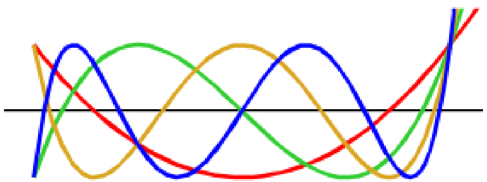
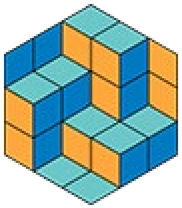
# *Точные* асимптотики $L_2$-малых уклонений для конечномерных возмущений гауссовских процессов




Юлия Петрова[1,2]

[1]Санкт-Петербургский Государственный Университет
[2]Лаборатория им. П.Л. Чебышева

Совместная работа с
Александром Назаровым

10 декабря 2019


- Nazarov A. I., **Petrova Yu. P.** (2015). The small ball asymptotics in Hilbertian norm for the Kac–Kiefer–Wolfowitz processes. Probab. Theory and Applicat., 60(3), pp. 482--505.
- **Petrova Yu. P.** (2017) Exact $L_2$-small ball asymptotics for some Durbin processes. Zapiski POMI, 466, pp. 211--233.
- **Petrova Yu. P.** (2018) On spectral asymptotics for a family of finite-dimensional perturbations of operators of trace class, Doklady Mathematics, 98(1), pp. 367--369.
- **Petrova Yu. P.** (2019) $L_2$-small ball asymptotics for a family of finite-dimensional perturbations of Gaussian functions. Preprint.

Александр Ильич Назаров

Яков Юрьевич Никитин

# План: малые уклонения для гауссовских процессов

1. Введение:
   - Основное понятие: вероятность малых уклонений
   - Формулировка задачи
   - Процессы Дурбина
2. История вопроса
   - Связь со спектральной задачей
   - Критические и некритические возмущения
3. Основные результаты
   - Процессы Дурбина при проверке на экспоненциальность
   - Процессы Каца-Кифера-Вольфовица
   - Процессы Дурбина для распределения Гумбеля
4. Основной ингридиент в доказательстве
   - Асимптотики интегралов

# Основное понятие: вероятность малых уклонений

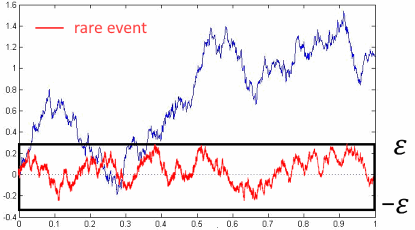
$X(t)$, $t \in (0,1)$, — гауссовский процесс, $\mathbb{E}X(t) \equiv 0$,
$G_X(s,t) = \mathbb{E}X(s)X(t)$.

## Определение

*Найти асимптотику малых уклонений процесса $X(t)$ в норме $\|\cdot\|$ означает найти асимптотику:*

$$\mathbb{P}\left(\|X\| < \varepsilon\right) \qquad \textit{as} \quad \varepsilon \to 0 \tag{1}$$

Пример: $\|X\| = \sup\limits_{t\in[0,1]} |X(t)|$



# Основное понятие: вероятность малых уклонений

$X(t)$, $t \in (0,1)$, — гауссовский процесс, $\mathbb{E}X(t) \equiv 0$,
$G_X(s,t) = \mathbb{E}X(s)X(t)$.

- $L_2$ норма: $\|X\|_2 = \int_0^1 (X(t))^2\,dt$

# Основное понятие: вероятность малых уклонений

$X(t)$, $t \in (0,1)$, — гауссовский процесс, $\mathbb{E}X(t) \equiv 0$,
$G_X(s,t) = \mathbb{E}X(s)X(t)$.

- $L_2$ норма: $\|X\|_2 = \int_0^1 (X(t))^2\,dt$

**Винеровский процесс**

$$\mathbb{P}\left(\|W\|_2 < \varepsilon\right) \sim \frac{4}{\sqrt{\pi}}\,\varepsilon\,\exp\Big(-\frac{1}{8}\,\varepsilon^{-2}\Big)$$

**Броуновский мост**

$$\mathbb{P}\left(\|B\|_2 < \varepsilon\right) \sim \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{\pi}}\,\exp\Big(-\frac{1}{8}\,\varepsilon^{-2}\Big)$$

# Основное понятие: вероятность малых уклонений

$X(t)$, $t \in (0,1)$, — гауссовский процесс, $\mathbb{E}X(t) \equiv 0$,
$G_X(s,t) = \mathbb{E}X(s)X(t)$.

