

スペクトル分解能と屈折率の波長依存性について

Teduka Yuuki 1522063

Collaborator: Nakamura Kouta 1522B02, Mizusiri Keigo 1522089

Lab date: 18th and 25th April 2023

概要

この実験の目的は主に三つある。一つ目は、波長分布を既知とする光をスペクトル分解し、スペクトル分解能について考察することである。スペクトル分解能とは、同時に異なる波長または周波数の光や電磁波を区別する能力のことを指す。二つ目は、光の屈折率の波長依存性を調べることである。屈折率は透明物質では可視光領域で一般に短波長ほど屈折率が大きくなる。三つ目は、白色 LED のスペクトル分布を調べることである。これらの目的に基づいて、以下の三つの実験を行った。実験 1 では、波長分布が与えられた Na,Hg,Cd ランプの光をスリットに通し、反射型回折格子に反射させ、分散した光をスクリーンで観測することで、スペクトル分解を行った。Cd ランプについてはスリット幅が 1000 μm の時と、200 μm の時でスペクトルを観測した。その結果、スリット幅を狭めた方が、スペクトル分解能を向上させることがわかった。実験 2 では、ガラス製三角プリズムに Cd ランプの光を入射させ、最小偏角を測定することで屈折率を求めた。波長は実験 1 で求めた値を用いて、波長に対する屈折率の波長依存性を調べた。その結果、屈折率は波長が短くなるにつれて大きくなることが確認できた。実験 3 では、白色 LED のスペクトル分布を調べた。白色 LED のスペクトル分布は、一様ではなく、青色と黄色の二つのピークがあることがわかった。

ことがある。これを異常分散 (anomalous dispersion) という。

1 Introduction

1.1 屈折率の波長依存性

よく知られているように、ある波長 λ の光線が、媒質 1 から媒質 2 に斜めに入射する場合、入射角 i と屈折角 r の間には以下の関係が成り立つ。

$$\sin i / \sin r = n_{21} = \text{constant} \quad (1)$$

n_{21} は、媒質 2 の媒質 1 に対する相対屈折率で、特に媒質 1 が真空の場合は $n_2 \equiv n_{21}$ を絶対屈折率という。 n_{21} は、入射角 i が変化しても変わらないが、波長や媒質の温度が変われば変化する量で、特に波長の変化に対する屈折率の変化を分散 (dispersion) という。分散自身をまた波長に依存する量である。屈折率の波長依存性は、透明物質では可視光領域で一般に短波長ほど屈折率が大きくなっている。これを正常分散 (normal dispersion) という。これに対して、強い吸収のある領域では、逆に短波長に向かって、屈折率が減少していく

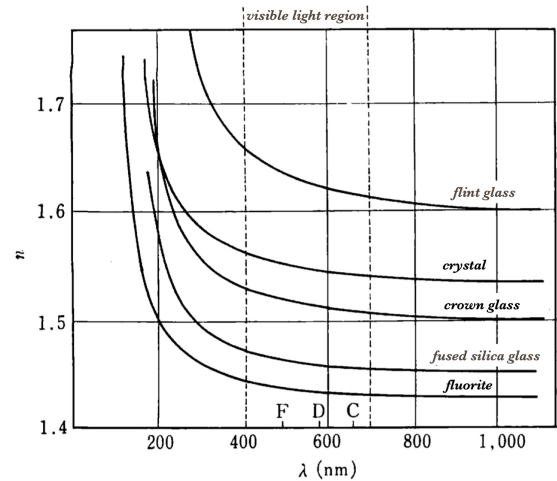


図 1 光学材料の屈折率の波長依存性^{*2}

図 1 に、よく用いられる光学材料の屈折率の波長依存性を示した。屈折率の変化は波長に対して直線的ではないが、波長領域を可視光に限れば、ほぼ直線的と見做し得る。従って、各波長 λ に対する屈折率 n を求

