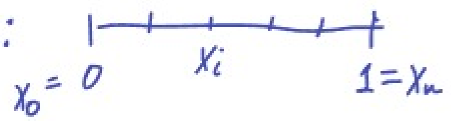
1. Для данной функции $f(x)$ на отрезке $[0, 1]$ и разбиения τ на n равных частей: а) построить верхнюю и нижнюю суммы Дарбу; б) оценить верхний и нижний интегралы Дарбу (по равномерным разбиениям); в) проверить критерий ~~Римана~~ Дарбу и доказать, что $f(x)$ интегрируема на $[0, 1]$; г) найти интеграл $\int_0^1 f(x)dx$; д) проверить по формуле Ньютона–Лейбница.

1.1. $f(x) = x^2$;
1.2. $f(x) = e^x$;
1.3. $f(x) = 2^x$;
1.4. $f(x) = \sin(\pi x/2)$;

Суммы Дарбу: $s_\tau = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \Delta x_i$

$$S_\tau = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \Delta x_i$$

τ: 

$x_i = \frac{i}{n}$, $i = 0, \ldots, n$

$\Delta x_i = \frac{1}{n}$

$$m_i = \inf_{x \in [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]} x^2 = \left(\frac{i-1}{n}\right)^2.$$

$$M_i = \sup_{x \in \Delta_i} x^2 = \left(\frac{i}{n}\right)^2$$

$$S_\tau = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{n^3}\left(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2\right) =$$

$$= \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$$

$$s_\tau = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i-1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} (i-1)^2 =$$

$$= \frac{1}{n^3} \cdot \frac{(n-1) \cdot n\,(2n-1)}{6}$$

б) Интегралы Дарбу: $I^* = \inf_\tau S_\tau \leq \inf_n \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} =$

$$= \inf_n \frac{1}{6}\left(2 + \underbrace{\frac{3}{n}}_{\downarrow} + \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\downarrow}\right) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{6}\left(2 + \underbrace{\frac{3}{n}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\to 0}\right) = \frac{1}{3}.$$

(убывают)

$$I_* = \sup_\tau s_\tau \geq \sup_n \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} = \sup_n \frac{1}{6}\left(2 - \frac{3}{n} + \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\geq 0}\right) \geq \sup_n \frac{1}{6}\left(2 - \underbrace{\frac{3}{n}}_{\uparrow}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6}\left(2-\frac{3}{n}\right) = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{3} \le \underline{I}_* \le \overline{I}^* \le \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \underline{I}_* = \overline{I}^* = \frac{1}{3}.$$

в) Критерий ~~Римана~~: Дарбу:

$f \in R[a,b] \Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall \tau \ \lambda(\tau) < \delta \Rightarrow S_\tau - s_\tau < \varepsilon$

Имеем: $S_\tau - s_\tau = \{$для равн. разбиения$\} =$

$$= \frac{1}{6n^2}\Big((n+1)(2n+1) - (n-1)(2n+1)\Big) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall n \ge n_0 \ S_\tau - s_\tau < \varepsilon$

$\Rightarrow \lambda(\tau) < \frac{b-a}{n_0} = \delta.$

г) $$\int_0^1 x^2 dx = \lim_{\lambda(\tau)\to 0} \sigma(f,\tau,\xi) = \lim_{\lambda(\tau)\to 0} S_\tau = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = \frac{1}{3}$$

д) $$\int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

2. Свести предел к интегральной сумме и вычислить

2.1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}\right);$

2.2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{\frac{n+1}{n^3}} + \sqrt{\frac{n+2}{n^3}} + \ldots + \sqrt{\frac{n+n}{n^3}}\right).$

2.3. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \ldots + \frac{n-1}{n^2}\right)$

Ответ: $\int_0^1 x dx = 1/2$

2.4. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{4n^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2-4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right)$

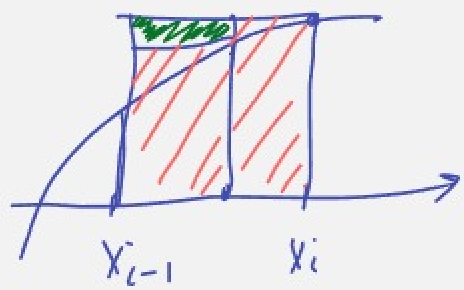
Ответ: $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{\pi}{6}$

2.5. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^4} + \frac{8}{n^4} + \ldots + \frac{(n-1)^3}{n^4}\right)$

Ответ: $\int_0^1 x^3 dx = 1/4$

2.6. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^3+1} + \frac{4}{n^3+8} + \ldots + \frac{n^2}{n^3+n^3}\right)$

Ответ: $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^3} dx = \frac{\ln 2}{3}$



(2) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\ldots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\underbrace{\frac{1}{n}}_{\Delta x_i}\cdot\underbrace{\frac{1}{1+\frac{i}{n}}}_{f\left(\frac{i}{n}\right)} =$$

