Задача 1

Докажите, что число, имеющее нечетное число делителей, – точный квадрат.

Конспект и решение

Разложение числа на простые множители

Согласно основной теореме арифметики всякое натуральное число можно единственным образом разложить на произведение степеней простых множителей, то есть представить в виде:

$$A = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_n^{\alpha_n}$$

где $p_1, p_2, ... p_n$ - простые делители числа A, $\alpha_1, \alpha_2, ... \alpha_n$ - максимальные степени соответсвующих делителей, на которые делится число A.

Число α_i еще называют *степенью вхождения* числа p_i в A.

Потренируемся:

- $540 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$

  простые делители числа 540 - 2, 3 и 5, их степени вхождения - 2, 3 и 1 соответственно;

- $126 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$

  простые делители числа 126 - 2, 3 и 7, их степени вхождения - 1, 2 и 1 соответственно;

- $48 = 3 \cdot 4 \cdot 4 = 3 \cdot 4^2$

  это неправильное разложение, поскольку 4 - составное число;

(?) Какая степень вхождения числа 13 в число 99? а числа 19 в число 47?

Количество делителей числа

Число B является делителем числа A, если для каждого множителя B степень вхождения в B меньше либо равна степени вхождения в A. Например,

1. A $= 112 = 2^4 \cdot 7$, B $= 8 = 2^3$

   степень вхождения 2 в B - 3, в A - 4, $3 \leq 4$, значит B - делитель A;

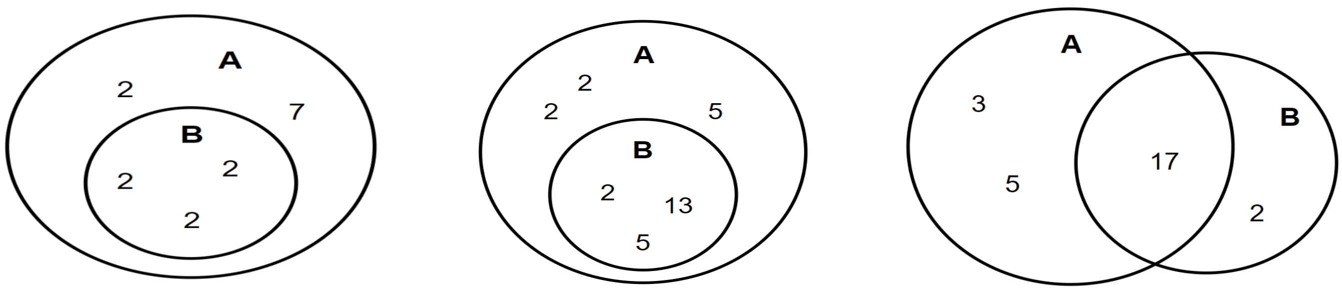
2. A $= 2600 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 13$, B $= 130 = 2 \cdot 5 \cdot 13$

   степень вхождения 2 в B - 1, в A - 3, $1 \leq 3$,
   степень вхождения 5 в B - 1, в A - 2, $1 \leq 2$,
   степень вхождения 13 в B - 1, в A - 1, $1 \leq 1$, значит B - делитель A;

3. $A = 255 = 3 \cdot 5 \cdot 17$, $B = 34 = 2 \cdot 17$

степень вхождения 2 в B - 1, в A - 0, $1 > 0$, значит B - НЕ делитель A;

A и B можно рассмотреть как множества простых делителей (с учетом степени) и изобразить их с помощью кругов Эйлера:

