S, \mathfrak{O})$なる位相空間Sの部分集合Mについて、標準的単射$i : M \to S \quad i(m) = m$を考え、誘導位相を作る。すなわち

$$\begin{aligned}\mathfrak{O}_M &= \{i^{-1}(O) | O \in \mathfrak{O}\} \\ &= \{O \cap M | O \in \mathfrak{O}\}\end{aligned}$$

とすれば$(M, \mathfrak{O}_M)$は位相空間となり **部分空間** とも呼ばれる。また、$\mathfrak{O}_M$をMにおける$\mathfrak{O}$の **相対位相** という。

定理として以下が成り立つ。

$(S, \mathfrak{O})$、$(S', \mathfrak{O}')$の二つの位相空間について写像$f : S \to S'$が連続とする。$M \subset S$なる集合Mを考え相対位相$\mathfrak{O}_M$を導入し、fの定義域をS→Mにした写像$f_M : M \to S'$は連続写像となる。

直積空間

$(S, \mathfrak{O})$、$(S', \mathfrak{O}')$の二つの位相空間について

$$\mathfrak{B} = \{V \times W | V \in \mathfrak{O}, W \in \mathfrak{O}'\}$$

とすると、$\mathfrak{B}$は開基となる。よって$\mathfrak{B}$を開基とする位相を **直積位相** $\mathfrak{O}\mathfrak{O}'$(←これは正確な表記ではない。二重の×みたいな記号なのだが見つからなかった。)と呼び$(S \times S', \mathfrak{O}\mathfrak{O}')$を **直積空間** と呼ぶ。

ただし今回の流れだと誘導位相を使って定義したほうが自然な流れなので誘導位相で定義すると、$(S, \mathfrak{O})$、$(S', \mathfrak{O}')$の二つの位相空間について写像$f_S, f_{S'}$を以下のように定義する。

$$f_S : S \times S' \to S \quad f_S(s, s') = s \quad f_S : S \times S' \to S' \quad f_{S'}(s, s') = s'$$

とし、写像$f_S, f_{S'}$から誘導される$S \times S'$の位相をそれぞれ$\mathfrak{O}_S, \mathfrak{O}_{S'}$とする。さらにそこから共通部分Mを

$$M = \mathfrak{O}_S \cap \mathfrak{O}_{S'}$$

とするとMから生成される$\mathfrak{O}(M)$を、つまりMを含むような最弱の位相を **直積位相** と呼ぶ。

商写像と商集合

$(S, \mathfrak{O})$、$(S', \mathfrak{O}')$の二つの位相空間について写像f:S→S'が以下の条件を満たすなら写像fを商写像という。

1. fは全射である。
2. fは連続写像である。つまり、S'の任意の開集合O'に対して、$f^{-1}(O')$は常にSの開集合になる。

これらを満たすとき、fは **商写像** という。例えば、AからA/Rへの標準的写像などがこれを満たす。

写像fが$(X, \mathfrak{O})$の位相空間についてf:X→Y、(ただしfは全射)なるfを考え、集合Yの部分集合属$\mathfrak{O}(f)$を

$$\mathfrak{O}(f) = \{H \in \mathfrak{P}(Y) | f^{-1}(H) \in \mathfrak{O}\}$$

とするとこれは位相となる。この位相$\mathfrak{O}(f)$を全射fにより定まる集合Yの商位相といい、$(Y, \mathfrak{O}(f))$をfにより定まる$(X, \mathfrak{O})$の **商空間** という。特に$(X/\sim, \mathfrak{O}(p))$(ただしpはXからX/～への標準的写像)の時、**等化空間** といい位相を **等化位相** という。

連結性

開集合系$\mathfrak{O}$と閉集合系$\mathfrak{U}$の共通部分が密着位相となる場合、位相空間Sを連結であるという。つまり

$$\mathfrak{O} \cap \mathfrak{U} = \{\varnothing, S\}$$

仮に連結ではなかった場合、$O_1 \in \mathfrak{O} \cap \mathfrak{U}$となる。この$O_1$は$O_1 \in \mathfrak{O}$かつ$O_1 \in \mathfrak{U}$ということになりこれは$O_1$は閉集合かつ開集合ということになる。よって$O_1$の補集合$O_2 = S - O_1$も開集合かつ閉集合となりさらに以下を満たすのも補集合の性質から明らかだろう。

$$O_1 \cap O_2 = \varnothing, \quad O_1 \cup O_2 = S$$

つまりこれは二つの開集合O_1, O_2でSを直和分割が出来るということを意味している。よって連結であるとは以下の事と同等である。

- 位相空間Sが連結である。
- 位相$\mathfrak{O}$の任意の元で位相空間Sが直和分割が出来ない。

定理としては以下が成り立つ。

1. 部分集合Mが連結になるには以下を満たすことが条件である。

   $$M \subset O_1 \cap O_2, \quad O_1 \cap O_2 \cap M = \varnothing$$

   なる空でない開集合O_1, O_2が存在しない事が必要十分。

2. S,S'を位相空間とし、fを連続写像であるとすると連結な部分集合Mの像f(M)はS'の連結な部分集合。

3. Sの部分集合Nが連結なら閉包$\bar{N}$に関して$N \subset M \subset \bar{N}$なるMも連結

4. Sの部分集合族$(M_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$に関して(Λの濃度は任意)、全ての元が連結で任意の2元の共通部分が空でないなら部分集合族の和集合も連結。濃度は任意なので無限個の和集合でも成り立つ。