- $L_2$ норма: $\|X\|_2 = \int_0^1 (X(t))^2\,dt$

**Винеровский процесс**

$$\mathbb{P}\left(\|W\|_2 < \varepsilon\right) \sim \frac{4}{\sqrt{\pi}}\,\varepsilon\;\exp\!\Big(-\frac{1}{8}\,\varepsilon^{-2}\Big)$$

**Броуновский мост**

$$\mathbb{P}\left(\|B\|_2 < \varepsilon\right) \sim \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{\pi}}\;\exp\!\Big(-\frac{1}{8}\,\varepsilon^{-2}\Big)$$

«Типичный» ответ:

$$\mathbb{P}\left(\|X\|_2 < \varepsilon\right) \sim D \cdot \varepsilon^{C} \cdot \exp\!\big(-B\varepsilon^{-A}\big)$$

$A$, $B$ — *логарифмическая* асимпт.; $A$, $B$, $C$, $D$ — *точная* асимпт.

# Основное понятие: вероятность малых уклонений

$X(t)$, $t \in (0,1)$, — гауссовский процесс, $\mathbb{E}X(t) \equiv 0$,
$G_X(s,t) = \mathbb{E}X(s)X(t)$.

- $L_2$-норма: $\|X\|_2 = \int_0^1 (X(t))^2\,dt$

## Винеровский процесс

$$\mathbb{P}\left(\|W\|_2 < \varepsilon\right) \sim \frac{4}{\sqrt{\pi}}\,\varepsilon\,\exp\bigl(-\frac{1}{8}\,\varepsilon^{-2}\bigr)$$

## Броуновский мост

$$\mathbb{P}\left(\|B\|_2 < \varepsilon\right) \sim \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{\pi}}\,\exp\bigl(-\frac{1}{8}\,\varepsilon^{-2}\bigr)$$

«Типичный» ответ:

$$\mathbb{P}\left(\|X\|_2 < \varepsilon\right) \sim D \cdot \varepsilon^{C} \cdot \exp\bigl(-B\varepsilon^{-A}\bigr)$$

$A$, $B$ — *логарифмическая* асимпт.; $\boxed{A,\ B,\ C,\ D\ \text{— } \textit{точная} \text{ асимпт.}}$

# Формулировка задачи

$X_0(t)$ — гауссовский процесс:

- $\mathbb{E}X_0(t) \equiv 0$
- $G_0(s,t) = \mathbb{E}X_0(s)X_0(t)$

$\mathbb{P}\left(\|X_0\|_2 < \varepsilon\right)$ известна

---

$X(t)$ — конечномерное возмущение процесса $X_0(t)$ ранга $m$ :

- $\mathbb{E}X(t) \equiv 0$
- $G(s,t) = \mathbb{E}X(s)X(t)$

$$\boxed{G(s,t) = G_0(s,t) + \vec{\psi}^{\,T}(s) \cdot\ D\ \cdot \vec{\psi}(t)}$$

Параметры возмущения:

- $\vec{\psi}(t) = (\psi_1(t), \ldots, \psi_m(t))^T$
- $D \in M_{m\times m}$ — симметричная (н.у.о.)

**Вопрос:**

как связаны $\mathbb{P}\left(\|X_0\|_2 < \varepsilon\right)$ и $\mathbb{P}\left(\|X\|_2 < \varepsilon\right)$?

# Формулировка задачи (Процессы Дурбина)

- выжны для статистики
- возникают как предельные в задаче о построении критериев согласия типа $\omega^2$, если параметры распределения оцениваются по выборке

Дана выборка $x_1, \ldots, x_n \sim F(x, \theta)$.
$\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_m)$ — параметры распределения.

| | |
|---|---|
| параметры *известны*<br>($\theta = \theta^0$ фиксирован)<br>$\Downarrow$<br>предельный процесс —<br>Броуновский мост $B(t)$ | параметры *не известны*<br>(оцениваются по выборке)<br>$\Downarrow$<br>предельный процесс —<br>$m$-мерное возмущение $B(t)$ |

**Задача:**

Найти точную асимптотику малых уклонений для процессов Дурбина

# Задача основана на связи двух областей:

### Случайные процессы

$X(t)$, $t \in (0,1)$, —

- гауссовский процесс
- $\mathbb{E}X(t) \equiv 0$
- $G(s,t) = \mathbb{E}X(s)X(t)$.

