統計学２

8. 統計的推定と仮説検定の基礎

矢内　勇生

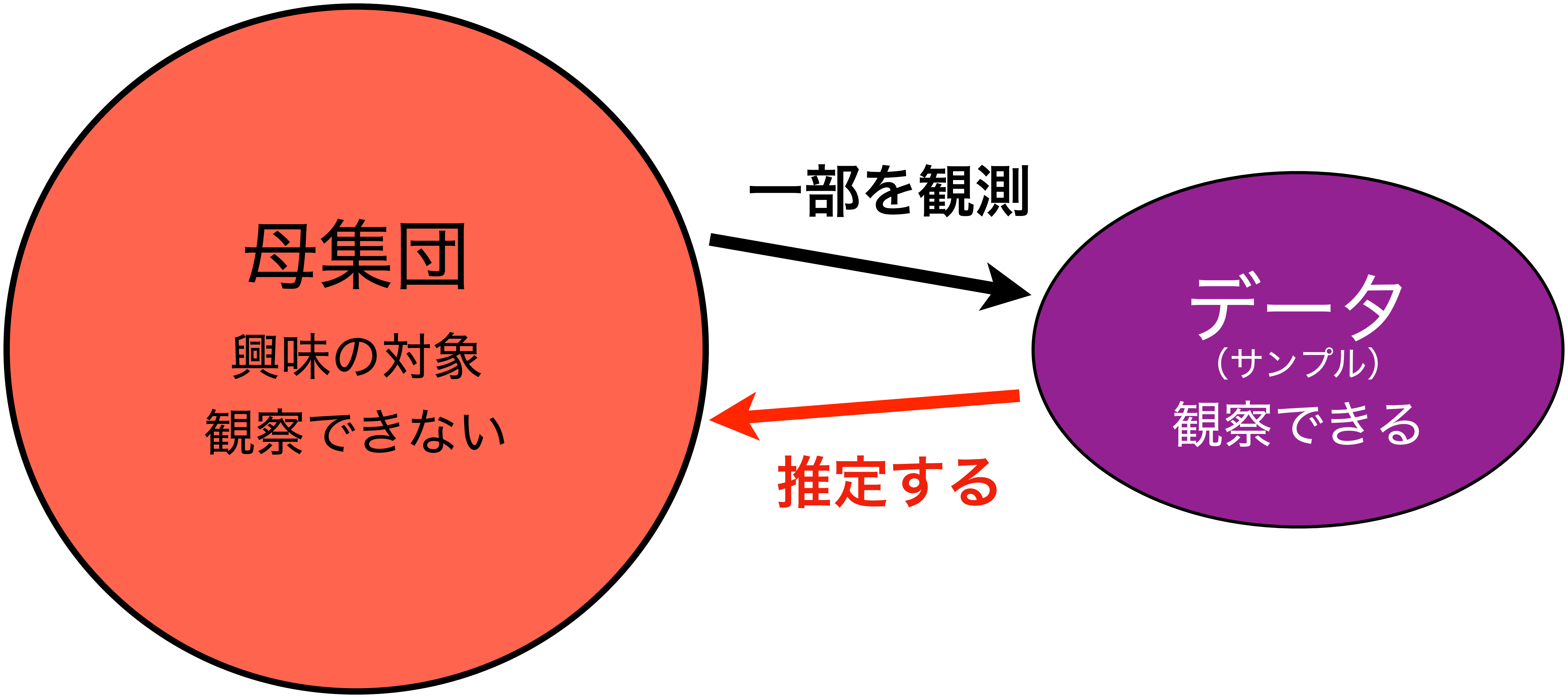
2019年5月13日

高知工科大学　経済・マネジメント学群

今日の目標

- 推測統計学の目的を理解する！
    - 統計的検定とは？
    - 統計的推定とは？

母集団とデータ



部分から全体を知る

- 通常、手に入るデータは「全体の一部」
  - 例）日本国民（母集団）が消費税増税に賛成かどうか知りたい
  - 2,000人（日本国民の一部）に賛成か反対か尋ねる
- 部分から得られる情報を使って全体（母集団）について考える
  - 例）2,000人の回答から日本人全体の賛否を推測する

➡ **統計的推定 (statistical inference)**

統計的検定の基礎

- 「正しい」（表が出る確率 p=0.5）コインをN回投げる
- 表が10回出た
- 投げた回数 N はいくつか？
  - 仮説1：N=16
  - 仮説2：N=36

