計量経済学応用

10. 操作変数法 (2)

矢内　勇生

2019年5月23日

高知工科大学　経済・マネジメント学群

今日の目標

- 操作変数法の理解を深める
  - 操作変数の選び方：操作変数の2条件
  - 操作変数法を使った研究例

モデル

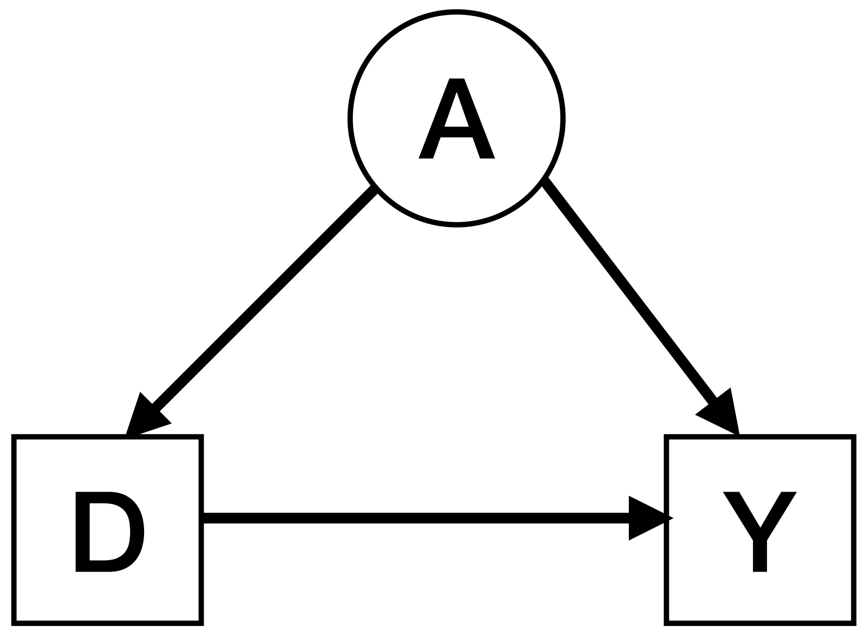
- 理論：原因D が 結果Yに影響を与える
- 変数
  - 結果変数：Y
  - （主な）説明変数：D
  - 交絡因子：A
- 「正しい」モデル

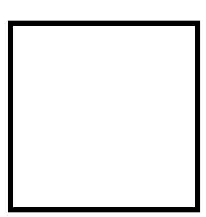
$$Y_i = \alpha + \beta D_i + \gamma A_i + \epsilon_i$$

$$\epsilon_i \sim \mathrm{Normal}(0, \sigma_\epsilon)$$

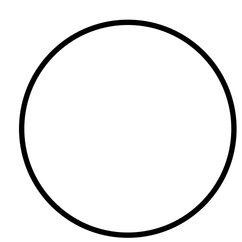
$$\mathrm{Cor}(\mathrm{D}, \epsilon) = 0$$

重回帰分析は可能？





観測された変数



観測不能な
（観測していない）変数

観察不能な交絡因子

- 問題：交絡因子 A が観測できない（観測されていない）
- 妥協案：交絡因子を無視した回帰分析 (short regression)

$$Y_i = \alpha_s + \beta_s D_i + \eta_i$$

Short Regression の誤差項

$$Y_i = \alpha_s + \beta_s D_i + \eta_i$$

ここで、 $\eta_i = \gamma A_i + \epsilon_i$ とすると

$$Y_i = \alpha_s + \beta D_i + \eta_i$$

$$\mathrm{Cor}(D, \eta) \neq 0 \ \ (\because \mathrm{Cor}(D, A) \neq 0 \ )$$

説明変数と誤差項の間に相関がある！

Dは内生変数

Short Regression のバイアス

- 最小二乗推定量 $\hat{\beta}_s$ の期待値：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[\hat{\beta}_s] &= \frac{\mathrm{Cov}(Y, D)}{\mathrm{Var}(D)} \\
&= \frac{\mathrm{Cov}(\alpha + \beta D + \eta, D)}{\mathrm{Var}(D)} \\
&= \frac{\mathrm{Cov}(\alpha, D) + \mathrm{Cov}(\beta D, D) + \mathrm{Cov}(\eta, D)}{\mathrm{Var}(D)} \\
&= \beta + \frac{\mathrm{Cov}(\eta, D)}{\mathrm{Var}(D)} \\
&= \beta + \frac{\mathrm{Cor}(D, \eta)}{\mathrm{SD}(D)}\mathrm{SD}(\eta)
\end{aligned}
$$

