計量経済学

3. 二変数の関係

矢内　勇生

2019年10月10日

高知工科大学　経済・マネジメント学群

今日の目標

- 2つの変数の関係を調べる方法を理解する

1. 質的変数のとき
   - クロス表（分割表）
   - 独立性の検定
2. 量的変数のとき
   - 散布図
   - 相関係数

質的変数と量的変数

- 質的変数の例：性別、支持vs不支持、大学の成績（S, A, B, C, F）、好きなスポーツ

- 量的変数の例：身長、体重、年齢、年収

クロス表（分割表）(contingency table)

（例）性別と内閣支持の関係

	現在の内閣を		
	支持しない	支持する	計
男性	200	300	500
女性	250	250	500
計	450	550	1000

注目するのは行か列か（1）

- 問題ごとに行（row）と列（column）のどちらに注目するか考える

- 例の場合：

  - 行：性別ごとに内閣支持・不支持に差があるか

  - 列：内閣の支持・不支持によって女性の割合は異なるか

注目するのは行か列か（2）

行に注目
→行の合計を100%にする

	不支持	支持	計
男性	40%	60%	100%
女性	50%	50%	100%

列に注目
→列の合計を100%にする

	不支持	支持
男性	44%	55%
女性	56%	45%
計	100%	100%

性別によって内閣支持率は異なるか

- 標本：女性より男性のほうが内閣支持の割合が大きい

➡母集団でも男性の支持率のほうが高いといえる？

➡検定：独立性の検定

表：性別と内閣支持の関係

	不支持	支持	計
男性	200 (40%)	300 (60%)	500 (100%)
女性	250 (50%)	250 (50%)	500 (100%)
計	450 (45%)	550 (55%)	1000 (100%)

独立性の検定

- クロス表で提示される2変数に関連があるかどうか調べるための検定

✤ 内閣支持率に男女間で差がない

= 性別と内閣支持に関連がない

= 性別と内閣支持は独立

➡「独立性の検定」

▸ χ^2 分布を利用するので、「χ^2 検定」とも呼ぶ

独立性の検定の
帰無仮説と対立仮説

- 帰無仮説：2変数は独立である（関連がない）
- 対立仮説：2変数は独立ではない（関連がある）

（例）
- H_0: 性別と内閣支持には関連がない
- H_1: 性別と内閣支持には関連がある

独立性の検定（χ^2検定）の考え方

帰無仮説

	不支持	支持	計
男性	45%	55%	100%
女性	45%	55%	100%
計	45%	55%	100%

→

実際に観測されたデータ

	不支持	支持	計
男性	200 (40%)	300 (60%)	500 (100%)
女性	250 (50%)	250 (50%)	500 (100%)
計	450 (45%)	550 (55%)	1000 (100%)

このようなサンプルはあり得ない？

帰無仮説が正しいとすれば

帰無仮説

	不支持	支持	計
男性	45%	55%	100%
女性	45%	55%	100%
計	45%	55%	100%

帰無仮説の下で
期待されるデータ

	不支持	支持	計
男性	225 (45%)	275 (55%)	500 (100%)
女性	225 (45%)	275 (55%)	500 (100%)
計	450 (45%)	550 (55%)	1000 (100%)

期待度数

帰無仮説が正しい場合の χ^2値（検定統計量）を求める

$$\chi_0^2 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} \frac{(\text{観測度数}_{ij} - \text{期待度数}_{ij})^2}{\text{期待度数}_{ij}}$$

- i は行を表す（kは行の数）
- j は列を表す（mは列の数）
  - 観測度数$_{ij}$ は i 行 j 列の観測度数
- すべてのセルで $\frac{(\text{観測度数}_{ij} - \text{期待度数}_{ij})^2}{\text{期待度数}_{ij}}$ を求めて、合計すればよい

