

# 等価回路の等価電圧測定における計器の内部抵抗の影響と テブナンの定理による解析値と実測値の比較

Teduka Yuuki 1522063

Collaborator:Nakamura Kouta 1522B02

Lab date: September 26th and October 3rd, 2023

## 概要

この実験の第一の目的は、等価回路の等価電圧を測定する際に、測定系 (計器) の内部抵抗が及ぼす影響を調べ、被測定系の等価抵抗が十分大きくなった場合でも等価電圧を正確に測定できる計器を求めることである。特に、可動コイル型電圧計、エレクトロニクス電圧計、電位差計の3つの計器に焦点を当てて、それぞれの計器の内部抵抗が等価電圧の測定に与える影響を調べた。実験では、被測定系の等価回路の等価電圧と等価抵抗を既知とした状態で、等価抵抗を  $50\ \Omega$  から  $100\text{M}\ \Omega$  まで変化させながら、開放端電圧を測定した。実験結果は、電位差計を用いた場合が最も安定して等価電圧に近い値を測定できることがわかった。一方、エレクトロニクス電圧計は可動コイル型電圧計と比べて内部抵抗が大きかったため、等価抵抗が  $100\text{k}\ \Omega$  程度までならば安定して等価電圧を測定できることが示された。第二の目的は、与えられた複雑な直列回路網モデルにテブナンの定理を用いて解析し、テブナンの定理による解析値と実測値が一致することを確認することである。実験では、テブナンの定理を用いて等価回路の等価電圧と等価抵抗を求め、実測値と比較した。結果、有効数字2桁で一致した。さらに、電圧計の内部抵抗  $R_m$  を変化させた場合の開放端電圧を測定し、テブナンの定理で計算した理論曲線上に、実測値がプロットすることも確認した。

## 1.1 可動コイル型電圧計

## 1 Introduction

図1のような、テブナンの定理の等価回路の等価電圧  $E_{eq}$  を測定する際、被測定系の内部抵抗  $R_m$  の影響を考慮する必要がある。実験では、3つの計器に焦点を当てて、それぞれの計器の内部抵抗が等価電圧の測定に与える影響を調べた。具体的には、可動コイル型電圧計、エレクトロニクス電圧計、電位差計の3つの計器を用いて、テブナンの等価回路の等価電圧  $E_{eq}$  と等価抵抗  $R_{eq}$  を既知とした状態で、開放端電圧  $V$  を測定し、それぞれの計器の内部抵抗  $R_m$  を求め、計器の内部抵抗と等価抵抗の関係に基づいて、正確な等価電圧測定のための適切な計器の選択を明らかにした。等価電圧の正確な測定を行うための計器の選択基準を明らかにすることを目的としている。

以下、実験で扱った3つの計器について説明する。

図1のような直流回路において、端子間 A,B の等価電圧  $E_{eq}$  を測定することを考える。

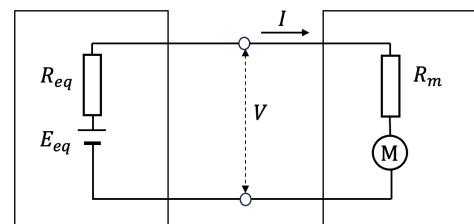


Fig.1 Equivalent circuit of the measurement system under test and a movable coil voltmeter

被測定系の電源電圧  $E_{eq}$ 、抵抗  $R_{eq}$ 、および可動コイル型電圧計の内部抵抗  $R_m$  が接続されている場合、回路に流れる電流  $I$  は:

$$I = \frac{E_{eq}}{R_{eq} + R_m} \quad (1)$$

となる。よって、 $R_{eq}$  による電圧降下  $V_{R_{eq}}$  は:

$$V_{R_{eq}} = IR_{eq} = \frac{E_{eq}R_{eq}}{R_{eq} + R_m} \quad (2)$$

で計算されるから、端子間の電圧  $V$  は:

$$V = E_{eq} - V_{R_{eq}} = \frac{E_{eq}R_m}{R_{eq} + R_m} \quad (3)$$

で測定される。従って、測定系の内部抵抗  $R_m$  の影響を小さくするためには、 $R_m$  の値を大きくする必要がある。

具体的には、 $R_m$  が  $R_{eq}$  に比べて十分大きい場合、測定される電圧  $V$  は電源電圧  $E_{eq}$  に非常に近くなる。しかしながら、可動コイル型電圧計の場合、メーター  $M$  を動かすのにある程度の電流が必要になる。従って、 $R_m$  は十分に大きくすることができない。

## 1.2 エレクトロニクス電圧計

では、可動コイル型電圧計において、電流を小さくすることなく、 $R_m$  を大きくする方法はないだろうか。可動コイル型電圧計の前に、図 2 のような電圧増幅器を接続することを考える。

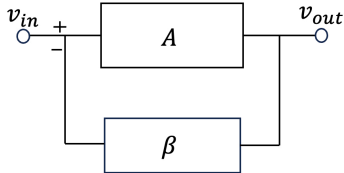


Fig.2 Feedback circuit

まず、入力電圧  $v_{in}$  は、電圧増幅度  $A$  を持つ増幅器によって増幅される。次に、増幅された電圧  $v_{in}A$  は、電圧増幅度  $-\beta$  のフィードバックを受ける。このフィードバックが無限回繰り返されることを考えると、出力電圧  $v_{out}$  は:

$$\begin{aligned} v_{out} &= v_{in}A + v_{in}A(-\beta A) + v_{in}A(-\beta A)^2 + \dots \\ &= \frac{v_{in}A}{1 + \beta A} \end{aligned}$$

へと減少する。この電圧負帰還により、可動コイル型電圧計の内部抵抗  $R_m$  は、 $R_m(1 + \beta A)$  へと増加する。このような電圧計をエレクトロニクス電圧計と呼ぶ。

## 1.3 電位差計

(2) 式を見ると、電流  $I = 0$  の状態で電圧  $V$  を測ることができたら、 $R_{eq}$  の値によらず、 $V_{R_{eq}}$  の影響を小さくできる。図 3 のように、検流計を見ながら電圧  $V$  を測定することを考える。

電流  $I$  が流れていないように、 $V_{var}$  を調整すると、電圧  $V_2 = V = E_{eq}$  となり、測りたい電圧  $E_{eq}$  を測定することができる。

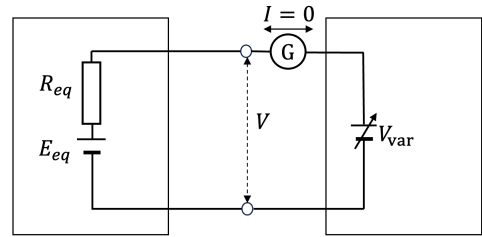


Fig.3 Diagram of potentiometer circuit

## 2 Method

まずは、可動コイル型電圧計、エレクトロニクス電圧計、電位差計の 3 つの計器を用いて開放端電圧を測定した。等価抵抗を  $50 \Omega$  から  $100M \Omega$  まで十分に大きくした場合の、等価電圧とのずれを調べた。次に、テブナンの定理を検証するための実験を行った。

### 2.1 開放端電圧の測定

まず、測定系の回路図を図 4 に示す。

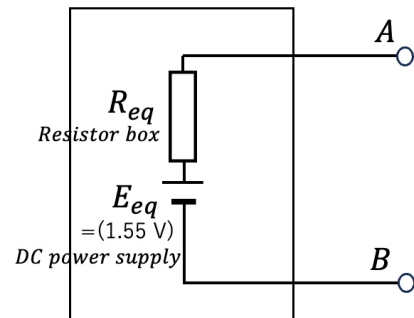


Fig.4 Circuit of the system under test

等価電圧  $E_{eq}$  は 1.550V で一定とし、 $E_{eq}$  の値は、測定が終わるまで変更しない。等価抵抗  $R_{eq}$  は、抵抗箱を用いて、50  $\Omega$  から 100M  $\Omega$  まで変化させる。その時の、端子 A、B 間の開放端電圧  $E_{eq}$  を、可動コイル型電圧計、エレクトロニクス電圧計、電位差計の 3 つの計器を用いて測定する。