統計的検定の目的

- 標本から得られる情報を利用し、仮説（hypothesis）が正しいか正しくないか判断する

  - 仮説が正しくないという証拠に乏しい → 仮説を（とりあえず）保留にする

  - 仮説が正しくないという証拠がある → 仮説を棄却する

可能な仮説はたくさんある

N枚の正しいコイン投げの例

- 10以上 の整数であれば、仮説として成り立つ
- 問題は、それが妥当かどうか
  - 極端な例

仮説3：N=10

仮説4：N=10000

➡ 統計的方法を使うまでもなく、妥当ではなさそうだ

どこまでが妥当か？

N枚の正しいコイン投げの例

- 表が出る確率が0.5 で、表が10枚出ているのだから、N=20と予測するのが最も妥当

➡ N=19やN=21もそれほど悪くない仮説では？

➡ N=18やN=22もそれほど悪くない仮説では？

➡ ・・・

★ どこまでが妥当？ → 統計的検定で決める

正規分布の性質を利用して統計的検定を行う

- 正規分布では、平均 ± 2標準偏差 の範囲にデータの95%が含まれる（より正確には平均 ± 1.96標準偏差）

➡ この区間を検定に利用する

統計的検定の方法

- **ある仮説の下**で、平均±1.96sd の区間に観測されたデータが含まれるかどうか確かめる

  - 含まれる → 95%の一部なので、仮説は「妥当でないとはいえない」→ 仮説を棄却せず保留する（受け容れる）

  - 含まれない → 5%しか起きないはずのことを観測してしまった → 仮説の妥当性が疑わしい → 仮説を棄却する

N回コイン投げの仮説検定

- 表が0.5の確率で出るコインをN回投げ、10回表が出た
- 仮説1：N=16
- 仮説2：N=36

✤ コイン投げをN回行う → 二項分布

- 二項分布の平均 = Np
- 二項分布の分散 = Np(1-p)