例題の場合の検定統計量を求める

観測度数

	不支持	支持
男性	200	300
女性	250	250

期待度数

	不支持	支持
男性	225	275
女性	225	275

$$\chi_0^2 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} \frac{(\text{観測度数}_{ij} - \text{期待度数}_{ij})^2}{\text{期待度数}_{ij}}$$

$$= \frac{(220-225)^2}{225} + \frac{(300-275)^2}{275} + \frac{(250-225)^2}{225} + \frac{(250-275)^2}{275}$$

$$\approx 2.78 + 2.27 + 2.78 + 2.27$$

$$= 10.1$$

統計量を何と比較する？

- カイ二乗分布の臨界値と比較する
  - カイ二乗分布は自由度によって形が変わる
  - クロス表の場合：自由度 = (行数 - 1) x (列数 - 1)
  - 0からどれだけ離れた値を取るかを調べたいので、**棄却域を片側（右側）にとる**
- 「検定統計量 > 臨界値」なら帰無仮説を棄却する

χ^2（カイ二乗）分布 (chi-squared distribution)

- 確率密度関数 *f(x)* は、

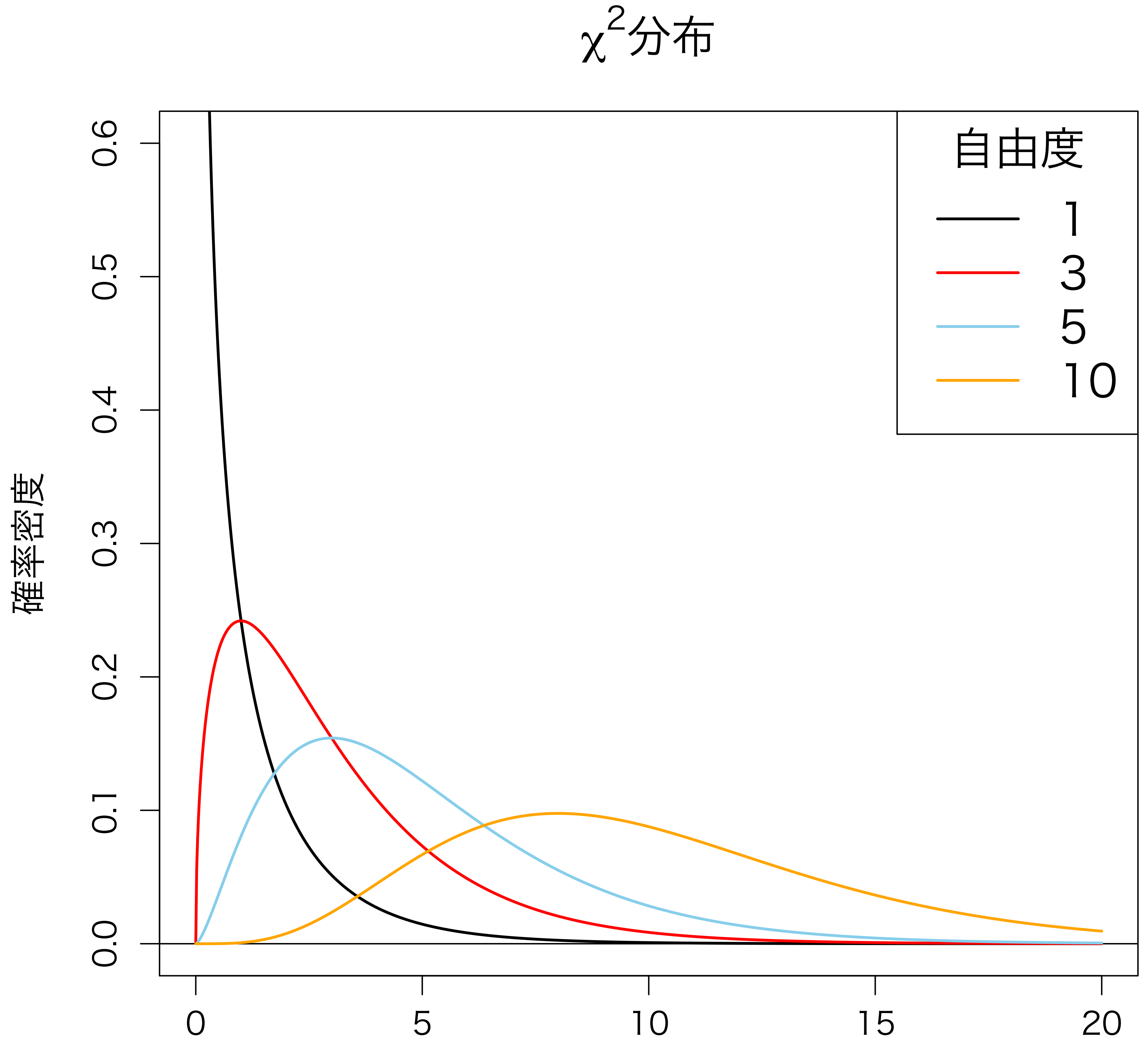
$$f(x;k) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} x^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}$$

