Бакалавриат АУ, весна 2017
Группа 201/2

Задачи с занятий

Ряды Фурье
15 февраля 2017

1) Разложите в ряд Фурье функцию $f(x)$, $x \in E$, по системе $\{1, \sin(kx), \cos(kx)\}_{k\in\mathbb{N}}$

А) $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}, \quad E = [0,2\pi]$; Б) $f(x) = \operatorname{sign}(x), \quad E = [-\pi,\pi]$;

В) $f(x) = \sin^4(x) + \cos^4(x), \quad E = [0,2\pi]$; Г) $f(x) = \dfrac{a \sin x}{1 - 2a\cos x + a^2}, \quad E = [-\pi,\pi]$.

Замечание: в пунктах А и Б постройте графики суммы рядов при $x \in \mathbb{R}$.

2) Разложите функцию $f(x) = e^{ax}$, $x \in (0,\pi)$:
А) в ряд Фурье по косинусам; Б) в ряд Фурье по синусам.

3) С помощью задачи 1А найдите суммы рядов:

$$\text{А)} \sum \frac{(-1)^n}{2n+1}; \qquad \text{Б)} \sum \frac{1}{n^2}.$$

4) Придумайте функцию, разложение в ряд Фурье которой позволяет найти сумму ряда $\sum \frac{1}{n^4}$, и найдите эту сумму.

Преобразование Фурье
15 февраля 2017

1) Найдите преобразование Фурье следующих функций:

А) $f(x) = \mathcal{X}_{[-a,a]}(x)$; Б) $f(x) = e^{-|x|}$; В) $f(x) = e^{-\|x\|}, \quad x \in \mathbb{R}^m$; Г) $f(x) = e^{-x^2/2}$.

2) С помощью задачи 1 найдите интегралы Лапласа:

$$\text{А)} \int\limits_0^\infty \frac{\cos(\alpha x)}{\beta^2 + x^2}\,dx; \qquad \text{Б)} \int\limits_0^\infty \frac{\sin(\alpha x)}{\beta^2 + x^2}\,dx.$$

Интегралы, зависящие от параметра

Вычислите интегралы 1–4:

1) $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{x^{\alpha_1} - x^{\alpha_2}}{\ln x}\,dx$; 2) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{\sin(ax)}{x} e^{-bx}\,dx, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad b > 0$; 2´) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$;

3) $\displaystyle\int\limits_0^b \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2}$; 4) $\displaystyle\int\limits_0^\pi \ln(1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2)\,dx, \quad |\alpha| < 1$.

5) $\displaystyle\Phi(y) = \int\limits_{\beta(y)}^{\alpha(y)} f(x,y)\,dx$. Найдите $\dfrac{d\Phi}{dy}$.

Несобственные интегралы
1 марта 2017

Признаки сходимости интегралов почти полностью повторяют признаки сходимости рядов.

НО есть (как минимум) одно НО!

Ряды (необходимый признак сходимости): ($\sum a_n$ сходится) $\Rightarrow$ ($a_n \to 0$).
Интегралы (а верно ли?): ($\int_A^\infty f(x)\,dx$ сходится) $\Rightarrow$ ($f(x) \to 0$ при $x \to \infty$).

0) Что вообще можно сказать о функции $f(x)$, если известно, что $\int_A^\infty f(x)\,dx$ сходится? Верно ли, что $f(x)$ ограничена?
1) Разбираем вместе:

   Сходится ли интеграл (если есть параметры, то при каких значениях параметров сходится, а при каких расходится?)

$$\text{А) } \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}; \quad \text{Б) } \int\limits_0^{1} \frac{dx}{x^\alpha}; \quad \text{В) } \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}; \quad \text{Г) } \int\limits_1^{+\infty} \frac{x^\alpha + \sin x}{x^\beta + \operatorname{arctg} x}\,dx;$$

$$\text{Д) } \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha}\,dx; \quad \text{Е) } \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx; \quad \text{Ж) } \int\limits_1^{+\infty} \sin\left(\frac{\sin x}{x^\alpha}\right)dx; \quad \text{Ж) } \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha + \sin x}\,dx.$$

2) Самостоятельно:
   То же, что и задание 1:

$$\text{А) } \int\limits_0^{+\infty} \sin(x^p)\,dx; \quad \text{Б) } \int\limits_0^{+\infty} \left(x + \frac{1}{x}\right)^\alpha \ln(1 + x^{-3\alpha})\,dx; \quad \text{В) } \int\limits_0^{1} \frac{dx}{\ln x}; \quad \text{Г) } \int\limits_0^{1} \frac{x^\alpha}{\ln x}\,dx;$$

$$\text{Д) } \int\limits_0^{+\infty} e^{\cos x}\,\frac{\sin(\sin x)}{x}\,dx; \quad \text{Е) } \int\limits_0^{+\infty} e^{\sin x}\,\frac{\sin(\sin x)}{x}\,dx.$$

3) **Для желающих:**

$$\text{А) } \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^\alpha \sin^2 x}; \quad \text{Б) } \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^\alpha |\sin x|^\beta}.$$

Многомерные несобственные интегралы

4) Сходится ли интеграл (если есть параметры, то при каких значениях параметров сходится, а при каких расходится?)

$$\text{А) } \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2 \le 1} \frac{dx\,dy\,dz}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^\alpha}; \quad \text{Б) } \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2 \ge 1} \frac{dx\,dy\,dz}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^\alpha}$$

$$\text{В) } \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \sin(x^2+y^2)^2\,dx\,dy; \quad \text{Г) } \iint\limits_G \frac{dx\,dy}{x^\alpha + y^\beta}, \quad G = \{x > 0, y > 0, x^\alpha + y^\beta > 1\}.$$

Асимптотики интегралов

5) Найдите асимптотику интегралов (т.е. функцию $f(x)$):

$$\text{А) } \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt \sim f(x), \quad x \to +\infty; \quad \text{Б) } \int\limits_0^{\pi} \sin^A x\,dx \sim f(A), \quad A \to +\infty.$$

ТФКП — знакомство
15 марта 2017

1) Проверьте условия Коши-Римана для функций: А) $f(z) = z^2$; Б) $f(z) = ze^z$.
2) В каких точках $z \in \mathbb{C}$ ($z = x + iy$, $x,y \in \mathbb{R}$) дифференцируема функция $f(z)$, если:

$$\text{А) } f(z) = \mathrm{Re}(z); \qquad \text{Б) } f(z) = x^2y^2?$$

3) Восстановите аналитическую функцию $f(z)$, если известно:

$$\text{А) } \mathrm{Re}f(z) = xy,\ f(0) = 0; \quad \text{Б) } \mathrm{Im}f(z) = x^2 - y^2 + xy,\ f(0) = 0; \quad \text{В) } |f(z)| = (x^2 + y^2)e^x.$$