2段階回帰分析法

- 2段階回帰 (two-stage least squares, 2SLS, TSLS)
- 第1段階の回帰

$$D_i = \alpha_1 + \ \phi Z_i + e_{1i}$$

- 第2段階の回帰

$$Y_i = \alpha_2 + \beta_{\mathrm{2SLS}} \hat{D}_i + e_{2i}$$

  - ただし、$\hat{D}_i$ は第1段階で得られた D_i の予測値

$$\hat{D}_i = \alpha_1 + \phi Z_i$$

2段階回帰で得られる係数

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[\hat{\beta}_{\mathrm{2SLS}}] &= \frac{\mathrm{Cov}(Y, \hat{D})}{\mathrm{Var}(\hat{D})} \\
&= \frac{\mathrm{Cov}(\alpha + \beta D + \eta, \alpha_1 + \phi Z)}{\mathrm{Var}(\alpha_1 + \phi Z)} \\
&= \frac{\beta\phi \mathrm{Cov}(D, Z) + \phi \mathrm{Cov}(\eta, Z)}{\phi^2 \mathrm{Var}(Z)} \\
&= \beta + \frac{1}{\phi} \frac{\mathrm{Cov}(\eta, Z)}{\mathrm{Var}(Z)} \\
&= \beta + \frac{\mathrm{Cor}(Z, \eta)}{\mathrm{Cor}(Z, D)} \frac{\mathrm{SD}(\eta)}{\mathrm{SD}(D)}
\end{aligned}
$$