^{*2} 参考: <https://annex.jsap.or.jp>

め、 n - λ グラフにプロットした場合、直線的になるはずである。実験 2-2 でこれを確かめた。屈折率の絶対測定には、測定したい物質で三角プリズムを作り、一つの斜面にある波長の光線を入射させ、他面から出てくる光線との角、すなわち偏角 δ を測定する。 δ は入射角によって変わるが、極小値 δ_{min} をもつ。プリズムの頂角を α とすると、屈折率 n は、

$$n = \sin\{(\alpha + \delta_{min})/2\} / \sin(\alpha/2) \quad (2)$$

で計算できる。この式は付録で導出する。つまり、 α を既知として、各波長 λ における δ_{min} を測定することで、各波長に対する屈折率を測定できる。

1.2 反射型回折格子による波長分布の測定

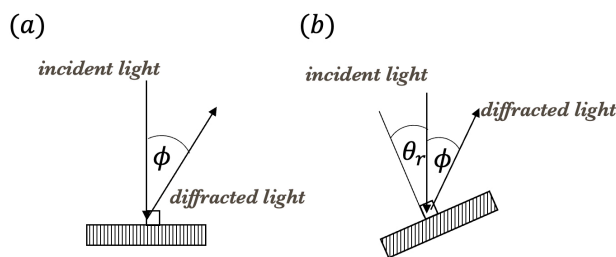


図 2 入射光と検出光の経路のなす角を固定した場合の入射角と回折角

反射型回折格子を用いたスペクトル測定は、光の波長を分散するために使用される実験法の一つである。回折格子は、平行な溝が等間隔に彫られた平板であり、入射した光を反射させることで波長ごとに分散する。

この実験法では、まず回折格子を入射光に対して正しく配置し、回折格子に狭い光束を当てる。回折格子に入射した光は、溝の間隔によって反射され、スクリーン上に分散して映し出される。スクリーン上に映し出された分散された光を観察することで、入射光の波長分布を測定することができる。

図 2 のように反射型回折格子に光を入射させた場合を考える。図 1-(a) のように、入射光と回折光のなす角を ϕ とし、図 1-(b) のように回折格子を θ_r だけ回転させた時、検出される回折光の条件は、

$$d\{\sin(\theta_r + \phi) + \sin \theta_r\} = m\lambda \quad (3)$$

で与えられることは分かる。

m は回折の次数を表しているの、 d を既知とし、入

射光と回折光のなす角 ϕ を測定することで、波長 λ を求めることができる。

1.3 白色 LED のスペクトル

図 3 から分かるように、一般に使用されている白色 LED はスペクトル分布に偏りがある。465nm あたりで鋭いピークがあり、560nm あたりでも、緩やかなピークが見られる。一般に使用されている白色 LED は、青色光を出す青色 LED と黄色光を出す蛍光物質を組み合わせたものであり、青色と黄色は補色の関係にあるため、青色光と黄色光を混ぜ合わせた光が白色光として見えている。

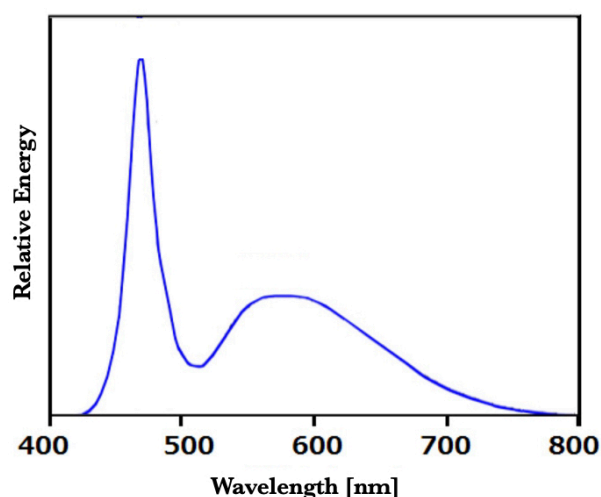


図 3 擬似白色発 LED のスペクトル

2 Methods

[実験装置]:

ブレッドボード、波長可変スリット、平凸レンズ、両凸レンズ、ブームブロッカー、スクリーン.