### Спектральная теория

$\mathbb{G} : L_2[0,1] \to \mathrm{Im}(\mathbb{G})$

- интегральный оператор

$$(\mathbb{G}u)(s) = \int_0^1 G(s,t)u(t)\,dt$$

- операторы со следом: $\sum \mu_k < \infty$

**Вероятности малых уклонений**

$$\mathbb{P}\left(\|X\|_2 < \varepsilon\right), \quad \varepsilon \to 0$$

**Асимптотика СЧ $\mu_k$**

Найти «хорошее» приближение к $\mu_k$

# Гильбертова структура $\Longrightarrow$ спектральная задача

## Разложение Кархунена–Лоэва (KL-разложение):

(K. Karhunen'1947, M. Loève'1948)

$$X(t) \stackrel{d}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\mu_k}\, u_k(t)\, \xi_k$$

- $\xi_k$, $k \in \mathbb{N}$, — iid стандартные нормальные с.в.
- $u_k(t)$, $\mu_k$ — ортонорм. собственные функции и положительные собственные числа ковариационного оператора $\mathbb{G}_X$:

$$\mu_k u_k = \mathbb{G}_X u_k \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mu_k\, u_k(t) = \int_0^1 G_X(s,t)\, u_k(s)\, ds.$$

Задача малых уклонений ($\varepsilon \to 0$):

$$\mathbb{P}(\|X\|_2 < \varepsilon) = \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \xi_k^2 < \varepsilon^2\right).$$

**Главная идея:** вся информация о процессе содержится в спектре его ковариационного оператора.

# Что уже известно?

1974 — Г. Сытая: неявное решение задачи в терминах преобразования Лапласа от суммы $\sum \mu_k \xi_k^2$

с 1974 — В. М. Золотарев, J. Hoffmann-Jorgensen , L. Shepp, R. Dudley, И. А. Ибрагимов, М. А. Лифшиц,...:
упрощение формулы для различных предположений

1998 — T. Dunker, M. A. Lifshits, W. Linde (DLL):
Относительно простые формулы для

$$\mathbb{P}\left(\sum \mu_k \xi_k^2 < \varepsilon^2\right) \qquad \text{когда}$$

- $\mu_k$ — убывают, логарифмически выпуклы
- $\mu_k = k^{-d}, \quad d > 0,$ — полиномиальное убывание
- $\mu_k = A^{-k}, \quad A > 0,$ — экспоненциальное убывание

# Полезный факт: принцип Венбо Ли

Пусть $\widehat{\mu}_k \approx \mu_k$ — некоторая аппроксимация.

*Вопрос:* Как связаны следующие асимптотики малых уклонений для

$$\mathbb{P}\left(\sum \mu_k \xi_k^2 < \varepsilon^2\right) \text{ и } \mathbb{P}\left(\sum \widehat{\mu}_k \xi_k^2 < \varepsilon^2\right)?$$

# Полезный факт: принцип Венбо Ли

Пусть $\widehat{\mu}_k \approx \mu_k$ — некоторая аппроксимация.
*Вопрос:* Как связаны следующие асимптотики малых уклонений для

$$\mathbb{P}\left(\sum \mu_k \xi_k^2 < \varepsilon^2\right) \text{ и } \mathbb{P}\left(\sum \widehat{\mu}_k \xi_k^2 < \varepsilon^2\right)?$$

**Теорема (Принцип Венбо Ли 1992, Gao et al. 2003)**

*Пусть $\mu_k$, $\widehat{\mu}_k$ — две суммируемые последовательности. Если*

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{\widehat{\mu}_k}{\mu_k} < \infty, \tag{2}$$

*тогда при $\varepsilon \to 0$*

$$\mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \xi_k^2 < \varepsilon^2\right) \sim \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \widehat{\mu}_k \xi_k^2 < \varepsilon^2\right) \cdot \left(\prod \frac{\widehat{\mu}_k}{\mu_k}\right)^{1/2}$$

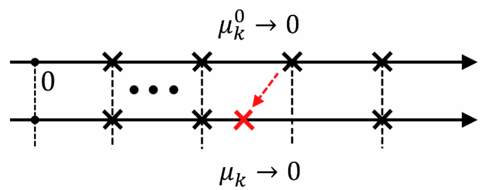
| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| «хорошее» приближ. $\widehat{\mu}_k$ для $\mu_k$ | + | Принцип Венбо Ли | + | теорема DLL | = | малые уклонения |

# Одномерные возмущения: первое наблюдение

$$G_X(s,t) = G_0(s,t) + D\psi(s)\psi(t), \qquad D \in \mathbb{R}$$

- $D = 0$ — невозмущенный оператор
- $\psi(t)$ — собственная функция интегрального оператора $\mathbb{G}_0$

Что произойдет, если мы изменим $D$?



