高知工科大学 経済・マネジメント学群

統計学 2

10. 2つの平均値を比較する

やない ゆうき
矢内 勇生

https://yukiyanai.github.io

yanai.yuki@kochi-tech.ac.jp

このトピックの目標

- 統計的検定の手続きを理解する
  - 帰無仮説、有意水準、検定の誤り
- 2組の標本平均から母平均が異なるかどうか検定する方法を身につける
  - 対応のないデータの場合
  - 対応のあるデータの場合

統計的仮説検定

統計的検定

- 標本統計量を使い、**母集団に関する**ある仮説が「正しい」か「正しくない」かを確率的に判断すること

帰無仮説と対立仮説

- 帰無仮説（null hypothesis: H_0）
- 対立仮説（alternative hypothesis: H_1）
  - 2つの仮説をセットで考える
  - 2つの仮説は相互に排他的
  - **帰無仮説が棄却されたとき、対立仮説が正しいことにする**
    - 統計的検定における「お約束」

帰無仮説と対立仮説の例

- 疑問：同じ職業の男女で年収に違いがあるか？
  - 帰無仮説：「男性と女性の年収は同じ」
  - 対立仮説：「男性と女性の年収は異なる」

有意水準（危険率）

- 有意水準（危険率）
  - 統計的仮説検定に用いる確率
  - 帰無仮説が正しいとき、**誤って帰無仮説を棄却してしまう**確率
  - 大きいほど帰無仮説を棄却しやすい：大きいほど対立仮説を採用しやすい