仮説1の検証（1）

仮説1（N = 16）が正しいとすると、

- 平均 = Np = 16・0.5 = 8
- 分散= Np(1-p) = 16・0.5 (1 - 0.5) = 4
- 標準偏差 = 2

▸ 平均 - 1.96sd = 8 -1.96 x 2 = 4.08

▸ 平均 +1.96sd = 8 +1.96 x 2 = 11.92

仮説1の検証（2）

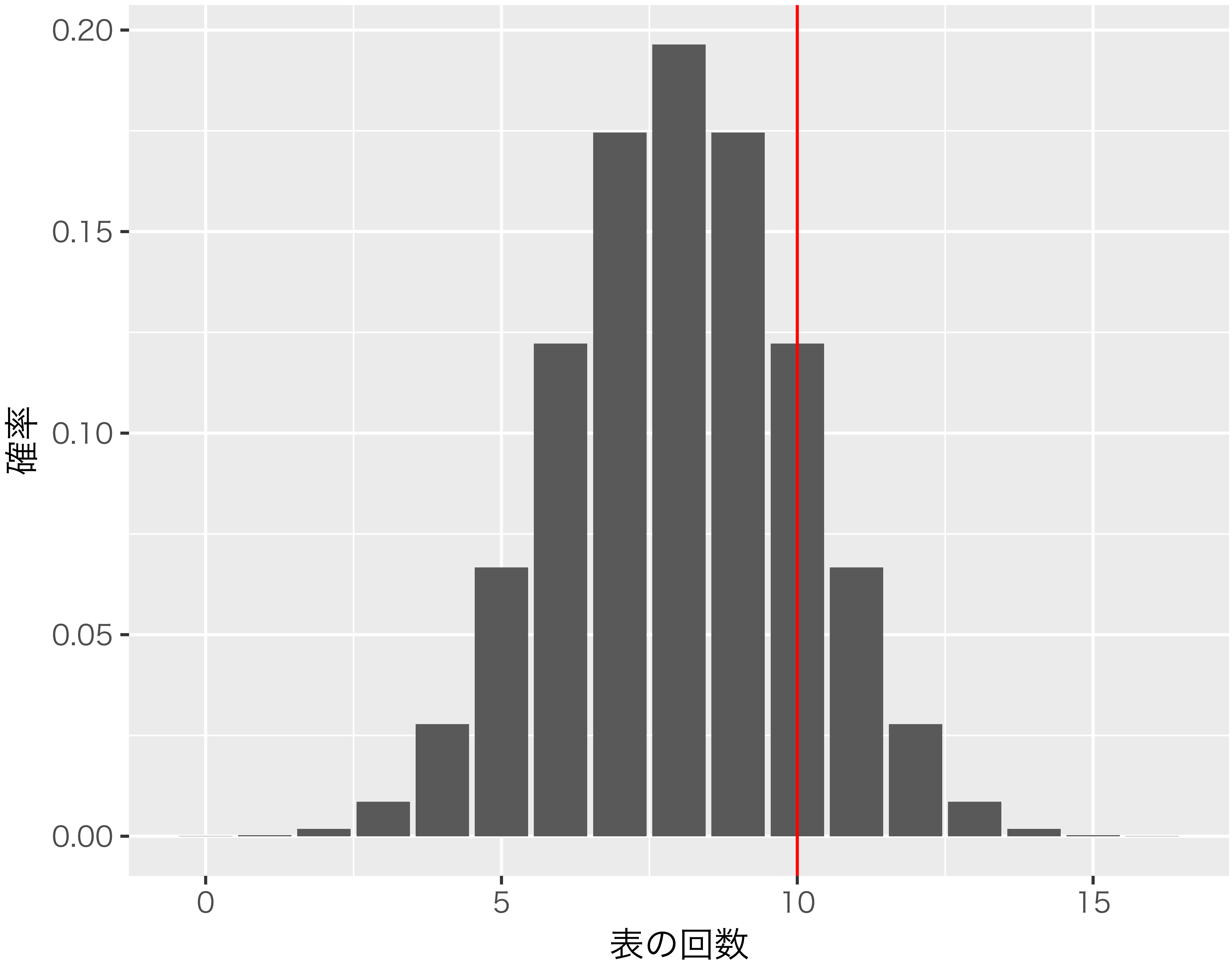
仮説1（N = 16）が正しいとすると、

- データの95%は4.08 と11.92 の間の数をとる
- 実際に観測したデータは10であり、この区間に含まれる

➡ 仮説1が「おかしい」という証拠はない

➡ 仮説1を（とりあえず）受け容れる（保留）

仮説1 (N=16) が正しい場合



仮説2の検証（1）

仮説2（N = 36）が 正しいとすると、

- 平均 = Np = 36・0.5 = 18
- 分散= Np(1-p) = 36・0.5 (1 - 0.5) = 9
- 標準偏差 = 3

‣ 平均 - 1.96sd = 18 -1.96 x 3 = 12.12

‣ 平均 +1.96sd = 18 +1.96 x 3 = 23.88

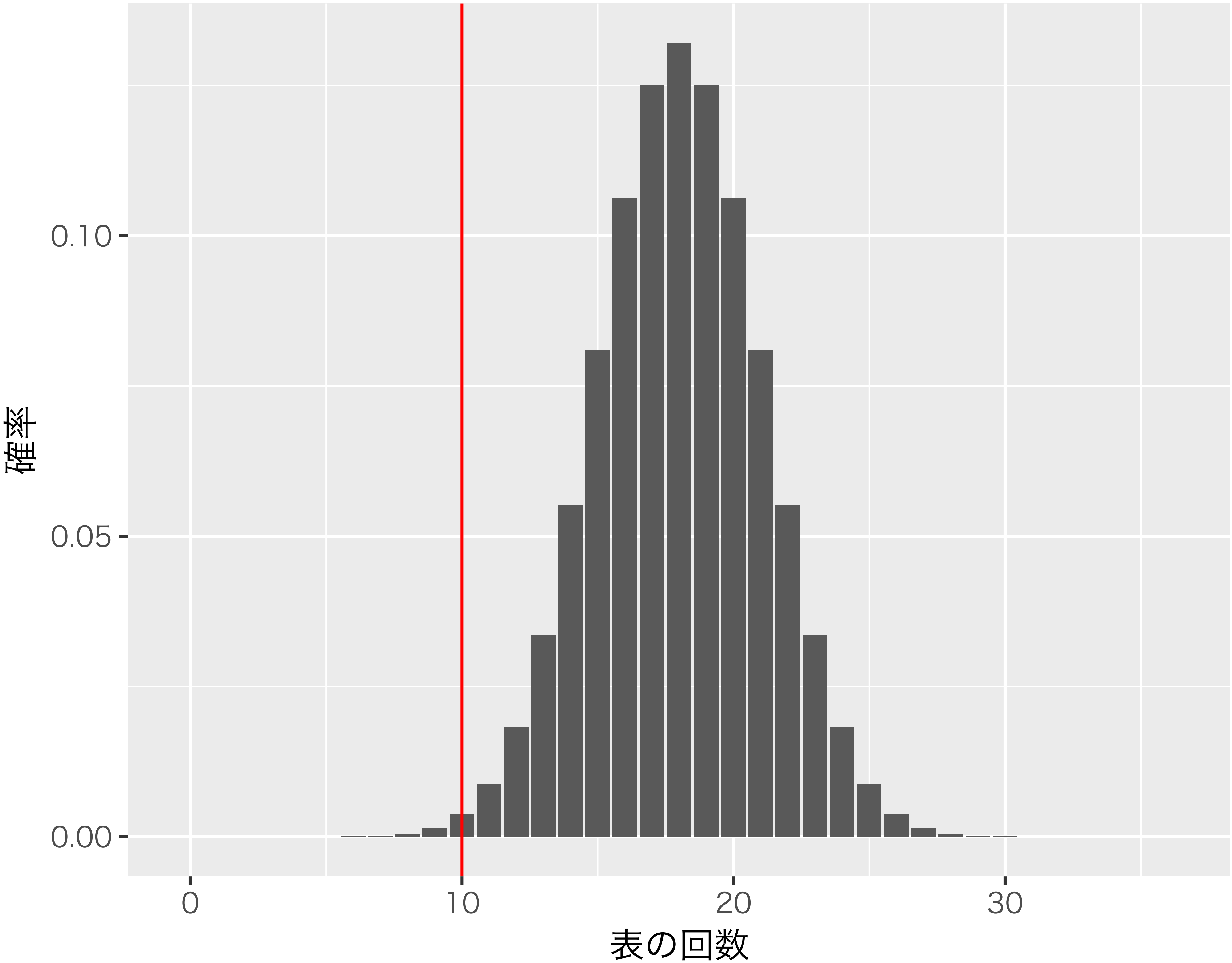
仮説2の検証（2）

仮説2（N = 36）が 正しいとすると、

- データの95%は12.12と23.88の間の数を取る
- 実際に観測したデータは10であり、この区間に含まれない

➡ 仮説2を棄却する（仮説2は妥当でない）

仮説2 (N=36) が正しい場合



例題の結論

- 仮説1は妥当だが、仮説2は妥当とはいえない
  - 「妥当＝真実」**ではない**！
    - N=20やN=19を仮説にしても、受け容れられるはず
    - しかし、真実のNはただ1つ存在する

➡ 仮説検定では、正しくないものははっきりわかる（棄却できる）が、受け容れた仮説が正しいとは限らない（単に「ありそう（妥当）」）というだけ

統計的推定の基礎

同じ例題で考える

- 正しいコインをN回投げる
- 表が10回出た
- 投げた回数Nは何回だと考えられるか？

1. 1つの値を答える = 点推定
2. 予測に幅をもたせる = 区間推定

点推定の例

- N枚のコイン（表が出る確率pは0.5）を投げて表が10枚出た
- 投げた枚数Nは何枚だと考えられるか？

➡ 二項分布の平均 Np

➡ 手持ちのデータは10 → 平均は10