$$\left(\because \phi = \frac{\mathrm{Cov}(D, Z)}{\mathrm{Var}(Z)} \right)$$

操作変数の条件

1. 操作変数 Z と内生変数 D（主な説明変数、理論における「原因」）の間に相関がある

$$\mathrm{Cor}(Z, D) \neq 0$$

2. 操作変数 Z は、説明変数 D を通してのみ結果変数 Y に影響を与える（除外制約、唯一経路）

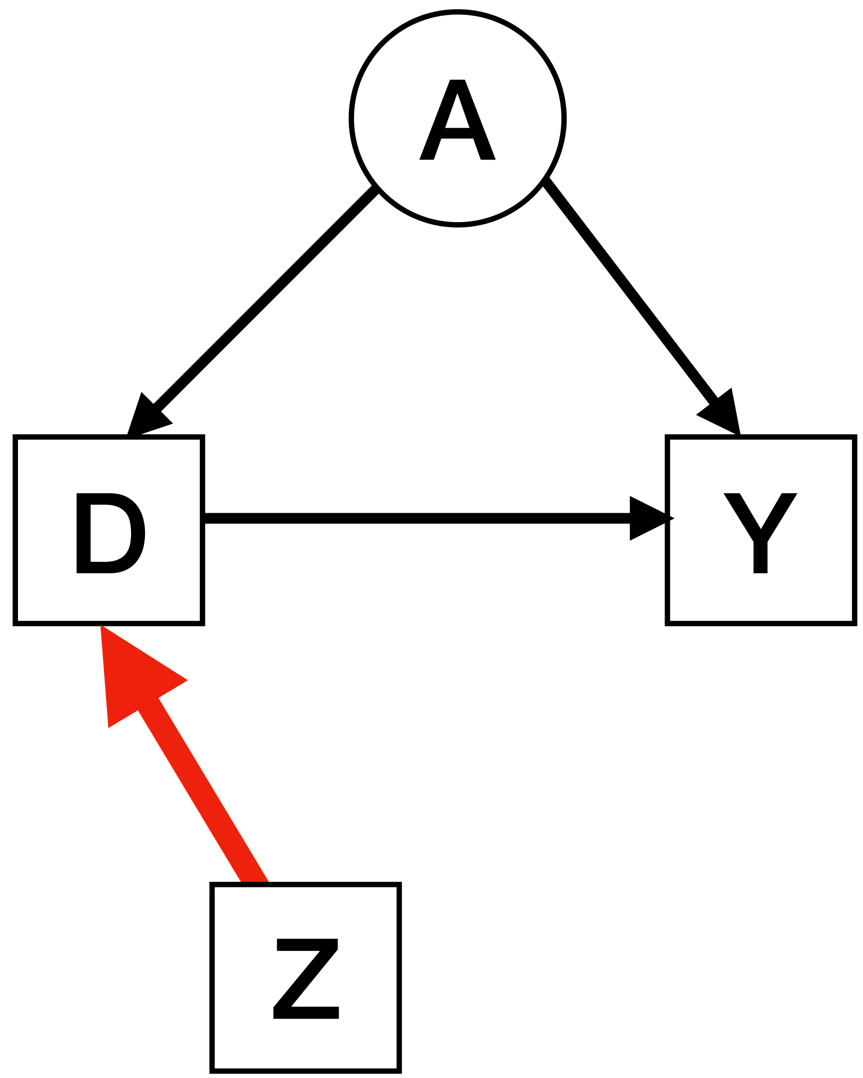
$$\mathrm{Cor}(Z, \eta) = 0$$

条件1：
操作変数と内生変数の相関

- 操作変数 Z と内生変数 D には相関がなければならない
  - 操作変数の値を変えれば、内生変数の値も変わる

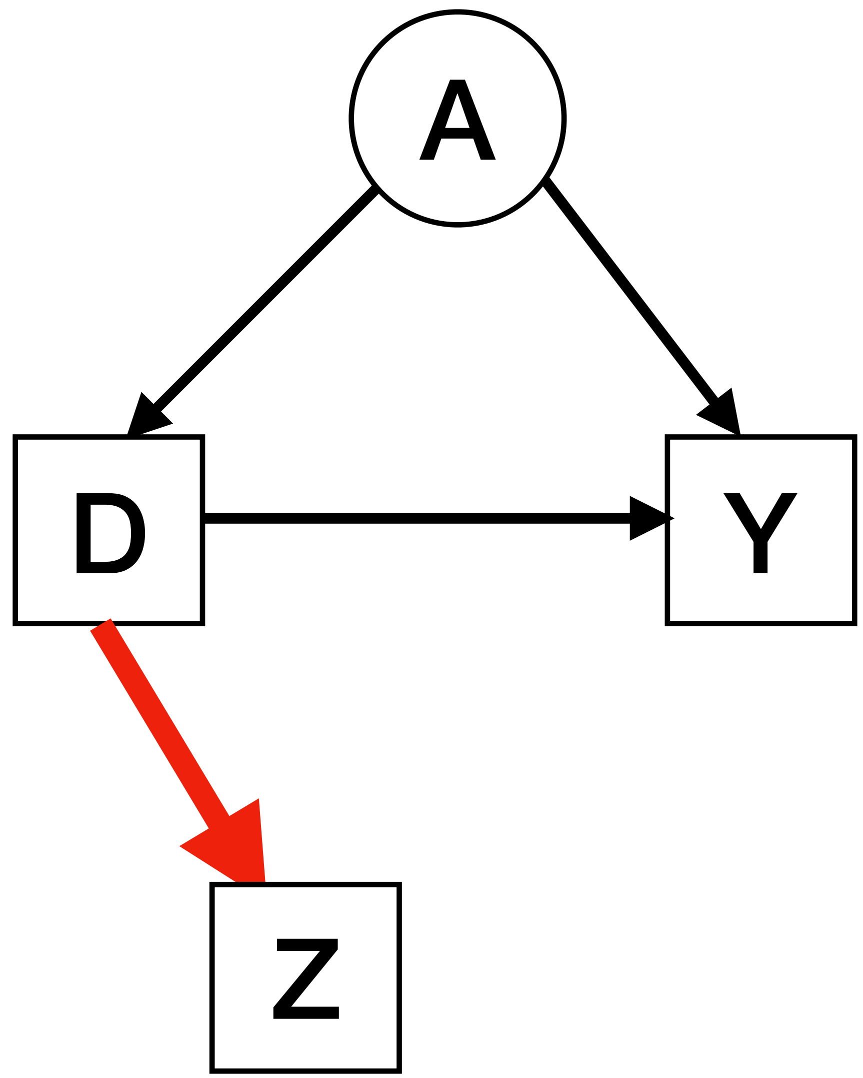
$$\mathrm{Cor}(Z, D) \neq 0 \Leftrightarrow \mathrm{Cov}(Z, D) \neq 0$$

