Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

Отчет по лабораторной работе № 3
«Метод парабол»

По курсу «Методы вычислений»

Вариант 1

Студент: Белоусова Ю.С.

Группа: ИУ7-21М

Преподаватель: Власов П.А.

Москва, 2022г.

1. Постановка задачи

Необходимо решить задачу одномерной минимизации:

$$\begin{Bmatrix} f(x) \to min \\ x \in [a, b] \end{Bmatrix}$$

методом парабол.

Входные данные для варианта 1:

- Целевая функция $f(x) = \exp(\frac{x^4 + x^2 - x + \sqrt{5}}{5}) + sh(\frac{x^3 + 21x + 9}{21x + 6})$
- Отрезок [a,b] = [0,1]

2. Краткое описание метода парабол

В методе парабол целевая функция аппроксимируется квадратичной функцией, график которой (парабола) проходит через точки $x_1, x_2, x_3 \in [a, b]$. Точки x_1, x_2, x_3 выбираются так, что :

$$\begin{Bmatrix} x_1 < x_2 < x_3 \\ f(x_1) \geq f(x_2) \leqslant f(x_3) \\ (\text{по крайней мере одно из неравенств строгое}) \end{Bmatrix} \qquad (1)$$

Точка минимума параболы находится аналитически и принимается в качестве приближения x*.

Общий вид уравнения параболы:

$$g(x) = a_0 + a_1(x - x_1) + a_2(x - x_1)(x - x_2)$$

Тогда из условия, что парабола проходит через точки $(x_i, f_i), i = 1,2,3$ коэффициенты $a_j, j = 0,1,2$:

$$\begin{Bmatrix} a_0 = f_1 \\ a_1 = \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} \\ a_2 = \frac{1}{x_3 - x_2}\left(\frac{f_3 - f_1}{x_3 - x_1} - \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1}\right) \end{Bmatrix}$$

Точка минимума функции g(x):

$$\bar{x} = \frac{1}{2}\left(x_1 + x_2 - \frac{a_1}{a_2}\right) \qquad (2)$$

Выбор точек x_1, x_2, x_3 :

На первой итерации метода парабол можно выполнить несколько итераций метода золотого сечения, пытаясь использовать в качестве x_1, x_2, x_3 две пробные точки и одну из граничных точек текущего отрезка. Эти попытки продолжать, пока не будут выполнены условия (1).

На второй и последующих итерациях метода парабол на отрезке [x1, x3] рассматриваются две пробные точки x2 и $\bar{x}$, для которых используется метод исключения отрезков. В новом отрезке [x1`, x3`] в качестве x2` используется та из точек x2 и $\bar{x}$, которая оказалась внутри.

Алгоритм работы метода парабол

1. Выбрать точки $x_1, x_2, x_3 \in [a, b]$ в соответствии с условием (1)
2. Найти $\bar{x}$ по формуле (2); $\bar{f} = f(\bar{x});$
3. it = 1;
4. если it == 1, то переход к п. 5, иначе — к п. 6
5. it = it + 1;

   $\bar{x}' = \bar{x};$

   Выбрать новые x_1, x_2, x_3 ;

   $f_i = f(x_i), i = 1,2,3$;

   Найти $\bar{x}$ по формуле (2) для текущих x_1, x_2, x_3 ;

   $\bar{f} = f(\bar{x});$ переход к п. 4
6. если $|\bar{x} - \bar{x}'| \leqslant \varepsilon$, то переход к п. 7, иначе — к п. 5
7. x* = $\bar{x}$; f* = $\bar{f}$.