電位差計を用いる場合の、回路図は図 5 に示した。

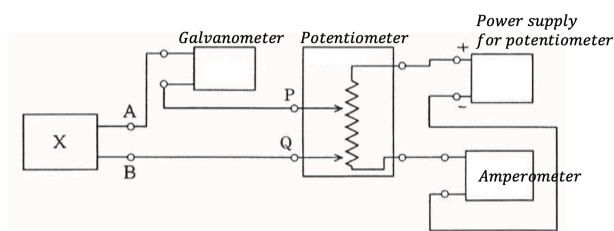


Fig.5 Potentiometer circuit diagram

まず、 $R_{eq} = 0$  の場合の、端子 A、B 間の開放端電圧  $E_{eq}$  を可動コイル型電圧計 (3V レンジ) で測定した。次に、 $R_{eq}$  を 50  $\Omega$  から 100M  $\Omega$  まで変化させながら、端子 A、B 間の開放端電圧  $E_{eq}$  を可動コイル型電圧計 (3V レンジと 10V レンジ)、エレクトロニクス電圧計、電位差計で測定した。

## 2.2 テブナンの定理による解析値と実測値の比較

### 2.2.1 テブナンの定理を用いた等価電圧と等価抵抗の計算

図 6 に実験で解析した回路を示す。直流安定化電源  $E_1[V]$ 、 $E_2[V]$  が接続されている。このモデルの端子 ①、②からみた等価電圧と等価抵抗をテブナンの定理を用いて計算する。図 7 に解析の手順を示した。

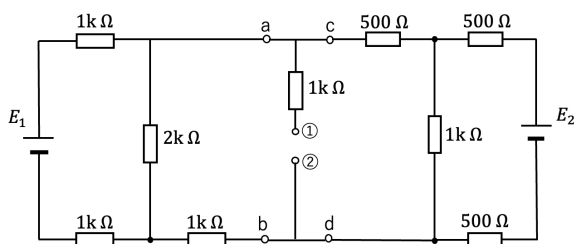


Fig.6 Series Circuit Models

具体的な手順は以下の通りである：

端 a-b および端 c-d で分割する。まず、端 a-b における等価回路を求めると、端 a-b の回路で、2k  $\Omega$  の抵抗にかかる電圧は  $E_1/2$  である。また、端 a-b から見た抵抗を変化させないことから、端 a-b の回路は図 5(a) の 2 段目のように変形できる。端 c-d の回路も同様に変形すると、結果として、端子 ①、②から見た抵抗は

$$R_{eq} = \frac{5k}{3} \approx 1.667k[\Omega] \quad (4)$$

電圧は Kirchhoff の法則を用いて：

$$E_{eq} = \frac{2E_1 + E_2}{6}[V] \quad (5)$$

と計算される。

### 2.2.2 等価電圧 $E_{eq}$ と等価抵抗 $R_{eq}$ の測定

テブナンの定理を用いて計算した電圧 (5) 式と抵抗値 (4) 式の値が、実測値と一致するかを確かめた。以下の手順で開放端電圧と短絡電流を測定し、 $E_{eq}$  と  $R_{eq}$  を求めた：

[使用器具]

エレクトロニクス直流電圧計 No.2、デジタル電流計 No.3

まず、直流電源  $E_1$ 、 $E_2$  の電圧をエレクトロニクス直流電圧計で測定した。

次に、端子 ①、②の開放端電圧をエレクトロニクス直流電圧計で測定した。その後、端子 ①、②を短絡させ、短絡電流  $I_s$  をデジタル電流計で測定した。 $R_{eq} = E_{eq}/I_s$  より等価抵抗を計算した。