操作変数と内生変数の相関



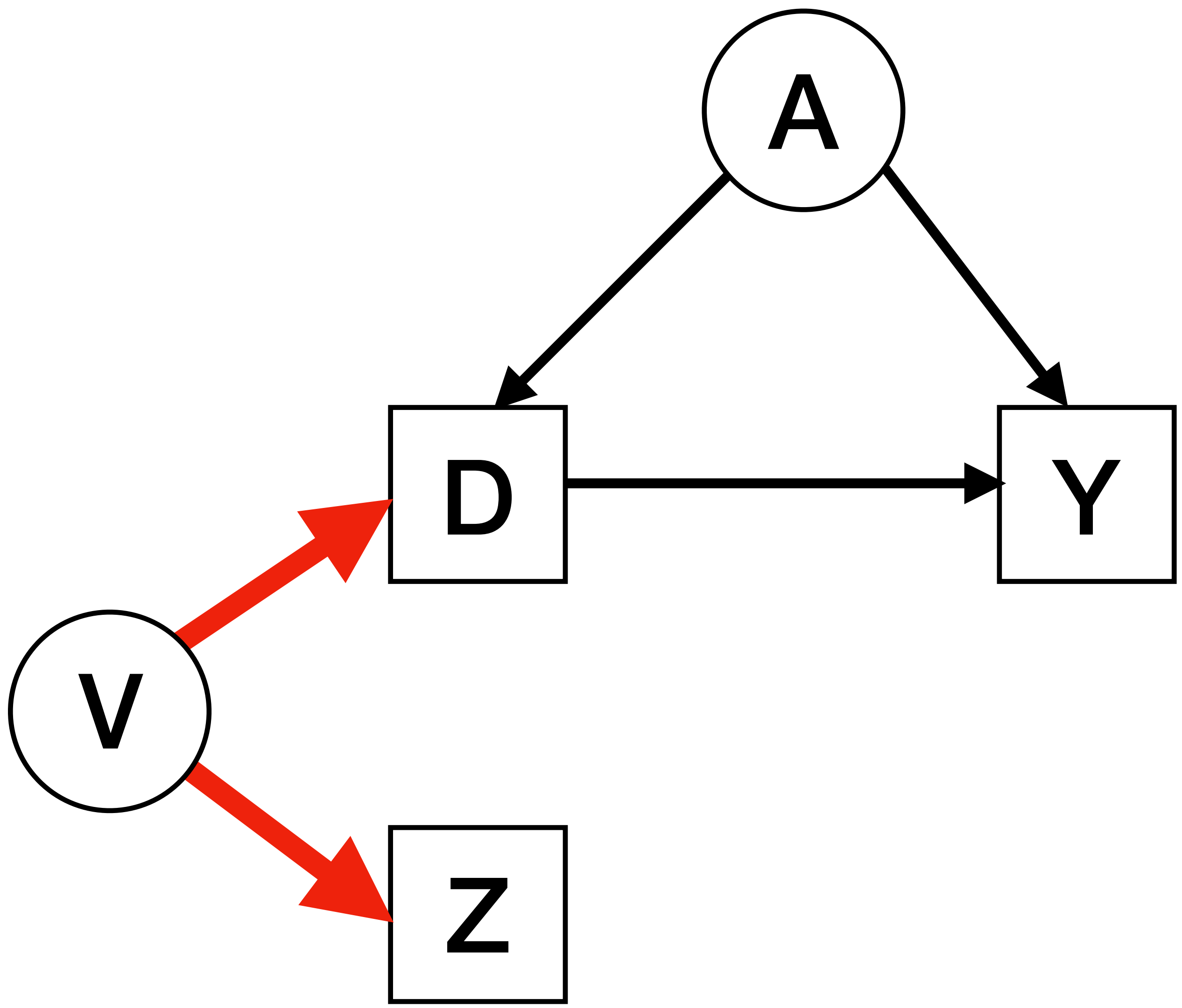
相関：操作変数 Z の値が変化すると、内生変数 D
　　の値も変化する

操作変数と内生変数の相関



相関：操作変数 Z の値が変化すると、内生変数 D
　　の値も変化する

操作変数と内生変数の相関



相関：操作変数 Z の値が変化すると、内生変数 D
　　の値も変化する

相関の確認方法

- 「ZとDの相関はゼロ」という帰無仮説を棄却すればよい
  - 操作変数が1つのとき：*t* 検定
  - 操作変数が複数あるとき: *F* 検定
- 実践的には「強い」相関が求められる（理由は後述）
  - *t* 検定：*t* 値が3.2超（*p* 値が 0.0016未満）
  - *F* 検定：*F* 値が10超

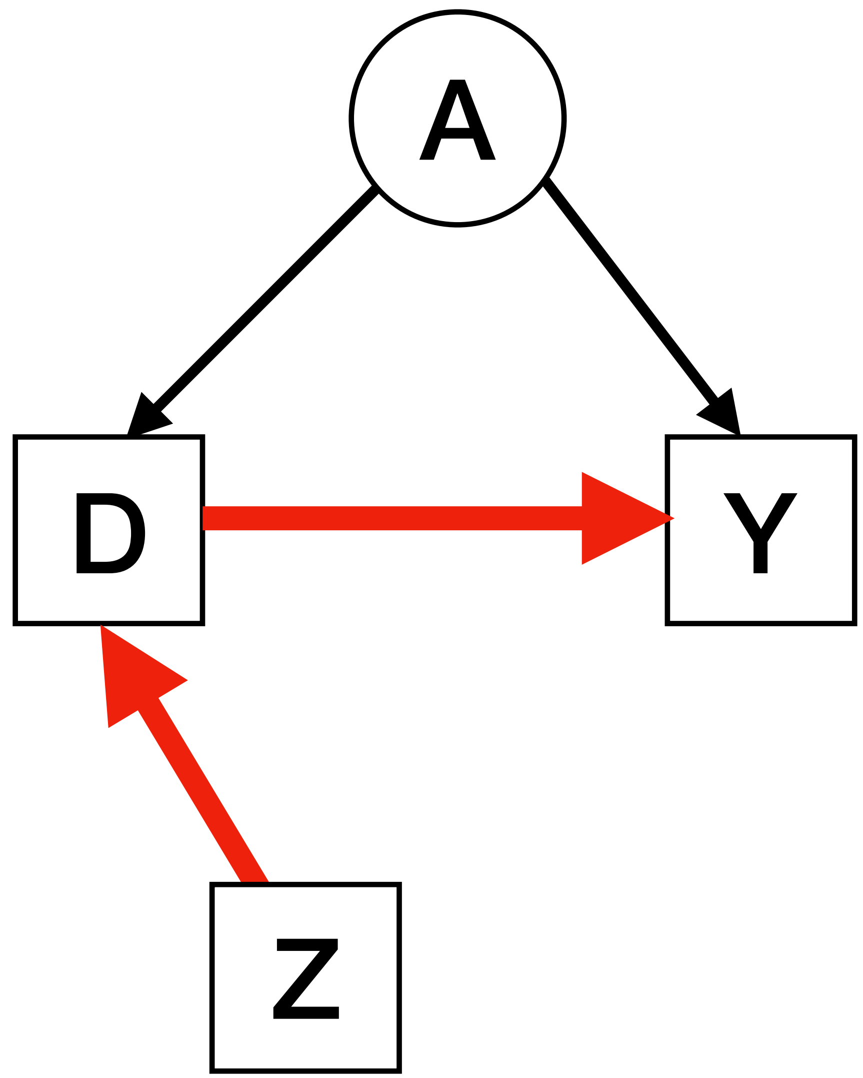
条件2：
除外制約 (exclusion restriction)