（x > 0のとき）

$$f(x;k) = 0$$

（x ≤ 0のとき）

ただし、*k* は*x*の自由度、Γ (.) はガンマ関数。



χ^2分布
自由度
1
3
5
10
確率密度
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0
5
10
15
20
x

自由度（degree of freedom: df）

- 自由（独立）に動かせる値の数
- 各統計量に対して自由度が定められる
  - 例：サイズ*n* の標本の場合
    - 標本平均の自由度は *n*
    - 標本（不偏）分散の自由度は *n*-1

例：有意水準5%で検定する

- 検定統計量：10.1
- 2行2列の表 → 自由度 = (2 - 1)(2 - 1) = 1

➡ 有意水準5%の臨界値 = 3.84

```
qchisq(p = 0.05, df = 1, lower.tail = FALSE)
```

➡ 検定統計量 = 10.1 > 3.84 = 臨界値

➡ 帰無仮説を棄却する

➡ 性別によって内閣支持率が異なる！

＊フィッシャーの正確確率検定 (Fisher's exact test)

- 期待度数が5を下回るセルがあるとき

➡ 検定統計量が大きめに出てしまうので、独立性の検定が使えない

➡ フィッシャーの正確確率検定（直接確率法）を使う

（この授業では扱わない）

量的変数をクロス表にする

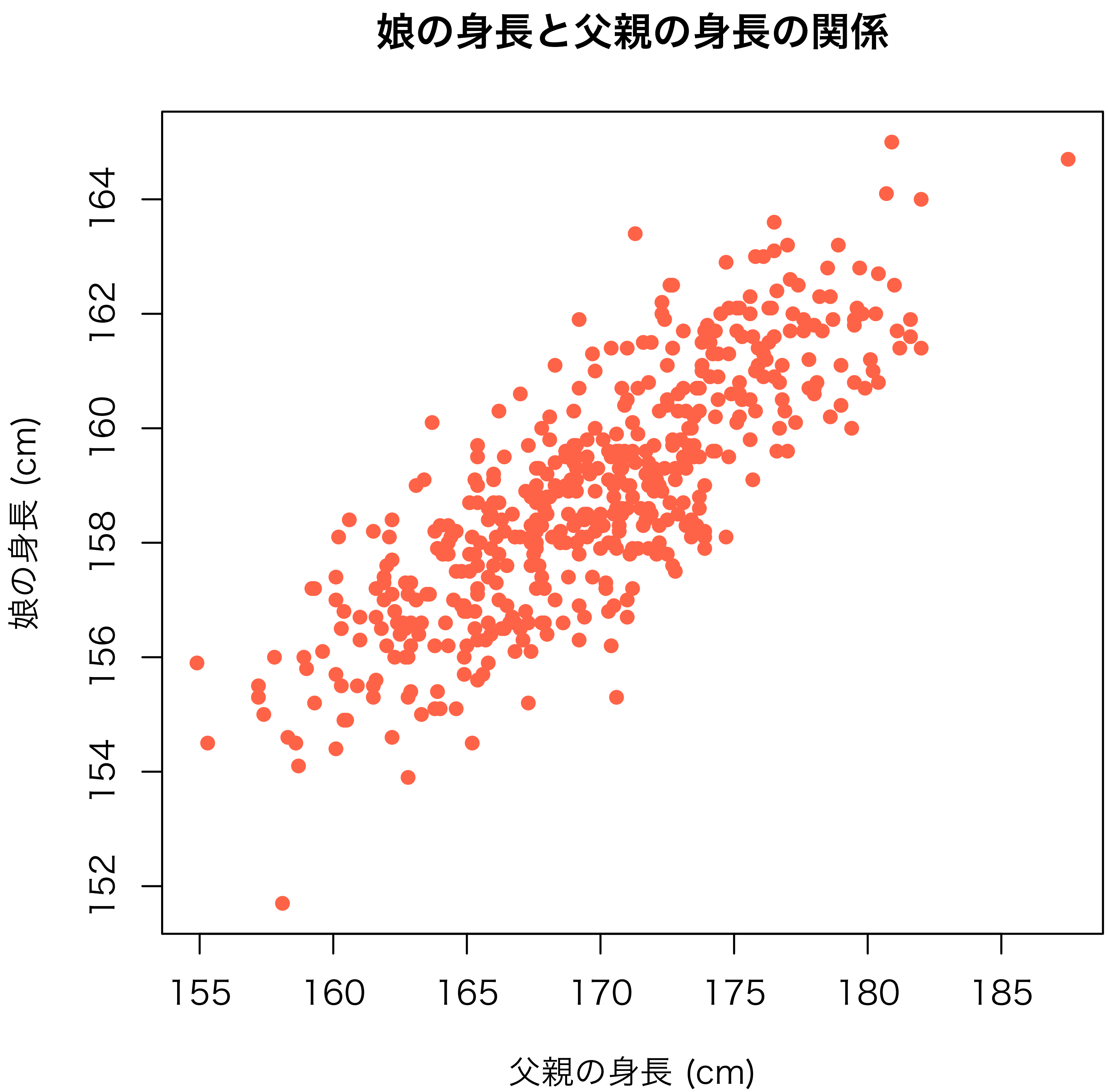
- 情報が失われる

➡ 表にせずに関係を表す

1. 図示する：散布図
2. 統計量を求める：相関係数

架空の例	年収		
	500未満	500〜1000	1000以上
身長170cm未満	100	80	60
170cm以上	50	75	80

2変数の関係を図示する:
散布図（scatter plot）



（架空のデータ）

相関関係

- 相関関係 (correlation)：
  - 2つの物事（変数）AとBの間の直線的な関係
  - Aの変化に合わせてBも変化する
  - 統計量：相関係数 r $(-1 \leq r \leq 1)$
  - Aが増える（減る）とき、Bも増える（減る）：正の相関 ($r > 0$)
  - Aが増える（減る）とき、Bが減る（増える）：負の相関 ($r < 0$)
  - r の絶対値が1に近いほど関係が強い

