О точных асимптотиках спектров конечномерных возмущений интегральных операторов ядерного класса

Юлия Петрова

СПбГУ, мат-мех

Санкт-Петербургская зимняя молодежная конференция
по теории вероятностей и математической физике
Санкт-Петербург, 19 декабря 2017

План доклада:

О точных асимптотиках спектров конечномерных возмущений интегральных операторов ядерного класса.

1. Спектральная постановка задачи и связь с малыми уклонениями
2. Одномерные возмущения (А.И. Назаров '09)
3. Конечномерные возмущения (Ю.П. Петрова '17)
4. Применение к малым уклонениям
5. Примеры (Ю.П. Петрова '14, 17)

Доклад основан на статьях Ю.П. Петровой:

- А. И. Назаров, Ю. П. Петрова, *Асимптотика малых уклонений в гильбертовой норме для процессов Каца–Кифера–Вольфовица*. — Теория вероятностей и ее применения **60**, No. 3 (2015), 482–505.
- Ю. П. Петрова, *Точная асимптотика L_2-малых уклонений для некоторых процессов Дурбина*. — Записки научных семинаров ПОМИ **466** (2017), 211–233.
- Ю. П. Петрова, *Точная асимптотика L_2-малых уклонений для некоторого семейства конечномерных возмущений гауссовских процессов*. — Work in progress

Спектральная постановка задачи

$G_0(s,t)$ — ядро положительного интегрального оператора $\mathbb{G}_0 \in \mathfrak{S}^1$

$$u(t) \longmapsto \mathbb{G}_0(u) = \int\limits_0^1 G_0(s,t)u(s)\,ds, \quad t \in [0,1],$$

$\mu_k,\ k \in \mathbb{N}$, — дискретный спектр оператора с ядром G_0, $\sum \mu_k < \infty$.

Рассмотрим конечномерное возмущение ранга m:

$$G(s,t) := G_0(s,t) + \vec{\psi}^{\,T}(s)\ D\ \vec{\psi}(t), \quad s,t \in [0,1],$$

где $\vec{\psi}(t) = (\psi_1(t) \ldots \psi_m(t))^T$, $\quad \psi_j(t) \in L_2[0,1], \quad D \in M_{m\times m}$.

$\tilde{\mu}_k, k \in \mathbb{N}$, — дискретный спектр оператора с ядром $G(s,t)$.

Вопрос: как «асимптотически» связаны спектры $\tilde{\mu}_k$ и μ_k, $k \to \infty$?

Общие факты

При конечномерном возмущении $G(s,t) = G_0(s,t) + \vec{\psi}^{\,T}(s)\; D\; \vec{\psi}(t)$

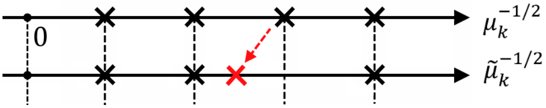
$$\mu_{k+m} \leqslant \tilde{\mu}_k \leqslant \mu_{k-m}.$$

В частности, при одномерном возмущении с.ч. μ_k и $\tilde{\mu}_k$ перемежаются.

Простейший случай:

одномерное возмущение, $\psi(t)$ — собственная функция $\mathbb{G}_0$.

Что будет, если менять D?



Уменьшаем D

$\mu_k = \tilde{\mu}_k,\ k \to \infty$

Общие факты

При конечномерном возмущении $G(s,t) = G_0(s,t) + \vec{\psi}^{\,T}(s)\; D\; \vec{\psi}(t)$

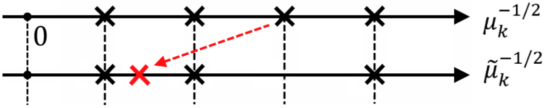
$$\mu_{k+m} \leqslant \tilde{\mu}_k \leqslant \mu_{k-m}.$$

В частности, при одномерном возмущении с.ч. μ_k и $\tilde{\mu}_k$ перемежаются.

Простейший случай:

одномерное возмущение, $\psi(t)$ — собственная функция $\mathbb{G}_0$.

Что будет, если менять D?