フォトダイオード：検出素子前に、幅 200 μm のスリットを付けている。

プリズム：ガラス製のプリズムを用いる。形状は正三角形であり、頂角は 60° である。

反射型回折格子 (Thorlabs: GR25-1205)：刻線数は 1200 lines/mm、ブレイズ波長 500 nm。

Na, Cd, Hg ランプ：ランプの光は安定するまで時間がかかる。特に、Cd ランプは 15 分程度待つ必要がある。

白色 LED (Thorlabs: LEDWE)：電源は乾電池 (1.5V) を 3 つ直列に繋ぎ、抵抗 68 Ω をつないでいる。

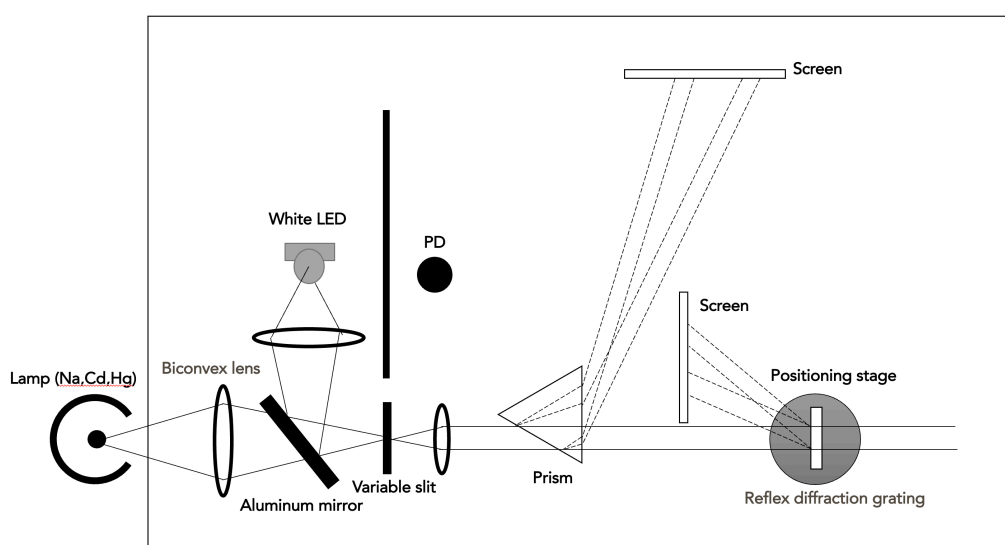


図 4 測定機器配置図

図 4 は測定系の全体像である。光源は白色 (LED) もしくは Na,Cd,Hg ランプを使用し、それぞれの光は両凸レンズによって可変スリットに集光させる。光源の切り替えはアルミミラーで行う。可変スリットを通った光はコリメータレンズによって平面波へ変換する。光強度は、フォトダイオード (PD) の出力電圧によって測定される。

2.1 反射型回折格子による波長分布の測定

1-2 節で述べたように、反射型回折格子で検出される回折光の条件は (3) 式

$$d\{\sin(\theta_r + \phi) + \sin \theta_r\} = m\lambda$$

で与えられる。

なので、光を回折格子に垂直に入射することで $\theta_r = 0$ とし、回折した 1 次光をスクリーンで観測することで、その光の波長 λ は

$$\lambda = d \sin \phi \quad (4)$$

で求められる。 ϕ は入射光と回折光のなす角であるから、図 5 のように、スクリーンと回折光の距離 L 、スクリーン上の回折光の位置 x を測定することで、 \tan の逆関数から ϕ を求めることができる。

まず、回転ステージに反射型回折格子を設置し、白色 LED の光を回折格子に垂直に入射した。(0 次光が入射光と重なるようにした) 反射型回折格子からの 1 次の回折光を観測できるようにスクリーンを固定した。回折角により赤～紫と変化していることが確認できた。回折格子からスクリーンまでの距離 L を定規を用いて測定した。次に光源を Na、Hg、Cd ランプの順に変え、

各輝線に対する回折光をスクリーン上で確認し、回折光の位置 x を計測した。スクリーン上の回折光の位置 x は、スクリーンに目盛りをつけて測定した。

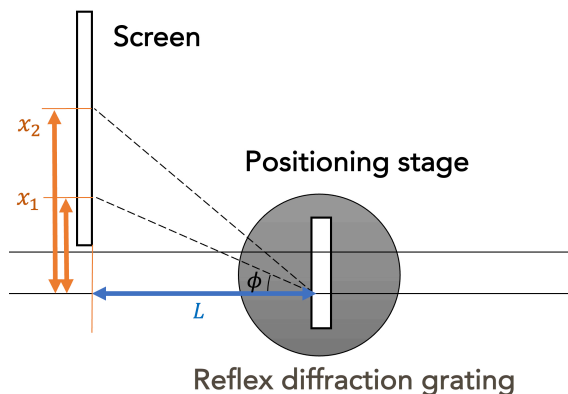


図5 反射型回折格子の回折角測定

2.2 屈折率の波長依存性の測定

各波長 λ における最小偏角 δ_{min} を求め、(2) 式より各波長に対する屈折率を計算した。 δ_{min} はスクリーンとの距離、輝線の位置を測定することで求めた。