臨界値と棄却域

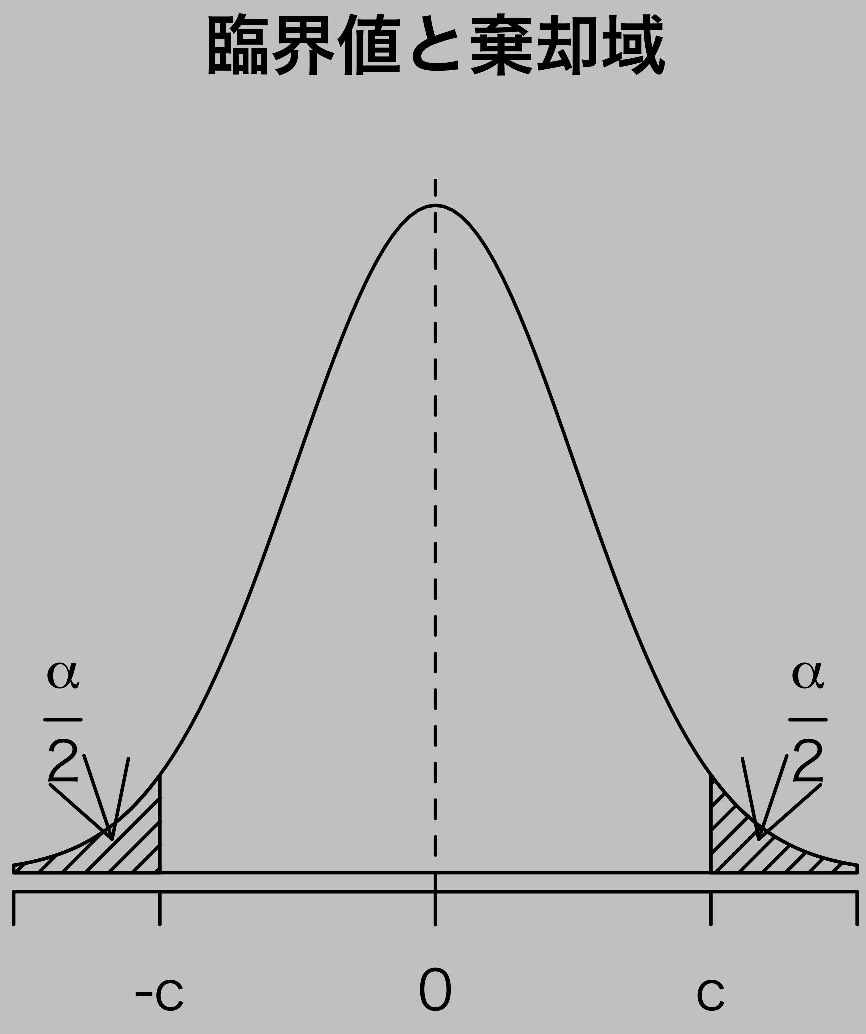
- 棄却域の面積 = 有意水準 α
- 検定に用いる統計量が棄却域

$$(-\infty, -c), (c, \infty)$$

に入るとき、仮説を棄却する

- 棄却域の境界を与える値 c

を臨界値 (critical value)と呼ぶ



検定の流れ

1. 帰無仮説と対立仮説を決める

2. 有意水準を設定する

3. 有意水準に応じた臨界値 c を求める

4. 検定統計量 T を求める

5. $|T| > |c|$ であれば帰無仮説を棄却、そうでなければ帰無仮説を保留（とりあえず採用）する

統計的検定における2種類の「誤り」

- 帰無仮説が正しいのに、それを棄却してしまう（第1種の誤り、type I error）
- 帰無仮説が間違いなのに、それを採用してしまう（第2種の誤り、type II error）