Уменьшаем D

$\mu_k = \tilde{\mu}_k,\ k \to \infty$

При конечномерном возмущении $G(s,t) = G_0(s,t) + \vec{\psi}^{\,T}(s)\ D\ \vec{\psi}(t)$

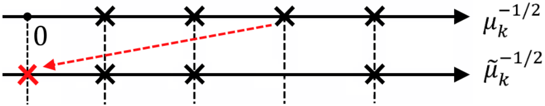
$$\mu_{k+m} \leqslant \tilde{\mu}_k \leqslant \mu_{k-m}.$$

В частности, при одномерном возмущении с.ч. μ_k и $\tilde{\mu}_k$ перемежаются.

Простейший случай:

одномерное возмущение, $\psi(t)$ — собственная функция $\mathbb{G}_0$.

Что будет, если менять D?



D — критическое
$\mu_k = \tilde{\mu}_{k-1},\ k \to \infty$

Простой пример:

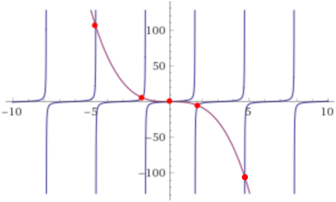
Пусть $G_0 = \min(s,t)$, соответствующие с.ч. $\mu_k = \pi k - \frac{\pi}{2}$

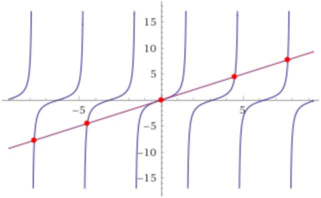
$$G(s,t) = G_0(s,t) + D(t - t^2/2)(s - s^2/2).$$

Тогда задачу на с.ч. $\tilde{\mu}_k$ можно записать так:

$$-\tilde{\mu}_k u''(t) = u(t) + D \int\limits_0^1 u(s)\,(s - s^2/2)\,ds, \quad u(0) = u'(1) = 0.$$

$D > -3$	$D = -3$
$\tilde{\omega}_k$ «прижимаются» к ω_k	$\tilde{\omega}_k$ «прижимаются» к ω_{k+1}
$D\,\mathrm{tg}(\tilde{\omega}_k) = D\,\tilde{\omega}_k + (1 + D/3)\,\tilde{\omega}_k^3$	$\mathrm{tg}(\tilde{\omega}_k) = \tilde{\omega}_k$





Мотивация: малые уклонения

$X(t)$, $t \in (0,1)$, — гауссовский процесс, $\mathbb{E}X(t) \equiv 0$,
$G_X(s,t) = \mathbb{E}X(s)X(t)$.

Определение

Найти вероятность малых уклонений процесса $X(t)$ в L_2-норме означает найти асимптотику:

$$\mathbb{P}\left(\|X\|_2 < \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \xi_k^2 < \varepsilon^2\right), \qquad \varepsilon \to 0 \tag{1}$$

- ξ_k, $k \in \mathbb{N}$, — независимые нормальные стандартные с.в.
- $u_k(t)$, μ_k — собственные функции (с.ф.) и собственные числа (с.ч.) ковариационного оператора:

$$\mu_k\, u_k(t) = \int_0^1 G_X(s,t)\, u_k(s)\, ds.$$

Полезный факт

Теорема (Принцип сравнения Венбо Ли 1992, Гао и др. 2003)

Пусть μ_k, $\hat{\mu}_k$ — две суммируемые последовательности. Если

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{\hat{\mu}_k}{\mu_k} < \infty, \tag{2}$$

тогда при $\varepsilon \to 0$

$$\mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \xi_k^2 < \varepsilon^2\right) \sim \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \hat{\mu}_k \xi_k^2 < \varepsilon^2\right) \cdot \left(\prod \frac{\hat{\mu}_k}{\mu_k}\right)^{1/2}$$

Т.о. в теории вероятностей естественным условием сравнения с.ч. μ_k и $\hat{\mu}_k$ является:

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{\hat{\mu}_k}{\mu_k} < \infty.$$

Одномерные возмущения (А.И. Назаров '09)

Рассмотрим $D \in \mathbb{R}$ и

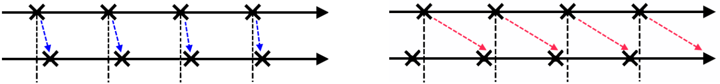
$$G(s,t) = G_0(s,t) + D\psi(s)\psi(t).$$

