Бакалавриат АУ 2016-2017
Группа 201/2

Двойные интегралы
7 сентября 2016

1) Вычислить двойной интеграл $I = \iint\limits_X f(x,y)\,dx\,dy$, если:
   А) $f(x,y) = (1+x+y)^{-2}$,
   X — треугольник, ограниченный прямыми $x = 2y$, $y = 2x$, $x + y = 6$;
   Б) $f(x,y) = y^2$, множество X ограничено линиями $x = y^2$, $y = x - 2$;
   В) $f(x,y) = x$, $X = \{(x,y) : 2rx \leqslant x^2 + y^2 \leqslant R^2\}$, $0 < 2r < R$;
   Г) $f(x,y) = x\sin(y) + y\sin(x)$, $X = \left[0,\frac{\pi}{2}\right] \times \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$;
   Д) $f(x,y) = \min(x,y)$, $X = [0,a] \times [0,a]$.
   Замечание: Эту задачу можно было сформулировать и так:
   найти массу плоского тела X с плотностью $f(x,y)$. А как найти центр масс?
2) Переменить порядок интегрирования:

$$\text{А)} \int\limits_0^{\pi} dx \int\limits_0^{2\sin(x)} f(x,y)\,dy; \qquad \text{Б)} \int\limits_1^{3} dy \int\limits_0^{\log_3(y)} f(x,y)\,dx + \int\limits_3^{4} dy \int\limits_0^{4-y} f(x,y)\,dx.$$

3) *Перемена порядка в повторном интеграле иногда существенно упрощает его вычисление...*

$$\text{А)} \int\limits_0^1\int\limits_y^1 e^{x^2}\,dx\,dy; \qquad \text{Б)} \int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{\sqrt[3]{|x|}}^{1} (1-y^2)^{\alpha}\,dy\,dx, \quad \alpha > 0.$$

4) И снова задание 1:
   Е) $f(x,y) = y$, X ограничено аркой циклоиды $x = a(t - \sin(t))$, $y = a(1-\cos(t))$, $t \in [0,2\pi]$, и осью OX.
   Ж) $f(x,y) = (x-y)$, X ограничено осями координат и дугой астроиды $x = a\cos^3(t)$, $y = a\sin^3(t)$, $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$.

Кратные интегралы
7 сентября 2016

1) Вычислить тройной интеграл $I = \iiint\limits_X f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$, если:
   А) $f(x,y,z) = (x+y+z)^{-3}$, а X — множество, ограниченное плоскостями $4x + 3z = 12$, $4x + z = 4$, $4y + 3z = 12$, $4y + z = 4$, $z = 0$.
   Б) $f(x,y,z) = xy^2z^3$, а X — множество, ограниченное $z = xy, y = x, x = 1, z = 0$.
2) Записать интеграл $\iiint\limits_G f$ в виде повторного в указанном порядке:
   А) (y,z,x), Б) (x,z,y),
   где $G = \left\{x \geq 0,\, z \geq 0,\, x^2 + y^2 \leq a^2,\, y^2 + z^2 \leq a^2\right\}$.
3) Найти объем V n-мерного симплекса, то есть $\left\{(x_1,\dots,x_n) : 0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \leq 1\right\}$.
4) Найти объем V_n n-мерного шара, то есть $\left\{(x_1,\dots,x_n) : x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq R^2\right\}$.

Замена переменных
14 сентября 2016

1) Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой:

   А) $(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2)$; Б) $\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b}\right)^3 = \dfrac{xy}{c^2}$, $\quad x,y \geqslant 0$.
2) Найдите объем тела, ограниченного:

А) плоскостями: $a_1x+b_1y+c_1z=\pm h_1$, $a_2x+b_2y+c_2z=\pm h_2$, $a_3x+b_3y+c_3z=\pm h_3$, где

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}\neq 0.$$

Б) $\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\right)^2=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$; В) $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{2}{3}}=1$.