4) $\Omega \in \mathbb{C}$ — открытое связное множество, $w_n, 0 \in \Omega$, причем $w_n \to 0$. Докажите, что если для аналитической функции $f(z)$ выполнено $f(w_n) = 0$, то $f \equiv 0$.
5) Посчитайте интегралы (по умолчанию считаем, что обход замкнутого контура — против часовой стрелки), используя методы ТФКП:

$$\text{А) } \int\limits_{|z|=1} \frac{dz}{z}; \qquad \text{Б) } \int\limits_{|z|=1} \frac{dz}{z^2}; \qquad \text{В) } \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\cos(x)\,dx}{x^2+1} = \mathrm{Re}\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{e^{ix}\,dx}{x^2+1}; \qquad \text{Г) } \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{dx}{x^4+1}.$$

Ряд Лорана. Вычеты. Интегралы
22 марта 2017

0) Какие из данных функций являются аналитическими в точке $z = 0$: А) $\bar{z}$; Б) $e^{1/z}$; В) $\frac{1-\cos(z)}{z^2}$?
1) Разложите в ряд Лорана $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n(z-a)^n$ функцию $f(z) = \dfrac{1}{(1-z)(z+3)}$ в областях:

А) $D_1 = \{z : |z| < 1\}$; Б) $D_2 = \{z : 1 < |z| < 3\}$; В) $D_3 = \{z : |z| > 3|\}$; Г) $D_4 = \{z : |z-1| < 4\}$.

(В пунктах АБВ: $a = 0$, в пункте Г: $a = 1$)
2) Найдите все особые точки функции $f(z)$ и определите их вид:

$$\text{А) } f(z) = \frac{z^6}{(z+1)^2(z^2+4)}; \qquad \text{Б) } f(z) = \frac{z-\pi}{\sin(2z) - 2\sin z}; \qquad \text{В) } f(z) = \frac{e^{1/(1-i)}}{1 + \sin\frac{i\pi z}{2}}.$$

3) Пусть $a \neq \infty$ — существенно особая точка функции $f(z)$ и полюс функции $g(z)$. Докажите, что для функции $\varphi(z) = f(z)g(z)$ точка a — существенно особая.
4) Найдите вычет в точке $z = a$:

$$\text{А) } \mathrm{res}\frac{1}{z^3+1}, a = e^{i\pi/3}; \qquad \text{Б) } \mathrm{res}\, e^{\frac{z}{z-1}},\ a = 1; \qquad \text{В) } f(z) = \frac{z}{(z^2-1)^3},\ a = 1.$$

5) Посчитайте интегралы:

$$\text{А) } \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\cos(x)\,dx}{x^2+1} = \mathrm{Re}\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{e^{ix}\,dx}{x^2+1}; \qquad \text{Б) } \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{x^6+1}; \qquad \text{В) } \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{(x+1)\cos(3x)\,dx}{x^2-2x+5}.$$

Ряд Лорана. Вычеты. Интегралы
22 марта 2017

0) Какие из данных функций являются аналитическими в точке $z = 0$: А) $\bar{z}$; Б) $e^{1/z}$; В) $\frac{1-\cos(z)}{z^2}$?
1) Разложите в ряд Лорана $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n(z-a)^n$ функцию $f(z) = \dfrac{1}{(1-z)(z+3)}$ в областях:

А) $D_1 = \{z : |z| < 1\}$; Б) $D_2 = \{z : 1 < |z| < 3\}$; В) $D_3 = \{z : |z| > 3|\}$; Г) $D_4 = \{z : |z-1| < 4\}$.

(В пунктах АБВ: $a = 0$, в пункте Г: $a = 1$)

2) Найдите все особые точки функции $f(z)$ и определите их вид:

$$\text{А) } f(z) = \frac{z^6}{(z+1)^2(z^2+4)}; \qquad \text{Б) } f(z) = \frac{z-\pi}{\sin(2z) - 2\sin z}; \qquad \text{В) } f(z) = \frac{e^{1/(1-i)}}{1+\sin\frac{i\pi z}{2}}.$$

3) Пусть $a \neq \infty$ — существенно особая точка функции $f(z)$ и полюс функции $g(z)$. Докажите, что для функции $\varphi(z) = f(z)g(z)$ точка a — существенно особая.

4) Найдите вычет в точке $z = a$:

$$\text{А) } \operatorname{res}\frac{1}{z^3+1}, a = e^{i\pi/3}; \qquad \text{Б) } \operatorname{res} e^{\frac{z}{z-1}},\ a = 1; \qquad \text{В) } f(z) = \frac{z}{(z^2-1)^3},\ a = 1.$$

5) Посчитайте интегралы:

$$\text{А) } \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\cos(x)\,dx}{x^2+1} = \operatorname{Re}\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{e^{ix}\,dx}{x^2+1}; \qquad \text{Б) } \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{x^6+1}; \qquad \text{В) } \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{(x+1)\cos(3x)\,dx}{x^2-2x+5}.$$

Контурные интегралы
26 апреля 2017

1) Придумайте подходящий контур и посчитайте интегралы:

$$\text{А) } \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\sin(x)}{x}\,dx; \qquad \text{Б) } \int\limits_0^\infty \frac{\sqrt[3]{x}}{(x+8)^2}\,dx; \qquad \text{В) } \int\limits_0^\infty \frac{\ln(x)}{x^2+a^2}\,dx, \quad a > 0;$$

$$\text{Г) } \int\limits_{5i-\infty}^{5i+\infty} e^{-x^2/2}\,dx; \qquad \text{Д) } \int\limits_0^\infty \frac{\cos(\alpha x)}{\operatorname{ch}(x)}\,dx, \quad |\operatorname{Im}(\alpha)| < 1; \qquad \text{Е) } \int\limits_0^1 \sqrt{x^3 - x^4}\,dx.$$