Пусть $\varphi(t) = \mathbb{G}_0^{-1}\psi(t)$, и

$$Q := \langle \mathbb{G}_0\varphi, \varphi\rangle < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \psi \in \mathrm{Im}(G_0^{1/2})$$

Теорема (А.И. Назаров '09)

1. *Если* $D > -1/Q$, *тогда* $\prod_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k}{\tilde{\mu}_k} < +\infty$.
2. *Если* $D = -1/Q$, $\psi \in \mathrm{Im}(G_0)$, *тогда* $\prod_{k=2}^{\infty} \frac{\mu_k}{\tilde{\mu}_{k-1}} < +\infty$.



Замечание: $D \geqslant -1/Q$ соответствует $\langle G\varphi, \varphi\rangle \geqslant 0$;

Конечномерные возмущения (Ю.П. Петрова '17)

Рассмотрим $D \in M_{m\times m}$ и

$$G(s,t) = G_0(s,t) + \vec{\psi}^{\,T}(s)\cdot D\cdot\vec{\psi}(t).$$

Пусть $\varphi_j(t) = \mathbb{G}_0^{-1}\psi_j(t)$, и

$$Q := \langle \mathbb{G}_0\vec{\varphi}, \vec{\varphi}^{\,T}\rangle < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \psi_j \in \mathrm{Im}(G_0^{1/2})$$

Теорема (Ю.П. Петрова '17)

1. *Если* $(Q^{\,T}D + E_m) > 0$, *тогда* $\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\mu_k}{\tilde{\mu}_k} < +\infty$.
2. *Если* $\mathrm{rank}(Q^{\,T}D + E_m) = m - s$, $\psi_j \in \mathrm{Im}(G_0)$, *тогда*

$$\prod_{k=s+1}^{\infty}\frac{\mu_k}{\tilde{\mu}_{k-s}} < +\infty.$$

Замечание: $Q^T D + E_m \geqslant 0$ соответствует $\langle G\vec{\varphi}, \vec{\varphi}^{\,T}\rangle \geqslant 0$.

Пример, не подходящий под общие теоремы

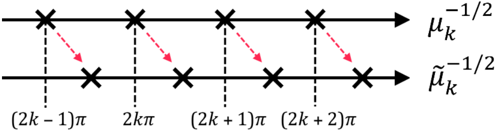
Пусть $G_0(s,t) = \min(s,t) - st$, т.е. $\mathbb{G}_0$ обратный к ОДУ

$$\mathbb{G}_0^{-1} = -\frac{d^2}{dt^2}: \quad W^2_{2,0}[0,1] \longrightarrow L_2[0,1].$$

Рассмотрим $\psi(t) = t\ln(t)$, тогда $\varphi(t) = \mathbb{G}_0^{-1}\psi(t) = \frac{1}{t} \notin L_2[0,1]$ и

$$G(s,t) = G_0(s,t) - \psi(s)\psi(t), \text{ критическое возмущение.}$$

Выписывая явно уравнение на с.ч. $\tilde{\mu}_k$ и его решая, получаем:



$$\mu_k^{-1/2} = \pi k; \qquad \tilde{\mu}_k^{-1/2} = \pi k + \frac{\pi}{2} + O\left(\frac{1}{k}\right), \quad k \to \infty$$

Применение к малым уклонениям: постановка задачи

$X(t)$, $t \in (0,1)$, — гауссовский процесс, $\quad \mathbb{E}X(t) \equiv 0$,
$G_0(s,t) = \mathbb{E}X(s)X(t)$; $\quad \mathbb{G}_0$ — ковариационный оператор. Рассмотрим

$$X_{\vec{\psi},A}(t) = X(t) - \vec{\psi}^{\,T}(t) \cdot A \cdot \int_0^1 X(s)\,\vec{\varphi}(s)\,ds. \tag{3}$$

где

$$A \in M_{m\times m}; \qquad \vec{\psi}(t) = \big(\psi_1(t)\ \ldots\ \psi_m(t)\big)^T; \qquad \vec{\varphi}(t) = \mathbb{G}_0^{-1}\vec{\psi}(t),$$