3) С помощью замены

$$(x,y)\mapsto\left(\frac{x+y}{2},\frac{y-x}{2}\right)$$

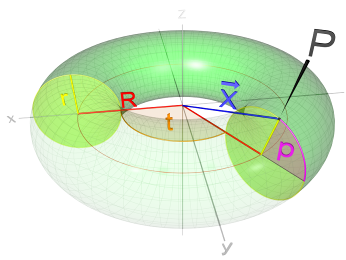
вычислите интеграл

$$\int_0^1\int_0^1\frac{1}{1-xy}dxdy$$

и покажите, что $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

Приложение кратных интегралов к механике
21 сентября 2016

1) Дано тело $G=\{x^2+y^2\leqslant z\leqslant h\}$ с плотностью $\rho=\rho_0z^2$. Найдите:
   А) координаты его центра масс;
   Б) момент инерции относительно оси OZ;
   В) момент инерции относительно оси OY;
   Г) тензор инерции относительно прямой, проходящей через точки $(0,0,0)$ и (a,b,c).
   Замечание: на самом деле, пункт Г это, скорее алгебра, нежели анализ...



2) Тор (он же бублик), см. картинку. Найдите:
   А) объем тора;
   Б) момент инерции относительно оси OZ;
   В) момент инерции относительно оси OX.

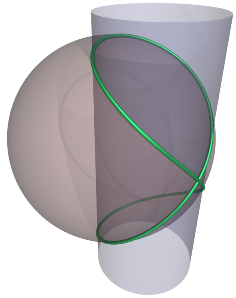
3) **Теорема Паппа-Гульдина:** Объём тела, образованного вращением плоской фигуры вокруг оси, расположенной в той же плоскости и не пересекающей фигуру, равен площади фигуры, умноженной на длину окружности, радиусом которой служит расстояние от оси вращения до барицентра фигуры.

Криволинейные интегралы I рода
28 сентября 2016

1) Вычислите $\int_{\text{Ə}} f(x,y,z)\,ds$, где:
   А) $f(x,y,z)=xy$, Ə — четыре стороны квадрата $ABCD$, $A(1,1)$, $C(-1,-1)$.
   Б) $f(x,y,z)=xy$, Ə — четверть эллипса $(x/a)^2+(y/b)^2=1$, $x\geqslant 0, y\geqslant 0$.
   В) $f(x,y,z)=\sqrt{2y^2+z^2}$, Ə — окружность $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x=y$.
   Г) $f(x,y,z)=x^2$, Ə — окружность $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x+y+z=0$.
   Замечание: Эту задачу можно было сформулировать и так:
   найдите массу проволоки Ə с плотностью $f(x,y,z)$. А как найти центр масс?
2) А) Пусть Ə — гладкая кривая, заданная в полярных координатах (r,φ) уравнением $r=\rho(\varphi)$, $\varphi_1\leqslant\varphi\leqslant\varphi_2$. Как вычислить интеграл: $\int_{\text{Ə}} F(x,y)\,ds$? Здесь $F(x,y)$ — непрерывная функция на Ə.
   Б) Вычислите: $\int_{\text{Ə}} |y|\,ds$, где Ə — лемниската Бернулли $r^2=a^2\cos(2\varphi)$.

Криволинейные интегралы II рода
28 сентября 2016

1) Вычислите криволинейный интеграл II рода:
   А) $\int_{\Game} \frac{y}{x}\,dx + dy$, $\quad \Game$ — кривая $y = \ln(x)$, $1 \leqslant x \leqslant e$, пробегаемая от $x = 1$ до $x = e$.
   Б) $\int_{\Game} 2(x^2+y^2)\,dx + (x+y)^2\,dy$, $\quad \Game$ — три отрезка треугольника ABC, $A(1{,}1)$, $B(1{,}3)$, $C(2{,}2)$, пробегаемые так, что треугольник остается слева.
   В) $\int_{\Game}(x^2-2yz)\,dx + (y^2-2xz)\,dy + (z^2-2xy)\,dz$, $\quad \Game$ — "поднимающаяся" логарифмическая спираль, заданная в цилиндрических координатах: $r = ae^{b\varphi}$, $z = r$, идущая от точки $(0{,}a{,}a)$ до $(0{,}ae^{2\pi b}{,}ae^{2\pi b})$, $a > 0$.



   Г) $\int_{\Game} y^2\,dx + z^2\,dy + x^2\,dz$, $\quad \Game$ — часть кривой Вивиани при $z \geqslant 0$, т.е. пересечение сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ и цилиндра $x^2 + y^2 = Rx$, пробегаемая против хода часовой стрелки, если смотреть с положительной стороны оси OX.

2) Посчитайте интеграл

$$I = \oint_{\Game} \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2 + y^2}$$

вдоль окружностей, обходя их против часовой стрелки:
   А) $x^2 + y^2 = R^2$; $\qquad$ Б) $(x - 2R)^2 + y^2 = R^2$.