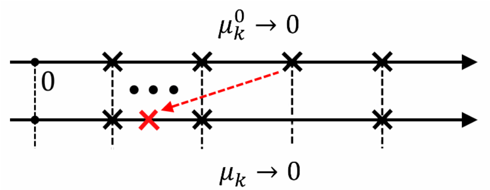

Уменьшаем $D \downarrow$

Асимптотически
$\mu_k^0 = \mu_k$, $k \to \infty$

$$G_X(s,t) = G_0(s,t) + D\psi(s)\psi(t), \qquad D \in \mathbb{R}$$

- $D = 0$ — невозмущенный оператор
- $\psi(t)$ — собственная функция интегрального оператора $\mathbb{G}_0$

Что произойдет, если мы изменим $D$?




Уменьшаем $D \downarrow$

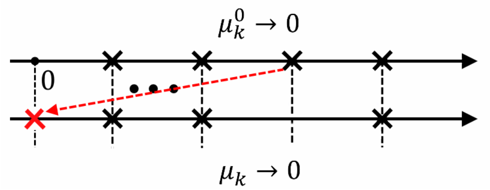
Асимптотически
$\mu_k^0 = \mu_k, \; k \to \infty$

# Одномерные возмущения: первое наблюдение

$$G_X(s,t) = G_0(s,t) + D\psi(s)\psi(t), \qquad D \in \mathbb{R}$$

- $D = 0$ — невозмущенный оператор
- $\psi(t)$ — собственная функция интегрального оператора $\mathbb{G}_0$

Что произойдет, если мы изменим $D$?




$D$ — критическое

Асимптотически
$\mu_k^0 = \mu_{k-1}$, $k \to \infty$

Аналогичный эффект возникает и в более общей ситуации (когда $\psi(t)$ необязательно собственная функция)

# Одномерные возмущения (А.И. Назаров'2009)

Пусть $\quad Q := \langle \mathbb{G}_0^{-1}\psi, \psi\rangle < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \psi \in \mathrm{Im}(\mathbb{G}_0^{1/2}).$

Существует критическое значение $D_{crit} = -1/Q$ такое что:

### Не критический случай

Если $D > D_{crit} = -1/Q$,
то
$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k}{\mu_k^0} < \infty$$

### Критический случай

Если $D = D_{crit}$, $\boxed{\psi \in \mathrm{Im}(\mathbb{G}_0)}$,
то
$$\prod_{k=2}^{\infty} \frac{\mu_{k-1}}{\mu_k^0} < \infty$$

- В критическом случае есть доп. предположение $\psi \in \mathrm{Im}(\mathbb{G}_0)$
- Также верно аналогичное утверждение для конечномерного возмущения (Ю.П. Петрова'2018)

# Одномерные возмущения (А.И. Назаров'2009)

Пусть $\quad Q := \langle \mathbb{G}_0^{-1}\psi, \psi\rangle < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \psi \in \mathrm{Im}(\mathbb{G}_0^{1/2})$.
Существует критическое значение $D_{crit} = -1/Q$ такое что:

### Не критический случай

Если $D > D_{crit} = -1/Q$,
то при $\varepsilon \to 0$

$$\mathbb{P}\left(\|X\|_2 < \varepsilon\right) \sim \frac{\mathbb{P}\left(\|X_0\|_2 < \varepsilon\right)}{|1 + QD|}$$

### Критический случай

Если $D = D_{crit}$, $\boxed{\psi \in \mathrm{Im}(\mathbb{G}_0)}$,
то при $\varepsilon \to 0$

$$\mathbb{P}\left(\|X\|_2 < \varepsilon\right) \sim \frac{\sqrt{Q}}{\|\varphi\|_2} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_0^{\varepsilon^2} \frac{d}{dt}\mathbb{P}(\|X_0\|_2 < t) \cdot \frac{dt}{\sqrt{\varepsilon^2 - t^2}}$$