- 操作変数 Z は、内生変数 D を通じてのみ結果変数 Y に影響を与える
  - 唯一経路条件 (“only through” condition) とも呼ばれる
  - 2段階回帰の2段階目の式

$$Y_i = \alpha_2 + \beta_{2\mathrm{SLS}} \hat{D}_i + e_{2i}$$

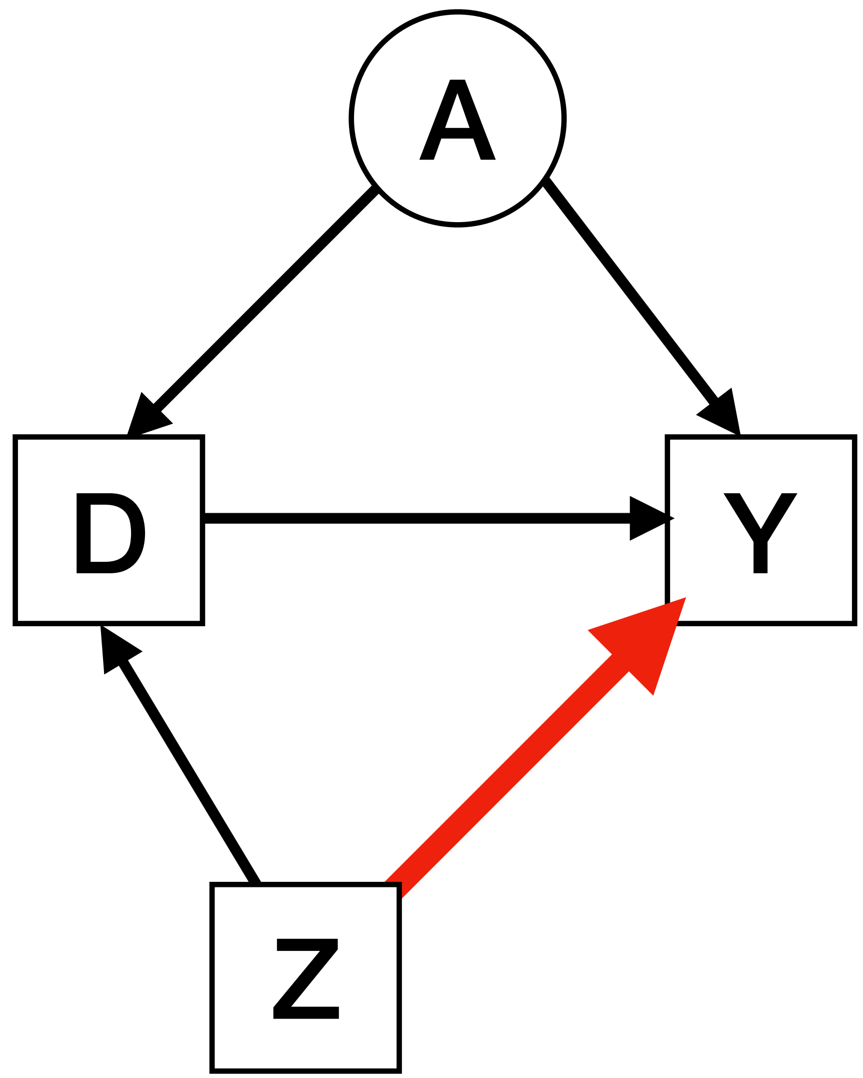
からZ を除外できる：　$\mathrm{Cor}(Z, \eta) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Cov}(Z, \eta) = 0$