### 2.2.3 電圧計の $R_m$ を変化させた場合の測定

(3) 式より、内部抵抗  $R_m$  を変数とした場合、開放端電圧  $V$  は

$$V(R_m) = \frac{E_{eq}R_m}{R_{eq} + R_m} \quad (6)$$

にプロットされるはずである。このため、以下の手順で  $R_m$  を変化させた場合の  $V$  の値を測定した：

[使用器具]

エレクトロニクス直流電圧計 No.2、デジタル電流計 No.3、抵抗箱 No.1

まず、端子①、②間に抵抗箱を接続し、抵抗箱の抵抗値を  $100\ \Omega$  から  $100\text{k}\ \Omega$  まで変化させた。その際の、

開放端電圧  $E_{eq}$  をエレクトロニクス直流電圧計で測定した。

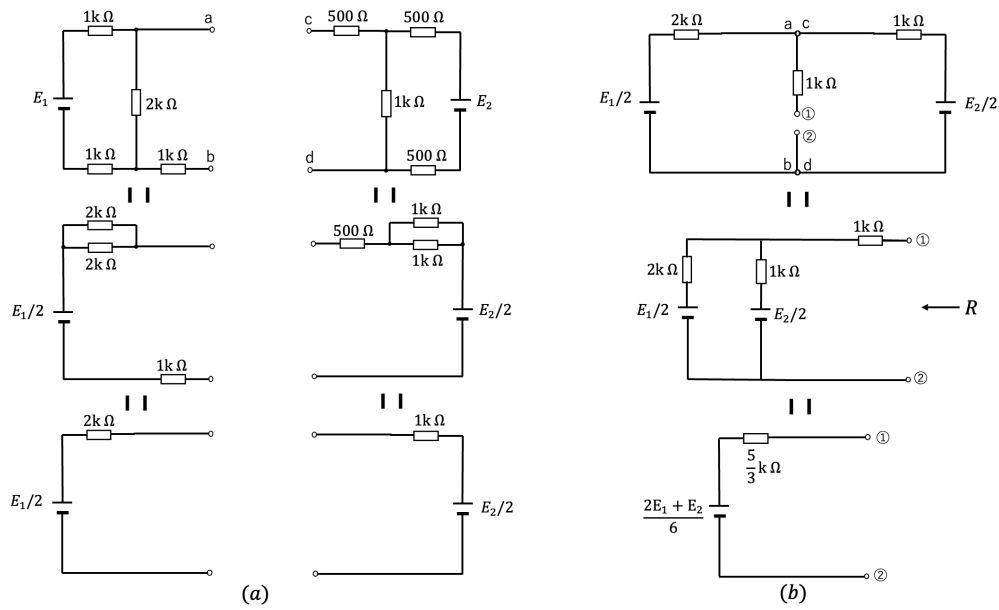


Fig.7 Procedure for analyze by Thévenin's Theorem

### 3 Results

#### 3.1 開放端電圧の測定結果

開放端電圧  $V$  の測定結果を表 1 に示した。 $R_{eq}$  は、抵抗箱の抵抗値である。電位差計では  $R_{eq}$  が 100M  $\Omega$  まで大きくなった場合でも、等価電圧  $E_{eq} = 1.550\text{V}$  に近い値を測定できていることが分かる。エレクトロニクス電圧計は、 $R_{eq}$  が 100k  $\Omega$  程度までならば、安定して等価電圧  $E_{eq} = 1.550\text{V}$  に近い値を測定できていることが分かる。

