Генерация k-элементных подмножеств

Сочетания (без повторений) из n по **k** – это подмножества, образованные **k** элементами из **n** возможных.

Количество сочетаний определяется по формуле

$$C_n^k=n!/((n-k)!k!).$$

Задача 1. Для заданных n и k перечислить все k-элементные подмножества множества 0..n-1

Пример

Пусть n=5, k=3. Тогда имеем следующие подмножества ***M*** множества {0,1,2,3,4}:

0 1 2	0 2 3	1 2 3	2 3 4
0 1 3	0 2 4	1 2 4	
0 1 4	0 3 4	1 3 4	

Количество подмножеств $C_5^3=5!/(2!*3!)=10$.

Пример. Дано **n** предметов, каждый из которых характеризуется весом $\mathbf{w_i}$. Необходимо выбрать **k** предметов так, чтобы суммарный вес этого набора не превышал **W**.

Алгоритм генерации лексикографическом порядке:

1. выберем наименьшее *в лексикографическом порядке подмножество из* ***k*** *элементов* $\{0, 1, \ldots, k\text{-}1\}$ из имеющегося множества ***M=*** $\{0, 1, \ldots, n\text{-}1\}$. Полученное подмножество будем хранить в $\{p_0, p_1, \ldots, p_{k-1}\}$;

В нашем примере для n=5 и k=3 имеем {***0,1,2***};

2. от конца к началу текущего подмножества $\{p_0, p_1, \ldots, p_{k-1}\}$ ищем первый элемент p_i который можно увеличить на ***1***.

- если такого элемента нет, мы получили последнее подмножество из ***k*** элементов {n-k, … , n-2, n-1}. В нашем примере {***2,3,4***} – ***генерация закончена***;
- иначе:

3. увеличиваем $p_i = p_i + 1$. Всем последующим элементам $p_{i+1}, p_{i+2}, \ldots, p_{k-1}$ присваиваем значение большее на ***1*** чем предыдущий, $p_{i+1} = p_i + 1$;

4. выполняем пункт ***2***.

```
#include <iostream>
#include <vector>
using namespace std;
vector <int> p; int n, k;
void Print(vector <int> &p, int k)
{
 int i;
 for (i = 0; i < k; i++)  cout << p[i] << " ";
 cout << endl;
}
bool next_set(vector <int> &p, int n, int k) {
 int i,j;
  for (i = k - 1; i >= 0; i--)
    if (p[i] < n - k + i) {
       p[i] = p[i] + 1;
       for (j = i + 1;j < k; j++)
       p[j] = p[j - 1] + 1;
       return true;
    }
  return false;
}
```

```
int main()
{
  cin >> n >> k;
  p.resize(n);
  for (int i = 0; i < k; i++) p[i] = i;
  Print(p, k);
  while(next_set(p, n, k)) Print(p,
k);
  return 0;
}
```

Задача 2. По номеру L соответствующее сочетание (подмножество). Рассмотрим решение на примере: ***M={0,1,2,3,4,5}, N=6 ; k=3; L=15.***

Нумерация с нуля.

№	Текущее	K=|m| (m - множество используемых цифр)	Количество подмножеств C_K^S	L old	L new	Получено
1	?**	?=0, m={**0**, 1, 2, 3, 4, 5} ?=1, m={**1**, 2, 3, 4, 5}	$C_5^2 = 10$ $C_4^2 = 6$ 10 + 6 > 15	15	15 – 10 = 5	1**
2	1?*	? = 2, m={**2**, 3, 4, 5} ? = 3, m={**3**, 4, 5}	$C_3^1 = 3$ $C_2^1 = 2$ 3 + 2 = 5	5	5 – 5 = 0	14*
3	14?	?=5, M={5}	0	0		145

0) **0**12	4) **0**23	8) **0**35	12) 1**2**5	16) 234
1) **0**13	5) **0**24	9) **0**45	13) 1**3**4	17) 235
2) **0**14	6) **0**25	10) **12**3	14) 1**3**5	18) 245
3) **0**15	7) **0**34	11) 1**2**4	15) **145**	19) 345

Задача 3. По сочетанию (подмножеству) получить его номер. Рассмотрим решение на примере:
Дано подмножество ***{1, 4, 5}*** множества **M = *{0, 1, 2, 3, 4, 5}***, найти порядковый номер в лексикографическом порядке.

1. Первая цифра 1, т.е. подмножества начинающиеся с 0, использованы (0**). Их количество $C_5^2 = 10$;
2. Вторая цифра равна 4, т.е. подмножества начинающиеся с 2 и 3 использованы (12*, 13*). Их количество $C_3^1 + C_2^1 = 5$;
3. Третья цифра равна 5 (1, 4, **5**) и она последняя в множестве.
Порядковый номер подмножества будет C_5^2 + C_3^1+C_2^1 = 10 + 5 = **15**.