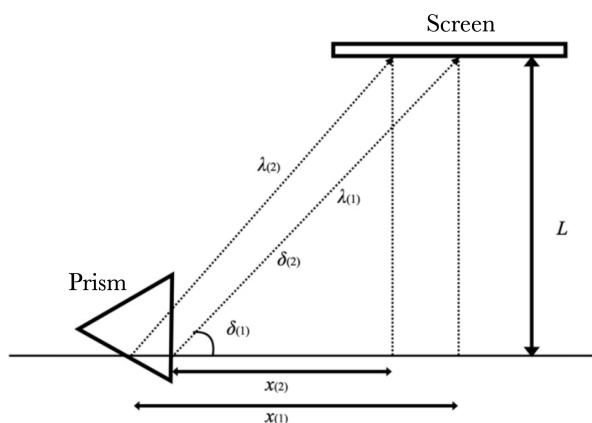


図6 プリズムによる偏角の測定

まず、図4のように、回折格子の間にプリズムを置き、Cd ランプの光を当てた。可変スリットの幅は $200\mu\text{m}$ とした。プリズムを通り分光された光をスクリーン上で観察できるように、スクリーンを固定し、プリズムからスクリーンの長さ L を測った。スクリーン上に Cd ランプの輝線が縦線として映し出されることを確認したら、各輝線 $\lambda_{(1)}$ 、 $\lambda_{(2)}$.. に対して偏角 $\delta_{(1)}$ 、 $\delta_{(2)}$ が最

小値になるようにプリズムの角度を微調整し、最小偏角の値を図6の x_1 、 x_2 .. の長さを測ることで計算した。スクリーンの位置を変え、計3回の計測を行なった。

輝線の波長は λ 実験 2-1 で求めた Cd ランプの波長を文献値と比較し、一番近い文献値に対する屈折率を計算した。

2.3 白色 LED のスペクトル測定

白色 LED のスペクトルを求めるには、白色 LED の λ - θ 特性が必要になるが、その計測は面倒なので、Cd ランプで波長校正曲線を求めることで、白色光 LED の放射スペクトルを得ることができる。正確には、(3) 式を変形したものが校正曲線であるが、フィッティングは2次関数で行なった。

初めに、回転ステージに反射型回折格子を固定し、白色光が垂直に入射するようにした。平凸レンズは、回折格子側を凸とした。増幅フォトダイオードはスリット面を回折格子側に向け、その前面は回折格子に対して垂直に向くようにした。ある特定の回折角への光のみが集光レンズを通してスリット中心に焦点が結ばれており、スリットを抜けて検出素子へ到達する。それとは異なる方向への回折光は、レンズを通ったのち、スリットの壁にぶつかるため検出器までは到達しない。

まず、波長校正曲線の測定実験を行なった。反射型回折格子に Cd ランプの光を垂直に入射した。1次の回折光を検出できるようにした。出力電圧が最も高くなる時の回転ステージの位置と出力電圧この測定を記録した。

次に、白色 LED のスペクトル測定を行なった。この実験は波長校正曲線を用いて行うため、回折格子を抜き取るなど設定が変わる行為を行ってはならない。白色 LED の光を反射型回折格子に入射した後、回転ステージを連続的に回転させながら、1次回折光の光強度を測定した。この際、波長校正曲線を参考にして波長範囲 $300\sim 800\text{nm}$ あたりで測定した。

3 Results

3.1 反射型回折格子による波長分布の測定

Na ランプでは、橙の光線が観測された。Hg ランプでは、青、緑、赤の3つの光線が観測された。Cd ラン

表 1 L 、 x の測定結果と各輝線の波長 (L : スクリーンまでの距離、 x : 輝線までの距離)

Type of Lamp	sodium (Na)	mercury (Hg)			cadmium (Cd)			
Observed Color	Orange	Blue	Green	Red	Purple	Blue	Green	Red
L [cm]	15.1	17.7	17.7	17.7	11.4	11.4	11.4	11.4
x [cm]	15.2	10.2	14.9	16.8	8.2	8.4	9.5	13.4
$\text{Arctan}(x/L)$ [rad]	0.789	0.523	0.700	0.759	0.594	0.635	0.646	0.866
λ [nm]	591	416	537	574	466	494	502	635
Literature Value [nm]	589.592	435.835	546.074	576.959	467.815	479.992	508.582	643.847

ブでは、紫、青、緑、赤の 4 つの光線が観測された。各輝線に対する回折光の位置 x と、スクリーンまでの距離 L を測定し、(4) 式を用いて波長を計算した結果、表 1 のようになった。文献値から比較しても、実験値は文献値に近い値を取っていることがわかる。