2) Для желающих

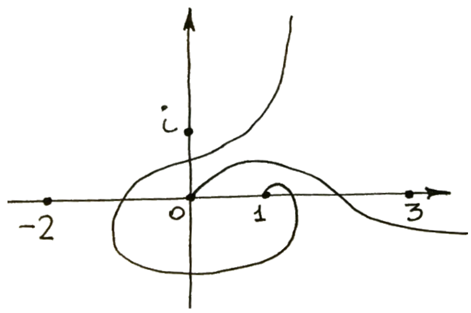
$$\text{А) } \int\limits_0^\infty \sin(x^2)\,dx; \qquad \text{Б) } \int\limits_1^\infty \frac{\ln(x + \sqrt{x^2-1})}{x^2}\,dx.$$

Многозначные функции
3 мая 2017

1) Придумайте подходящие разрезы в $\mathbb{C}$ так, чтобы в получившейся области функция $f(z)$ была задана однозначно (т.е. имела регулярную ветвь)

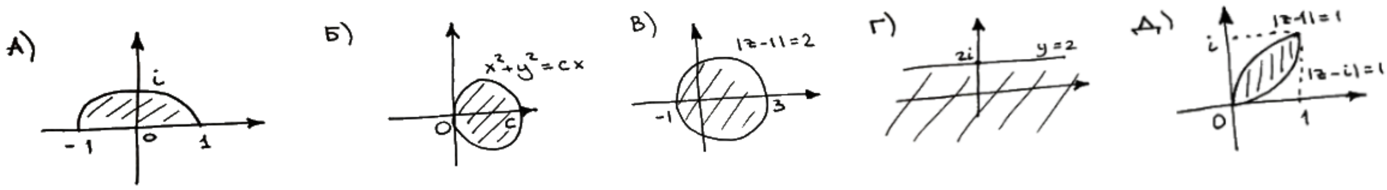
$$\text{А) } f(z) = \sqrt{1-z^2}; \qquad \text{Б) } f(z) = \operatorname{Ln}(1-z^2);$$
$$\text{В) } f(z) = \sqrt[4]{1-z^4}; \qquad \text{Г) } f(z) = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{1-z^2}).$$

2) Рассмотрим функцию $f(z) = (z^3 - z^2)^{1/3}$ в области D с двумя разрезами (см. картинку), причем $f(3) = 18^{1/3}$. Убедитесь, что в этой области можно выделить регулярную ветвь функции $f(z)$ и найдите значения $f(1/2), f(-2), f(i)$.



Конформные преобразования-1
10 мая 2017

1) Найдите образы следующих областей при отображении функцией $f(z) = 1/z$



2) Постройте конформное отображение из круга $\{z : |z| < 1\}$ в верхнюю полуплоскость $\{z : \mathrm{Im}(z) > 0\}$.

3) Постройте конформное отображение из полосы $\{z : 0 < \mathrm{Im}(z) < \pi\}$ в верхнюю полуплоскость $\{z : \mathrm{Im}(z) > 0\}$.

Конформные преобразования-2
Дробно-линейные преобразования
17 мая 2017

1) А) Покажите, что дробно-линейное преобразование $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, a,b,c,$d \in \mathbb{C}$, является композицией следующих простых преобразований:

- сдвиг $f(z) = z + q$, $q \in \mathbb{C}$.
- поворот и гомотетия $f(z) = qz$, $q \in \mathbb{C}$.
- инверсия (с зеркальной симметрией) $f(z) = 1/z$.

Замечание: обычно при рассмотрении дробно-линейных преобразований вводят условие: $ad - bc \neq 0$. Почему?

Б) Покажите, что при дробно-линейных преобразованиях {окружности и прямые} переходят в
{окружности и прямые}.

2) Найдите образы следующих линий при отображении функцией $w(z) = \dfrac{z+i}{z-2i}$

А) прямой $y = x$; Б) прямой $y = x + 2$;
В) окружности $x^2 + (y-4)^2 = 1$; Г) окружности $x^2 + (y-1)^2 = 1$.

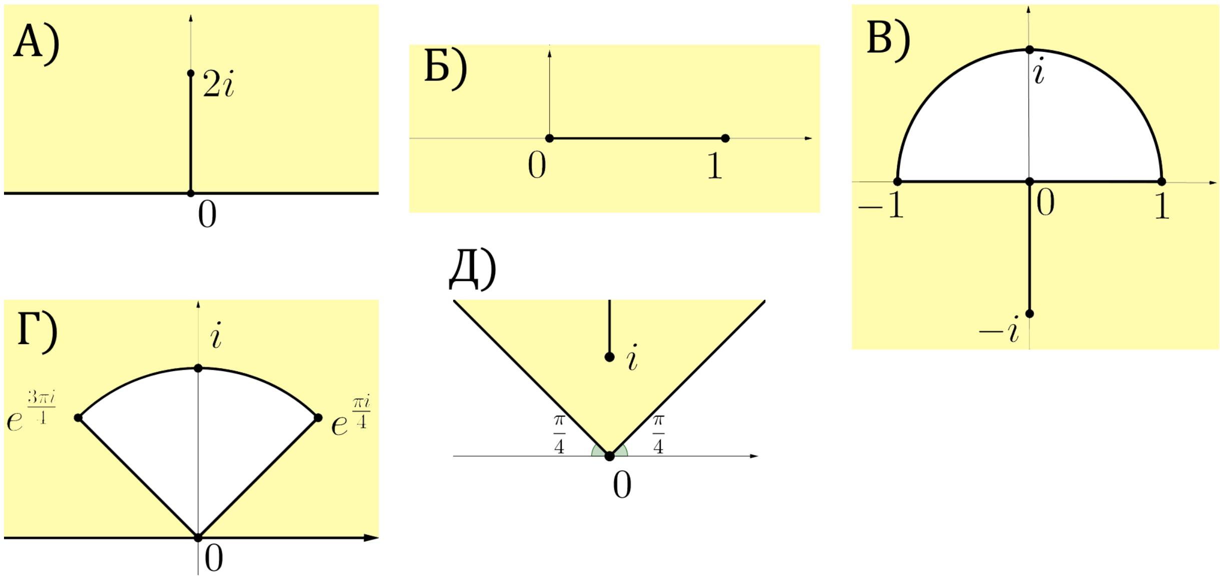
3) Проверьте, что дробно-линейное преобразование сохраняет “двойное отношение”, а именно, для точек z_1,z_2, z_3, z_4 и их образов $w_1 = f(z_1)$,$w_2 = f(z_2)$, $w_3 = f(z_3)$, $w_4 = f(z_4)$ верно:

$$\frac{w_4 - w_1}{w_4 - w_2} : \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} = \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}.$$

Замечание: отсюда можно вывести общую формулу дробно-линейного преобразования $f(z)$, переводящего три заданные точки в три заданные точки ($f(z_1) = w_1$, $f(z_2) = w_2$, $f(z_3) = w_3$). Как?

