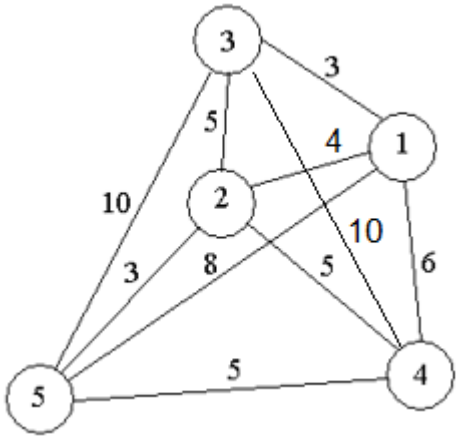
## Метод ветвей и границ

К идее метода ветвей и границ приходили многие исследователи, но Литтл с соавторами(1965) на основе этого метода разработали удачный алгоритм решения ***задачи коммивояжера*** и тем самым способствовали популяризации метода.

Идея метода такова: нужно разделить огромное число перебираемых вариантов на классы и получить оценки(снизу -- в задачах минимизации, сверху – в задачах максимизации) для этих классов, чтобы иметь возможность  отбрасывать не по одному, а целыми классами. Очевидно, что трудность состоит в том, чтобы найти такое разделение на классы(ветви) и такие оценки(границы). Рассмотрим алгоритм на конкретном примере. Пусть дана полная сеть с матрицей расстояний:




$$D = \begin{vmatrix} - & 4 & 3 & 6 & 8 \\ 4 & - & 5 & 5 & 3 \\ 3 & 5 & - & 10 & 10 \\ 6 & 5 & 10 & - & 5 \\ 8 & 3 & 10 & 5 & - \end{vmatrix}$$

***Оценка снизу***. Для получения оценки снизу мы воспользуемся следующей леммой.

***Лемма***. Вычитая любую константу из всех элементов любой строки или столбца ***D***, мы оставляем минимальный тур минимальным.

Очевидно, что этим преобразованием необходимо получить больше нулей в матрице ***D***. Для этого вычтем из каждой строки ее минимальный элемент, а затем вычтем из каждого столбца его минимальный элемент. После приведения по строкам и столбцам, соответственно, имеем

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| - | 4 | 3 | 6 | 8 |
| 4 | - | 5 | 5 | 3 |
| 3 | 5 | - | 10 | 10 |
| 6 | 5 | 10 | - | 5 |
| 8 | 3 | 10 | 5 | - |

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | - | 1 | 0 | 3 | 5 | 3 |
| 2 | 1 | - | 2 | 2 | 0 | 3 |
| 3 | 0 | 2 | - | 7 | 7 | 3 |
| 4 | 1 | 0 | 5 | - | 0 | 5 |
| 5 | 5 | 0 | 7 | 2 | - | 3 |

=>

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | - | 1 | 0 | 1 | 5 |
| 2 | 1 | - | 2 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 2 | - | 5 | 7 |
| 4 | 1 | 0 | 5 | - | 0 |
| 5 | 5 | 0 | 7 | 0 | - |

Сумма констант приведения по строкам равна **17**, сумма по столбцам – ***2***, общая сумма равна **19**.
Теперь будем исходить из последней приведенной матрицы. Если в ней удастся построить требуемый путь, удовлетворяющую трем вышеуказанным требованиям, и путь будет проходить только "через нули", то ясно, что мы получим минимальный тур. Но он же будет минимальным и для исходной матрицы ***D***; только для того, чтобы получить правильную стоимость, тура нужно будет обратно прибавить все константы приведения, и стоимость тура изменится с ***0*** до ***19***. Таким образом, минимальный тур не может быть меньше, чем **19**, и мы получили оценку снизу (**границу**) для всех туров.

**Ветвление**. В этом шаге делается ***оценка нулей*** приведенной матрицы. Рассмотрим нуль в клетке ***(1,3)*** приведенной матрицы. Он означает, что цена перехода из города ***1*** в город ***3*** равна ***0***. Если мы не пойдем из города ***1*** в город ***3***, то все равно нужно ***въехать*** в город ***3*** за цены, указанные в третьем столбце.

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | - | 1 | 0 | 1 | 5 |
| 2 | 1 | - | 2 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 2 | - | 5 | 7 |
| 4 | 1 | 0 | 5 | - | 0 |
| 5 | 5 | 0 | 7 | 0 | - |

Дешевле всего из города ***2*** за цену равную ***2***. Все равно надо будет выехать из города ***1*** за цену, указанную в первой строке. Дешевле всего из городов ***1*** или ***4*** за цену равную ***1***. Суммируя эти два минимума, имеем ***2+1=3***. Если не ехать "по нулю" из города ***1*** в город ***3***, то надо заплатить не меньше ***3*** – это и есть оценка нуля. Оценки всех нулей отмечены на ***рис.1*** значком вверху.