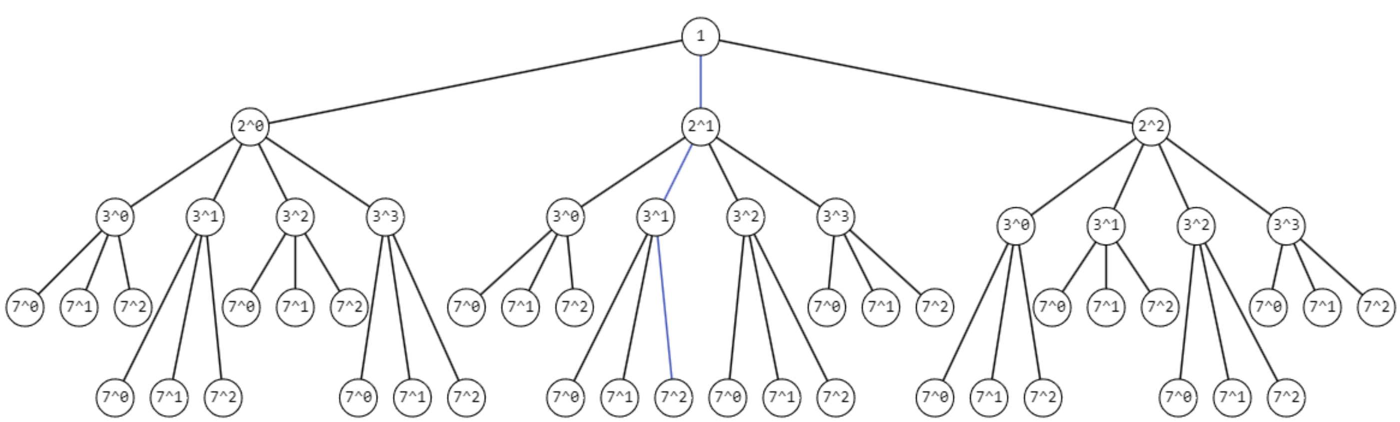


1 2 3

Таким образом, B - делитель A тогда и только тогда, когда B - подмножество A.

Посчитаем количество делителей B для числа $A = 5292 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7^2$. Число B раскладывается на те же простые делители, что и A - 2, 3, 7. Степень двойки может быть 0, 1, 2 - 3 варианта, степень тройки - 0, 1, 2, 3 - 4 варианта, степень семерки - 0, 1, 2 - 3 варианта. Поскольку надо учесть все три множителя, количества вариантов перемножаются. Итого количество делителей $N = 3 \cdot 4 \cdot 3 = 36$.
Все делители: 1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 12, 14, 18, 21, 27, 28, 36, 42, 49, 54, 63, 84, 98, 108, 126, 147, 189, 196, 252, 294, 378, 441, 588, 756, 882, 1 323, 1 764, 2 646, 5 292. Можем их разбить на пары: первый и последний, второй и предпоследний и т.д. Произведение каждой пары - само число A.

Процесс выбора можно отобразить деревом вариантов:



На первом уровне выбираем степень двойки, на втором - степень тройки, на третьем - степень семерки. Каждому пути от корня до висячей вершины соответствует делитель. Например, синему пути соответствует делитель $B = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 7^2 = 294$.
Если посчитать количество висячих вершин, то можно убедиться, что количество делителей - 36.

На основе примера запишем формулу количества делителей числа $A = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_n^{\alpha_n}$:

$$N(A) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)...(\alpha_n + 1)$$

Каждая скобка - количество вариантов выбрать степень вхождения соответствующего простого делителя. Так, множитель p_i можно взять один, два, ..., α_i раз или не взять - $(\alpha_i + 1)$ вариант.

Количество делителей точного квадрата

Пусть число A - точный квадрат:

$$A = C^2$$

Разложение числа C в общем виде:

$$C = q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} ... q_m^{\beta_m}$$

Подставим:

$$A = C^2 = (q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} ... q_m^{\beta_m})^2 = q_1^{2\beta_1} q_2^{2\beta_2} ... q_m^{2\beta_m}$$

Получили разложение числа A - степени вхождения всех простых множителей четные. Посчитаем количество делителей по формуле:

$$N(A) = (2\beta_1 + 1)(2\beta_2 + 1)...(2\beta_m + 1)$$

Каждая скобка - нечетное число, произведение нечетных чисел - нечетно.

Вывод: Если число A - точный квадрат, то количество его делителей $N(A)$ нечетно.

Решение

Знаем: $N(A)$ - нечетно. Нужно доказать: A - точный квадрат.