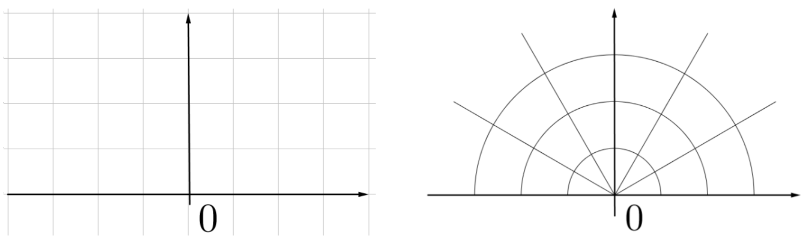
4) Найдите общий вид дробно-линейного преобразования из круга $\{|z| < 1\}$ в круг $\{|w| < 1\}$.

5) Отобразите конформно закрашенную область в полуплоскость:

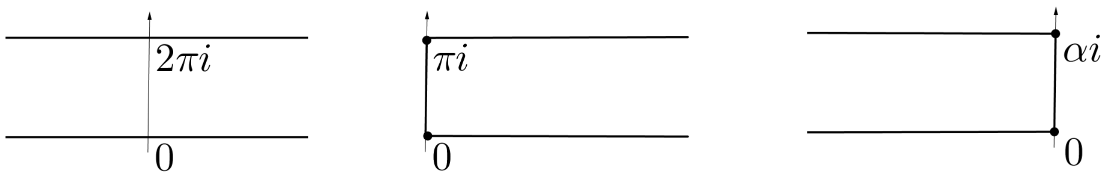


Конформные преобразования-3
Преобразования элементарными функциями
18 мая 2017

1) (СТЕПЕНЬ) Куда переходит под действием отображения $f(z) = z^2$: А) прямоугольная; Б) полярная координатная сетка?



2) (ЭКСПОНЕНТА) При каком условии на область G функция $f(z) = e^z$ будет однолистна в G? Куда переходят данные области под действием e^z?



Куда переходит под действием отображения $f(z) = e^z$ прямоугольная координатная сетка?

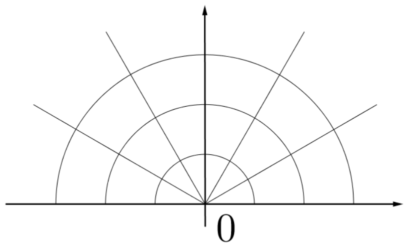
3) (ЛОГАРИФМ) Куда переходит под действием $f(z) = \mathrm{Ln}(z)$ комплексная плоскость с разрезом по положительной вещественной полуоси? Увидьте на картинке, что у логарифма бесконечно много ветвей!

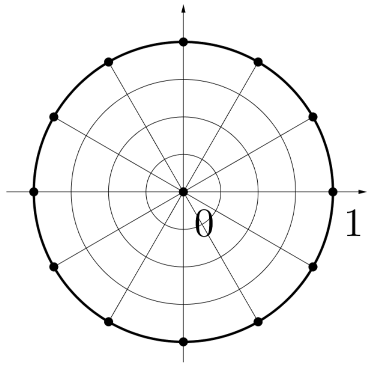
4) (ФУНКЦИЯ ЖУКОВСКОГО) Функция Жуковского — это преобразование вида

$$Ж(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

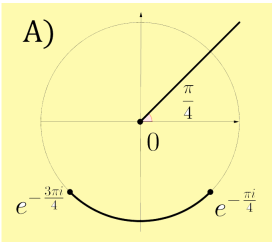
А) При каком условии на область G функция $Ж(z)$ будет однолистна в G? Проверьте, однолистна ли $Ж(z)$ в $G = \mathbb{C}$, $G = \{|z| > 1\}$, $G = \{|z| < 1\}$, $G = \{\mathrm{Im} z > 0\}$, $G = \{\mathrm{Im} z < 0\}$.

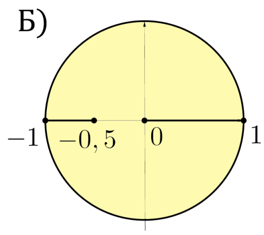
Б) Куда переходит под действием отображения $Ж(z)$ полярная координатная сетка? Рассмотрите 2 области: $G = \{\mathrm{Im} z > 0\}$ и $G = \{|z| < 1\}$



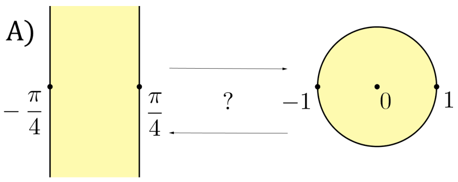


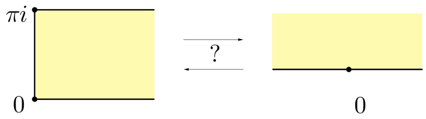
В) Примените Ж(z) к данным областям:

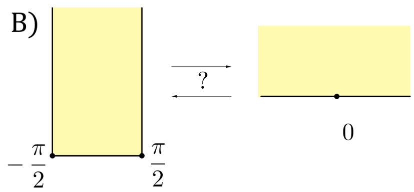




5) (ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ) На данных рисунках изображены действия трех отображений: $f_1(z) = \sin(z)$, $f_2(z) = \operatorname{ch}(z)$, $f_3(z) = \operatorname{tg}(z)$. Какое отображение какой картинке соответствует и почему?







Теорвер большой... (Из книги Федина «Математики тоже шутят»)

Семинары по теории вероятностей в разных группах нашего курса вели молодой доктор наук А. Вентцель (кстати, сын автора классического учебника по теорверу Е. Вентцель) и доцент М. Козлов. Первый славился особой лютостью на экзаменах, второму же сдать экзамен ничего не стоило. Про эту антагонистическую парочку в наше время сложили характерный анекдот.
Во время сессии в коридоре мехмата встречаются Вентцель и Козлов, только что закончившие принимать экзамены в своих группах.
— Ну, как студенты? — спрашивает Вентцель. — Нормально сдают?
— Да как сказать, — мнется Козлов. — Вот сейчас мне сдавал один студент. По билету ничего не сказал, на дополнительные вопросы не ответил. Но я ему все-таки поставил «четыре».
— Как?! За что? — поражается собеседник. — Он же ничего не знает!
— Теорвер большой, — задумчиво отвечает Козлов, — что-нибудь да знает...
Потом спрашивает Вентцеля.
— А у тебя как студенты?
— Да тоже не очень, — отвечает тот. — Только что принимал экзамен у студента. По билету все рассказал без запинки, на все дополнительные вопросы ответил, однако я ему поставил-таки «три».
— Но почему?! — теперь уже поражается Козлов.
— Теорвер большой, — невозмутимо говорит Вентцель, — что-нибудь да не знает.