3) А) Докажите, что для криволинейного интеграла справедлива оценка:

$$\left| \int_{\Game} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy \right| \leqslant L(\Game) \cdot \max_{(x,y)\in\Game} \sqrt{P^2(x,y) + Q^2(x,y)},$$

   где $L(\Game)$ — длина кривой $\Game$.
   Б) Докажите, что $\lim\limits_{R\to\infty} I_R = 0$, где

$$I_R = \oint\limits_{x^2+y^2=R^2} \frac{y\,dx - x\,dy}{(x^2 + xy + y^2)^2}.$$

Формула Грина. Полные дифференциалы
5 октября 2016

1) Посчитайте интегралы:
   А)

$$\int_{\Game} \big(\cos y + y \sin x + y^2\big)\,dx - \big(\cos x + x \sin y + x^2\big)\,dy,$$

   где $\Game$ — часть кардиоиды $r = a(1 + \cos(\varphi))$, $a > 0, y > 0$, пробегаемой от точки $A(2a{,}0)$ до точки $O(0{,}0)$.
   Б)

$$\int_{\Game} dz\sqrt{x^2 + y^2} - \frac{xz\,dx + zy\,dy}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

   где $\Game = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 1/2\}$, пробегаемая так, что ограничиваемый ею круг остается слева.

2) Найдите первообразную формы df:

   А) $df = -\dfrac{x}{y^2}\,dx + \left(\dfrac{x^2}{y^3} + \dfrac{y}{z^2}\right)dy - \dfrac{y^2}{z^3}\,dz$; $\qquad$ Б) $df = \dfrac{8x^3 + 4xy^2 + 4xy}{(2x^2 + y^2)^2}\,dx + \dfrac{4x^2y + 2y^3 - 2x^2 + y^2}{(2x^2 + y^2)^2}\,dy$.

Формула Грина
12 октября 2016

1) Применяя формулу Грина, преобразуйте в двойной интеграл:

$$\int_{\partial\mathcal{D}} \frac{\partial f}{\partial \vec{n}}\, ds,$$

где $\partial\mathcal{D}$ — гладкая граница односвязной области $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$,
$\vec{n}$ — вектор внешней нормали к кривой $\partial\mathcal{D}$,
$\frac{\partial f}{\partial \vec{n}} = \nabla f \cdot \vec{n}$ — производная по внешней нормали (или просто проекция ∇f на нормаль $\vec{n}$).

2) Функция $u(x,y) \in C^2(\mathcal{D})$ называется *гармонической* в области $\mathcal{D}$, если в любой точке $\mathcal{D}$

$$\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Доказать, что $u(x,y) \in C^2(\mathcal{D})$ есть гармоническая функция в односвязной области $\mathcal{D}$ тогда и только тогда, если

$$\int_L \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\, ds = 0,$$

где L — произвольный замкнутый контур внутри $\mathcal{D}$ и $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}$ — производная по внешней нормали к этому контуру.

3) Посчитайте интеграл Гаусса:

$$u(x_0,y_0) = \int_L \frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{|\vec{r}|}\, ds,$$

где $\vec{r}$ — вектор, соединяющий данную точку $A(x_0,y_0)$ с переменной точкой $B(x,y)$ простого замкнутого гладкого контура L; $\vec{n}$ — внешняя нормаль к кривой L в точке M.

4) Вычислить криволинейный интеграл $\int_{OA}(e^{x^4} - 2y)\, dx - (x + e^y)\, dy$, где OA — дуга параболы, проходимая от точки $O(0;0)$ до $A(1;1)$.

Поверхностные интегралы 1-го рода

5) Найти массу поверхности сферы, если ее поверхностная плотность в каждой точке равна расстоянию от этой точки до вертикального диаметра.

6) Для этой же сферы найти центр тяжести верхней полусферы.

7) Для однородной конической поверхности $z = \frac{h}{R}\sqrt{x^2 + y^2}$ $(x^2 + y^2 \leqslant R^2)$ вычислить момент инерции относительно координатной плоскости XY.

