Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

Отчет по лабораторной работе № 4

«Метод Ньютона»

По курсу «Методы вычислений»

Вариант 1

Студент: Белоусова Ю.С.

Группа: ИУ7-21М

Преподаватель: Власов П.А.

Москва, 2022г.

1. Постановка задачи

Необходимо решить задачу одномерной минимизации:

$$\begin{Bmatrix} f(x) \to min \\ x \in [a, b] \end{Bmatrix}$$

методом Ньютона (модифицированным).

Входные данные для варианта 1:

- Целевая функция $f(x) = \exp(\frac{x^4 + x^2 - x + \sqrt{5}}{5}) + sh(\frac{x^3 + 21x + 9}{21x + 6})$
- Отрезок [a,b] = [0,1]

2. Краткое описание метода Ньютона

Метод Ньютона поиска минимума функции f является методом Ньютона (касательных) решения уравнения f \`(x) = 0. Функция f дважды дифференцируема и выпукла вниз на [a, b]. Тогда для функции f условие f \`(x0) = 0 является необходимым и достаточным условием того, что $x_0 \in [a, b]$ – точка минимума функции f.

Метод Ньютона решения нелинейного уравнения g(x) = 0, $x \in [a, b]$

Идея метода состоит в следующем: в качестве следующего приближения искомого корня x* используется точка пересечения касательной к графику функции в точке (x, g(x)) с осью Ox. Расчетная схема:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{g(x_k)}{g'(x_k)}$$

Существует модификация метода Ньютона, идея которой состоит в том, что производную g\` вычисляют один раз на первой итерации, а в качестве очередного приближения корня x* используют точку пересечения x_{k+1} с осью Ox прямой, проходящей через точку (x_k , g(x_k)), параллельно касательной в точке x_0 . Расчетная схема:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{g(x_k)}{g'(x_0)}$$

Алгоритм работы метода Ньютона

1. Выбрать начальное приближение, например $\bar{x}=\frac{a+b}{2}$

2. $\bar{f}_1=f'(\bar{x});$

3. если $|\bar{f}_1|<\varepsilon$, то переход к п. 5, иначе — к п. 4

4. $\bar{f}_2=f''(\bar{x});$

   $\bar{x}'=\bar{x};$

   $\bar{x}=\bar{x}-\frac{\bar{f}_1}{\bar{f}_2};$ переход к п. 2

5. x* = $\bar{x}$; f* = $f(\bar{x})$.

3. Текст программы

```
function lab4()
    clc;
    show_points = 1;
    N = 0;
    a = 0;
    b = 1;
    eps = 1e-6;
    delta = 1e-6;
    x0 = (a+b)/2;
    f0 = f(x0);
    fr = f(x0+delta);
    fl = f(x0-delta);
    f1 = (fr-fl)/(2*delta);
    f2 = (fr - 2*f(x0)+fl)/(delta^2);
    iter = 1;
    xarr = [x0];
    yarr = [f0];
    fprintf("Итерация %d: x0=%.10f, f0=%.10f\n", iter, x0, f0);
    while abs(f1) >= eps
        x0 = x0 - f1/f2;
        xarr = [xarr x0];
        f0 = f(x0); N = N -1;
        yarr = [yarr f0];
        iter = iter + 1;
        fprintf("Итерация %d: x0=%.10f, f0=%.10f\n", iter, x0, f0);
        fr = f(x0+delta);
        fl = f(x0-delta);
        f1 = (fr-fl)/(2*delta);
    end
    iter = iter + 1;
    fprintf("Итерация %d: x0=%.10f, f0=%.10f\n", iter, x0, f0);
    fprintf("x*=%.10f, f*=%.10f\n",  x0, f0);
    fprintf("Количество вызовов f: %d\n", N);

    figure
    x = 0:1e-2:1;
```

```
    y = arrayfun(@(xi) f(xi), x);
    if show_points
        plot(x, y, x0, f0, '*', xarr, yarr, 'o');
    else
        plot(x, y, x0, f0, '*');
    end

    function y=f(x)
        y = exp((x^4 + x^2 - x + 5^(1/2))/5) + sinh((x^3 + 21*x +9)/(21*x
+ 6)) + 3.0;
        N = N+1;
    end
end
```

4. Результаты работы

№ п/п	ε	N	x*	f(x*)
1	1e-2	6	0.5716742484	5.9895598464
2	1e-4	8	0.5713088205	5.9895596635
3	1e-6	10	0.5713161198	5.9895596634

5. Сводная таблица результатов по всем работам

№ п/п	Метод	N	x*	f(x*)
1	Поразрядного поиска	49	0.5713148117	5.9895596634
2	Золотого сечения	31	0.5713159013	5.9895596634
3	Парабол	9	0.5713159592	5.9895596634
4	Ньютона модифицированный	10	0.5713161198	5.9895596634
5	fminbnd	9	0.5713161365	5.9895596634