3. Текст программы

```
function lab3()
    clc;
    show_points = 1;
    zs = 1;
    otr = 3;
    N = 0;
    a = 0;
    b = 1;
    eps = 1e-6;
    if zs
        [x1, x2, x3, f1, f2, f3] = zol_sech(a, b, eps);
    else
        x1 = a;
```

```
        x2 = (a+b)/2;
        x3 = b;
        f1 = f(x1);
        f2 = f(x2);
        f3 = f(x3);
    end
    %N = 0;
    iter = 1;
    xarr = [x1 x3];
    yarr = [f1 f3];
    a1 = (f2-f1)/(x2-x1);
    a2 = ((f3-f1)/(x3-x1)-(f2-f1)/(x2-x1))/(x3-x2);
    xmin = (x1+x2 - a1/a2)/2;
    fmin = f(xmin);
    fprintf("Итерация %d: x1=%.10f, x2=%.10f, x3=%.10f, xmin=%.10f\n",
iter, x1, x2, x3, xmin);
    x0 = make_iter();
    while abs(xmin-x0) > eps
        fprintf("Итерация %d: x1=%.10f, x2=%.10f, x3=%.10f, xmin=%.10f\
n", iter, x1, x2, x3, xmin);
        x0 = make_iter();
    end
    fprintf("Итерация %d: x1=%.10f, x2=%.10f, x3=%.10f, xmin=%.10f\n",
iter, x1, x2, x3, xmin);
    iter = iter + 1;
    x0 = xmin;
    f0 = fmin;
    fprintf("x*=%.10f, f*=%.10f\n",  x0, f0);
    fprintf("Количество вызовов f: %d\n", N);

    figure
    x = 0:1e-2:1;
    y = arrayfun(@(xi) f(xi), x);
    if show_points
        plot(x, y, x0, f0, '*', xarr, yarr, 'black-');
    else
        plot(x, y, x0, f0, '*');
    end

    function y=f(x)
        y = exp((x^4 + x^2 - x + 5^(1/2))/5) + sinh((x^3 + 21*x +9)/(21*x
+ 6)) + 3.0;
        N = N+1;
    end

    function x0=make_iter()
        iter = iter+1;
        x0 = xmin;
        if xmin < x2
            if fmin > f2
                if otr == 1 % для печати отрезков
                    xarr = [xarr x3];
                    yarr = [yarr f3];
                end
                otr = 1;
                x1 = xmin;
                f1 = fmin;
                xarr = [xarr x1];
```

```
            yarr = [yarr f1];
        else
            if otr == 3 % для печати отрезков
                xarr = [xarr x1];
                yarr = [yarr f1];
            end
            otr = 3;
            x3 = x2;
            f3 = f2;
            x2 = xmin;
            f2 = fmin;
            xarr = [xarr x3];
            yarr = [yarr f3];
        end
    else
        if fmin > f2
            if otr == 3 % для печати отрезков
                xarr = [xarr x1];
                yarr = [yarr f1];
            end
            otr = 3;
            x3 = xmin;
            f3 = fmin;
            xarr = [xarr x3];
            yarr = [yarr f3];
        else
            if otr == 1 % для печати отрезков
                xarr = [xarr x3];
                yarr = [yarr f3];
            end
            otr = 1;
            x1 = x2;
            f1 = f2;
            x2 = xmin;
            f2 = fmin;
            xarr = [xarr x1];
            yarr = [yarr f1];
        end
    end
    a1 = (f2-f1)/(x2-x1);
    a2 = ((f3-f1)/(x3-x1)-(f2-f1)/(x2-x1))/(x3-x2);
    xmin = (x1+x2 - a1/a2)/2;
    fmin = f(xmin);
end

function [x1, x2, x3, f1, f2, f3]=zol_sech(a, b, eps)
    flag = 1;
    tau = (5^(1/2) - 1)/2;
    l = b - a;
    xl = b - tau*l;
    fl = f(xl);
    xr = a + tau*l;
    fr = f(xr);
    while l > 2*eps
        if fl >= fr
            fb = f(b);
            if fr < fb
                x1 = xl; f1 = fl;
```

```
                    x2 = xr; f2 = fr;
                    x3 = b; f3 = fb;
                    flag = 0;
                    break;
                end
                a = xl;
                l = b - a;
                xl = xr;
                fl = fr;
                xr = a + tau*l;
                fr = f(xr);
            else
                fa = f(a);
                if f(a) >= fl
                    x1 = a; f1 = fa;
                    x2 = xl; f2 = fl;
                    x3 = xr; f3 = fr;
                    flag = 0;
                    break;
                end
                b = xr;
                l = b - a;
                xr = xl;
                fr = fl;
                xl = b - tau*l;
                fl = f(xl);
            end
        end
        if flag
            x1 = a; f1 = f(a);
            x2 = (a+b)/2; f2 = f(x2);
            x3 = b; f3 = f(b);
        end
    end
end
```

4. Результаты работы

№ п/п	ε	N	x*	f(x*)
1	1e-2	6	0.5712329413	5.9895596733
2	1e-4	7	0.5713136158	5.9895596634
3	1e-6	9	0.5713159592	5.9895596634