Будем решать от противного: пусть A - не точный квадрат, значит в разложении есть простой делитель нечетной степени вхождения:

$$A = p_1^{2\alpha_1} p_2^{2\alpha_2} ... p_{k-1}^{2\alpha_{k-1}} p_k^{2\alpha_k + 1} ... p_n^{2\alpha_n + 1}$$

- первые (k-1) делителей четной степени, остальные - нечетной.

Посчитаем количество делителей:

$$N(A) = (2\alpha_1 + 1)(2\alpha_2 + 1)...(2\alpha_{k-1} + 1)(2\alpha_k + 1 + 1)...(2\alpha_n + 1 + 1)$$

Первые (k-1) скобок нечетные, оставшиеся четные. Поскольку произведение четного и нечетного чисел четно, $N(A)$ - четно. Противоречие, утверждение неверно. Значит A - точный квадрат. ■

Задача 2

При каком значении параметра a уравнение имеет решение?

$$\frac{(3a+sint)\sqrt{sint-2a}}{2sin^2t+5sint-3}=0$$

Конспект и решение

Замена переменной

Если в задании повторяется некоторая функция $f(t)$, то можно сделать замену $f(t)=x$. Например:

$$3(t-2)^3-21(t-2)^2+30(t-2)=0 \xrightarrow{t-2=x} 3x^3-21x^2+30x=0$$

Корни получившего уравнения $x_1=0, x_2=5, x_3=2$. Сделаем обратную замену, то есть по значению x найдем t: $t=x+2$. Тогда решения изначального уравнения $t_1=2, t_2=7, t_3=4$.

При замене важно учитывать область значения функции $f(t)$ - она совпадает с областью определения x. Например:

$$(\sqrt{t})^2-5\sqrt{t}-6=0 \xrightarrow{\sqrt{t}=x} \begin{cases} x^2-5x-6=0 \\ x\geq 0 \end{cases}$$

Из первого уравнения по теореме Виета получим корни $x_1=-1, x_2=6$.
Без учета ограничений будем делать обратную замену $t=x^2$: $t_1=1, t_2=36$. Подставив найденные значения, можно убедиться, что $t_1=1$ - не корень.
При правильном решении после нахождения иксов нужно оставить только неотрицательные, а именно $x=6$. Отсюда корень $t=36$.

В параметрических задачах часто спрашивают о количестве решений. Как с эти связаны замены? В предыдущих примерах для каждого найденного x мы получили только одно t. Бывают другие случаи, например:

$$t^6-29t^4+100t^2=0 \xrightarrow{t^2=x} \begin{cases} x^3-29x^2+100x=0 \\ x\geq 0 \end{cases}$$

Из первого уравнения получим корни $x_1=0, x_2=25, x_3=4$ - они удовлетворяют второму неравенству. Сделаем обратную замену $t=\sqrt{x}$ (помним, что $\sqrt{a^2}=|a|$): $t_{11}=0, t_{21}=5, t_{22}=-5, t_{31}=2, t_{32}=-2$. При такой замене для каждого $x\neq 0$ имеем два корня t.

Решение

Сделаем замену $sint = x$. Область значения синуса ограничена $-1 \leq sint \leq 1 \ \ \forall t$, поэтому появляется ограничение на x:

$$\begin{cases} \dfrac{(3a+x)\sqrt{x-2a}}{2x^2+5x-3} = 0 \\ \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Каждое решение на x дает решение на t, притом только одно ($t = arcsin(x)$).

Для первого уравнения в системе составим эквивалентную запись. Необходимо, чтобы корни удовлетворяли области определения и являлись решением, поэтому эти условия будут в системе.

Сначала записываем ограничения! В нашем случае - знаменатель дроби $\neq 0$ и квадратный корень ≥ 0.

