位相空間論

目次

前提知識

ε-δ論法と集合論は既習のものとする。

距離の公理

距離とは何だろうか。"ユークリッド距離"、"マンハッタン距離"、"ハミング距離"など。全部"距離"という名を関している。ここで距離の公理を説明する。集合X上の関数dを

$$d : X \times X \to R$$

とする。ここでdが以下の条件を満たすときdを距離関数という。

1. $d(x, y) \geqq 0$（非負性）

2. $d(x,y)=0 \Longrightarrow x=y$（同一律）
3. $d(x,y)=d(y,x)$（対称律）
4. $d(x,z) \geqq d(x,y)+d(y,z)$(三角不等式)

なお、条件1と2を併せて正定値性と言う場合もある。距離の定義の仕方は無数に存在し、これによって開集合の数なども変わってくる。

ユークリッド空間とユークリッド距離

今後、$R^1=R$、$R^2=R\times R$といった感じでRがn個の直積をR^nと表記する。

$$d^n : R^n \times R^n \to R、d^n(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}$$

で定義した距離を導入する。$d^n(x,y)$をユークリッド距離と呼び、集合R^nにユークリッド距離を導入した時、(R^n, d^n)をユークリッド空間と呼ぶ。

開球体、球面、内点、外点、境界、閉包の定義

R^nの部分集合$B^n(a,\varepsilon)$を

$$B^n(a,\varepsilon)=\{x\in R^n|d^n(a,x)<\varepsilon\}$$

と定義した時、部分集合$B^n(a,\varepsilon)$をaを中心としたεを半径とする **開球体** という。**ε-近傍** と呼ばれることもある。

$$B^n(a,\varepsilon)=\{x\in R^n|d^n(a,x)=\varepsilon\}$$

なる集合を点aを中心としたεを半径とする **球面** といい、$S^n(a;\varepsilon)$と表す。

集合Mを$M\subset R^n$とする。点aについて、

$$B^n(a,\varepsilon)\subset M$$

なる正の実数εが存在する時、点aをMの **内点** という。Mの内点全体をM^iと表し **開核** という。よって直ちに

$$M^i \subset M$$

なのは言うまでもないだろう。なお、M^iは必ずしもMの真部分集合にはならないことに注意。Mの補集合M^cの内点をMの **外点** という。言い換えれば、点aについて

$$B^n(a,\varepsilon)\cap M=\varnothing$$

なる正の実数εが存在する時、点aをMの外点という。さらにM^i、M^cを用いて集合M^fを

$$M^f=R^n-(M^i\cup M^c)$$

としたとき、M^fをMの **境界** という。つまりaが境界点であるとは、どんな正の実数εに対しても

$$B^n(a,\varepsilon)\cap M=\varnothing かつ B^n(a,\varepsilon)\cap M^c=\varnothing$$

となる。

点aに対し

$$\forall\varepsilon>0、B^n(a,\varepsilon)\cap M \not= \varnothing$$

の時、点aをMの **触点** といい、Mの触点全体の集合M^a(または$\bar{M}$)をMの **閉包** という。つまり定義から明らかに

$$M^a=M^i\cup M^f$$

となる。

例として1次元ユークリッド空間を考え、$M=(0,1)\cup\{2\}$とする。内点の集合M^iは明らかに$M^i=(0,1)$であり、境界点の集合は明らかに$M^f=\{0\}\cup\{1\}\cup\{2\}$となる。よって閉包$\bar{M}=[0,1]\cup\{2\}$。

開集合、閉集合

集合Mを$M\subset R^n$とする。$M=M^i$(開核)となるならばMを開集合という。

$M^a=M$となるならばMを閉集合という。

双対性

開集合の補集合は閉集合である。また、閉集合の補集合は開集合である。

例えば、$R^n=$ 開集合なので両辺の双対を取って$\varnothing=$ 閉集合が成り立つ。

例えば、

一応だが、集合は開集合または閉集合であると言っているわけではないので注意。

開集合系

開集合全体の集合系を開集合系$\mathfrak{O}$と表記する。

開集合系では以下の定理が成り立つ。

1. $R^n\subset\mathfrak{O},\varnothing\subset\mathfrak{O}$
2. **有限個** の元$\mathfrak{O}_1,\mathfrak{O}_2,\cdots,\mathfrak{O}_k$について$\mathfrak{O}_1\cap\mathfrak{O}_2\cap\cdots\cap\mathfrak{O}_k\in\mathfrak{O}$