Table 1 Result of V measurement

$R_{eq}[\Omega]$	moving coil (3v range) [V]	moving coil (10v range) [V]	electronics [V]	potentiometer [V]
0	1.57			
50	1.54	1.55	1.51	1.5575
100	1.51	1.55	1.51	1.5575
200	1.47	1.55	1.51	1.5575
500	1.34	1.5	1.51	1.5575
1k	1.17	1.4	1.51	1.5575
2k	0.94	1.3	1.51	1.5575
5k	0.58	1	1.51	1.5575
10k	0.36	0.8	1.51	1.5575
20k	0.2	0.5	1.51	1.5575
50k	0.08	0.25	1.51	1.5575
100k	0.04	0.15	1.51	1.5575
200k	0.02	0.1	1.5	1.5575
500k	0.01	0.05	1.49	1.5575
1M	0	0	1.4	1.5575
5M	0	0	1.2	1.5575
10M	0	0	0.85	1.5575
20M	0	0	0.6	1.5575
50M	0	0	0.4	1.5575
100M	0	0	0.2	1.5575

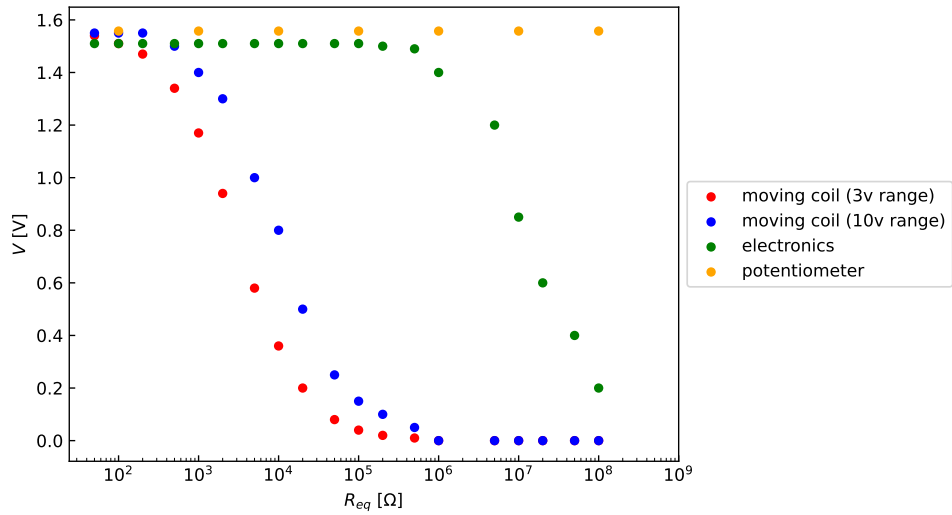


Fig.8 V Plot.  
 $R_{eq}$ -axis is scaled on a log scale.

測定点をプロットしたグラフを図 8 に示した。x 軸は抵抗  $R_{eq}$  を表しており、対数スケールでプロットしている。y 軸は電圧  $V$  を示している。電位差計は変化は見られないが、可動コイル型電圧計とエレクトロニクス電圧計は、 $R_{eq}$  が増加するにつれ  $V$  が減少しており、 $\frac{1}{1+x}$  の関数の特性と一致している。

### 3.2 等価電圧 $E_{eq}$ と等価内部抵抗 $R_{eq}$ の測定結果

直流電源の測定結果は、 $E_1 = 5.005 \text{ V}$ 、 $E_2 = 10.055 \text{ V}$  であった。(5) 式に代入すると、 $E_{eq} = 3.344 \text{ V}$  と計算される。一方、端子①、②の開放端電圧  $E_{eq}$  を測定した結果は、 $E_{eq} = 3.31 \text{ V}$  であった。短絡電流  $I_s$  を測定した結果は、 $I_s = 1.979 \text{ mA}$  であった。従って、 $R_{eq} = E_{eq}/I_s$  から  $1.672 \text{ k}\Omega$  と計算される。テブナンの定理による解析値は  $1.667 \text{ k}\Omega$  であった。いずれも、テブナンの定理による解析値と少数第一位までの二桁の値が一致した。