Поверхностные интегралы 2-го рода

Вычислить интегралы:

8) S — внутренняя сторона полусферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \leqslant 0$ и

$$\iint\limits_S (x^5 + z)\, dz\, dz.$$

9) S — внутренняя сторона части цилиндрической поверхности $x^2 + y^2 = r^2$ и $y \leqslant 0$, $0 \leqslant z \leqslant r$

$$\iint\limits_S yz^2\, dx\, dz.$$

10) S — верхняя сторона части гиперболического параболоида $z = x^2 - y^2$, $|y| \leqslant x \leqslant a$ и

$$\iint\limits_S x\, dy\, dz + y\, dz\, dx + z\, dx\, dy.$$

Еще раз о гармонических функциях
9 ноября 2016

0) *Упражнение:* Докажите, что функция

$$u(x,y,z) = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

является гармонической в любой точке $\mathbb{R}^3$, кроме $O(0,0,0)$.

1) А) Докажите *первую формулу Грина*:

$$\iiint\limits_{\Game} u\Delta v\, dV = \iint\limits_{\partial\Game} u\frac{\partial v}{\partial n}\, dS - \iiint\limits_{\Game} \nabla u \cdot \nabla v\, dV.$$

Б) Докажите *вторую формулу Грина*:

$$\iiint\limits_{\Game} \begin{vmatrix} \Delta u & \Delta v \\ u & v \end{vmatrix} dV = \iint\limits_{\partial\Game} \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial v}{\partial n} \\ u & v \end{vmatrix} dS,$$

где $u,v \in C^2(\Game)$, $\Game \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Game$.

2) Пользуясь 1Б) докажите *теорему о среднем* для гармонической функции $u(x,y,z)$:

А) для любой сферы $S_A(R)$ с центром в точке $A(x_0,y_0,z_0)$ и радиусом R верно:

$$u(x_0,y_0,z_0) = \frac{1}{|S_A(R)|} \iint\limits_{S_A(R)} u(x,y,z)\, dS, \tag{1}$$

где $|S_A(R)|$ — площадь сферы $S_A(R)$.
(среднее значение на сфере гармонической функции равно значению в центре сферы)

Б) для любого шара $B_A(R)$ с центром в точке $A(x_0,y_0,z_0)$ и радиусом R верно:

$$u(x_0,y_0,z_0) = \frac{1}{|B_A(R)|} \iiint\limits_{B_A(R)} u(x,y,z)\, dV, \tag{2}$$

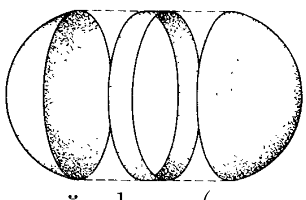
где $|B_A(R)|$ — объем шара $B_A(R)$.
(среднее значение на шаре гармонической функции равно значению в центре шара)

3) (без доказательства) Верна и *обратная теорема о среднем* для гармонической функции: если для функции $u \in C(\Game)$ для любой сферы в $\Game$ выполнено свойство (1) (или для любого шара в $\Game$ выполнено свойство (2)), то функция u — гармоническая.

Интегралы по сфере
9 ноября 2016

1) Толщина арбузной корки равна 1/20 радиуса арбуза (считаемого шаром). Какой процент от объема арбуза составляет корка:
А) в трехмерном пространстве; Б) в 100-мерном пространстве?

2) Попавшую в 1000-мерное пространство Алису спросили, как делать тонкие стеклянные обручи (сферические пояса), чтобы их ширина равнялась 1/10 диаметра. “Нет ничего проще, — ответила Алиса,— нужно выдувать сферы, а потом отрезать лишнее”. Каков будет процент отходов при этой технологии?



3) Найдите в любой точке пространства потенциал равномерно заряженной сферы (нужно честно взять интеграл!)

4) Вычислите интеграл по единичной сфере с центром в точке (0,0,0):

$$\int \frac{dS}{\sqrt{2-x-y-z}}$$

5) Вычислите интеграл $\iint e^x \cos(y)\, dS$ по сфере радиуса 10 с центром в начале координат.

6) Вычислить интеграл

$$\int (x^4 - 12xyz^2)\, dy \wedge dz + (y^4 - 12yzx^2)\, dz \wedge dx + (z^4 - 12zxy^2)\, dx \wedge dy$$

по единичной сфере с центром в точке (1,1,1). Нормаль внешняя.