3.2 屈折率の波長依存性の測定

Cd ランプで観測した、緑、青、紫の 4 つの光線に対して、偏角が最小となる位置を測定した。赤、緑、青、紫の 4 つの光線の位置 x_1 、 x_2 、 x_3 、 x_4 を表 2 に示す。 L は、反射型回折格子の中心からスクリーンまでの距離であり、3 回位置を変えて測定した。

表 2 Cd ランプにおけるプリズムの最小偏角の位置の測定

	L [cm]	x_1 [cm]	x_2 [cm]	x_3 [cm]	x_4 [cm]
1st	18.2	16.7	16.4	16.1	15.4
2nd	25.3	21.5	21.0	20.7	20.6
3rd	10	9.3	8.5	8.3	8.1

L, x から最小偏角 θ を求め、(2) 式から屈折率 n を求めた。正三角形のプリズムであることより、頂角 $\alpha = 60$ とした。

表 3 は、求まった屈折率 n の平均値である。

表 3 Cd ランプにおけるプリズムの屈折率の計算結果

Color	Red	Green	Blue	Purple
n	1.618	1.631	1.636	1.643

長波長になるにつれて、屈折率が大きくなることがわかる。

波長と屈折率の関係性を詳しく見るために、横軸波長 λ 、縦軸屈折率 n としてプロットした。 λ は、実験

2-1 で求めた一番近い値の文献値を用いた。

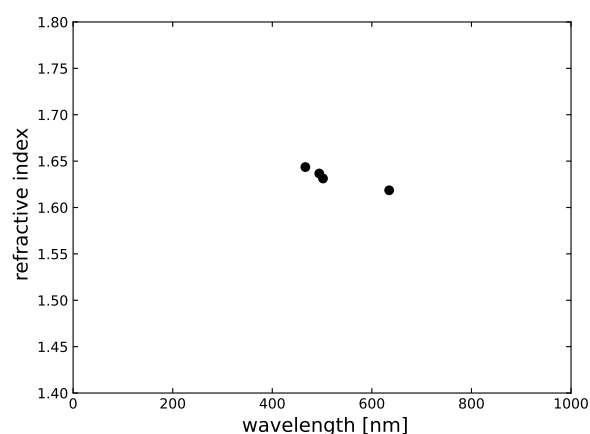


図 7 波長と屈折率の関係

図 1 と同じスケールでプロットすると、ほぼ直線的に並んだ。

波長領域を可視光に限った為、ほぼ直線的に並んだが、これより短波長側では、屈折率の変化率が大きくなることが予想される。

3.3 白色 LED のスペクトル測定

初めに、Cd ランプの波長校正曲線の測定を行った。表 4 は、スリット幅を 200 μm にした時の Cd ランプの角度、色毎の電圧の測定結果である。

表 4 スリット幅 200 μm での最大電圧近辺の回転角と出力電圧の測定

Color	Purple	Blue	Green	Red
Wavelength[nm]	466	494	502	635
Angle [°]	220	219	219	213
VotagemVDC	8	15	24	21

この結果を元に、電圧と波長の関係をプロットすると、図 8 のようになった。

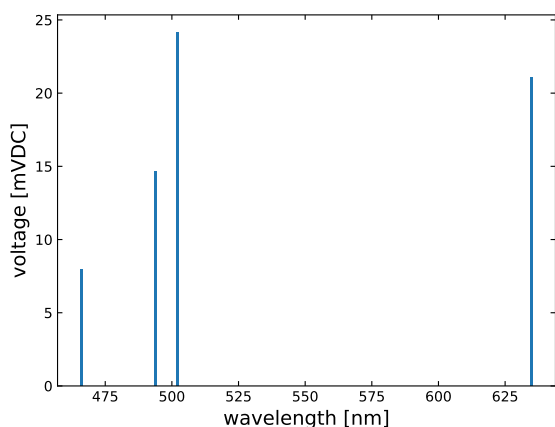


図 8 Cd ランプの波長際の出力電圧

出力電圧は、緑色の波長が最大であることがわかる。白色 LED のスペクトル分布を測定するために、波長校正曲線を求めた。波長 λ の文献値を元に、横軸 θ 、縦軸 λ としてプロットすると、図 9 のようになった。