### 3.3 電圧計の $R_m$ を変化させた場合の $V$ の測定結果

表 2 に、 $R_m$  を  $100 \Omega$  から  $100 \text{ k}\Omega$  まで変化させた時の  $V$  の値の測定結果を示した。表中の  $V_{measured}$  は、エレクトロニクス直流電圧計で測定した値、 $V_{theoretical}$  は、(3) 式から計算された値を示している。(3) 式に  $E_{eq} = 3.344 \text{ V}$ 、 $R_{eq} = 1.667 \text{ k}\Omega$  を代入すると、 $V_{theoretical}$  は:

$$V = \frac{3.344 R_m}{1667 + R_m} \quad (7)$$

で計算される。

Table 2 Measured and theoretical values of  $V$  corresponding to  $R_m$

$R_m [\Omega]$	$V_{\text{measured}} [\text{V}]$	$V_{\text{theoretical}} [\text{V}]$
100	0.190	0.189
200	0.361	0.358
500	0.752	0.772
1000	1.215	1.254
2000	1.781	1.824
5000	2.511	2.508
10000	2.832	2.866
20000	3.082	3.087
50000	3.201	3.236
100000	3.283	3.289

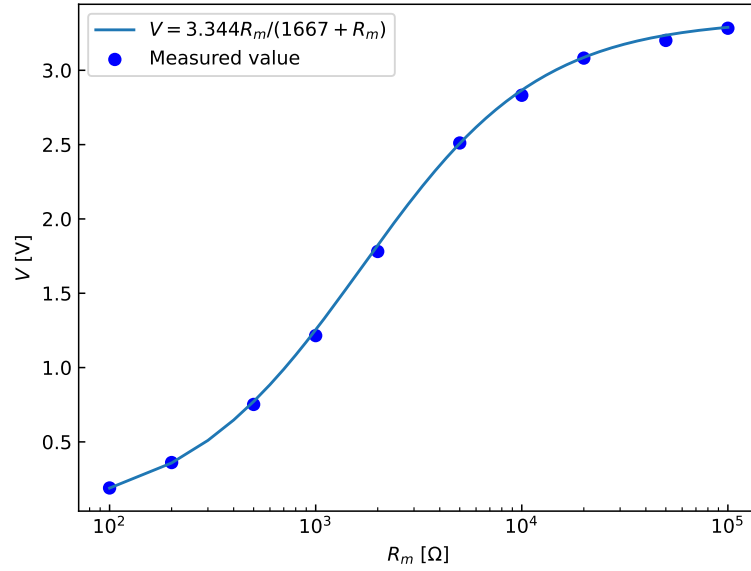


Fig.9 Relationship between theoretical curves and measured values

図 9 に、理論曲線 (7) 式と測定値を同時にプロットしたグラフを示した。 $R_m$  は対数目盛で表してある。プロットされている青色の点は、実際に測定された  $V$  の値を示している。これらの点は、理論曲線にほぼ従って分布しており、実測値と理論値の一致度は非常に高いことが観察された。 $V = \frac{3.344R_m}{1667+R_m}$  という式で表される理論曲線は、抵抗  $R_m$  の値が大きくなるにつれて、飽和に向かう形をしており、図 9 を見ると、 $R_m$  が 100k  $\Omega$  を超えたあたりで  $V$  の値が飽和していることが確認できる。

## 4 Discussion

### 4.1 計器の内部抵抗の計算

3つの方法で、計器の内部抵抗を求めた。

方法 1: 最適にフィットする近似曲線から、 $R_m$  を導出

図 8 に、最小二乗法より近似曲線  $V = \frac{1.55R_m}{R_{eq} + R_m}$  をひき、誤差を最小にするときから  $R_m$  を求めた。フィッティング結果を図 10 に示した。

