

# 統計学 2

## 8. 統計的推定と仮説検定の基礎

矢内 勇生

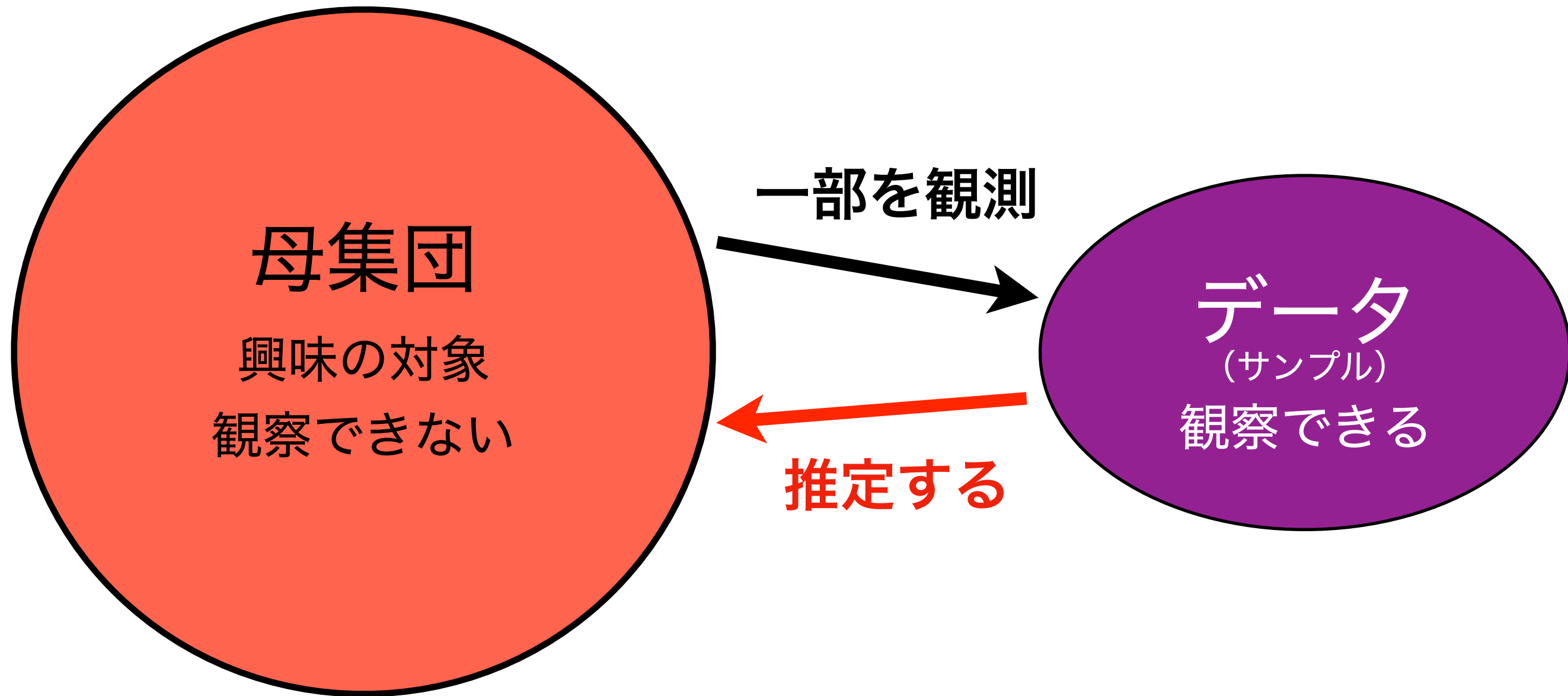
2019年5月13日

高知工科大学 経済・マネジメント学群

# 今日の目標

- 推測統計学の目的を理解する！
  - 統計的検定とは？
  - 統計的推定とは？

# 母集団とデータ



# 部分から全体を知る

- 通常、手に入るデータは「全体の一部」
  - 例) 日本国民（母集団）が消費税増税に賛成かどうか知りたい
  - 2,000人（日本国民の一部）に賛成か反対か尋ねる
- 部分から得られる情報を使って全体（母集団）について考える
  - 例) 2,000人の回答から日本人全体の賛否を推測する