ДЗ

ДЗ №1: Ряды Фурье. Преобразование Фурье
К 22 февраля 2017

1) Разложите в ряд Фурье по системе функций $\{1, \sin(kx), \cos(kx)\}_{k\in\mathbb{N}}$, $x \in (0,2\pi)$:

$$\text{А) (1) } f(x) = \sin(ax), \quad a \notin \mathbb{Z}; \qquad \text{Б) (1) } f(x) = x^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

2) Преобразование Фурье определяется так $\hat{f}(\lambda) := \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\lambda x}\, dx$. Найдите $\hat{f}(\lambda)$:

А) (1) $f(x) = \mathcal{X}_{[-a,a]}(x)$; Б) (1) $f(x) = \dfrac{1}{x^n}, \quad n \in \mathbb{N}$; В) (1) $f(x) = e^{-a|x|}$;

Г) (1) $f(x) = e^{-|x|}\cos(\omega x)$; Д) (3) $f(x) = e^{-x^2/2}$.

3) (2) Придумайте функцию, разложение в ряд Фурье которой позволяет найти сумму ряда $\sum \frac{1}{n^4}$, и найдите эту сумму.

4) (3) Пусть $S_n(x)$ — n-ая частичная сумма ряда $f(x) = \sum \frac{\sin(nx)}{n}$, $M_n = \max\limits_x S_n(x)$. Докажите, что

$$M_n = S_n\left(\frac{\pi}{n+1}\right) \to G = \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin u}{u}\, du > \frac{\pi}{2} = f(+0)$$

(явление Гиббса).

Немного дополнительных теоретических задач для желающих.
В этой части удобно понимать, под $\hat{f}(n)$ коэффициент Фурье при разложении по системе $\{e^{inx}\}$. Иными словами, имеется в виду следующее выражение: $\hat{f}(n) = \int\limits_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\, dt$.

Т1. (2) Покажите, что, если функция удовлетворяет условию Липшица с показателем $\alpha \in (0,1)$, то выполняется $|\hat{f}(n)| = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$.

Т2. (2) Покажите, что для функции ограниченной вариации справедливо следующее утверждение: $|\hat{f}(n)| = O\left(\frac{1}{n}\right)$.

Т3. (3) Пусть функция f лежит в классе Липшица с показателем $\alpha > 1/2$ и является 2π периодичной. Покажите, что $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| < \infty$.

Хорошие задачи с экзамена, которые тоже можно сдавать, если Вы их на экзамене не делали, разумеется:

Э1. (3) Разложите в ряд Фурье функцию

$$\frac{1}{2 + \sin x + \cos x}.$$

Э2. (2) Пусть $\sum |a_n \cos nx + b_n \sin nx| < +\infty$ для всех $x \in [a,b]$.
Докажите, что $\sum(|a_n| + |b_n|) < +\infty$

Доп ДЗ №1:

Кудрявцев, том 3, глава 3, параграф 17, номера (стр. 374): 8.5, 8.6, 9.4, 9.5, 12, 13.

ДЗ №2: Интегралы с параметром
К 1 марта 2017

1) Доказать, что функция $u(x)$ удовлетворяет *уравнению Бесселя*

$$x^2u'' + xu' + (x^2 - n^2)u = 0,$$

если:

$$\text{А) (1) } u(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(n\varphi - x\sin\varphi)\,d\varphi; \qquad \text{Б) (1) } u(x) = x^n \int_0^\pi \cos(x\cos\varphi)\sin^{2n}\varphi\,d\varphi.$$

2) (1) Показать, что функция

$$u(x) = \int_0^1 K(x,y)v(y)\,dy,$$

где

$$K(x,y) = \begin{cases} x(1-y), & \text{если } x \le y, \\ y(1-x), & \text{если } x > y, \end{cases}$$

и $v(y)$ — непрерывная функция, удовлетворяет уравнению $-u''(x) = v(x)$ при $x \in (0,1)$.
Замечание: неформально говоря, обратным оператором к оператору $L := -\frac{d^2}{dx^2}$ является интегральный оператор $L^{-1}(v) := \int_0^1 K(x,y)v(y)\,dy$.

3) Вычислить интегралы:

$$\text{А) (1) } I(\alpha) = \int_0^\pi \ln(1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2)\,dx, \quad |\alpha| < 1; \qquad \text{Б) (1) } \int_0^{+\infty} e^{-ax^2 - \frac{b}{x^2}}\,dx.$$

4) (1) Вычислить интеграл: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\operatorname{tg} x}\,dx$.
Подсказка: рассмотрите следующий интеграл с параметром α:

$$\Phi(\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arctg}(\alpha \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x}\,dx.$$

5) Посчитайте интегралы Лапласа:

$$\text{А) (1) } L(b) = \int_0^\infty \frac{\cos(bx)}{a^2 + x^2}\,dx; \qquad \text{Б) (1) } \int_0^\infty \frac{x\sin(bx)}{a^2 + x^2}\,dx.$$

Подсказка: составьте диффур 2-ого порядка на $L(b)$.

Доп ДЗ №2:

Кудрявцев, том 3, глава 3, номера (стр. 356): любые 5 примеров из номеров 16, 17, 18, 19.

ДЗ №3: Несобственные интегралы. Равномерная сходимость интегралов К 15 марта 2017

1) Сходится ли интеграл (если есть параметры, то при каких значениях параметров сходится, а при каких расходится?)

$$\text{А) (1) } \int\limits_0^{+\infty} \sin(x^\alpha)\,dx; \qquad \text{Б) (1) } \int\limits_0^{+\infty} \left(x + \frac{1}{x}\right)^\alpha \ln(1 + x^{-3\alpha})\,dx; \qquad \text{В) (1) } \int_0^1 x^\alpha (1-x)^\beta \ln x\,dx;$$

$$\text{Г) (1) } \int_1^\infty \sin(x\ln x)\,dx; \qquad \text{Д) (2) } \int\limits_0^{+\infty} \frac{|\sin(x)|}{e^{x^2\sin^2(x)}}\,dx; \qquad \text{Е) (3) } \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^\alpha \sin^2 x}.$$

2) Пусть $f(x)$ — периодическая функция с периодом ω, а $g(x) \to 0$ при $x \to \infty$ монотонно.