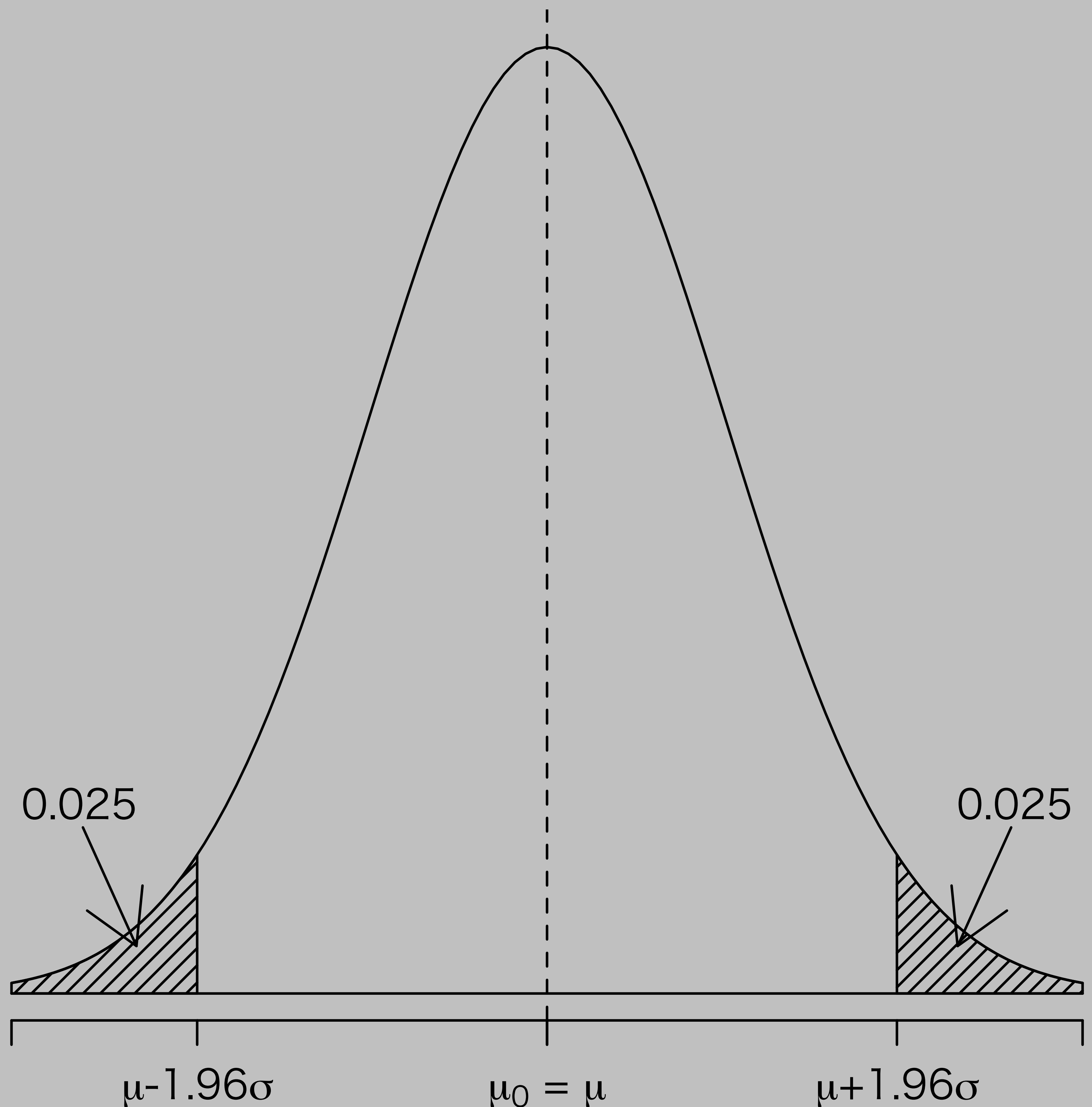
第1種の誤りと第2種の誤り

		標本に基づく判断 帰無仮説を棄却しない	標本に基づく判断 帰無仮説を棄却する
真実	帰無仮説が正しい	$1-\alpha$	α
真実	帰無仮説が間違い	β	$1-\beta$ 検出力