➡ **統計的推定 (statistical inference)**

# 統計的検定の基礎

- ▶ 「正しい」（表が出る確率  $p=0.5$ ）コインを $N$ 回投げる
- ▶ 表が10回出た
- ▶ 投げた回数  $N$  はいくつか？
  - 仮説1 :  $N=16$
  - 仮説2 :  $N=36$

# 統計的検定の目的

- 標本から得られる情報を利用し、仮説 (hypothesis) が正しいか正しくないか判断する
  - 仮説が正しくないという証拠に乏しい → 仮説を（とりあえず）保留にする
  - 仮説が正しくないという証拠がある → 仮説を棄却する

# 可能な仮説はたくさんある

N枚の正しいコイン投げの例

- ▶ 10以上 の整数であれば、仮説として成り立つ
- ▶ 問題は、それが妥当かどうか
  - 極端な例

仮説3 :  $N=10$

仮説4 :  $N=10000$

➡ 統計的方法を使うまでもなく、妥当ではなさそうだ

# どこまでが妥当か？

N枚の正しいコイン投げの例

▶ 表が出る確率が0.5 で、表が10枚出ているのだから、  
N=20と予測するのが最も妥当

➡ N=19やN=21もそれほど悪くない仮説では？

➡ N=18やN=22もそれほど悪くない仮説では？

➡ . . .

★ どこまでが妥当？ → 統計的検定で決める



# 正規分布の性質を利用して 統計的検定を行う

- 正規分布では、平均  $\pm 2$ 標準偏差 の範囲にデータの95%が含まれる（より正確には平均  $\pm 1.96$ 標準偏差）
- ➡ この区間を検定に利用する

# 統計的検定の方法

- **ある仮説の下で、平均 $\pm 1.96sd$  の区間に観測されたデータが含まれるかどうか確かめる**
  - 含まれる  $\rightarrow$  95%の一部なので、仮説は「妥当でないとはいえない」  $\rightarrow$  仮説を棄却せず保留する（受け容れる）
  - 含まれない  $\rightarrow$  5%しか起きないはずのことを観測してしまった  $\rightarrow$  仮説の妥当性が疑わしい  $\rightarrow$  仮説を棄却する

# N回コイン投げの仮説検定

- 表が0.5の確率で出るコインをN回投げ、10回表が出た
- 仮説1 :  $N=16$
- 仮説2 :  $N=36$
- ❖ コイン投げをN回行う  $\rightarrow$  二項分布
  - 二項分布の平均 =  $Np$
  - 二項分布の分散 =  $Np(1-p)$