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | - | 1 | $0^3$ | 1 | 5 |
| 2 | 1 | - | 2 | $0^0$ | $0^0$ |
| 3 | $0^3$ | 2 | - | 5 | 7 |
| 4 | 1 | $0^0$ | 5 | - | $0^0$ |
| 5 | 5 | $0^0$ | 7 | $0^0$ | - |

Рис.1

Выберем максимальную из этих оценок. Их два и равны трем. Выберем клетку ***(1,3)***. Разобьем все туры на два класса – *включающее ребро* ***(1,3)*** и *не включающее ребро* ***(1,3)***. Про второй класс можно сказать, что придется приплатить еще ***3***, так что туры этого класса "стоят" ***22*** и больше. Что касается первого класса, то в нем надо рассмотреть матрицу на ***рис.2а***, полученную вычеркиванием первой строки и третьего столбца исходной матрицы, и установкой запрета в клетке ***(3,1)***, т.к. в эту клетку мы вошли по ребру ***(1,3)*** и возврат преждевремен.

| | 1 | 2 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | - | 0 | 0 |
| 3 | - | 2 | 5 | 7 |
| 4 | 1 | 0 | - | 0 |
| 5 | 5 | 0 | 0 | - |

а)

=>

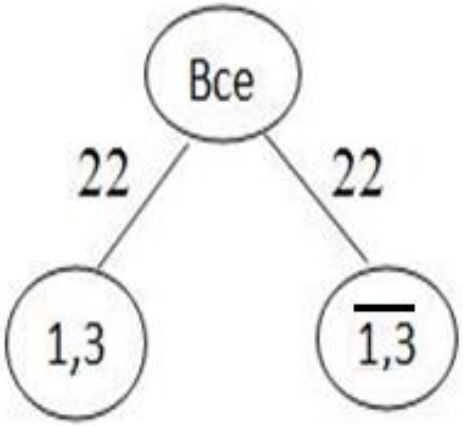
| | 1 | 2 | 4 | 5 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 0 | - | $0^0$ | $0^0$ | |
| 3 | - | $0^3$ | 3 | 5 | 2 |
| 4 | $0^0$ | $0^0$ | - | $0^0$ | |
| 5 | 4 | $0^0$ | $0^0$ | - | |

б)

1

Рис.2

Произведем приведение уменьшенной матрицы на ***1*** по первому столбцу и на ***2*** по третьей строке (см. ***рис.2б***), так что каждый тур, ей отвечающий, стоит не меньше ***22***. Мы получили следующее ветвление:




Числа над кружками – оценки снизу.

***Продолжим ветвление***. Для этого оценим нули в уменьшенной матрице (***рис.2б***).

Максимальная оценка равна ***3***. Выберем клетку ***(3,2)*** данной матрицы. Имеем следующее ветвление:

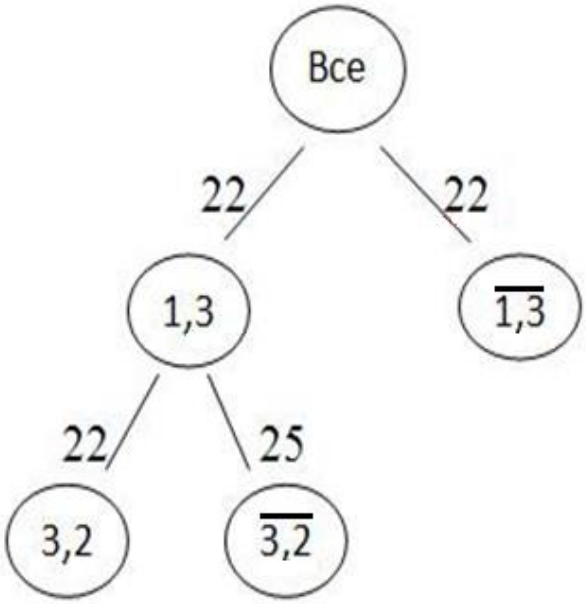



Рис.3

Оценка для нижней правой вершины есть ***22+3=25***. Для оценки левой ветви нужно вычеркнуть из матрицы на ***рис.3б*** строку ***3*** и столбец ***2***, и поставить запрет в клетку ***(2,1)***, т.к. она уже входит в тур ***(1,3,2)*** и возврат преждевремен. Получим матрицу на ***рис.4а***. Эта матрица неприводима, следовательно, оценка положительного варианта не увеличивается и остаётся равным ***22***.