また、部分集合が連結の場合、連結部分集合という。

連結成分

連結部分集合Mのうち特に2点x,yを含むようなMが存在する時、二項関係~を

$$x \sim y := x\text{と}y\text{を含むような連結部分集合が存在}$$

とするとこれは同値関係~になる。xRyかつyRzならxRzを満たすのはちょっと怪しいと思うかもしれないが定理4を用いると連結の和集合に連結なので成り立つ。よってSを同値関係~で類別した時、各同値類を位相空間Sの **連結成分** と呼ぶ。点xの連結成分はxを含む最も大きい連結部分集合でありさらにこれ閉集合となる。これを用いるとSが連結であるとはSが唯一つの連結部分集合(自分自身)を持つことと同等となる。

連結空間族の直積空間

直積位相空間の連結性は以下が必要十分である。

- 直積空間$S = S_{\lambda 1} \times \cdots$が連結になるにはすべての$S_\lambda$が連結になることが必要十分条件である。

ユークリッド空間Rの連結部分集合と中間値の定理

まず定理としてユークリッド空間Rは連結である。証明は省略する(松坂P201)。

さらに定理として、任意のa<bに対して(a,b)と[a,b]は連結が成り立つ。証明は(松坂P201)と同じノリで結局直和分割を仮定して矛盾を導く。これを補題とすれば定理4より(a,b]、[a,b)、(a,∞)、[a,∞)、(-∞,b)、(-∞,b]などが成り立つ。

また定理として、Rの連結部分集合は上記の物のみになる。以上よりRの連結部分集合は以下のもののみになる。

- (a,b)、[a,b]、(a,b]、[a,b)、(a,∞)、[a,∞)、(-∞,b)、(-∞,b]

ここでf:S→Rなる実連続関数fを定義し$x_1, x_2 \in S$、$f(x_1) = \alpha, f(x_2) = \beta$とし$\alpha < \beta$とする。連結性のところで紹介した定理2よりf(S)=Mなる像Mは連結である。さらにR上の連結部分集合Mは上記のパターンに分類されるわけだが少なくとも$\alpha, \beta \in M$は確定しているため$[\alpha, \beta] \subset M$となる。よって$\alpha < \gamma < \beta$なるγは$\gamma \in M$である。これを **中間値の定理** という。ちなみに$S = [x_1, x_2]$とすればよく知る中間値の定理になる。

コンパクト

$(S, \mathfrak{O})$を1つの位相空間とする。$\mathfrak{U}$をSの部分集合系とする。その和集合が$\bigcup \mathfrak{U} = S$となる時、Sは$\mathfrak{U}$によって **覆われてる** あるいは **被膜** という。さらに$\forall U \in \mathfrak{U}, U \in \mathfrak{O}$ならば、つまり$\mathfrak{U} \in \mathfrak{O}$ならば、$\mathfrak{U}$を **開被膜** という。また、$\mathfrak{U}$の要素が有限個なら$\mathfrak{U}$をSの **有限被膜** という。

位相空間Sがコンパクトであるとは、開被膜$\mathfrak{U}$が任意に与えられたとき、その中から適当な有限個を取り出してそれを$X = \{U_1, U_2, \cdots, U_n\}$とするとXがSの被膜となる時、Sを **コンパクト** という。つまりどんな任意の開被膜にも部分集合に有限被膜をもつことが条件。

よってコンパクトの定義より例えば **実数直線Rやユークリッド空間R^nはコンパクトではない** 。実数直線の証明としてはR例えば、開被膜を$\mathfrak{U} = \{(-m, m) | m \in N\}$を持って来る。有限個の開集合$(-m_k, m_k)_{k=1,2,\cdots,n}$を取り出し、最大値をmとすると和集合は(-m,m)となる。これは実数直線Rではないので矛盾より有限個の開集合で表せない。逆にSが有限集合なら開集合の数も有限のため必ずコンパクトである。

有限交差性(有限交叉性)

Sの部分集合系$\hat{x}$においてxの任意の元の共通部分が空でない時、$\hat{x}$は有限交差性を持つという。

ここで位相空間Sがコンパクトであるとは、Sの閉集合族が有限交差性を持つことと同等である。

部分集合のコンパクト性

位相空間Sの部分集合Mが相対位相に関してコンパクトの時、**部分集合Mがコンパクト** という。部分集合Mのコンパクト性について以下の定理が成り立つ。

1. 位相空間Sの有限個の部分集合$M_1, M_2 \cdots, M_n$がいずれもコンパクトなら$M_1 \cup M_2 \cup \cdots \cup M_n$もコンパクト
2. 位相空間Sがコンパクトなら、Sの任意の閉集合もコンパクト
3. ユークリッド空間R^nの部分集合がコンパクトであるための必要十分は、MがR^nの閉界な閉集合であることである。閉界とはある球体$B(a, \varepsilon)$に含まれる場合をいう。
4. 最大値・最小値の定理

Hausdorf空間

位相空間Sが以下の性質を満たすとき、Sを **Hausdorf空間** という。

- Sの任意の相異なる点x,yに対して、$U \cap V = \varnothing$なる$U \in V(x), V \in V(x)$が存在する、ただし、V(x)はVの近傍系である。

例えば、ユークリッド空間R^nはHausdorf空間である。Hausdorf空間について以下の定理が成り立つ。

- Hausdorf空間Sの部分集合MがコンパクトならばMはSの閉集合である。