- В критическом случае есть доп. предположение $\psi \in \mathrm{Im}(\mathbb{G}_0)$
- Также верно аналогичное утверждение для конечномерного возмущения (Ю.П. Петрова'2018)

# Конечномерные возмущения (Ю.П. Петрова'2018)

$$G_X(s,t) = G_0(s,t) + \vec{\psi}^{\,T}(s) \cdot D \cdot \vec{\psi}(t),$$
$$\vec{\psi}(t) = (\psi_1(t), \ldots, \psi_m(t))^T, \qquad D \in M_{m\times m}$$

Пусть $\varphi_j(t) = \mathbb{G}_0^{-1}\psi_j(t)$, и

$$Q := \langle \mathbb{G}_0 \vec{\varphi}, \vec{\varphi}^{\,T} \rangle < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \psi_j \in \mathrm{Im}(\mathbb{G}_0^{1/2})$$

**Не критический случай**

Если $\quad (Q^{\,T} D + E_m) > 0, \quad$ то

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k^0}{\mu_k} < +\infty$$

.

**Критический случай**

Если $\boxed{\psi_j \in \mathrm{Im}(\mathbb{G}_0)}$ и

$\mathrm{rank}(Q^{\,T} D + E_m) = m - s, \quad$ то

$$\prod_{k=s+1}^{\infty} \frac{\mu_k^0}{\mu_{k-s}} < +\infty.$$

- В критическом случае есть доп. предположение $\psi \in \mathrm{Im}(\mathbb{G}_0)$

# Конечномерные возмущения (Ю.П. Петрова'2018)

## Теорема (Ю.П. Петрова '2018)

1. *(не критический)* *Если* $(Q^T D + E_m) > 0$, *то* $\varepsilon \to 0$

$$\mathbb{P}\left(\|X\|_2 < \varepsilon\right) \sim \frac{\mathbb{P}\left(\|X_0\|_2 < \varepsilon\right)}{\det(Q^T D + E_m)}.$$

2. *(критический)* *Если* $(Q^T D + E_m) \equiv 0$, $\boxed{\psi_j \in \mathrm{Im}(\mathbb{G}_0)}$,
*то при* $r \to 0$

$$\mathbb{P}\left(\|X\|_2 < \sqrt{r}\right) \sim \sqrt{\frac{\det(Q)}{\det\left(\int_0^1 \vec{\varphi}(t)\, \vec{\varphi}^{\,T}(t)\, dt\right)}} \cdot \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)^m \cdot$$

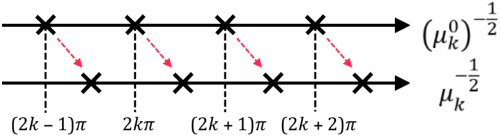
$$\cdot \int_0^r \int_0^{r_1} \ldots \int_0^{r_{m-1}} \frac{d^m}{dr_m^m} \mathbb{P}(\|X_0\|_2 < r_m) \frac{dr_m \ldots dr_1}{\sqrt{(r - r_1) \cdot \ldots \cdot (r_{m-1} - r_m)}}.$$

- Существуют еще частично-критические возмущения.

# Пример 1: процесс Дурбина при проверке на экспоненциальность

$G_0(s,t) = \min(s,t) - st, \quad \psi(t) = t\ln(t)$, тогда

$G(s,t) = G_0(s,t) - \psi(s)\psi(t)$, критическое, не «хорошее» возмущение.




Спектральная асимптотика: $\mu_k^{-1/2} = \pi k + \frac{\pi}{2} + O\left(\frac{1}{k}\right), \quad k \to \infty$

Малые уклонения: $\mathbb{P}\{\|X\|_2 < \varepsilon\} \sim \frac{4}{\pi^{3/2}}\,\varepsilon^{-1}\exp\Big(-\frac{1}{8\varepsilon^2}\Big),\ \varepsilon \to 0$