3. $\mathfrak{O}$からなる集合族$(\mathfrak{O}_\lambda|\lambda \in \Lambda)$について$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathfrak{O}_\lambda \in \mathfrak{O}$

2について、有限個としているのは例えば、無限個にすると共通部分が一点のみの集合にすることも可能であり、一点集合はユークリッド空間では閉集合なのが例。

閉集合系

閉集合全体の集合系を閉集合系$\mathfrak{A}$と表記する。

閉集合系では以下の定理が成り立つ。

1. $R^n \subset \mathfrak{A}, \varnothing \subset \mathfrak{A}$
2. **有限個** の元$\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \cdots, \mathfrak{A}_k$について$\mathfrak{A}_1 \cup \mathfrak{A}_2 \cup \cdots \cup \mathfrak{A}_k \in \mathfrak{A}$
3. $\mathfrak{A}$からなる集合族$(\mathfrak{A}_\lambda|\lambda \in \Lambda)$について$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathfrak{A}_\lambda \in \mathfrak{A}$

なお、閉集合系の定理は開集合系の定理に両辺補集合を取って、必要ならドモルガンの定理(補集合の定理)を適用したものとなる。

開集合系の基底

開集合について、以下の定理が成り立つ。

任意の開集合は開球体の和集合としてあらわされるとき、またそのときに限って開集合となる。

まあ開集合系の定理↓

$\mathfrak{O}$からなる集合族$(\mathfrak{O}_\lambda|\lambda \in \Lambda)$について$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathfrak{O}_\lambda \in \mathfrak{O}$

を見れば何となく証明しなくても納得できるだろう。ここで開集合系の部分集合を$\mathfrak{B}$とし、任意の開集合である$O \in \mathfrak{O}$が$\mathfrak{B}$の元の和集合で表せる時、$\mathfrak{B}$を$\mathfrak{O}$の基底と呼ぶ。

距離空間

集合Xと距離関数dの対(X,d)、または単にXを距離空間という。例えば先ほどまで議論していたn次元ユークリッド空間(R^n, d^n)は距離空間である。ユークリッド空間で定義していた"開球体、球面、内点、外点、境界、閉包、開集合、閉集合"などの定義は一般の距離空間でも同様なので割愛する。

有名なものにはユークリッド空間のほかにヒルベルト空間などがある。

https://detail.chiebukuro.yahoo.co.jp/qa/question_detail/q12242848217

集積点、導集合

(X,d)を距離空間とし、$A \subset X$とする。点xが集積点であるとは点xが差集合$A \backslash \{x\}$の触点であるときのことをいう。Aの集積点の集まりをAの導集合と言いA^dとあらわす。また、集合$A - A^d$の点を孤立点という。閉包$\bar{M}$と導集合M^dには以下の関係が成り立つ。

$$\bar{M} = M \cup M^d$$

具体例として閉包の時の例と同じように1次元ユークリッド空間を考え、$M = (0,1) \cup \{2\}$とする。導集合M^dは明らかに$M^d = [0,1]$であるので閉包$\bar{M}$は$\bar{M} = M \cup M^d = [0,1] \cup \{2\}$となる。これは内点と境界点から求めた閉包と一致する。

集合との距離と諸定理

(X,d)を距離空間とし、点xと集合$A \subset X$との距離を

$$d(x,A) = inf\{d(x,a)|a \in A\}$$

と定義すると以下の定理が成り立つ。

$$x\text{が}A\text{の触点} \iff d(x,A) = 0$$
$$x\text{が}A\text{の内点} \iff d(x,A^c) > 0$$

まあ、inf自体に一種の極限操作のようなものが含まれるのでおなじみの$M = (0,1) \cup \{2\}$で少し考えれば明らかだと思う。

近傍系

(X,d)を距離空間とする。部分集合$U \subset X$が点aの **近傍** であるとはUの内点にaを含む時のことをいう。点aの近傍すべての集合を点aの近傍系と言い$\mathfrak{N}(a)$とあらわす。よって例えば点aのε-近傍$N(a;\varepsilon)$はどんなεをとっても$N(a;\varepsilon) \in \mathfrak{N}(a)$である。