| | 1 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|
| 2 | - | $0^0$ | $0^0$ |
| 4 | $0^4$ | - | $0^0$ |
| 5 | 4 | $0^4$ | - |

=>

| | 4 | 5 |
|---|---|---|
| 2 | - | 0 |
| 5 | 0 | - |

а) б)

Рис.4

Оценим нули в матрице ***рис.4а***. Нуль с максимальной оценкой ***4*** находится в клетке ***(4,1)***. Отрицательный вариант имеет оценку ***22+4=26***. Для получения оценки положительного варианта уберем строку ***4*** и столбец ***1***, ставим запрет в клетку ***(2,4)*** (***рис.4б***). Эта матрица неприводима, следовательно, оценка положительного варианта не увеличивается (***рис.5***)

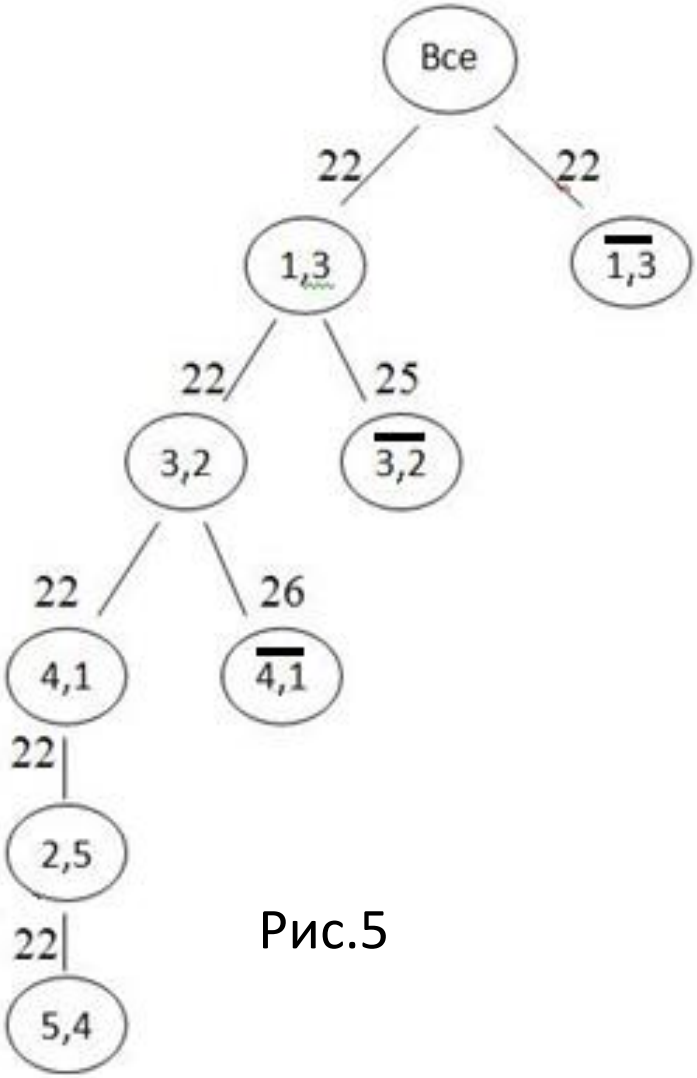



Рис.5

Теперь, когда осталась матрица ***2×2*** с запретами по диагонали, достраиваем тур ребрами (***2,5***) и (***5,4***). Результат показан на ***рис.5***. Мы не зря ветвились по положительным вариантам. Сейчас получен тур

**1 -> 3 -> 2 -> 5 -> 4 -> 1**

стоимостью в ***22***. При достижении низа по дереву перебора класс туров сузился. Теперь пора пожинать плоды своих трудов. Все классы, имеющие оценку ***22*** и более, лучшего тура не содержат. Поэтому соответствующие вершины на ***рис.5*** вычеркиваются. Вычеркиваются также вершины, оба потомка которой вычеркнуты. Поскольку у вершины "все" убиты оба потомка, она убивается тоже. Вершин не осталось, перебор окончен.

Если бы остались не "убитые" вершины, то надо было бы продолжить поиск с этих вершин. Хороших теоретических оценок быстродействия алгоритма Литтла нет, но практика показывает, что на современных машинах он позволяет решать задачу коммивояжера с ***n≈1000***.