А) (0,5) Если интеграл по периоду $\int\limits_a^{a+\omega} f(x)\,dx = 0$, то $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ сходится.

Б) (0,5) Если интеграл по периоду $\int\limits_a^{a+\omega} f(x)\,dx = k \ne 0$, то

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx \text{ сходится } \Leftrightarrow \int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx \text{ сходится}$$

.

В) (0,5) Сходятся ли интегралы

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{\cos x}\,\frac{\sin(\sin x)}{x}\,dx; \qquad \int\limits_0^{+\infty} e^{\sin x}\,\frac{\sin(\sin x)}{x}\,dx?$$

3) Вытекает ли из сходимости интеграла $\int_1^\infty f(x)\,dx$ сходимость

$$\text{А) (1)}\ \int_1^\infty f^3(x)\,dx; \qquad \text{Б) (2)}\ \int_1^\infty \frac{|f(x)|}{x^2}\,dx?$$

4) Докажите неравенства (за каждое 1 балл):

$$\text{А)}\ \int_2^{+\infty} e^{-x^2}\,dx < \frac{1}{4e^4}; \quad \text{Б)}\ \int_0^1 \frac{\sin(\pi/4-x)}{\sqrt{1-x^2}}dx > 0; \quad \text{В)}\ \frac{\pi}{10} < \int_0^2 \frac{dx}{(4+\sqrt{\sin x})\sqrt{4-x^2}} < \frac{\pi}{8}.$$

5) (1) Найдите асимптотику интеграла с указанной точностью

$$\int_x^{+\infty} \frac{dt}{te^t} = f(x) + O\left(\frac{1}{x^{n+1}e^x}\right), \quad x \to \infty.$$

6) Равномерно ли сходятся интегралы на множествах E_1 и E_2?

А) (1) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} e^{-(x-a)^2}\,dx$,
$E_1 = [0,+\infty)$,
$E_2 = [0{,}2]$;

Б) (1) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} x^2 e^{-ax^4}$,
$E_1 = [1,+\infty)$,
$E_2 = (0,+\infty)$;

В) (1) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln^\alpha x}{x}\sin x\,dx$,
$E_1 = [0{,}1]$,
$E_2 = [1,+\infty)$.

7) (1) Исследовать на непрерывность функцию $F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(1-\alpha^2)x}{x}\,dx$ при $\alpha \in \mathbb{R}$.

Доп ДЗ №3:

1) Кудрявцев, том 3, глава 3, параграф 14, номера (стр.341): любые 5 примеров из номеров 7,8,14. любые 4 примера из номеров 17,18.
2) Кудрявцев, том 2, глава 3, номера (стр.276): любые 5 примеров из 179–206.

ДЗ №4: ТФКП-1
К 29 марта 2017

1) Восстановите аналитическую функцию $f(z)$, если известно: ($z = x+iy = re^{i\varphi}$, по 1 баллу)

А) $\mathrm{Re} f(z) = 2xye^x\cos y + (x^2-y^2)e^x\sin y$, $f(0)=0$; Б) $|f(z)| = (x^2+y^2)e^x$;
В) $\mathrm{Im} f(z) = r\varphi\cos\varphi + r\ln r\sin\varphi$.

2) (1) Пусть u,v — пара сопряженных гармонических функций в области D, а ϕ,ψ — пара сопряженных гармонических функций в области G. Доказать, что если значения $u(x,y)+iv(x,y)$ для любых $x+iy\in D$ лежат в области G, то пара

$$U(x,y) = \phi(u(x,y),v(x,y)), \quad V(x,y) = \psi(u(x,y),v(x,y))$$

образует пару сопряженных гармонических функций в области D.

3) Иногда удобно вместо переменных x,y использовать переменные $z = x+iy$, $\bar z = x-iy$. Операции $\dfrac{\partial}{\partial z}, \dfrac{\partial}{\partial \bar z}$ определим формально равенствами:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac12\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) \qquad \frac{\partial}{\partial \bar z} = \frac12\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

Пусть $f(z)$ — аналитическая функция.

А) (0,5) Проверить, что $df = \dfrac{\partial f}{\partial x}dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}dy = \dfrac{\partial f}{\partial z}dz + \dfrac{\partial f}{\partial \bar z}d\bar z$.

Б) (0,5) Проверить, что условия Коши-Римана функции f в переменных $z, \bar z$ имеют вид:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar z} = 0 \text{ или } \frac{\partial \bar f}{\partial z} = 0.$$

Докажите, что (по 1 баллу)

В) $\dfrac{\partial}{\partial z}(|f(z)|) = \dfrac{1}{2}|f(z)| \cdot \dfrac{f'(z)}{f(z)}$; Г) $\dfrac{\partial^2}{\partial z \partial \bar z}(|f(z)|^p) = \dfrac{p^2}{4}|f(z)|^{p-2}|f'(z)|^2$.

4) Ряд Лорана по степеням $(z-a)$ называется ряд вида $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n(z-a)^n$. Этот ряд называется сходящимся в точке z_0, если сходятся ряды $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n(z_0-a)^n$ и $\sum\limits_{n=-\infty}^{0} c_n(z_0-a)^n$.
Разложите функцию $f(z)$ в ряд Лорана (сходящийся) в области D (по 1 баллу):

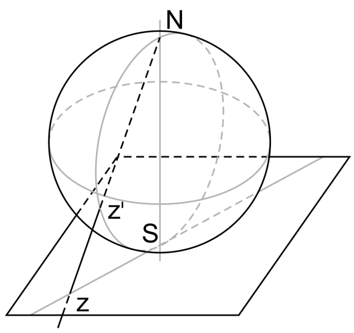
$$\text{А) } f(z) = \frac{1}{z(z-3)^2}, a = 1, D = \{z : 1 < |z-1| < 2\};$$

$$\text{Б) } f(z) = \frac{e^z}{z(1-z)}, a = 0, D = \{z : 1 < |z| < \infty\}.$$

5) Посчитайте интегралы (по умолчанию считаем, что обход замкнутого контура — против часовой стрелки), используя методы ТФКП (по 1 баллу):

$$\text{А) } \oint\limits_{|z|=2} \frac{dz}{z^2+1}; \quad \text{Б) } \oint\limits_{|z|=3/2} \frac{z \operatorname{tg} z}{(z^2-1)^2}\,dz; \quad \text{В) } \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a+\cos\varphi}, a > 1; \quad \text{Г) } \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\cos(x)\,dx}{x^4+1}.$$

6) Точки комплексной плоскости (вместе с бесконечно удаленной точкой $z = \infty$) часто удобно рассматривать как точки сферы Римана (см. Википедию или Шабунин, стр. 20). Таким образом, каждой точке $z' = (\xi,\eta,\zeta) \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$ можно сопоставить точку $z \in \bar{\mathbb{C}}$ (это отображение называется *стереографической проекцией*). Система координат (ξ,η,ζ) в $\mathbb{R}^3$ выбрана таким образом, чтобы оси $O\xi$ и $O\eta$ совпадали с осями Ox и Oy комплексной плоскости, а ось $O\zeta$ была направлена по диаметру сферы Римана.