唯一経路（除外制約）



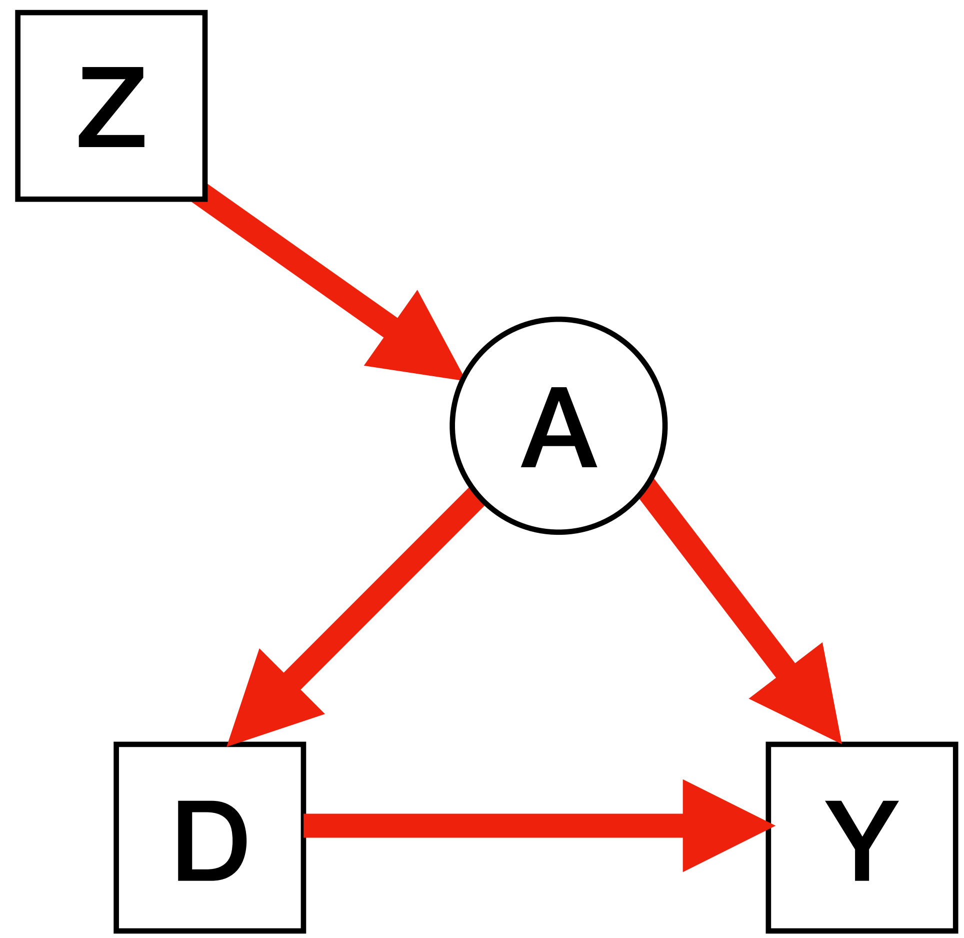
唯一経路：操作変数 Z は、内生変数 D を通してのみ
結果変数 Y に影響を与える(Z affects Y *only through* D)