0) **012**	4) **023**	8) **035**	12) 1**25**	16) 234
1) **013**	5) **024**	9) **045**	13) 1**34**	17) 235
2) **014**	6) **025**	10) 1**23**	14) 1**35**	18) 245
3) **015**	7) **034**	11) 1**24**	15) **145**	19) 345

Генерация всех подмножеств

Задача 1. Пусть A={$a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$} – множество целых чисел. Построить все его непустые подмножества.

Для построения всех подмножеств можно использовать предыдущий алгоритм

```
for (k = 1; k < n; k++) {
   for (int i = 0; i < k; i++) p[i] = i;
   Print(p, k);
   while (next_set(p, n, k)) Print(p, k);
}
```

т.е. генерируем по одному, по два и т.д. до ***n*** элементов.

Битовый алгоритм. Поставим в соответствие каждому элементу множества 0 или 1. То есть каждому подмножеству соответствует *n*-значное число в двоичной системе счисления. Отсюда следует, что полный перебор всех подмножеств данного множества соответствует перебору всех чисел в двоичной системе счисления

от 1 до $2^n – 1$:

$$\underbrace{0\ldots0}_{n-1}1 \text{ до } \underbrace{1\ldots1}_{n}.$$

Легко подсчитать и количество различных подмножеств данного множества, оно равно $2^n – 1$ (или 2^n, с учетом пустого множества).

Очевидно, что за 1 секунду мы можем сгенерировать множество из $n \leq 20$ элементов.

```
#include <iostream>
#include <vector>
using namespace std;
vector <int> p; int n;
void subset(vector <int> p, int n) {
  for (int mask=1;mask<1<<n;mask++){
    for(int i=0; i<n; i++)
    if((1<<i & mask)>0) cout<<p[i]<<' '; cout<<endl;
  }
}
int main() {
    cin>>n;
    p.resize(n);
    for(int i=0; i<n; i++) p[i]=i;
    subset(p, n);
   return 0;
}
```

Размещения с повторениями

Размещения с повторениями из **n** по **k** – это последовательности длины **k**, в которых **n** возможных элементов могут повторяться.

Пример. Для n=4 и k=3, имеем:

0,0,0 0,0,1 0,0,2 0,0,3 0,1,0 0,1,1 0,1,2 0,1,3	0,2,0 0,2,1 0,2,2 0,2,3 0,3,0 0,3,1 0,3,2 0,3,3	1,0,0 1,0,1 1,0,2 1,0,3 1,1,0 1,1,1 1,1,2 1,1,3	1,2,0 1,2,1 1,2,2 1,2,3 1,3,0 1,3,1 1,3,2 1,3,3	2,0,0 2,0,1 2,0,2 2,0,3 2,1,0 2,1,1 2,1,2 2,1,3	2,2,0 2,2,1 2,2,2 2,2,3 2,3,0 2,3,1 2,3,2 2,3,3	3,0,0 3,0,1 3,0,2 3,0,3 3,1,0 3,1,1 3,1,2 3,1,3	3,2,0 3,2,1 3,2,2 3,2,3 3,3,0 3,3,1 3,3,2 3,3,3

На каждой из **k** позиций в последовательности независимо от других может находиться любой из **n** элементов, поэтому по правилу произведения общее количество размещений – $\mathbf{n}^k = 4^3 = 64$.

Задача 1. Перечислить все последовательности длины ***k*** из чисел ***0..n-1***.

Алгоритм генерации размещения лексикографическом порядке

1. Первой будет последовательность <0,0,…,0>, печатаем. Будем хранить последнюю напечатанную последовательность в массиве ***x[0]..x[k-1]***;

2. С конца ищем элемент который можно увеличить. Так как последним является последовательность ***<n-1,n-1,…,n-1>***, мы можем увеличить найденный элемент только до ***n-1***:

- если такого элемента нет, мы получили последнюю последовательность ***<n-1,n-1,…,n-1>***, печатаем и заканчиваем работу;

  иначе

- увеличиваем его на ***1***, а за ним стоящие элементы приравниваем ***0***, печатаем;

3. повторяем пункт 2.

```
#include <iostream>
#include <vector>
using namespace std;
vector <int> p;
int n,k;
void Print(const vector <int> p, int k) {
   int i;
   for (i=0; i<k; i++) cout<<p[i]<<" ";
   cout<<endl;
}
bool next_razm(vector <int> &p, int n, int k)
{
     for (int i=k-1; i>=0; i--)
      if (p[i]<n-1) {
         p[i]=p[i]+1;
         for (int j=i+1; j<k; j++) p[j]=0;
         return true;
       }
     return false;
}
```

```
int main() {
   cin >> n >> k;
   p.resize(n);
   for (int i = 0; i < k; i++) p[i]=0;
   Print(p,k);
   while(next_razm(p, n, k)) Print(p, k);
   return 0;
}
```

Размещения без повторений

Задача 1. Сгенерировать все размещения для заданного множества {0, 1, 2,…, N-1} и все размещения по K элементов в лексикографическом порядке.