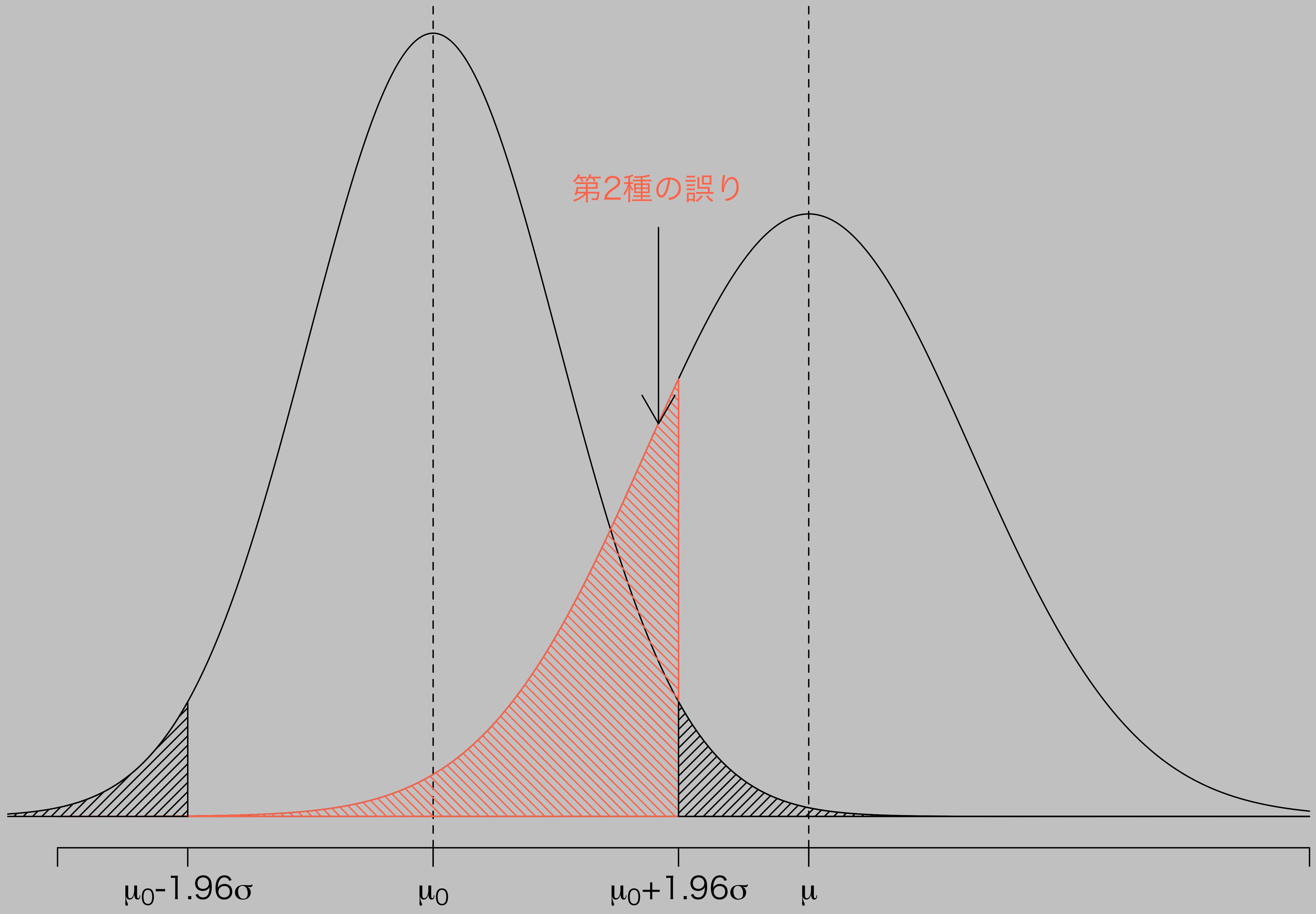
α = 第1種の誤りを犯す確率 = 危険率 = 有意水準

β = 第2種の誤りを犯す確率

第1種の誤り: 有意水準 α=0.05 のとき



第2種の誤り: 有意水準 α=0.05 のとき



誤りを減らすために

- 第1種の誤りを減らために α を小さくすると、β（第２種の誤り）が大きくなる
- 第２種の誤り（β）を小さくするためには α（第１種の誤り）を大きくしなければならない