$\mathfrak{N}(a)$について以下の定理が成り立つ。

1. $a \in X$ならば$X \in \mathfrak{N}(a)$であり、$U \in \mathfrak{N}(a)$ならば$a \in U$
2. $U_1, U_2 \in \mathfrak{N}(a)$なら$U_1 \cap U_2 \in \mathfrak{N}(a)$
3. $U \in \mathfrak{N}(a)$かつ$U \subset V$なら$V \in \mathfrak{N}(a)$

まあ全部当たり前。

連続写像(連続関数)、必要十分条件と開集合

写像fを

$$f : X_1 \to X_2$$

とし、$(X_1, d_1), (X_2, d_2)$を距離空間とする。fが$a \in X_1$で連続とは

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \quad S.T. \quad d_1(x, a) < \delta \Longrightarrow d_2(f(x), f(a)) < \varepsilon$$

となることである。X_1全体で連続ならそれを連続写像という。要は普通のイプシロン-デルタ論法の絶対値だったところが距離関数に代わっているだけ。

さて、これではいつもと変わり映えないためもう少し位相空間論ぽく言い換えてみよう。fが$a \in X_1$で連続とは

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \quad S.T. \quad f(B_{X_1}(a, \delta)) \subset B_{X_2}(f(a), \varepsilon)$$

となる。ただし、$B_{X_1}(a, \delta)$はX_1の開球体(または点aのδ-近傍)である。ここで$X_1 \subset R^n, X_2 \subset R^m$として具体例を図に示す。この図を使って先ほどの定義を日本語で説明すると、どんな中心f(a)半径εの球を持ってきてもそこに写像がすっぽり収まるような中心a半径δの球が存在する。という意味になる。

さらに先ほどの連続の条件に対し、両辺の **逆像** をとる。逆写像ではない点に注意。逆像を忘れた場合は集合論に戻ろう。すると

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \quad S.T. \quad f^{-1}(f(B_{X_1}(a, \delta))) \subset f^{-1}(B_{X_2}(f(a), \varepsilon))$$

となるが、$B_{X_1}(a, \delta) \subset f^{-1}(f(B_{X_1}(a, \delta)))$なので

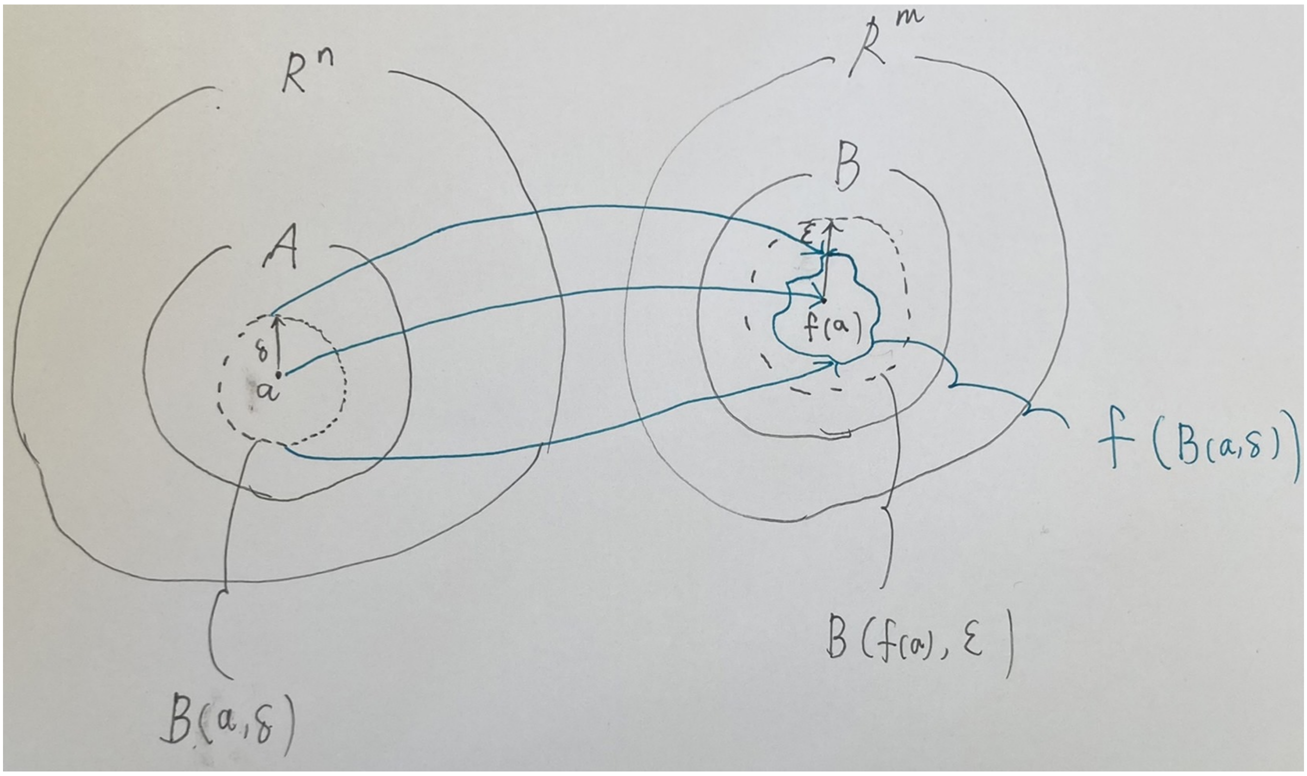
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \quad S.T. \quad B_{X_1}(a, \delta) \subset f^{-1}(B_{X_2}(f(a), \varepsilon))$$