# 仮説1の検証 (1)

仮説1 ( $N = 16$ ) が正しいとすると、

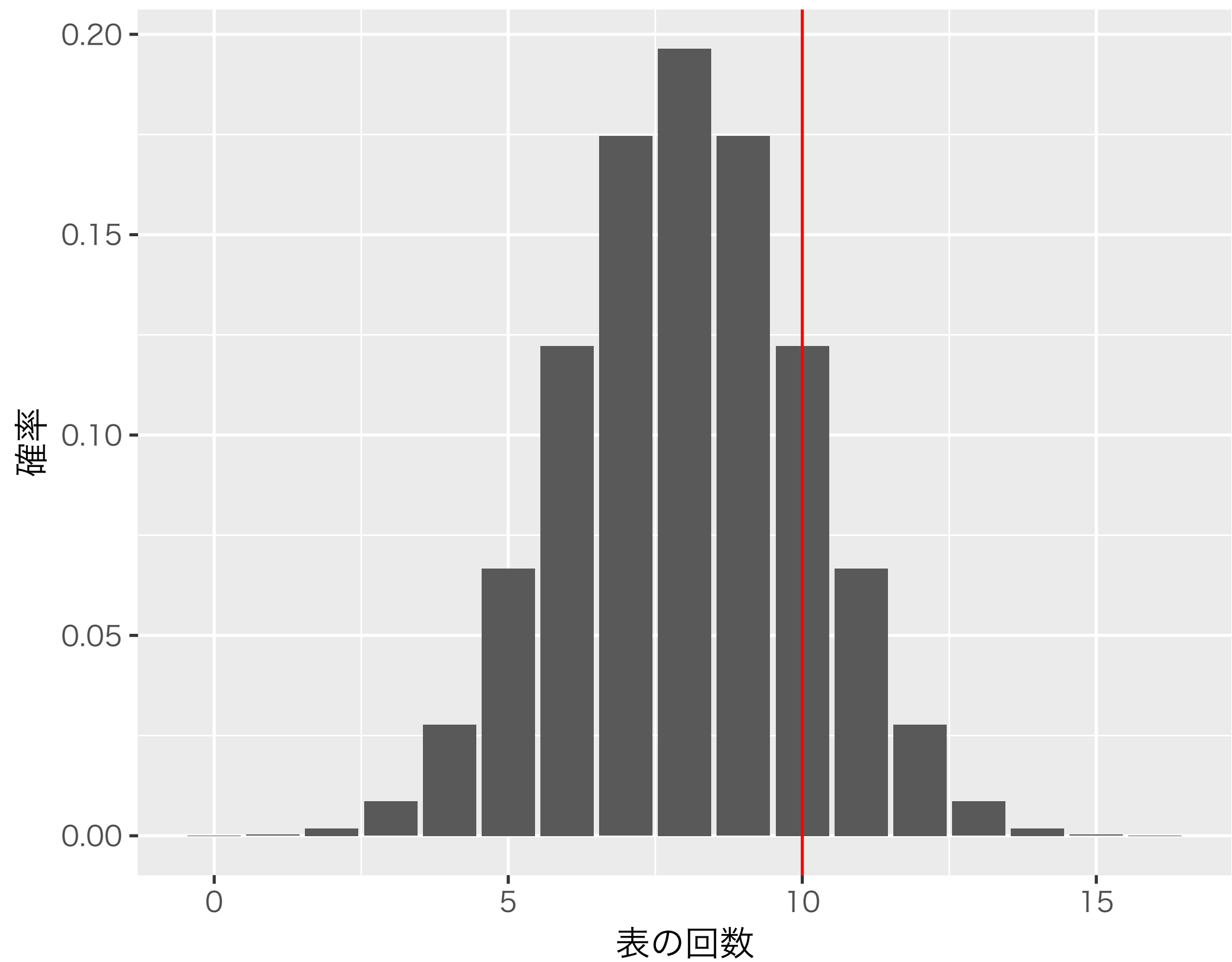
- 平均  $= Np = 16 \cdot 0.5 = 8$
- 分散  $= Np(1-p) = 16 \cdot 0.5 (1 - 0.5) = 4$
- 標準偏差  $= 2$
- ▶ 平均  $- 1.96sd = 8 - 1.96 \times 2 = 4.08$
- ▶ 平均  $+ 1.96sd = 8 + 1.96 \times 2 = 11.92$

# 仮説1の検証 (2)

仮説1 ( $N = 16$ ) が正しいとすると、

- ▶ データの95%は4.08 と11.92 の間の数をとる
- ▶ 実際に観測したデータは10であり、この区間に含まれる
- ➡ 仮説1が「おかしい」という証拠はない
- ➡ 仮説1を（とりあえず）受け容れる（保留）

# 仮説1 (N=16) が正しい場合



# 仮説2の検証 (1)

仮説2 ( $N = 36$ ) が正しいとすると、

- 平均  $= Np = 36 \cdot 0.5 = 18$
- 分散  $= Np(1-p) = 36 \cdot 0.5 (1 - 0.5) = 9$
- 標準偏差  $= 3$
- ▶ 平均  $- 1.96sd = 18 - 1.96 \times 3 = 12.12$
- ▶ 平均  $+ 1.96sd = 18 + 1.96 \times 3 = 23.88$