А) (1) Докажите формулы:

$$\xi = \frac{x}{1+|z|^2}; \quad \eta = \frac{y}{1+|z|^2}; \quad \zeta = \frac{|z|^2}{1+|z|^2}; \quad x = \frac{\xi\zeta}{\xi^2+\eta^2}; \quad y = \frac{\eta\zeta}{\xi^2+\eta^2}.$$

Б) (1) Расстоянием в пространстве между точками z_1' и z_2' называется *хордальным расстоянием* между точками z_1 и z_2 расширенной комплексной плоскости и обозначается $k(z_1,z_2)$. Докажите, что:

$$k(z_1,z_2) = \begin{cases} \dfrac{z_1-z_2}{\sqrt{1+|z_1|^2}\cdot\sqrt{1+|z_2|^2}}, & \text{если } z_1 \neq \infty, z_2 \neq \infty \\ \dfrac{1}{\sqrt{1+|z_1|^2}}, & \text{если } z_2 = \infty \\ \dfrac{1}{\sqrt{1+|z_2|^2}}, & \text{если } z_1 = \infty \end{cases}$$

В) (3) Пусть $f(z)$ — аналитическая функция и сохраняет хордальное расстояние между точками, т.е. $k(f(z_1), f(z_2)) = k(z_1,z_2)$ для любых $z_1,z_2 \in \bar{\mathbb{C}}$. Тогда

$$f(z) = \frac{az+c}{bz+d}, \qquad \text{где } a,b,c,d \in \mathbb{C}.$$

Доп ДЗ №4:

Шабунин, Половинкин, Карлов:

1) Параграф 9, стр. 94: Докажите сформулированную теорему единственности для аналитических функций, номер 2 (пункты 5,13,14).
2) Параграф 11, стр. 114: ряды Лорана: номера 5-10 (в каждом номере можно решать 1 любой пункт).
3) Параграф 12, стр. 132: номер 17: любые 2 пункта, номер 18.

ДЗ №5: ТФКП-2: Контурные интегралы
К 4 мая 2017

Задачник Евграфова, начиная со стр. 238:

28.07 — любые 2;	28.09 — любые 2;
28.19 — любые 2;	28.22 — любые 2;
28.25 — любые 2;	28.29 — любые 2.

Доп ДЗ №5: ТФКП-2: Контурные интегралы

Вычислите следующие интегралы

А) (1) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{\sin(ax)}{x(x^2+b^2)}dx$; Б) (1) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{\cos(ax)}{x^4+x^2+1}dx$; В) v.p. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{\alpha x}}{e^{2x}-1}\,dx, \quad 0 < \operatorname{Re}(\alpha) < 2$;

Г) (2) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{\ln x}{(x+a)^2+b^2}dx$; Д) (1) $\displaystyle\int\limits_0^1 \ln\left(\frac{1-x}{x}\right)\frac{dx}{1+x^2}$; Е) (1) $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{\sqrt[4]{x(1-x)^3}}{(x+1)^3}dx$

Ж) (2) $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{\ln(x)}{(x-1)\sqrt{x}}\,dx$; З (3) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+2)^2(\ln^2 x+\pi^2)}$.

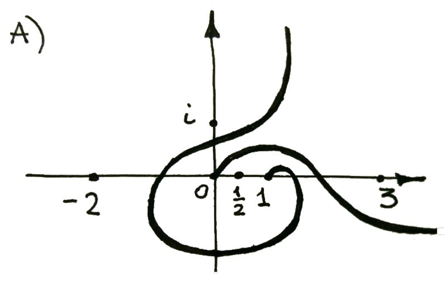
ДЗ №6 (не обязательное): Многозначные функции
К 10 мая 2017

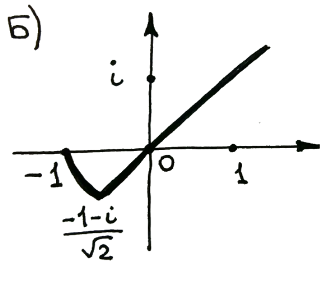
1) Рассмотрим функцию $f(z)$ в области D с разрезами (см. картинки). Убедитесь, что в этой области можно выделить регулярную ветвь функции $f(z)$ и найдите значения $f(a)$:

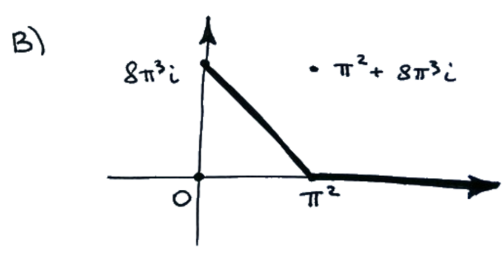
   А) $f(z) = (z^3 - z^2)^{1/3}$; $\quad f(3) = 18^{1/3}$; $\quad a = 1/2, a = -2, a = i$.

   Б) $f(z) = \sqrt{\pi^2 + \operatorname{Ln}^2(z)}$; $\quad f(1) = \pi$; $\quad a = i$.

   В) $f(z) = (z-\pi^2)^{1/2} + (z - 8\pi^3 i)^{1/3} + \ln(z-\pi^2)$; $\quad f(0) = 2\ln(\pi) + \pi\sqrt{3}(\sqrt{3}i - 1)$; $\quad a = \pi^2 + 8\pi^3 i$.







ДЗ №7: Дробно-линейные преобразования
К 24 мая 2017

Определение: дробно-линейное преобразование — это преобразование вида

$$w(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \qquad a,b,c,d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc \neq 0.$$

1) Найдите дробно-линейную функцию $w(z)$, удовлетворяющую условиям:

   А) $w(i) = 0, w(\infty) = 1, w(-i) = \infty$; Б) $w(0) = 0, w(1+i) = \infty, w(2i) = 2i$.