となる。これをX1の任意の点が満たすならfは **連続関数** であると呼ぶ。

さらに証明は省く(内田P65)が以下の定理が連続関数fには成り立つ。

1. fが連続写像である。
2. (X_2, d_2)の任意の開集合Oに対して、$f^{-1}(O)$は常に(X_1, d_1)の開集合。(Oの逆像がない場合、空集合となるが空集合は開集合)
3. (X_2, d_2)の任意の閉集合Fに対して、$f^{-1}(F)$は常に(X_1, d_1)の閉集合。(Fの逆像がない場合、空集合となるが空集合は閉集合)

ここで重要なのは、**開集合(または同じ意味だが閉集合)がいっぱいあるような距離の定義のほうが連続写像になりやすい** という事実である。ここまでくると、個々の距離ではなくて開集合系についての性質を調べた方がいいのではないかというモチベーションがわいてくるだろう。ここからは開集合系の話になっていく。



位相とは

位相とは集合の中における「構造・判断」である． わかりやすい構造として， 例えば距離がある． そして， 集合 Eの二つの元 x,yの関係が「近いのか遠いのか」という「判断」を与えるのが位相である．

とはいえ， 距離が測れない場合があるかもしれないので， 位相の定め方はなるべく抽象的である方が何かと好都合である． そこで， 位相空間は開集合を使って特徴づけられることが多い．

ちょっと整理

今までは、距離の公理を満たす距離関数を集合に定義し、そこから閉包や開核を定義し開集合を開核で定義していった。つまりスタートは距離である。

逆にここからは、開集合系の公理を満たす集合系を定義し、そこから開集合を定義し、開核や閉包を定義していく。

なぜそんなことをするのかはこちらが参考になります。

開核、閉包の特徴づけ

今度は開集合、閉集合は定義されているものとして開核M^i及び閉包$\bar{M}$における定理を述べる。まず前提としてMをR^nの部分集合とする。その時、

$$\text{開核}M^i\text{は}M\text{に含まれる最大の開集合である。}$$

$$\text{閉包}\bar{M}\text{は}M\text{を含む最小の閉集合である。}$$

位相空間

Sを空でない集合とし、Sのベキ集合$\mathfrak{B}(S)$の部分集合$\mathfrak{O}$が以下の三条件を満たすとき、$\mathfrak{O}$はSにおける1つの **位相** という。

1. $R^n \subset \mathfrak{O}, \varnothing \subset \mathfrak{O}$
2. **有限個** の元$\mathfrak{O}_1, \mathfrak{O}_2, \cdots, \mathfrak{O}_k$について$\mathfrak{O}_1 \cap \mathfrak{O}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{O}_k \in \mathfrak{O}$
3. $\mathfrak{O}$からなる集合族$(\mathfrak{O}_\lambda | \lambda \in \Lambda)$について$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{O}_\lambda \in \mathfrak{O}$

集合Sと1つの位相$\mathfrak{O}$との組$(S, \mathfrak{O})$を **位相空間**　という。以下に$X = \{1, 2, 3\}$位相となりうる集合の具体例を示す。

画像がなかった時の代替テキスト