二次関数としてフィッティングを行い、波長校正曲線を求めた結果、波長校正曲線の式は

$$\lambda = -0.43\theta^2 + 159.80\theta - 13996.71 \quad (5)$$

となった。

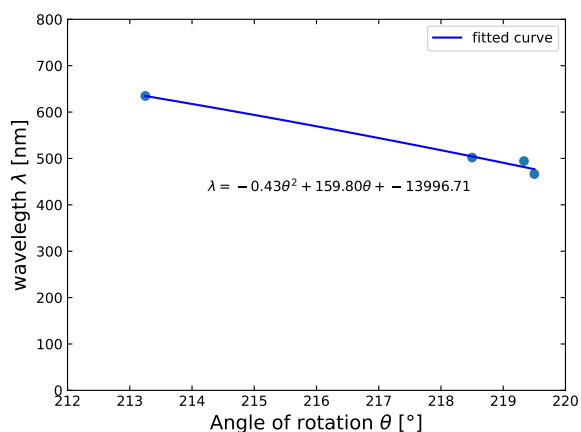


図 9 波長校正曲線

次に、光源を白色 LED に変え、スリット幅を 200 μ m にした時の白色 LED の角度、角度毎の電圧を測定した。

波長校正曲線 (5) 式を用いて、回転角度を波長に変換し、波長に対する電圧の関係をプロットした。図 10 は、横軸波長、縦軸電圧としてプロットした結果である。

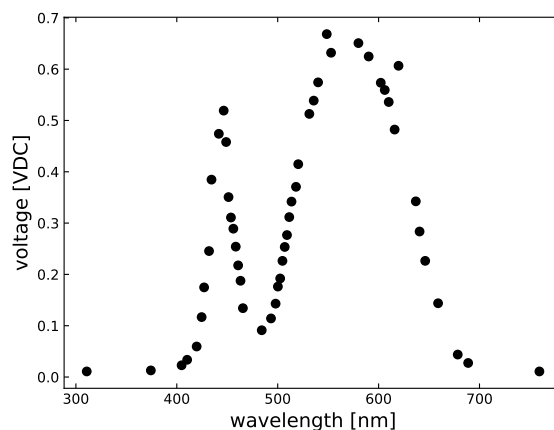


図 10 白色 LED のスペクトル分布

図 10 より、白色 LED から出ている光は 2 回極値を取っていることが分かる。一つ目は、波長 460nm 付近で鋭いピークを持ち、二つ目は、波長 560nm 付近で緩やかなピークを持つことが確認できる。これは、白色 LED が、青色 LED と黄色 LED を混ぜたものであることを示している。

図 3 と比較すると、青色光のピークは小さくなっているが、極値を取っている波長の位置は、ほぼ同じであることが分かる。従って、波長校正は正しく行われていると考えられる。

550nm、610nm 付近で、はずれ値が見られるが、これは、スリット幅が 200 μ m と狭く、光の強度が弱かったため、他の光源の影響を受けたものだと考えられる。

4 Discussion

4.1 スペクトル分解能についての議論

表 1 を見ると、測定値と文献値に大きなズレはなかったが、これ以上の精度で測定することはできないだろうか。測定時を振り返ると、スクリーンに映るスペクトルの幅は大きく、光線の位置を正確に測ることが難しかった。このスペクトルの幅を狭くすることができれば、より正確な波長を測定することができるだろう。

スペクトル分解を行う際は、回折格子の溝と光が干渉する際に、波面が平坦であることが重要である。スリット幅が広い場合は、光が広がり波面が不均一になるため、干渉縞がぼやけてしまう。一方、スリット幅が狭い場合は、光が集まり、波面が平坦であるため、干渉縞が鮮明に現れる。従って、理論上は、スリット幅を狭

くすることで、スペクトルの幅を狭くすることができると考えられる。

図 11 は Cd ランプのスペクトルのピーク時である 500nm 付近で、スリット幅を変えた時のスペクトルを観測した結果である。スリット幅 200 μm 時のスペクトルは青、スリット幅 1000 μm 時のスペクトルは赤でプロットしている。