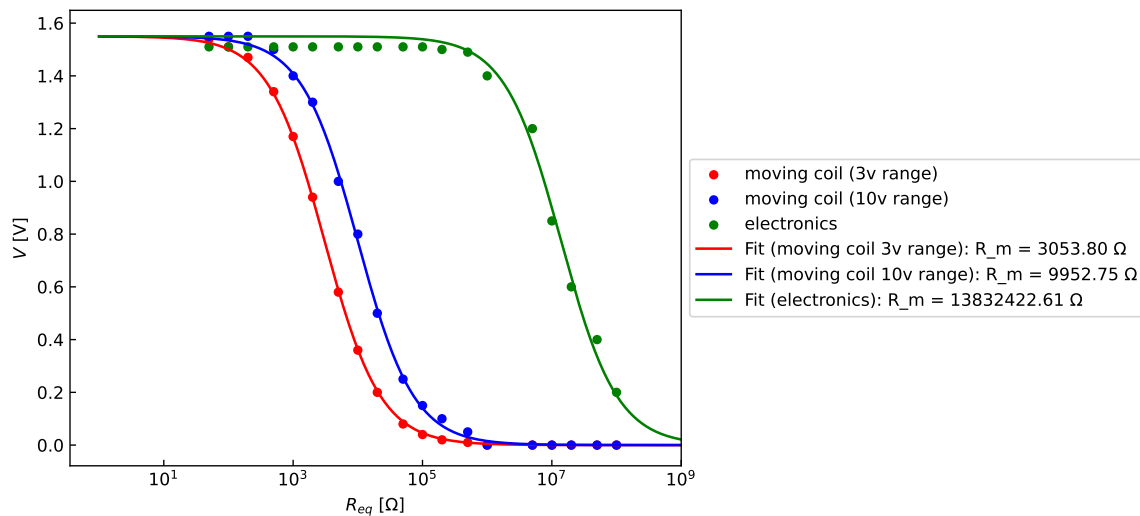


Fig.10 Analyze  $R_m$  (Method 1)

可動コイル型電圧計 (3V レンジ)、可動コイル型電圧計 (10V レンジ)、エレクトロニクス電圧計の内部抵抗は、それぞれ 3.0k Ω、10k Ω、14M Ωであった。

方法 2: 変曲点付近での線形近似

(3) 式より、 $R_m = R_{eq}$  の時、 $V = E_{eq}/2$  となることから、図 8 の 0.775V に最も近い 2 点を取り出して最小二乗法で引いた直線と、 $V = 0.775$  の交点から  $R_m$  を求めた。

変曲点付近で線形近似できる背景としては、(3) 式  $V = \frac{E_{eq}R_m}{R_{eq} + R_m}$  を  $R_{eq} = 10^x$  と変数変換して、V の x の 2 回微分が 0 になる値 (変曲点) を求めると、 $V = 0.775$  との交点と非常に近い値になる。

最小二乗法で引いた直線と、 $V = 0.775$  を引いたグラフを図 11 に示した。



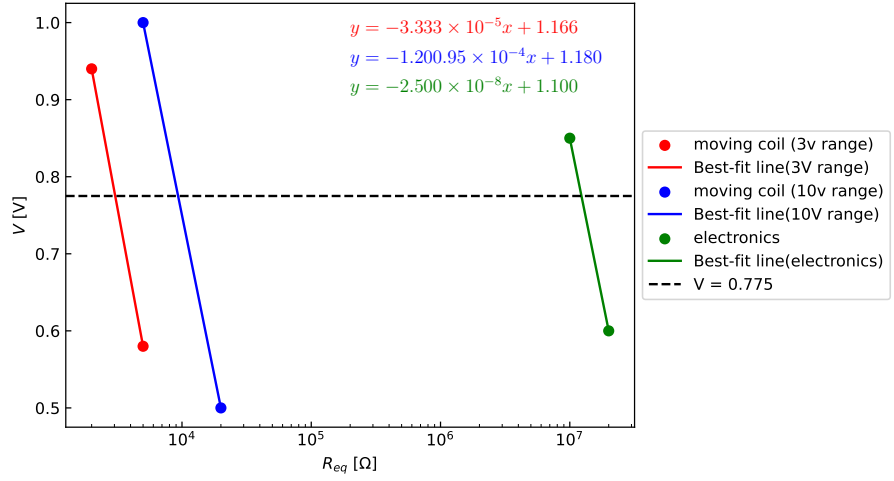


Fig.11 Analyze  $R_m$  (Method 2)