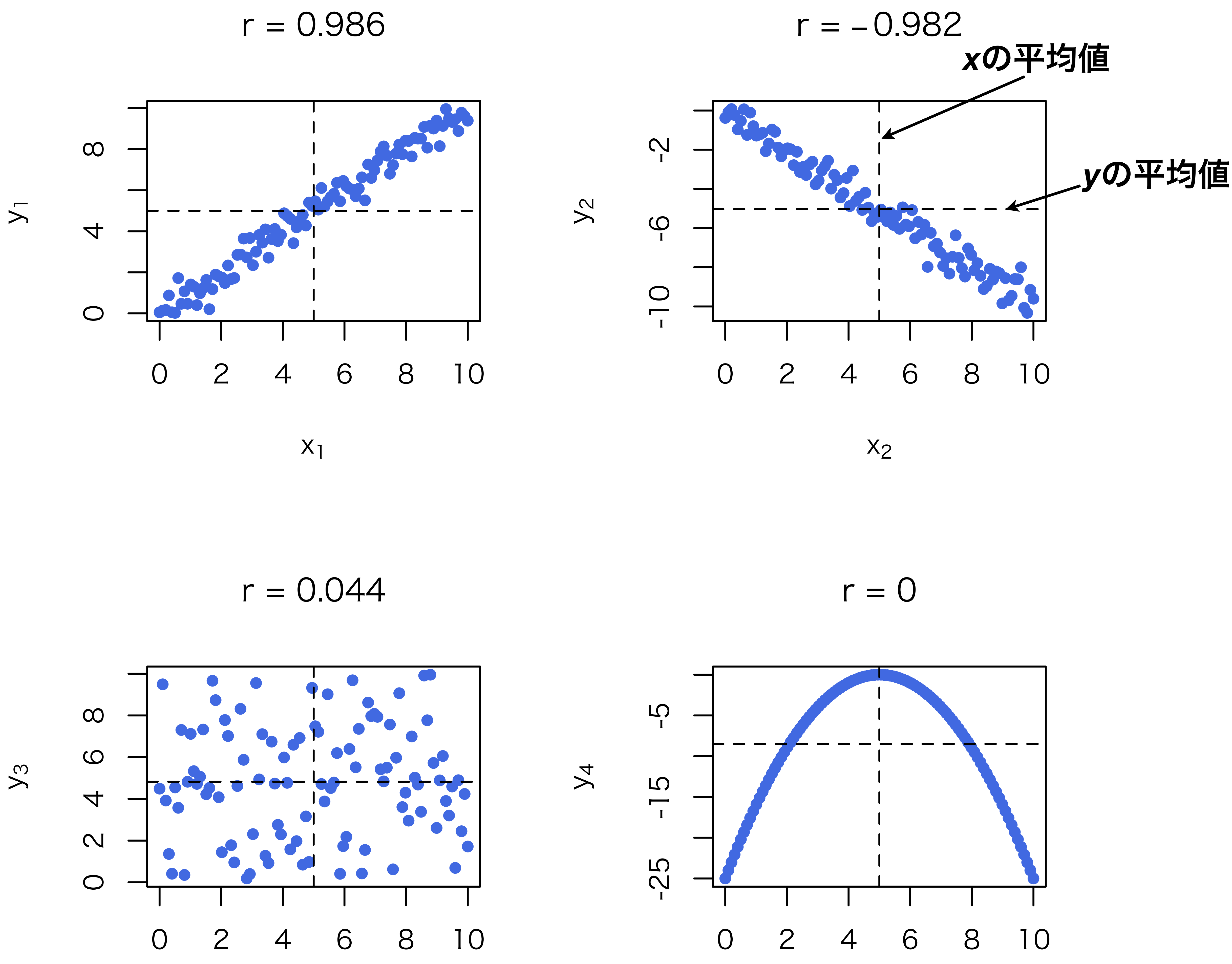
2変数の関係を表す統計量：相関係数（correlation coefficient）

- 変数 *x* と変数 *y* の相関係数 *r*

$$
\begin{aligned}
r &= \frac{x\text{ と }y\text{ の共分散}}{\sqrt{x\text{ 不偏分散}}\sqrt{y\text{ の不偏分散}}} \\
&= \frac{\frac{\sum_{i=1}^{n}[(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})]}{n-1}}{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}}\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}{n-1}}} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{n}[(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})]}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}
\end{aligned}
$$

相関係数の特徴

- 2変数の**直線的な**関係の強さを表す
- 取り得る値の範囲は [-1, 1]
    - 1：正の直線的関係（一方が大きくなるとき、他方も大きくなる）が最も強い
    - –1：負の直線的関係（一方が大きくなるとき、他方が小さくなる）が最も強い
    - 0：直線的関係がない（曲線的関係は強いかもしれないことに注意）
- **因果関係はわからない**
- **因果関係を仮定するとして、原因が結果にどれだけ影響を与えるかはわからない**



r = 0.986
r = −0.982
xの平均値
yの平均値
r = 0.044
r = 0
y_1
y_2
y_3
y_4
x_1
x_2

今日のまとめ

- 2つの変数のまとめ方：変数の種類によって異なる
  - 質的変数：クロス集計表、独立性の検定（カイ二乗検定）
  - 量的変数：散布図、相関係数

▶**散布図と相関係数はセットで一緒に使う**