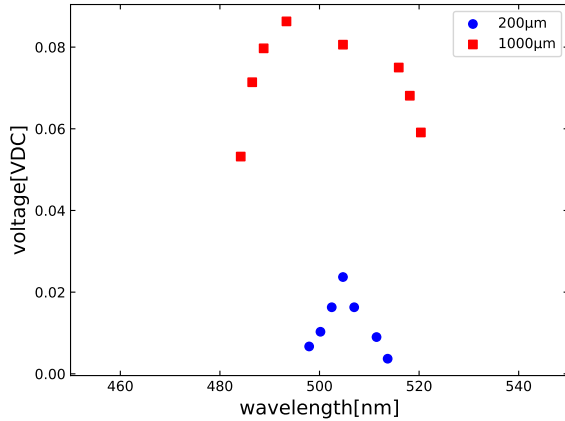


図 11 Cd ランプのスリット幅 1000 μm 、200 μm の時のスペクトル

スリット幅 200 μm の時のスペクトルは、波長が 500nm 付近でピークを取っていることが分かるが、スリット幅 1000 μm の時のスペクトルは、スペクトルの幅が広く、ピークがぼやけていることが分かる。

従って、スリット幅を 200 μm よりも狭くすることができれば、より正確な波長を測定することができると考えられる。しかし、200 μm よりも狭くすると、光の強度が弱くなり、他の光源の影響を大きく受けるため、スペクトルのピークを測定することが難しくなる。そう考えると、今回の実験環境ではスリット幅 200 μm が最適であると考えられる。

4.2 屈折率の波長依存性

3-2 の結果から分かるように、物質の屈折率は、波長によって変化する。この現象は、分散と呼ばれる。では、この分散がどのように起こるかを簡単なモデルで説明しよう。

屈折率は注目する新空中の光の速さ c と、物質中の光の速さ v の比である。光の速さは、誘電率 ε と透磁

率 μ を用いて、 $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ と表されるので、屈折率 n は

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0}} \quad (6)$$

と表される。ここで、 ε_0 は真空の誘電率、 μ_0 は真空の透磁率である。誘電体では、 $\mu \approx \mu_0$ と置けるので、結局 ε と波長の関係を求めれば屈折率の分散の様子がわかる。電気双極子放射の原理より、光の伝播の様子は分極の振動によって説明できる。

今、原子を構成する電子に角振動数 ω をもつ電場

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_0 \exp i\omega t \quad (7)$$

が作用したとする。電子の位置を $\mathbf{x}(t)$ 、質量を m とすると、電子に関する運動方程式は

$$m \frac{d^2 \mathbf{x}(t)}{dt^2} = -m\omega_0^2 \mathbf{x}(t) + e\mathbf{E}(t) \quad (8)$$

と表される。ここで、 ω_0 は電子の固有振動数、 e は電子の電荷である。この式は、振子に強制振動を与えたような場合を表しており、解は容易に求まる。計算の結果、外部電場による電子の変位は

$$\mathbf{x}(t) = \frac{e}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \mathbf{E}(t) \quad (9)$$

と求まる。

分極 \mathbf{P} は単位体積中の電気双極子の数 (N) で定義できるので、

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= N\mathbf{x}(t) \\ &= \frac{Ne^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \mathbf{E}(t) \end{aligned} \quad (10)$$

と表される。一方、誘電体の誘電率 ε と分極 \mathbf{P} の間には、

$$\varepsilon \mathbf{E} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (11)$$

という関係があるので、誘電率 ε は

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon_0 + \frac{\mathbf{P}}{\mathbf{E}} \\ &= \varepsilon_0 + \frac{Ne^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \end{aligned} \quad (12)$$

となる。屈折率の定義から

$$n^2 = 1 + \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m} \left(\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \right) \quad (13)$$

が求まる。これが角振動数 ω の光に対する屈折率を表す式であり、分散式と呼ばれる。

この分散式は密度が小さいガスに対して有効であるが、密度の大きい液体や個体に対しては、分子間の相互作用を考慮する必要がある。詳しい計算によると、個体等に対しては

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{Ne^2}{3\epsilon_0 m} \left(\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \right) \quad (14)$$

の式が利用される。いずれにせよ、屈折率が入射光の角振動数、すなわち波長に依存することがわかる。

式、(15) から明らかなように、 $\omega < \omega_0$ の領域、すなわち角振動数が ω_0 より小さい領域 (波長が長い領域) では、 ω が増す (波長が短くなる) につれて屈折率は屈折率も大きくなることがわかる (正常分散)。分散式からは、 $\omega_0 = \omega$ (共鳴あるいは共振) 付近で屈折率が無限大に発散してしまうが、実際には電子に抵抗力が作用し有限の値となる。共鳴条件は可視光領域以外の波長域でもいくつか見られ、 ω の増加に伴い屈折率が減少する領域もある (異常分散)。

5 Conclusion

実験 1 では、波長分布が与えられた Na, Hg, Cd ランプの光をスリットに通し、反射型回折格子に反射させ、分散した光をスクリーンで観測することで、スペクト