➡　第１種の誤りと第２種の誤りのトレードオフ

▸ どうする？ → **標本サイズ（N）を大きくする**

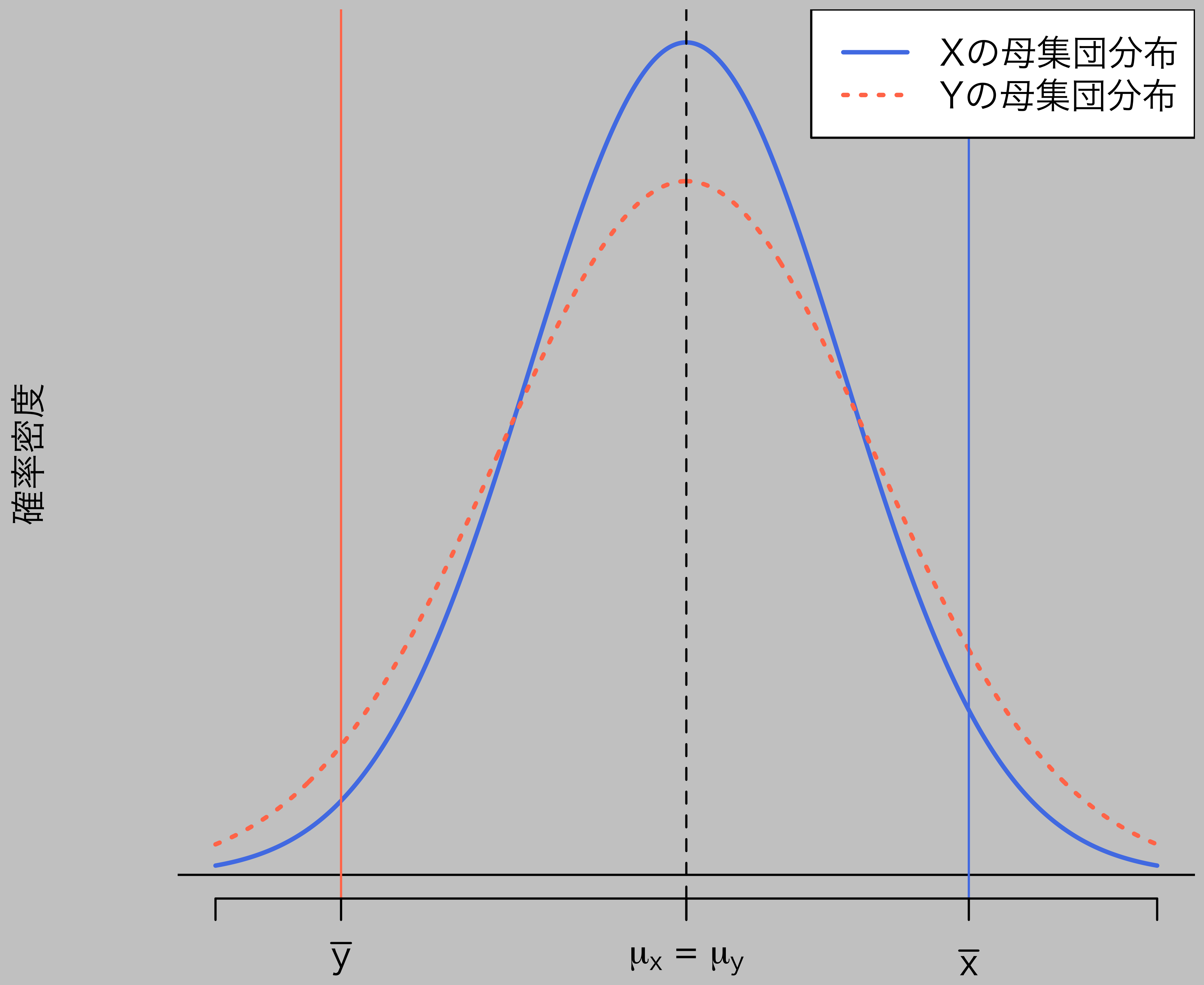
平均値の差の検定

母平均は異なるか

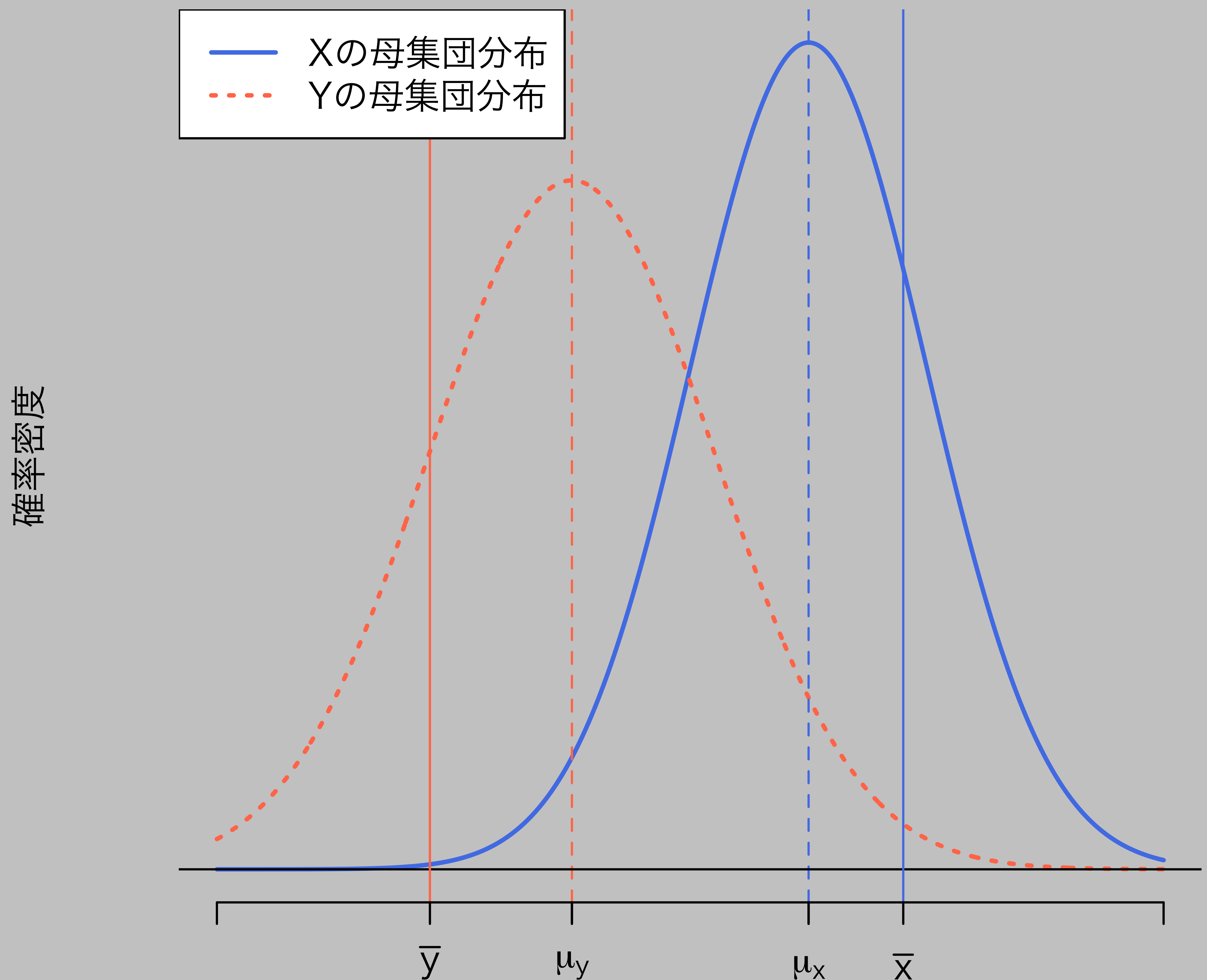
- 2つの異なる母集団X、Yからそれぞれ標本を抽出し、平均値を調べる
- 2つの標本平均が異なるとき、母平均は異なるといえるか？
   - **標本平均が異なる ≠ 母平均が異なる**