причем определена

$$Q = \int_0^1\int_0^1 G_0(s,t)\vec{\varphi}(s)\vec{\varphi}^{\,T}(t)\,ds\,dt = \langle \mathbb{G}_0\vec{\varphi}, \vec{\varphi}^{\,T}\rangle \ \in\ M_{m\times m}.$$

$X_{\vec{\psi},A}(t)$ — гауссовский процесс, $\mathbb{E}X_{\vec{\psi},A}(t) \equiv 0$,

$$G_{X_{\vec{\psi},A}}(s,t) = G_0(s,t) + \vec{\psi}^{\,T}(s) \cdot M \cdot \vec{\psi}(t), \qquad M = -A - A^T + A^T K A.$$

Применение к малым уклонениям: основная теорема-1

Теорема (А.И. Назаров '09: одномерное возмущение)

1. *Если* $A \neq Q^{-1}$, *тогда при* $\varepsilon \to 0$

$$\mathbb{P}\left(\|X_{\psi,A}\|_2 < \varepsilon\right) \sim \frac{\mathbb{P}\left(\|X\|_2 < \varepsilon\right)}{|1 - AQ|}.$$

2. *Если* $A = Q^{-1}$, $\varphi \in L_2(0,1)$, *тогда при* $r \to 0$

$$\mathbb{P}\left(\|X_{\psi,A}\|_2 < \sqrt{r}\right) \sim \frac{\sqrt{Q}}{\|\varphi\|_2} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_0^r \frac{d}{dt}\mathbb{P}(\|X\|_2 < \sqrt{t}) \cdot \frac{dt}{\sqrt{r-t}}.$$

Применение к малым уклонениям: основная теорема-2

Теорема (Ю. П. Петрова '17: конечномерное возмущение)

1. *Если* $\det\big(E_m - AQ\big) \neq 0$, *тогда при* $\varepsilon \to 0$

$$\mathbb{P}\left(\|X_{\vec{\psi},A}\|_2 < \varepsilon\right) \sim \frac{\mathbb{P}\left(\|X\|_2 < \varepsilon\right)}{\det\big(E_m - AQ\big)}.$$

2. *Если* $A = Q^{-1}$, $\varphi_j(t) \in L_2(0,1)$, *тогда при* $r \to 0$

$$\mathbb{P}\left(\|X_{\vec{\psi},A}\|_2 < \sqrt{r}\right) \sim \frac{\det\left(Q\right)}{\det\big(\int_0^1 \vec{\varphi}(t)\, \vec{\varphi}^{\,T}(t)\, dt\big)} \cdot \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)^m \cdot$$

$$\cdot \int_0^r \int_0^{r_1} \ldots \int_0^{r_{m-1}} \frac{d^m}{dr_m^m} \mathbb{P}(\|X\|_2 < r_m) \frac{dr_m \ldots dr_1}{\sqrt{(r - r_1) \cdot \ldots \cdot (r_{m-1} - r_m)}}.$$

Примеры: предельные процессы Дурбина

Выборка $x_1, \ldots, x_n \sim F(x, \theta)$
$\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_m)$ — параметры распределения. Рассмотрим:

$$F_{n_0}(t) = \{\text{количество } x_i \colon F(x_i, \theta_0) \leqslant t\}, \quad \theta_0 = \text{fix}.$$

Тогда $\qquad n^{1/2}\big[F_{n_0}(t) - t\big] \xrightarrow{w} B(t).$

Примеры: предельные процессы Дурбина

Выборка $x_1, \ldots, x_n \sim F(x, \theta)$
$\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_m)$ — параметры распределения. Рассмотрим:

$$F_{n_0}(t) = \{\text{количество } x_i \colon F(x_i, \theta_0) \leqslant t\}, \quad \theta_0 = \mathrm{fix}.$$

Тогда $\quad n^{1/2}\big[F_{n_0}(t) - t\big] \xrightarrow{w} B(t).$ Рассмотрим:

$\hat{F}_n(t) = \{\text{количество } x_i \colon F(x_i, \hat{\theta}_n) \leqslant t\}, \quad \hat{\theta}_n$ — оценивается по выборке