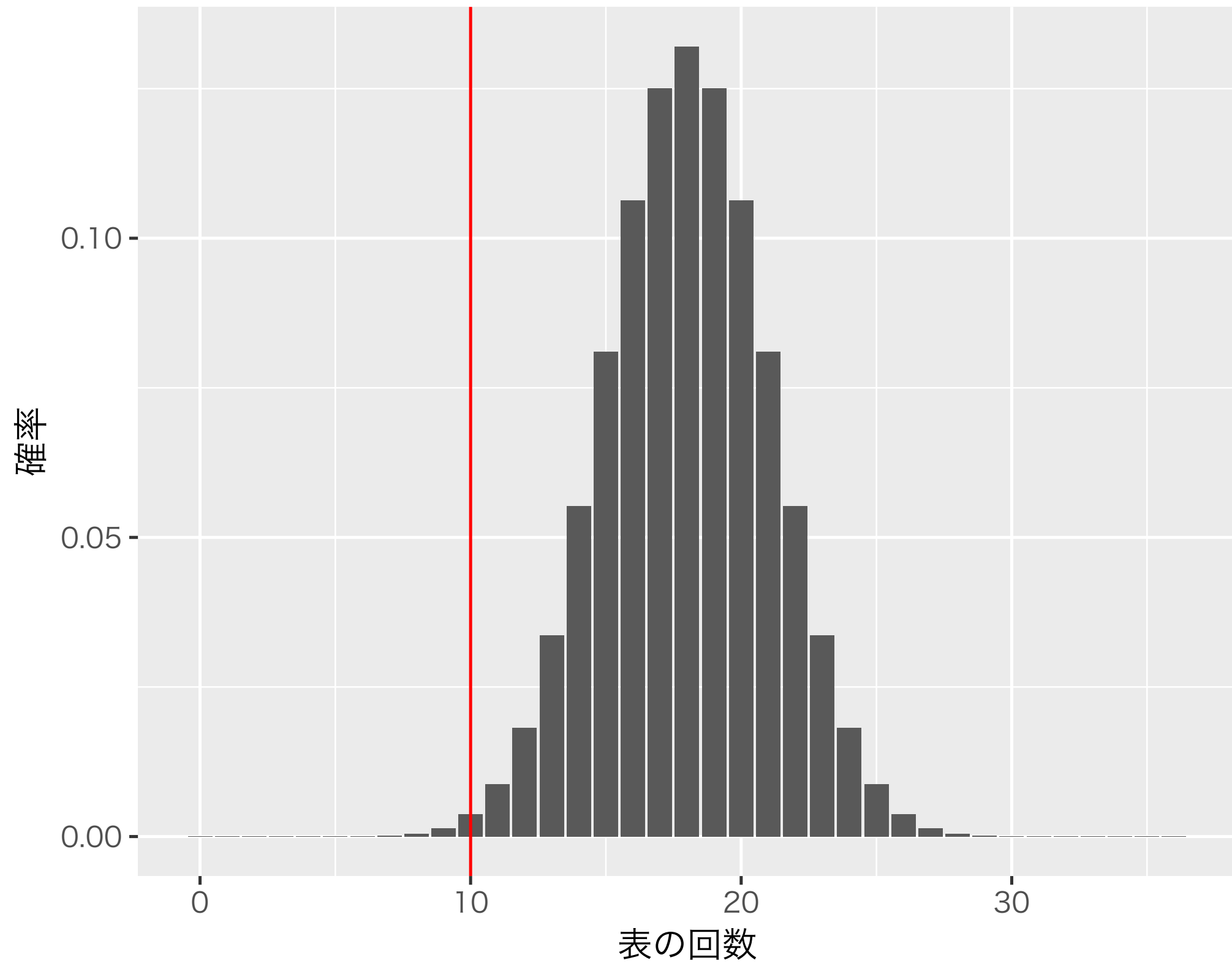
# 仮説2の検証 (2)