# Пример 2: процессы Каца-Кифера-Вольфовица (KKW)

**Важный пример:**

тест на нормальность — общие теоремы не работают

| | | | |
|---|---|---|---|
| $X_1$ | $\widehat{\alpha}$ оценивается, $\beta = 1$ | $\psi_1(t) = f(F^{-1}(t))$ | критическое, не «хорошее» |
| $X_2$ | $\alpha = 0$, $\widehat{\beta}$ оценивается | $\psi_2(t) = \psi_1(t) \cdot \frac{F^{-1}(t)}{\sqrt{2}}$ | критическое, не «хорошее» |
| $X_3$ | $\widehat{\alpha}$, $\widehat{\beta}$ оцениваются | $\psi_1(t), \psi_2(t)$ | критическое, не «хорошее» |

# Пример 3: общие процессы Дурбина

## Лемма (Ю.П.Петрова '2018)

*Все процессы Дурбина являются критическими.*

Заметим, что возмущения «часто» не «хорошие». Мы рассмотрели процессы Дурбина при проверке на различные распределения с параметрами $\theta = (\alpha, \beta)$:

- Лаплас $$F(x,\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2}\exp(\frac{x-\alpha}{\beta}), & x \leqslant \alpha; \\ 1 - \frac{1}{2}\exp(-\frac{x-\alpha}{\beta}), & x > \alpha. \end{cases}$$
- логистическое $$F(x,\theta) = \left(1 + \exp(-\tfrac{x-\alpha}{\beta})\right)^{-1}.$$
- Гумбеля $$F(x,\theta) = \exp\left(-\exp\left(-\tfrac{x-\alpha}{\beta}\right)\right).$$
- Гамма $$F(x,\theta) = \begin{cases} \int\limits_0^{x/\beta} \frac{y^{\alpha-1}e^{-y}}{\Gamma(\alpha)}dy, & x \geqslant 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Зам: «хорошее» возмущение — только $X_1$ для логистического

# Пример 3: распределение Гумбеля

## Теорема (Ю.П. Петрова '2017)

*Для процесса Дурбина $X(t)$, соответствующего распределению Гумбеля,*

$$G(s,t) = G_0(s,t) - \psi(t)\psi(s), \qquad \psi(t) = C\, t \ln(t) \cdot \ln(-\ln(t))$$

*асимптотика собственных чисел выглядит следующим образом*

$$\mu_k^{-1/2} = \pi k + \frac{\pi}{2} + (-1)^k \cdot 2 \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\ln(\ln(k)) + 1}\right) - \frac{1}{\ln(k)\ln(\ln(k))} + \\ + O\left(\frac{1}{\ln(k)(\ln(\ln(k)))^2}\right).$$

*Асимптотика вероятности малых уклонений*

$$\mathbb{P}\left\{\|X\| < \varepsilon\right\} \sim C \cdot \ln^{-1}(\ln(\varepsilon^{-1})) \cdot \varepsilon^{-1} \cdot \exp\left(-\frac{1}{8\varepsilon^2}\right)$$

# Спектральная асимптотика $\longleftrightarrow$ малые уклонения

## Теорема (А.И. Назаров, Ю.П. Петрова '2015)

*Если* $\hat{\mu}_k = (\vartheta(k + \delta + F(k)))^{-2}$. *Тогда имеем при* $\varepsilon \to 0$

$$\mathbb{P} \sim C \cdot \exp\left(\frac{1}{2} \cdot F_{-1}(\varepsilon^{-2})\right) \cdot \varepsilon^{-2\delta} \cdot \exp\left(-\left(\frac{\pi}{2\vartheta}\right)^2 \cdot \frac{\varepsilon^{-2}}{2}\right),$$

*где* $F(t)$ *медленно-меняющаяся функция на бесконечности,* $F(t) \to 0$ *при* $t \to \infty$,

$$F_{-1}(t) = \int\limits_1^t \frac{F(x)}{x}\, dx.$$

Зам: $\exp\left(\frac{1}{2} \cdot F_{-1}(t)\right)$ также является медленно-меняющейся функцией при $t \to \infty$.