ДЗ №1: Кратные интегралы, замена переменной
К 21 сентября 2016

1) Вычислите двойной интеграл $I = \iint\limits_X f(x,y)\, dx\, dy$, если:

А) (1) $f(x,y) = x^2y^2, \quad X = \{(x,y)\colon y > 0, xy < 1, x^2 - 3xy + 2y^2 < 0\}$;

Б) (1) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}, \quad X = \left\{(x,y)\colon ax \le x^2 + y^2 \le a(x + \sqrt{x^2+y^2})\right\}$;

В) (1) $f(x,y) = y^2, \quad X = \left\{(x,y)\colon 1 \le xy \le 3, 0 < x \le y \le 2x\right\}$.

2) (1) Найдите площадь сечения поверхности

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$$

плоскостью $z = 1 - 2(x+y)$.

3) (1) Докажите, что для непрерывной функции $f(x)$ справедливо равенство

$$\int\limits_0^x dx_1 \int\limits_0^{x_1} dx_2 \ldots \int\limits_0^{x_{m-1}} f(x_m)\, dx_m = \int\limits_0^x f(u) \frac{(x-u)^{m-1}}{(m-1)!}\, du.$$

4) (1) Переходя к полярным координатам, вычислите площадь, ограниченную кривой

$$(x^3+y^3)^2 = x^2+y^2, \qquad x \geqslant 0, y \geqslant 0.$$

5) Найдите объем тела, ограниченного поверхностями:

А) (1) $x^2+y^2+z^2 = 2az, x^2+y^2 = z^2$; Б) (1) $\left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2}\right)^2 = \dfrac{x}{h}$.

6) (1) Найдите объем n-мерного конуса, ограниченного поверхностями:

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \ldots + \frac{x_{n-1}^2}{a_{n-1}^2} = \frac{x_n^2}{a_n^2}, \quad x_n = a_n.$$

7) (2) Пусть $p > -1$. Вычислите интеграл

$$\int\limits_{(0,1)^n} \left(\frac{\min(x_1,\ldots,x_n)}{\max(x_1,\ldots,x_n)}\right)^p dx_1 \ldots dx_n$$

8) А) (1) Проверьте, что отображение

$$(u,v) \mapsto \left(\frac{\sin(u)}{\cos(v)}, \frac{\sin(v)}{\cos(u)}\right)$$

является биекцией множества $\{(u,v) \in \mathbb{R}^2\colon u > 0, v > 0, u + v < \pi/2\}$ на $(0,1)^2$.

Б) (1) С помощью отображения из пункта А) вычислите интеграл

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1 - x^2y^2} dxdy.$$

В) (1) Выведите из пункта Б), что $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

ДЗ №2: Криволинейные интегралы I и II рода. Приложение их к механике
К 12 октября 2016

1) (1) Найдите координаты центра тяжести однородной плоской области S, ограниченной одной аркой циклоиды $L = \{(x,y) : x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t), t \in [0,2\pi]\}$ и осью OX.

2) А) (1) С помощью ММИ докажите равенство:

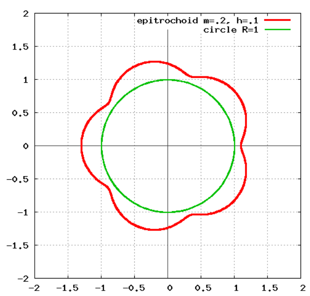
$$\int\limits_{\substack{x_1,\ldots,x_n \geqslant 0 \\ x_1+\ldots+x_n \leqslant 1}} \!\!\cdots\!\! \int x_1^{p_1-1} \cdot \ldots \cdot x_n^{p_n-1}\, dx_1 \ldots dx_n = \frac{\Gamma(p_1)\ldots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+\ldots+p_n+1)}$$

Б) (1) Используя результат пункта А) вычислите:

$$\iiint\limits_{\substack{x,y,z \geqslant 0 \\ (x/a)^\alpha + (y/b)^\beta + (z/c)^\gamma \leqslant 1}} x^{p-1} y^{q-1} z^{r-1}\, dx\, dy\, dz.$$

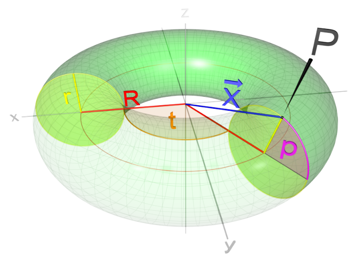
Замечание: эта формула полезна :) например, для определения объемов, статистических моментов, моментов инерции и центробежных моментов однородных тел указанной формы.