交点から、 $R_m$  を求めた結果を表 3 に示した。

Table 3 Results of  $R_m$  calculation by Method 1

	$R_m$ [ $\Omega$ ]
moving coil (3v range)	3.3k
moving coil (10v range)	11k
electronics	13M

方法 3: 縦軸  $1/V$  として重み付き最小二乗法の傾きから導出 (3) 式を変形すると:

$$\frac{1}{V} = \frac{1}{E_{eq}} + \frac{R_{eq}}{E_{eq}R_m} \quad (8)$$

となるので、 $1/V$  を縦軸、 $R_{eq}$  を横軸として直線を引いた際の傾きから  $R_m$  を求めることができる。  
プロットした点から重み付き最小二乗法で直線を引いた。その結果を図 12 に示した。

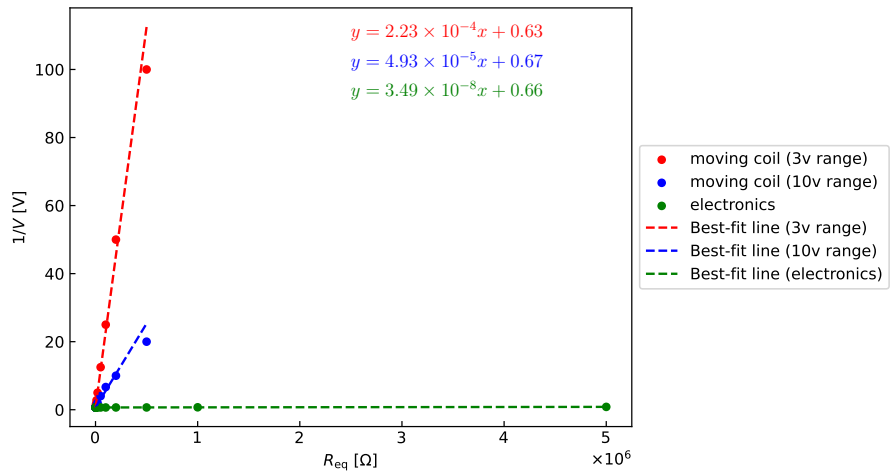


Fig.12 Analyze  $R_m$  (Method 2)

近似曲線の切片は、いずれも  $1/E_{eq} = 0.645$  に近い値をとっている。  
 それぞれの電圧計において得られた直線の傾きから、 $R_m$  を求めた。表 4 に、その結果を示した。

Table 4 Results of  $R_m$  calculation by Method 2

	$R_m$ [ $\Omega$ ]
moving coil (3v range)	2.8k
moving coil (10v range)	13k
electronics	18M

## 5 Conclusion

可動コイル型電圧計は、測定対象の電圧変化を非常に高い精度で検出できる。今回用いた可動コイル型電圧計の場合、 $R_{eq}$  が 100  $\Omega$  程度であれば、可動コイル型電圧計を用いることで  $V$  は  $E_{eq}$  に非常に近い値をとることができる。しかし、可動コイル型電圧計の内部抵抗は小さかったため、 $R_{eq}$  が非常に大きい場合は、電位差計を用いると  $V$  は  $E_{eq}$  に近い値を測定することができる。一方で、エレクトロニクス電圧計は、可動コイル型電圧計に比べて内部抵抗が大きかったため、 $R_{eq}$  が 10k  $\Omega$  程度であれば、 $E_{eq}$  に近い値を測定することができた。

## 参考文献

- [1] 東京理科大学理学部応用物理学科, “物理学実験テキスト”, 2023.