除外制約が満たされないとき



ZはDとYの交絡因子なので、2段階目の回帰式から
除外できない

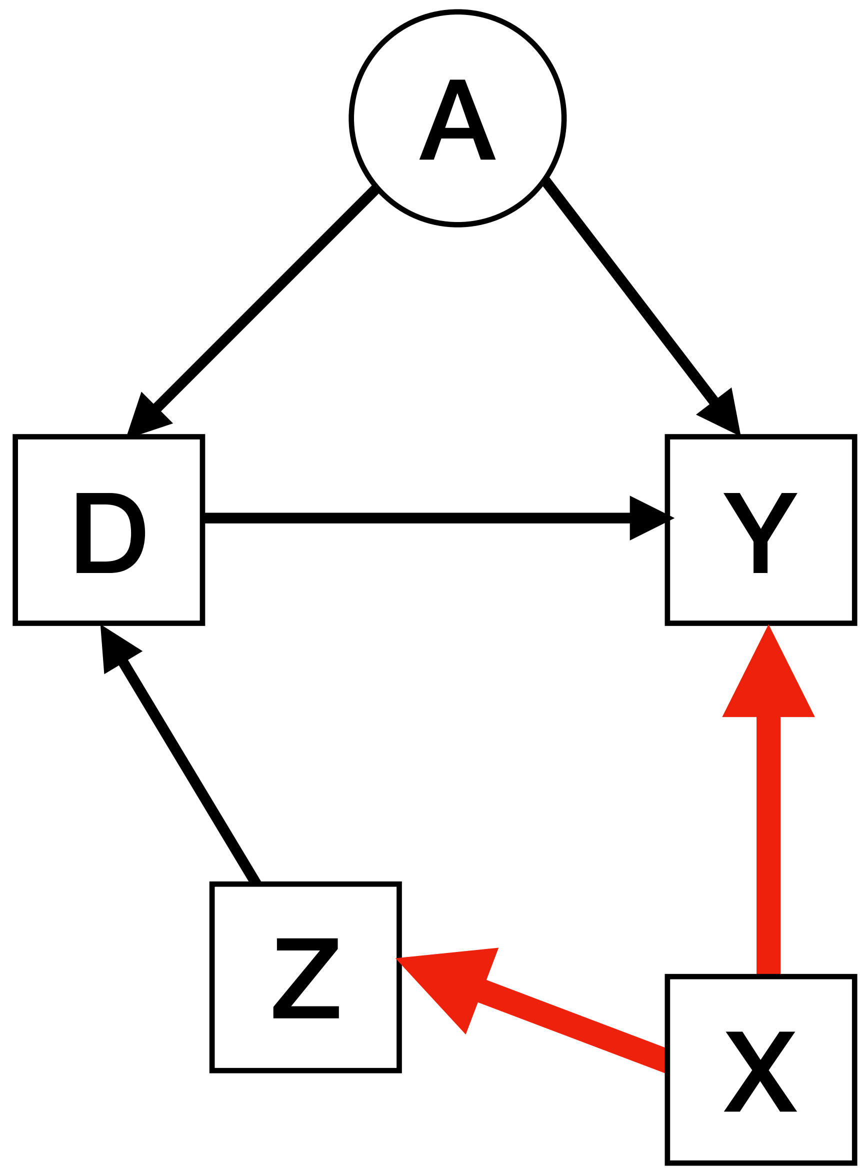
除外制約が満たされないとき



$$\mathrm{Cor}(Z, A) \neq 0 \Rightarrow \mathrm{Cor}(Z, \eta) \neq 0$$

Aが観測されないので、Zが交絡因子に

除外制約が満たされないとき



Xが観測されているので、Xを統制（コントロール）すれば、除外制約は満たされる

除外制約の確認法

- データでは確認できない！！！
  - 「関係がないこと（値がゼロ）」は、統計的検定では示すことができないから
- では、どうするか？
  - 操作変数が結果変数に影響を与えるとすれば、内生変数を通じた効果しか考えられないことを、**データを使わずに説得する！**
  - 操作変数法を使った論文の成否は、この「説得力」に依存する

除外制約が疑われるとき

- 除外制約は検定できないので、少しくらいは「他の経路」がありそう： $\mathrm{Cor}(Z, \eta) \neq 0$

- 操作変数法（2段階回帰）の推定にバイアスが生じる

$$\mathrm{E}[\hat{\beta}_{\mathrm{2SLS}}] = \beta + \frac{\mathrm{Cor}(Z, \eta)}{\mathrm{Cor}(Z, D)} \frac{\mathrm{SD}(\eta)}{\mathrm{SD}(Z)}$$

- バイアス： $\dfrac{\mathrm{Cor}(Z, \eta)}{\mathrm{Cor}(Z, D)} \dfrac{\mathrm{SD}(\eta)}{\mathrm{SD}(D)}$

「弱い」操作変数

- 内生変数との相関が弱い操作変数：弱い操作変数 (weak instrument[s])
- 除外制約が完全に満たされていないとき、弱い操作変数を使うと推定がうまくいかない
  - 弱すぎると、操作変数を使わない方がマシな場合も

弱い操作変数とバイアス

- Short regression（内生性に対処しない単回帰）のバイアス：

$$\mathrm{Cor}(D,\eta)\frac{\mathrm{SD}(\eta)}{\mathrm{SD}(D)}$$

- 除外制約が完全でないときの、操作変数法のバイアス：

$$\frac{\mathrm{Cor}(Z,\eta)}{\mathrm{Cor}(Z,D)}\frac{\mathrm{SD}(\eta)}{\mathrm{SD}(D)}$$

  - 弱い操作変数を使うとバイアスが大きくなってしまう：弱い変数を使うくらいなら、short regressionのほうがマシかも

操作変数の2条件：まとめ

- 操作変数と内生変数の相関：データを使って確認できる
  - 「相関がない」という帰無仮説が棄却されるかどうか
  - 相関が十分強いか
- 除外制約（唯一経路）：データからは確かめられない
  - **理論的に説得する**必要がある：操作変数法を使う論文で、最も重要なパートの一つ！
  - 自分が扱っている問題についての知識が求められる