➡ 検定する

２つの母集団の関係 (1)



2つの母集団の関係 (2)



2つの母平均の大小関係を推測する

- 真の母平均を知らないので、関係1と関係2（あるいはその他の関係）のどちらが真実かはわからない

➡ 統計的検定を行う

データに対応があるか？

- 対応のないデータ
  - 2つの異なる集団から得た、独立したデータ
  - 例：高知工科大の学生の身長と高知大の学生の身長
- 対応のあるデータ
  - 同一の対象から得られた、2つの対応したデータ
  - 例：同一の調査対象について、
    - 1年前の所得と現在の所得を比べる
    - しんじょう君と鰹猫がどれくらい好きか尋ねる

対応のないデータでの母平均の差の検定

- t 検定を行う（t 分布で cを求める）
- 2つの母集団の分散が等しい場合と等しくない場合で検定法が異なる

✦分散が等しいかどうかを確かめるために F 検定を行う（この授業では扱わない）

対応のないデータでの母平均の差の検定：等分散の場合

- 自由度 $N_x + N_y - 2$ の t 分布を利用

- 検定統計量 T は

$$T = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{1}{N_x} + \frac{1}{N_y}}\sqrt{\frac{(N_x - 1)u_x^2 + (N_y - 1)u_y^2}{N_x + N_y - 2}}}$$

Rで検定する

- 対応のない2標本の差の検定：2つの母集団の分散が等しい場合
- 2つの標本 X と Y の平均が等しいかどうか検定する
  - 帰無仮説：X と Y の母平均は等しい
  - 対立仮説：X と Y の母平均は異なる

```
t.test(x, y, var.equal = TRUE)
```

対応のないデータでの母平均の差の検定：非等分散の場合

- ウェルチ（Welch）の t 検定を行う

- 自由度 f の t 分布と以下の検定統計量 T を使う

$$T = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{u_x^2}{N_x} + \frac{u_y^2}{N_y}}}, \qquad f = \frac{1}{\frac{C^2}{N_x - 1} + \frac{(1 - C)^2}{N_y - 1}}$$

ここで、$C = \dfrac{\frac{u_x^2}{N_x}}{\frac{u_x^2}{N_x} + \frac{u_y^2}{N_y}}$

Rで検定する

- 対応のない2標本の差の検定：2つの母集団の分散が等しくない場合
- 2つの標本 X と Y の平均が等しいかどうか検定する
  - 帰無仮説：X と Y の母平均は等しい
  - 対立仮説：X と Y の母平均は異なる

```
t.test(x, y, var.equal = FALSE)
```

対応のあるデータ

- 例題
  - 文房具の購入金額について、20人に大学1年生の4月（X）と大学2年生の4月（Y）を比較してもらったところ、x と y の差（d）の平均は232円（不偏分散の平方根822円）だった。1年時と2年時の購入金額には差があるといえるか？（有意水準5%で検定する）