仮説2 ( $N = 36$ ) が正しいとすると、

- ▶ データの95%は12.12と23.88の間の数を取る
  - ▶ 実際に観測したデータは10であり、この区間に含まれない
- ➡ 仮説2を棄却する (仮説2は妥当でない)



仮説2 (N=36) が正しい場合



# 例題の結論

- 仮説1は妥当だが、仮説2は妥当とはいえない
- ▶ 「妥当＝真実」 **ではない**！
  - $N=20$ や $N=19$ を仮説にしても、受け容れられるはず
  - しかし、真実の $N$ はただ1つ存在する
- ➡ 仮説検定では、正しくないものははっきりわかる（棄却できる）が、受け容れた仮説が正しいとは限らない（単に「ありそう（妥当）」）というだけ

# 統計的推定の基礎

同じ例題で考える

- ▶ 正しいコインをN回投げる
- ▶ 表が10回出た
- ▶ 投げた回数Nは何回だと考えられるか？

1. 1つの値を答える = 点推定

2. 予測に幅をもたせる = 区間推定

# 点推定の例

- ▶ N枚のコイン（表が出る確率 $p$ は0.5）を投げて表が10枚出た
- ▶ 投げた枚数 $N$ は何枚だと考えられるか？
- ➡ 二項分布の平均  $Np$
- ➡ 手持ちのデータは10 → 平均は10
- ➡  $Np = 10 \rightarrow N = 10/p = 10/0.5 = 20$  : 点推定値

# 区間推定の例 (1)

- コイン（表が出る確率 $p$ は0.5）を $N$ 回投げて表が10回出た
- 投げた回数 $N$ は何回から何回の間だと考えられるか？
  - 統計的検定によって、16枚は妥当な仮説だが36枚は妥当な仮説でないことがわかった
  - 他にも妥当な仮説はあるはず（例:  $N=20$ ）
  - 妥当な仮説全体を、推定値として使う

# 区間推定の例 (2)

- コイン（表が出る確率 $p$ は0.5）を $N$ 回投げて表が10回出た
    - 平均  $\mu = Np = N/2$ , 分散  $\sigma^2 = Np(1-p) = N/4$
  - このとき、どんな仮説が棄却され、どんな仮説が受け容れられる？
- ➡  $-2 \leq z \leq 2$  となる $z$ を与える $N$ は受け容れられる。 $z$ は、

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{10 - \frac{N}{2}}{\sqrt{\frac{N}{4}}}$$

# 区間推定 (3)

N	z
12	2.309
13	1.942
14	1.604
15	1.291
16	1
17	0.728
18	0.471
19	0.229
20	0
21	-0.218
22	-0.426
23	-0.626
24	-0.817
25	-1
26	-1.177
27	-1.347
28	-1.512
29	-1.671
30	-1.826
31	-1.976

- $N=13$ から $N=30$ までの仮説はどれも棄却できない

- $N=12$ ,  $N=31$  は棄却

➡ 区間推定： $13 \leq N \leq 30$

★ 「 $\pm 1.96$ 」は確率が95%になる区間

➡ 求めた区間を「95%信頼区間」と呼ぶ

# 今日のまとめ

- 推測統計学とは、部分（標本、データ）から全体（母集団、興味の対象）を知るための方法
- 統計的検定：仮説を保留 or 棄却？
- 統計的推定：点推定と区間推定



# 期末試験について

- 6月6日（木）2限：75分間（教室：A210）
- 持ち込み：以下の2点のみ可
  1. チートシート1枚（詳細は後述）
  2. 教科書1冊（以下のうちいずれか一方のみ）
    - 『Rによる計量政治学』または *Real Stats*
- ▶ 1、2とも、**試験中の貸し借りは禁止**

# チートシートについて

- A4用紙（またはA4より小さいサイズ：letter は可） 1枚
- 両面に書き込み・印刷可
- 書き込む内容は自由
- 他の紙（付箋を含む）を貼り付けるのは禁止
- 両面の右上に、赤ペンで氏名と学籍番号を記入する