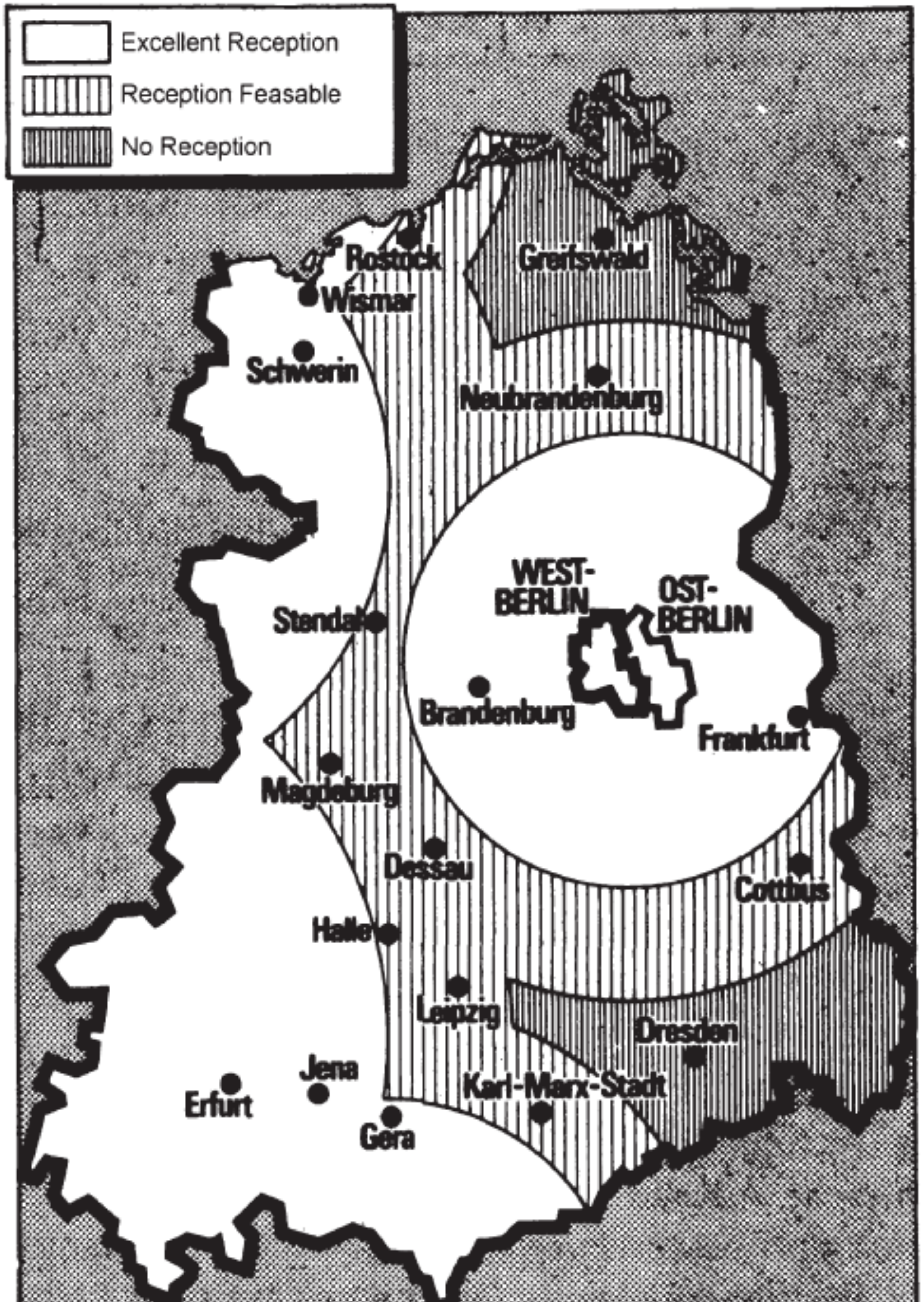
★ 2つの条件をしっかり確認していない研究は信用できない！

操作変数の利用例

- 研究課題：冷戦期、西側の文化は東側の体制崩壊に影響を与えたか？
- （かつての）一般的な見解：テレビやラジオで西側の文化に触れた東側の人間が、ソ連体制への不満を募らせ、それが体制崩壊を促進した
- 実験されたわけではない
  - 本当に因果関係があったか？
  - エビデンス（科学的方法で明らかにされた因果関係）がない

何が問題になり得るか

- 例：反体制だから西側のテレビを見るのでは？（逆の因果関係 [内生性] の可能性）
- 最良の解決策：実験する
- 問題：実験できない
  - もう冷戦は終わった！
- 自然実験（操作変数法）を利用する



Source: Kern & Hainmueller (2009, Fig. 1: p.382)

東ドイツにおける自然実験

地形によってテレビ電波の強弱に違いがあることを利用

冷戦当時 (1988, 1989) の世論調査を分析

Kern, H. L., and J. Hainmueller. 2009. “Opium for the Masses: How Foreign Media Can Stabilize Authoritarian Regimes.” *Political Analysis* 17: 377-399.

分析結果（一部）

	単純な差 視聴者 - 非視聴者	操作変数を利用した分析 西側テレビの影響
マルクス・レーニン主義を受け入れるか	-0.079	0.204
東ドイツに親近感を持っているか	-0.013	0.251

- 西ドイツのテレビ番組を見ているほど、東ドイツ政府に好意的
  - これまでの常識に反する結果

結果変数：東ドイツ政府に対する態度

内生変数：テレビの視聴

操作変数：西ドイツのテレビの電波