3) *Эпитрохоида* — плоская кривая, образуемая точкой, жёстко связанной с окружностью (радиуса r) и находящейся на расстоянии h от центра этой окружности, катящейся по внешней стороне другой окружности (радиуса R). В частности, если $h = r$, то кривая называется *эпициклоидой*. Будем считать, что $m = r/R \in \mathbb{Q}$. Известным примером служит кардиоида ($m = 1$, $h = r$).



А) (1) Выведите параметрическое задание эпитрохоиды.
Б) (1) Найдите площадь, ограниченную эпитрохоидой.

4) Тор (он же бублик), см. картинку. Найдите:
А) (1) момент инерции относительно оси OZ;
Б) (1) момент инерции относительно оси OX.



5) Найдите первообразную u, если:

А) (1) $du = \dfrac{(x^2+2xy+5y^2)dx + (x^2-2xy+y^2)dy}{(x+y)^3}$; Б) (1) $du = \dfrac{(x+y-z)dx + (x+y-z)dy + (x+y+z)dz}{x^2+y^2+z^2+2xy}$.

6) Найдите координаты центра масс:
А) (1) кривой Вивиани $L = \{(x,y,z) : x^2+y^2 = ax, x^2+y^2+z^2 = a^2, z \geqslant 0\}$ с плотностью $\rho(x,y,z) = z$;
Б) (1) однородного края поверхности $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$.

7) (1) Найдите работу поля $\vec{F}(x,y) = (x,y)$ вдоль кривой $y = x^2 + |x^2 - x|$ при перемещении от точки $A(-1,3)$ до точки $B(2,6)$.

8) (1) С помощью формулы Грина вычислите криволинейный интеграл II рода:

$$\int\limits_{\circlearrowleft} \sqrt{x^2+y^2}\, dx + y(xy + \ln(x + \sqrt{x^2+y^2}))\, dy,$$

где $\circlearrowleft$ — окружность $x^2+y^2 = R^2$, пробегаемая против часовой стрелки.

9) Найдите «объем» тел, заданных в $\mathbb{R}^{17}$ неравенствами ($x_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, 17$):

$$\text{А) (2)} \ \sum_{i=1}^{17} \sqrt{\frac{x_i}{a_i}} \leqslant 1; \qquad \text{Б) (2)} \ \left(\sum_{i=1}^{10} \frac{x_i}{a_i}\right)^2 + \left(\sum_{i=11}^{17} \frac{x_i}{a_i}\right)^2 \leqslant 1.$$

ДЗ № 3: Поверхностные интегралы I и II рода
Теорема Стокса, теорема Гаусса-Остроградского. Гармонические функции
К 16 ноября 2016

1) Применяя формулу Стокса, вычислить интегралы

А)

$$\oint\limits_C (y^2 - z^2)\,dx + (z^2 - x^2)\,dy + (x^2 - y^2)\,dz,$$

где C — сечение поверхности куба $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant a$, $0 \leqslant z \leqslant a$ плоскостью $x+y+z = \frac{3}{2}a$, пробегаемое против хода часовой стрелки, если смотреть с положительной стороны оси Ox.

Б)

$$\oint\limits_C y^2 z^2\,dx + z^2 x^2\,dy + x^2 y^2\,dz,$$

где C — замкнутая кривая $x = a\cos t$, $y = a\cos 2t$, $z = a\cos 3t$, пробегаемая в направлении возрастания параметра t.

2) Найти поток вектора $\vec{A} = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} + z^3\vec{k}$ через

А) боковую поверхность конуса $D = \{(x,y,z) : H^2(x^2 + y^2) \leqslant z^2 R^2, 0 \leqslant z \leqslant H\}$ $(R > 0)$;

Б) через полную поверхность этого конуса.

3) Тело T целиком погружено в жидкость. Исходя из закона Паскаля, доказать, что выталкивающая сила жидкости равна весу жидкости в объеме тела и направлена вертикально вверх.

4) Доказать, что если u — функция, гармоническая внутри сферы S радиуса R с центром в точке (x_0,y_0,z_0), то

$$u(x_0,y_0,z_0) = \frac{1}{2\pi R^2} \iint\limits_S u(x,y,z)\,dS$$

(*теорема о среднем*).

5) Доказать, что функция $u = u(x,y,z)$, непрерывная в ограниченной замкнутой области V и гармоническая внутри нее, не может достигать своих наибольшего и наименьшего значений во внутренней точке области, если эта функция не является тождественно постоянной (*принцип максимума*).