NEUACM Lesson5 简要题解

(by yuki

- A Take-Outs
  - 题意：输入 n 个数 a_i，有两种操作，一是当前数减 2，二是相邻两个数同时减 1，操作次数不限，问能否将这 n 个数正好都减成 0。
  - 分析：考虑当前正在操作的这个数 a_i，如果 a_i 是偶数，那么使用操作一可直接将其减成 0；如果 a_i 是奇数，则先使用操作一将其减成 1，再使用操作二将 a_i 和 a_{i+1} 同时减 1，注意此时若 a_{i+1} 无法执行减 1 操作，则 false。因此从头开始将整个序列扫描一遍即可得出答案，复杂度 $O(n)$。

- B This problem is so easy !!
  - 题意：输入一个正整数 X，令 S 为 1080000002052^X 的所有正整数因子和，求 $S * 20000000036\%97$，X 范围 $1e7$
  - 分析：首先由约数和定理，若 $n = p_1^{a_1} * p_2^{a_2} * ... * p_k^{a_k}$，则 n 的因子和

$$f(n) = \prod_{i=1}^{k}(\sum_{j=0}^{a_i} p_i^j) = \prod_{i=1}^{k}(\frac{p_i^{a_i+1} - 1}{p_i - 1})$$

    因此先对 1080000002052 进行质因数分解，得到
    $1080000002052 = 2^2 * 3^3 * (1e10 + 19)^1$，则
    $1080000002052^X = 2^{2*X} * 3^{3*X} * (1e10 + 19)^{1*X}$，由上述公式可得

$$S = \frac{2^{2*X+1} - 1}{1} * \frac{3^{3*X+1} - 1}{2} * \frac{(1e10 + 19)^{1*X+1} - 1}{1e10 + 18}$$

    ，则

$$S * 20000000036\%97 = (2^{2*X+1} - 1) * (3^{3*X+1} - 1) * ((1e10 + 19)^{x+1} - 1)\%97$$

    快速幂直接求解可算出答案，复杂度 $O(\log X)$。

- C How to reach Nanhu
  - 题意：有 n 个人从浑南去南湖，距离为 L，步行速度为 V_1，公交车一次最多能载 K 个人，速度为 V_2，每个人最多乘车一次，求所有人到达南湖的最小时间。
  - 分析：列方程直接求解（？。
    显然，每个人乘车的距离跟走路的距离都是一样的，不妨令乘车的距离为 l_1，走路的距离为 l_2，那么，每次车接走一部分人的时候，走的距离是 $2 * l_1/(v_1 + v_2) * v_2$；推广一下就是走的总距离为 $2 * l_1/(v_1 + v_2) * v_2 * (times - 1)$，其中
    $times = (n/k + (n\%k == 0)?0 : 1)$。

所以，我们有 $2 * l_1/(v_1 + v_2) * v_2 * (times - 1) + l_1 = l$ ；
所以解出 $l_1 = l/(1 + 2 * v_2/(v + v_2) * (times - 1))$ ；
所以最终答案为 $ans = l_1/v_2 + l_2/v_1$。

- D Alice and Bob
  - 题意：n 个红盒子顺时针围成一圈，第 i 个红盒子里有 x_i 个球，i 到 $i+1$ 个红盒子之间有 d_i 个蓝盒子。一个人从某个红盒子开始顺时针走，遇到红盒子则取出所有球，每遇到一个蓝盒子就放入一个球，无法放入则失败。问能走完一圈的最小起始红盒子编号。
  - 分析：假设当前从第 i 个红盒子开始，到第 j 个红盒子后的某个蓝盒子时出现了无法放入球的情况，那么从 i 和 j 之间的任意一个红盒子开始走都是无法通过第 j 个红盒子后的蓝盒子的，因为此时手中的球数显然比从 i 开始要少。因此从 1 号红盒子开始扫描一遍即可得出答案，复杂度 $O(n)$。

- E PE teacher’s revenge
  - 题意：初始分数 100，输入一个数 n $(2 \leq n \leq 2 * 10^9)$，可将 n 分成 k 个正整数的和，允许 $k = 1$，减去的分数是这 k 个数的不包括本身的最大因子和，求分数最多是多少。
  - 分析：对于一个质数来说，不包括本身的最大因子是 1，因此可以看出本题要求的就是将 n 分解为最少的质数相加。由哥德巴赫猜想：任一大于 2 的偶数都可写成两个质数之和，及弱哥德巴赫猜想：任一大于 5 的奇数都可写成三个质数之和，可以得出：
    1. 所有质数的最终分数为 99；
    2. 除情况 1 以外所有大于 2 的偶数最终分数为 98；
    3. 除情况 1 以外所有大于 5 的奇数最终分数至少为 97，当该奇数可以由 2+一个质数 表示时，分数为 98。

- F Copy & Paste
  - 题意：输入一个正整数 N 表示罚抄的遍数，最开始有 1 遍，每次复制粘贴，问至少复制粘贴几次。
  - 分析：显然数字以 2 的次幂增长，直接模拟即可，复杂度 $O(\log N)$。

- G A math problem
  - 题意：输入 k, p, n，p 为质数且 $p \neq 2$，求 $x^k \% p^n$ 有多少不同的解，x 为任意正整数且 x 与 p 互质。
  - 分析：首先，因为模数为 p^n，所以一定存在原根，设其为 g，则一个与 p^n 互质的数一定可以表示成 g^x。因此，假设 $(a, p^n) = 1$，a 是 p^n 的 k 次剩余的充分必要条件是 $gcd(phi(p^n), k) | x$。那么，符合条件的一共有 $phi(p^n)/gcd(phi(p^n), k)$ 个，即为本题所求的答案。