➡ $Np = 10 \rightarrow N = 10/p = 10/0.5 = 20$ ：**点推定値**

区間推定の例 (1)

- コイン（表が出る確率pは0.5）をN回投げて表が10回出た
- 投げた回数Nは何回から何回の間だと考えられるか？
  - 統計的検定によって、16枚は妥当な仮説だが36枚は妥当な仮説でないことがわかった
  - 他にも妥当な仮説はあるはず（例: N=20）
  - 妥当な仮説全体を、推定値として使う

区間推定の例 (2)

- コイン（表が出る確率pは0.5）をN回投げて表が10回出た
  - 平均 μ= Np = N/2, 分散 σ^2=Np(1-p) = N/4
- このとき、どんな仮説が棄却され、どんな仮説が受け容れられる？

➡ -2≤ z ≤ 2 となるzを与えるNは受け容れられる。zは、

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{10 - \frac{2}{N}}{\sqrt{\frac{N}{4}}}$$

区間推定 (3)

- N=13からN=30までの仮説はどれも棄却できない
- N=12, N=31 は棄却

➡ 区間推定：13≤N≤30

★「±1.96」は確率が95%になる区間

➡ 求めた区間を「95%信頼区間」と呼ぶ

N	z
12	2.309
13	1.942
14	1.604
15	1.291
16	1
17	0.728
18	0.471
19	0.229
20	0
21	-0.218
22	-0.426
23	-0.626
24	-0.817
25	-1
26	-1.177
27	-1.347
28	-1.512
29	-1.671
30	-1.826
31	-1.976

今日のまとめ

- 推測統計学とは、部分（標本、データ）から全体（母集団、興味の対象）を知るための方法
- 統計的検定：仮説を保留 or 棄却？
- 統計的推定：点推定と区間推定

期末試験について

- 6月6日（木）2限：75分間（教室：A210）
- 持ち込み：以下の２点のみ可

1. チートシート1枚（詳細は後述）
2. 教科書1冊（以下のうちいずれか一方のみ）
   - 『Rによる計量政治学』または *Real Stats*

‣ 1、2とも、**試験中の貸し借りは禁止**

チートシートについて

- A4用紙（またはA4より小さいサイズ：letter は可）1枚
- 両面に書き込み・印刷可
- 書き込む内容は自由
- 他の紙（付箋を含む）を貼り付けるのは禁止
- 両面の右上に、赤ペンで氏名と学籍番号を記入する