# Все результаты:

| Некритическое возмущение | Критическое возмущение | | | |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| | «хорошее» | не «хорошее» (процессы Дурбина '2015,'2017) | | |
| одномерное: Назаров'2009 | | LOG 2 | $\frac{4\sqrt{3+\pi^2}}{3\sqrt{2}\,\pi^{3/2}}\cdot\varepsilon^{-1}\exp\left(-\frac{1}{8\varepsilon^2}\right)$ | П'17 |
| | | LOG 3 | $\frac{4\sqrt{15(3+\pi^2)}}{3\,\pi^{3/2}}\cdot\varepsilon^{-3}\exp\left(-\frac{1}{8\varepsilon^2}\right)$ | П'17 |
| | | NOR 1 | $C\cdot\varepsilon^{-1}\cdot\ln^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\cdot\exp\left(-\frac{1}{8\varepsilon^2}\right)$ | H&П'15 |
| | | NOR 2 | $\frac{2\sqrt{2}}{\pi^{3/2}}\,\varepsilon^{-1}\exp\left(-\frac{1}{8\varepsilon^2}\right)$ | H&П'15 |
| конечномерное: Петрова'2018 | | GUM 1 | $\frac{4}{\pi^{3/2}}\cdot\varepsilon^{-1}\exp\left(-\frac{1}{8\varepsilon^2}\right)$ | П'17 |
| | | GUM 2 | $C\cdot\ln^{-1}(\ln(\varepsilon^{-1}))\cdot\varepsilon^{-1}\exp\left(-\frac{1}{8\varepsilon^2}\right)$ | П'17 |
| | | GAM 1 | $\frac{4\alpha_0^{1/2}}{\pi^{3/2}}\cdot\varepsilon^{-1}\exp\left(-\frac{1}{8\varepsilon^2}\right)$ | П'17 |
| | | GAM 2 | $\frac{4d\alpha_0}{\pi^{3/2}}\cdot\varepsilon^{-1}\exp\left(-\frac{1}{8\varepsilon^2}\right)$ | П'17 |

# Машинерия для процессов Дурбина

- вид уравнения на собственные числа $\mu = \omega^{-2}$:

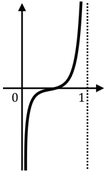
$$P(\mathcal{S}(\omega), \mathcal{C}(\omega), \mathcal{I}(\omega)) = 0, \qquad \omega \to \infty,$$

где

$$\mathcal{C}(\omega) = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \Phi^{-1}(t) \cos(\omega t)\, dt \qquad \mathcal{S}(\omega) = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \Phi^{-1}(t) \sin(\omega t)\, dt$$

$$\mathcal{I}(\omega) = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \int\limits_0^{\tau} \Phi^{-1}(t) \Phi^{-1}(\tau) \sin(\omega \tau) \cos(\omega t)\, dt\, d\tau$$

- $\Phi(t)$ — DF стандартного нормального распр.
- $\Phi^{-1}(t) \sim -\sqrt{-2\ln(t)}, \quad t \to 0,$
- $\Phi^{-1}(t)$ особенность при $t = 0$



# Асимптотики интегралов

Пусть

- $V_0(t)$ и $V_{n+1}(t) = t \cdot V_n'(t)$ — SVF в нуле.
- $V_0(\frac{1}{2}) = 0$.

## Теорема (А.И. Назаров, Ю.П. Петрова'2015)

*При $\omega \to \infty$:*

$$\mathcal{C} = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} V(t)\cos(\omega t)\,dt = \frac{1}{\omega}\sum_{k=1}^{N} c_k V_k\Big(\frac{1}{\omega}\Big) + R_N, \tag{3}$$

*где*

$$|R_N| \le C(V,N)\cdot\frac{\left|V_{N+1}(\frac{1}{\omega})\right|}{\omega}.$$

Пример: $\int\limits_0^{1/2}\sqrt{-\ln(2t)}\cos(\omega t)\,dt = \frac{\pi}{2\ln^{1/2}(2\omega)} - \frac{\gamma\pi}{2\ln^{3/2}(2\omega)} + O\left(\frac{1}{\ln^{5/2}(\omega)}\right)$

# Асимптотики интегралов

## Теорема (А.И. Назаров, Ю.П. Петрова'2015)

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\int\limits_0^{\tau} V(t)V(\tau)\sin(\omega\tau)\cos(\omega t)\,dt\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{2\omega}\int\limits_0^{\frac{1}{2}} V^2(t)\,dt + \sum_{n=2}^{N}\sum_{\substack{k+m=n\\ k,m\geq 1}} a_{k,m}\frac{V_k(\frac{1}{\omega})V_m(\frac{1}{\omega})}{\omega^2} + R_N,$$

где $\quad |R_N| \leq C(V,N)\sum\limits_{\substack{i+j=N+1\\ i,j\geq 1}}\dfrac{|V_i(\frac{1}{\omega})V_j(\frac{1}{\omega})|}{\omega^2}.$

Спасибо еще раз!