Пример. N = 4, K = 3.

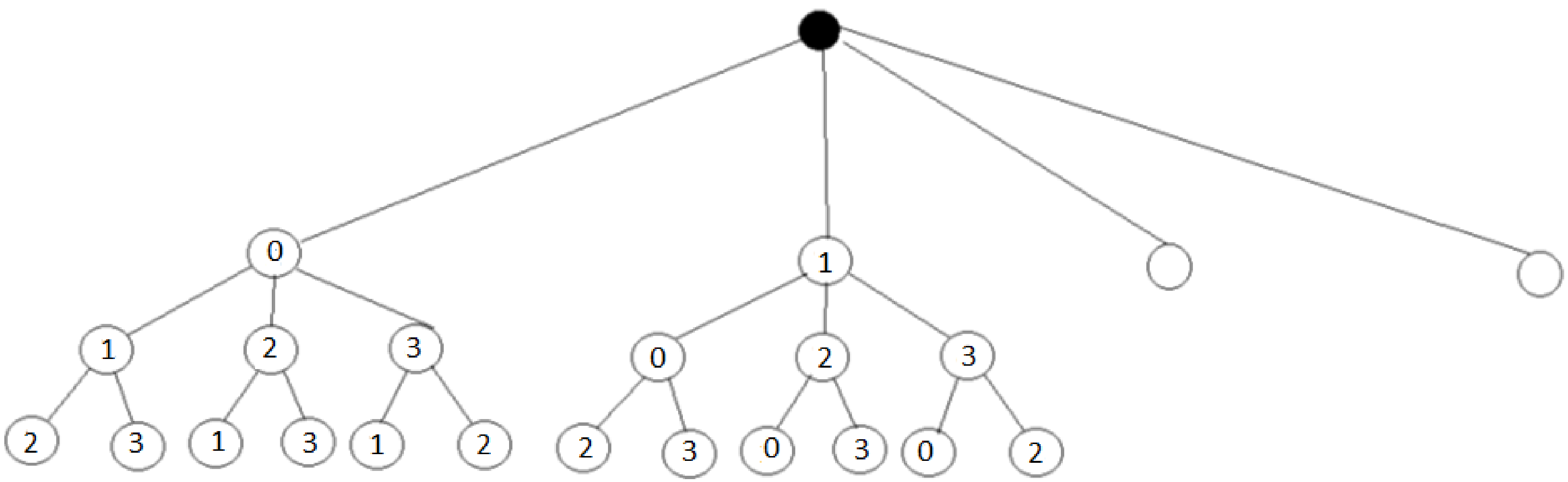
012	031	120	201	230	310
013	032	123	203	231	312
021	102	130	210	301	320
023	103	132	213	302	321

Количество размещений равна $A_N^K = \frac{N!}{(N-K)!}, A_4^3 = 24.$

Не рекурсивный алгоритм.

1. Строим наименьшее в лексикографическом порядке размещение 0,1,2, …,k-1. Из оставшихся элементов строим множество свободных элементов {k, k+1,…,N-1}. Обрабатываем полученное размещение.
2. Ищем в множестве свободных элементов наименьшее число большее последнего элемента temp = a[k-1].
3. Если такой элемент есть, заменяем последний элемент найденным числом. Это число удаляем из множества свободных элементов и добавляем в множество свободных элементов число temp. Переходим в начало пункта 2.
4. С конца ищем элемент a[i] < a[i+1].
5. Если такой элемент есть, в множество свободных элементов все элементы a[i+1], a[i+2],…,a[k-1] добавляем в множество свободных элементов. В множестве свободных элементов ищем наименьшее число большее temp = a[i]. Заменяем a[i] найденным числом и добавляем в множество свободных элементов temp. В элементы a[i+1], a[i+2],…,a[k-1] записываем в возрастающем порядке меньшие элементы множества свободных элементов удаляя их из этого множества. Переходим в пункт 2.
6. Если не найдено, заканчиваем поиск следующего размещения.

Рекурсивный алгоритм



Рассмотрим п*рограмму*

рекурсивного алгоритма:

```
#include <iostream>
#include <set>
#include <vector>
using namespace std;
vector <int> p;  int n, m;
set <int> s;
void Print() {
  for(int i = 0;i < m;i++) cout<<p[i] <<' ';
cout<<endl;
}
void Solve(int k){
  for(int i = 0;i < n;i++)
    if (s.find(i)==s.end()) {
      s.insert(i); p[k] = i;
      if (k < m-1) Solve(k+1); else Print();
      s.erase(i);
    }
}
```

```
void main(){
  cin>>n>>m;
  p.resize(n);
  Solve(0);
}
```