ル分解を行った。Cd ランプについてはスリット幅が 1000 μm の時と、200 μm の時でスペクトルを観測した。その結果、スリット幅を狭めた方が、スペクトル分解能を向上させることがわかった。

実験 2 では、ガラス製三角プリズムに Cd ランプの光を入射させ、最小偏角を測定することで屈折率を求めた。波長は実験 1 で求めた値を用いて、波長に対する屈折率の波長依存性を調べた。その結果、屈折率は波長が短くなるにつれて大きくなることが確認できた。

実験 3 では、白色 LED のスペクトル分布を調べた。白色 LED のスペクトルについては、波長 450nm の鋭いピークと、波長 580nm を中心とするブロードなピークで構成されていることを確認した。450nm は青、580nm は黄色に相当する波長であることから、今回測定した白色 LED は、青色と黄色の発光体を組み合わせで擬似的に白色に見せているものと結論した。

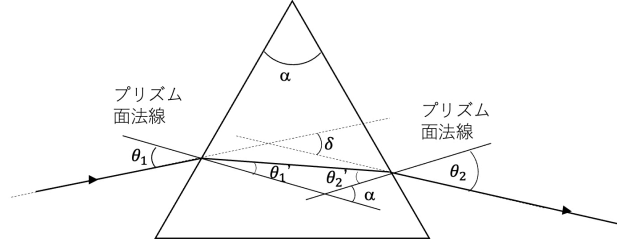
参考文献

- [1] 青木貞雄, 『光学入門』 (共立出版)
- [2] 石黒浩三, 『光学』 (裳華房)
- [3] 尾中龍猛, 『光と個体』

Appendix

プリズムと最小偏角

ここでは、ある波長に対する物質の屈折率をプリズムの屈折角を利用して求める方法を紹介する。今、図 12 のように空気中に置かれた頂角 α の三角柱プリズム (屈折率 n) を考える。



光は平面に平行に左側から入射し、2 回の屈折を経て右側に出射する。入射光線と出射光線のなす角 (偏角) を δ とすると

$$\delta = (\theta_1 - \theta'_1) + (\theta_2 - \theta'_2) \quad (15)$$

である。 δ の値は入射光を変えると変化する。光線の逆進性を考えると、 $\theta'_1 = \theta'_2$ のとき、入射光線と出射光線が対象になり、 δ の値は極小値をとる。この時の偏角 δ_{min} を最小偏角と呼ぶ。入射角 θ_1 の変化に対して δ が極値を取る条件は、

$$\frac{d\delta}{d\theta_1} = 0 = 1 + \frac{d\delta_2}{d\theta_1} \quad (16)$$

である。次に $dN = 0$ より

$$d\theta'_1 + d\theta'_2 = 0 \quad (17)$$

入射点および出射点におけるスネルの法則より

$$\begin{aligned} \sin \theta_1 &= n \sin \theta'_1 \\ n \sin \theta'_2 &= \sin \theta_2 \end{aligned} \quad (18)$$

それぞれの両辺を微分すると

$$\begin{aligned} \cos \theta_1 d\theta_1 &= n \cos \theta'_1 d\theta'_1 \\ n \cos \theta'_2 d\theta'_2 &= \cos \theta_2 d\theta_2 \end{aligned} \quad (19)$$

式 (17), (18), (19) を整理すると

$$\frac{\cos \theta_1}{\cos \theta_2} = \frac{\cos \theta'_1}{\cos \theta'_2} \quad (20)$$

となる。両辺を 2 乗して再びスネルの法則を用いると

$$\frac{1 - \sin^2 \theta_1}{1 - \sin^2 \theta_2} = \frac{n^2 - \sin^2 \theta_1}{n^2 - \sin^2 \theta_2} \quad (21)$$

となる。上の式を整理すると

$$(n^2 - 1)(\sin^2 \theta_1 - \sin^2 \theta_2) = 0 \quad (22)$$

となり、 $n \neq 1$ なので、 $\sin \theta_1 = \sin \theta_2$ がいえる。この時の δ の値を δ_{min} とすると

$$\theta_1 = \frac{\delta_{min} + \alpha}{2} \quad (23)$$

となり、 $\theta'_1 = \theta'_2 = \alpha/2$ となる。結局、屈折率 n は (2) 式

$$n = \sin\{(\alpha + \delta_{min})/2\} / \sin(\alpha/2)$$

で与えられる。