Тогда $n^{1/2}\big[\hat{F}_n(t) - t\big] \xrightarrow{w} B(t) + \ldots$ — возмущение броуновского моста, гауссовский процесс с нулевым средним и функцией ковариации:

$$G(s,t) = G_B(s,t) - \vec{\psi}^{\,T}(s)\, S^{-1}\, \vec{\psi}(t)$$

- $G_B(s,t) = \min(s,t) - st$
- $S_{ij} = \mathbb{E}\left(\frac{\partial}{\partial \theta_i} \ln(f(x,\theta)) \frac{\partial}{\partial \theta_j} \ln(f(x,\theta))\right)\Big|_{\theta=\theta_0}$ — информ. Фишера
- $\psi_j(t) = \left.\dfrac{\partial F}{\partial \theta_j}\right|_{\theta=\theta_0}, \quad \theta_0$ — фиксированный вектор параметров

Теорема (Ю.П. Петрова '17)

Процессы Дурбина являются критическими

Однако, соответствующие возмущения $\varphi(t)$ не всегда из $L_2(0,1)$. Поэтому общие теоремы тут не всегда работают.

Важный пример: проверка выборки на нормальность, $\theta = (\alpha, \beta)$:

$$F(x,\theta) = \frac{1}{\beta\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\alpha}{\beta}\right)^2\right) dy$$

$$\begin{array}{lll} \widehat{\alpha} & \psi_1(t) = f(F^{-1}(t)) & \varphi_1(t) = -\psi_1''(t) \notin L_2(0,1) \\ \widehat{\beta} & \psi_2(t) = \psi_1(t) \cdot \dfrac{F^{-1}(t)}{\sqrt{2}} & \varphi_2(t) = -\psi_2''(t) \notin L_2(0,1) \end{array}$$

Малые уклонения для процессов Каца-Кифера-Вольфовица были посчитаны в статье А.И. Назарова и Ю.П. Петровой в 2014 году.

Примеры: логистическое, Гумбеля распределения и др.

Малые уклонения для процессов Дурбина, возникающих при проверке на распределения Лапласа, логистическое, Гумбеля и гамма, посчитаны Ю.П. Петровой в 2017 году.

LOG 1	$\frac{2\sqrt{15}}{\sqrt{\pi}} \cdot \varepsilon^{-2} \exp\left(-\frac{1}{8\varepsilon^2}\right)$
LOG 2	$\frac{4\sqrt{3+\pi^2}}{3\sqrt{2}\,\pi^{3/2}} \cdot \varepsilon^{-1} \exp\left(-\frac{1}{8\varepsilon^2}\right)$
LOG 3	$\frac{4\sqrt{15(3+\pi^2)}}{3\,\pi^{3/2}} \cdot \varepsilon^{-3} \exp\left(-\frac{1}{8\varepsilon^2}\right)$
GUM 1	$\frac{4}{\pi^{3/2}} \cdot \varepsilon^{-1} \exp\left(-\frac{1}{8\varepsilon^2}\right)$
GUM 2	$C \cdot \ln^{-1}(\ln(\varepsilon^{-1})) \cdot \varepsilon^{-1} \exp\left(-\frac{1}{8\varepsilon^2}\right)$
GUM 3	$C \cdot \exp\left(2\pi \ln^2(\ln(\varepsilon^{-1}))\right) \cdot \varepsilon^{-2} \exp\left(-\frac{1}{8\varepsilon^2}\right)$

Спасибо за внимание!

Литература

- А. И. Назаров, *Об одном семействе преобразований гауссовских случайных функций*. — Теория вероятн. и ее примен. **54**, No. 2 (2009), 209–225.
- J. Durbin, *Weak convergence of the sample distribution function when parameters are estimated*. — Ann. Statist. **1**, No. 2 (1973), 279–290.
- А. И. Назаров, Ю. П. Петрова, *Асимптотика малых уклонений в гильбертовой норме для процессов Каца–Кифера–Вольфовица*. — Теория вероятностей и ее применения **60**, No. 3 (2015), 482–505.
- Ю. П. Петрова, *Точная асимптотика L_2-малых уклонений для некоторых процессов Дурбина*. — Записки научных семинаров ПОМИ **466** (2017), 211–233.
- Ю. П. Петрова, *Точная асимптотика L_2-малых уклонений для некоторого семейства конечномерных возмущений гауссовских процессов*. — Work in progress