τ - разбиение $[0,1]$ на n частей

$f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ - интегрируема на $[0,1]$ (т.к. непрерывна)

$$= \int_0^1\frac{1}{1+x}\,dx=\ln|1+x|\Big|_0^1=\ln 2-\ln 1=\ln 2.$$

3. Вычислите

3.1. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dx}{3+\cos x}$;

$$\int_0^{2\pi}\frac{dx}{3+\cos x} =$$

универс. триг. подстановка:

$t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}\qquad dx=\dfrac{2dt}{1+t^2}\qquad \cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

$$\int\frac{dx}{3+\cos x}=\int\frac{2dt}{(1+t^2)\left(3+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}=\int\frac{2dt}{4+2t^2}=\int\frac{dt}{2+t^2}=$$

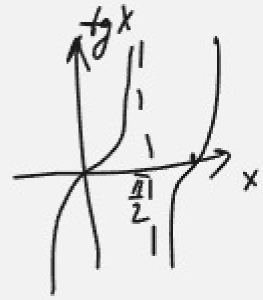
$$=\frac{1}{\sqrt2}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt2}=\frac{1}{\sqrt2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}x/2}{\sqrt2}\right)+C$$

$x\neq\pi$

$$= \cancel{\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x/2}{\sqrt{2}}\right)\Bigg|_0^{2\pi}} = 0 - 0 = 0 \quad \text{Но } \frac{1}{3+\cos x} \geqslant \frac{1}{4} > 0$$

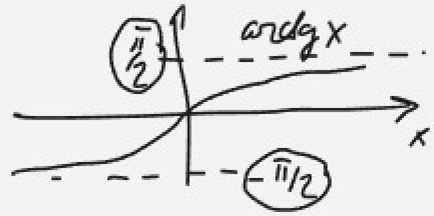
$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{3+\cos x} = \int_0^{\pi} + \int_{\pi}^{2\pi} = \lim_{w \to \pi - 0} \int_0^{w} + \lim_{w \to \pi + 0} \int_w^{2\pi} =$$

$$= \lim_{w \to \pi - 0} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \frac{w}{2}}{\sqrt{2}} - \lim_{w \to \pi + 0} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \frac{w}{2}}{\sqrt{2}} =$$



$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(+\infty) - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(-\infty) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$



4. Найти пределы

4.1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} \int\limits_0^x \cos(t^2)dt$;

Комментарий: Лопиталь

4.2. $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{1}{x} \int\limits_0^x \operatorname{arctg}(t^2)dt$;

Ответ: $\pi/2$

4.3. $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{\int\limits_0^{\sin x} \sqrt{\operatorname{tg} t}\,dt}{\int\limits_0^{\operatorname{tg} x} \sqrt{\sin t}\,dt}$;

4.4. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\sin^2 x} \int\limits_0^{x^2} \cos(t^2)dt$.

4

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \int_0^x \cos(t^2)\,dt =$$

Т. Барроу: $f \in C[a,b] \Rightarrow$

$$\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)' = f(x)$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\left(\int_0^x \cos t^2\,dt\right)'}{(x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x^2}{1} = 1.$$

Замечания:
$$\left(\int_a^{g(x)} f(t)\,dt\right)' = \left(F(g(x))\right)' = F'(g(x)) \cdot g'(x) =$$

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

5. Доказать неравенства

5 $\quad I = \int^{\pi}$

5. Доказать неравенства

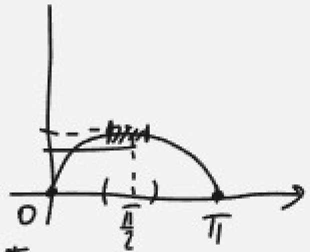
5.1. $0 \leqslant \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin x}{\sqrt[5]{x^2+2}}dx \leqslant \frac{\pi}{\sqrt[5]{2}}$;

5.2. $\frac{\sqrt{2}}{3} < \int\limits_{\pi/4}^{3\pi/4} \frac{\sin x}{x}dx < \ln 3$;

5.3. $\frac{\sqrt{2}}{3} < \int\limits_{-1}^{1} \frac{\cos x\,dx}{2+x^2} < 1$.

(5) $I = \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin x}{\sqrt[5]{x^2+2}}\,dx$

$f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt[5]{x^2+2}} \geqslant 0$ на $[0, \pi]$ $\Rightarrow$ $I \geqslant 0$.



$f\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$ и f - непрерывна

$\Rightarrow$ $I > 0$.

$\frac{\sin x}{\sqrt[5]{x^2+2}} \leqslant \frac{1}{\sqrt[5]{x^2+2}} \leqslant \frac{1}{\sqrt[5]{2}}$ $\Rightarrow$ $I \leqslant \int\limits_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt[5]{2}}dx = \frac{\pi}{\sqrt[5]{2}}$.