例題を解く（1）

★母集団でも大学1年生の4月と大学2年生の4月で文房具の購入金額に差があるといえるか？

- 帰無仮説：大学1年時と2年時の4月の文房具購入金額には差がない ($\delta = 0$)
- 対立仮説：大学1年時と2年時の4月の文房具購入金額には差がある ($\delta \neq 0$)

例題を解く（2）

- 有意水準 5%
- t 検定を利用する：自由度は $N - 1 = 19$

```
qt(p = 0.05 / 2, df = 19, lower.tail = FALSE)
```

臨界値 $c = 2.093$

例題を解く（3）

- 検定統計量 T は
- $$T = \frac{\bar{d}}{\frac{u_d}{\sqrt{N}}} = \frac{232}{\frac{822}{\sqrt{20}}} \approx 1.26$$
- $|T| = 1.26 \leq |c| = 2.093$

➡ 帰無仮説を保留する

➡ 結論：4月の文房具の購入金額に、大学1年時と2年時で**差があるとは言えない**（~~差がない~~）

Rで検定する

- 対応のある (paired) 2標本の差の検定
- 2つの標本 X と Y の平均が等しいかどうか検定する
  - 帰無仮説：X と Y の母平均は等しい
  - 対立仮説：X と Y の母平均は異なる

```
t.test(x, y, paired = TRUE)
```

統計的検定の結果の意味

帰無仮説が棄却されないとき

- 正しい結論：「差があるとは言えない」
  - 「差がある」という証拠が見つからなったということ
- 誤った結論：「差がない」← **これは絶対ダメ！**
  - 差があるという**証拠の不在は**、差が**ないという証拠**
    ではない！！！

帰無仮説が棄却されたとき

- 結論：「差がある」
- もう少し正確に言うと：「有意水準 α で統計的に有意な差がある」
  - 例「有意水準5%で統計的に有意」
    - 統計的に有意な差を「有意差」と呼ぶことがある

「統計的に有意」とは？

- 統計的に有意 (statistically significant)
  - 「優位」ではないので注意
- 統計的検定で「差がある」ことが認められたということ
  - ただそれだけ！
- 統計的に有意な結果が重要だとは限らない
- 「統計的に有意」でも「実質的に無意味」な結果はたくさんある！！！

「統計的に有意」は分析の目標ではない

- 「統計的に有意」な結果は偉くない
  - 「統計的に有意でない」結果（帰無仮説が採用される）は無意味ではない！
- 「統計的に有意」は統計的検定の結論であって、研究自体（論文・レポート）の結論にはなり得ない
  - 「研究上の問い (research question)」に答えることが必要：「計量経済学」の授業で詳しく説明する
  - N を十分大きくすれば、どんな些細な差も統計的に有意になる

「統計的に有意？だから何？ (So what?)」

実質科学的に重要な知見か？

- 「統計的に有意」な結果が得られたら：
  - その差が実質科学的に重要と言えるかどうか判断することが重要
  - この判断が、分析の結論になり得るもの
- **実質科学的知識**、すなわち、経済学、経営学、心理学、政治学などの知識**に照らして、得られた結果にどんな意味があるか考えることが絶対に必要**
  - （統計学を専門としない限り）統計分析は道具に過ぎない

このトピックのまとめ

- 仮説検定における誤り
  - 第1種の誤りと第2種の誤り
  - 標本サイズを大きくすることによって誤りを減らす
- 平均値の差の検定
  - 2つのグループの分散は等しいか（わからないときは等しくないことにする）
  - 対応のないデータか対応のあるデータか
- 統計的に有意？ So what???

実習

- https://yukiyanai.github.io/jp/classes/stat2/contents/R/mean-comparison.html

おわりに

統計学の重要性

- 統計学は、あらゆる分野で使われている
  - 経済学、経営学、心理学、政治学、etc.
  - マーケティング
  - スポーツ戦略

★統計学は武器になる

さらなる統計分析の勉強

- 授業を取る
  - 統計分析自体を扱う：計量経済学、アンケート調査法、実験経済学、実験デザイン、計量経済学応用
  - 統計分析を利用する：経済系の授業のほぼすべて
- 自分で勉強する
- Rはともだち