   Найдите образ полуплоскости $\{z : \mathrm{Re}(z) > 0\}$ при отображениях, задаваемых этими функциями.

2) При каких условиях на a,b,c,d дробно-линейное отображение $w = f(z)$ переводит верхнюю полуплоскость $\mathrm{Im}(z) > 0$ в верхнюю полуплоскость $\mathrm{Im}(w) > 0$?

3) Докажите, что при дробно-линейном отображении пара точек, симметричных относительно окружности (или прямой), переходит в пару точек, симметричных относительно образа этой окружности (или прямой).

4) Докажите, что каждое дробно-линейное преобразование w имеет хотя бы одну неподвижную точку a (конечную или бесконечную), т.е. существует a: $a = w(a)$.

5) Обладает ли операция композиции дробно-линейных отображений свойством коммутативности, т.е. всегда ли верно $w_1 \circ w_2 = w_2 \circ w_1$?

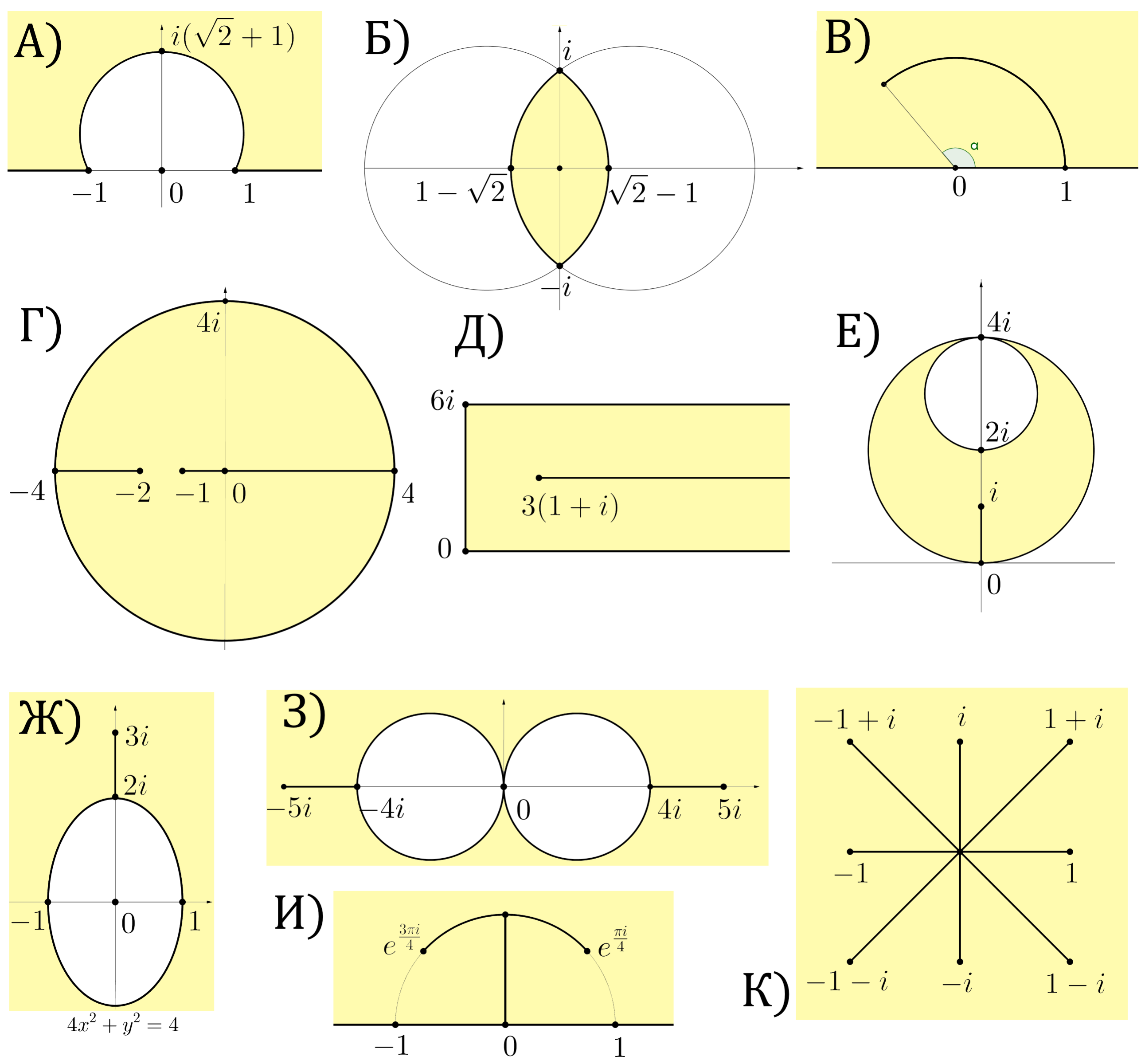
Конформные преобразования

6) А) Отобразите конформно дополнение полукруга $\{z : |z| < 1, \mathrm{Im} z > 0\}$ в себя, чтобы $2i$ перешло в $3i$.

   Б) Отобразите конформно верхнюю полуплоскость $\{z : \mathrm{Im}(z) > 0\}$ на единичный круг $\{w : |w| < 1\}$ так, чтобы $w(i) = \frac{1+i}{5}$, $\arg(w'(i)) = 5$.

   В) Отобразите конформно всю плоскость с разрезом по дуге окружности $\{z : |z| = 1, \mathrm{Im} < 0\}$ на всю плоскость с разрезом по отрезку $[-1,1]$ так, чтобы точка 1 и ∞ остались неподвижными.

7) Отобразите конформно закрашенную область (границы не включены) на верхнюю полуплоскость:



На экзамене... (Из книги Федина «Математики тоже шутят»)

Преподаватель на экзамене, показывая на некий параметр в выкладках студента, спрашивает:
— Как называется эта величина?
— Эта величина, — бойко начинает студент, — выражается вот по такой формуле через...
— Постойте, — перебивает преподаватель, — я вас не спрашиваю, как получить эту величину. Я спрашиваю, как она называется.
— Н-ну... — неуверенно говорит студент. — ...Сигма.
— Нет, нет, не надо как она обозначается. Как она называется?
Студент растерянно молчит.
— Ну, как ее у вас на лекциях называли? — пытается помочь преподаватель. Лицо студента озаряется счастливой улыбкой:
— А-а! Вспомнил! Она называется ХРЕНОВИНА! Наш лектор так и говорил: «Берем эту хреновину...»

Удачи на экзамене!