Далее думаем: когда дробь обращается в ноль? - когда числитель дроби равен нулю. Числитель обратиться в ноль когда хотя-бы один из множителей обратиться в ноль. Значит это совокупность

$$\left[\begin{array}{l} 3a+x=0 \\ \sqrt{x-2a}=0 \end{array} \right.$$

Собираем все вместе:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} 3a+x=0 \\ \sqrt{x-2a}=0 \end{array} \right. \\ x-2a \geq 0 \\ 2x^2+5x-3 \neq 0 \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Квадратный корень равен нулю тогда и только тогда, когда подкоренное выражение равно нулю. Поэтому $\sqrt{x-2a} = 0 \Leftrightarrow x - 2a = \Leftrightarrow x = 2a$.
Решим $2x^2+5x-3 \neq 0$. Найдем корни квадратного трехчлена $2x^2+5x-3$:

$$D = b^2 - 4ac = 25 + 4 \cdot 3 \cdot 2 = 49$$

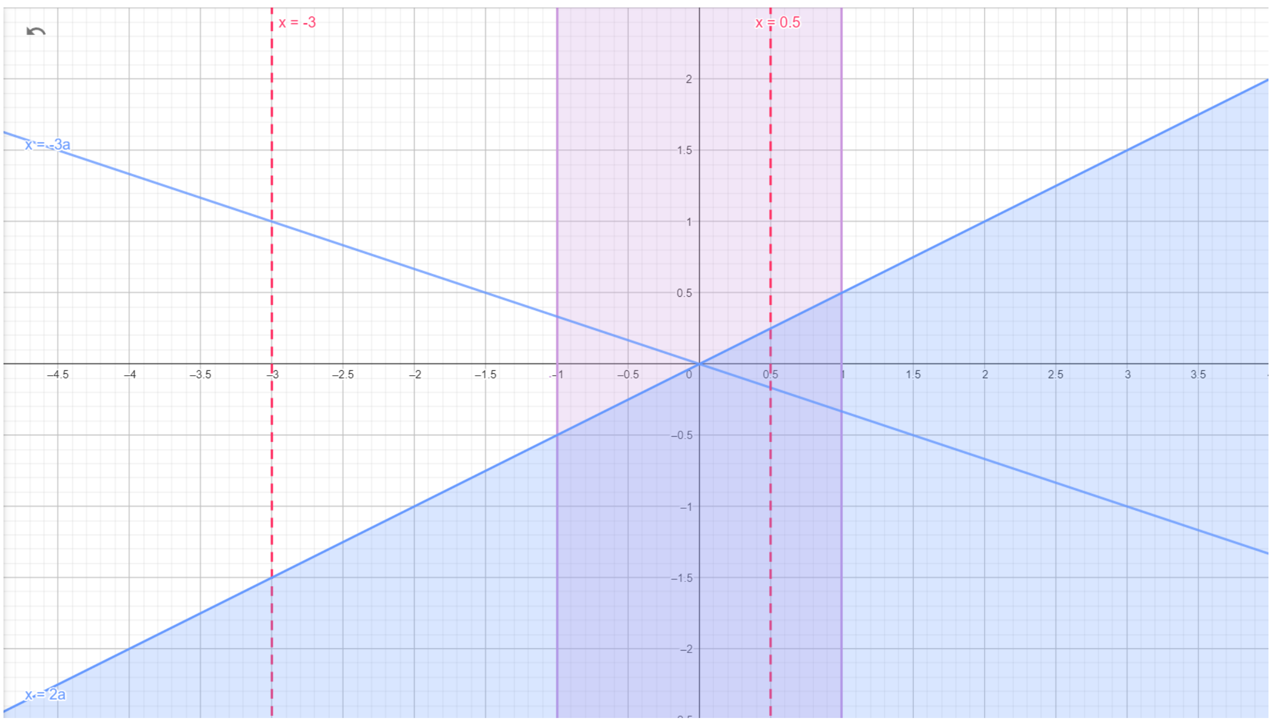
$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{-5+7}{4} = \frac{1}{2} \qquad\qquad x_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{-5-7}{4} = -3$$

Значит $x \neq \frac{1}{2}$ и $x \neq -3$.

Получилась система:

$$\begin{cases} \left[\begin{aligned} x &= -3a \\ x &= 2a \end{aligned}\right. \\ x \geq 2a \\ x \neq \frac{1}{2} \\ x \neq -3 \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Решим графически в координатах x-a (x - горизонтальная ось, a - вертикальная). Синие прямые соответствуют совокупности, синяя область - третьему неравенству. Красные штриховые линии - выколотые точки, фиолетовая область - последнее неравентсво.

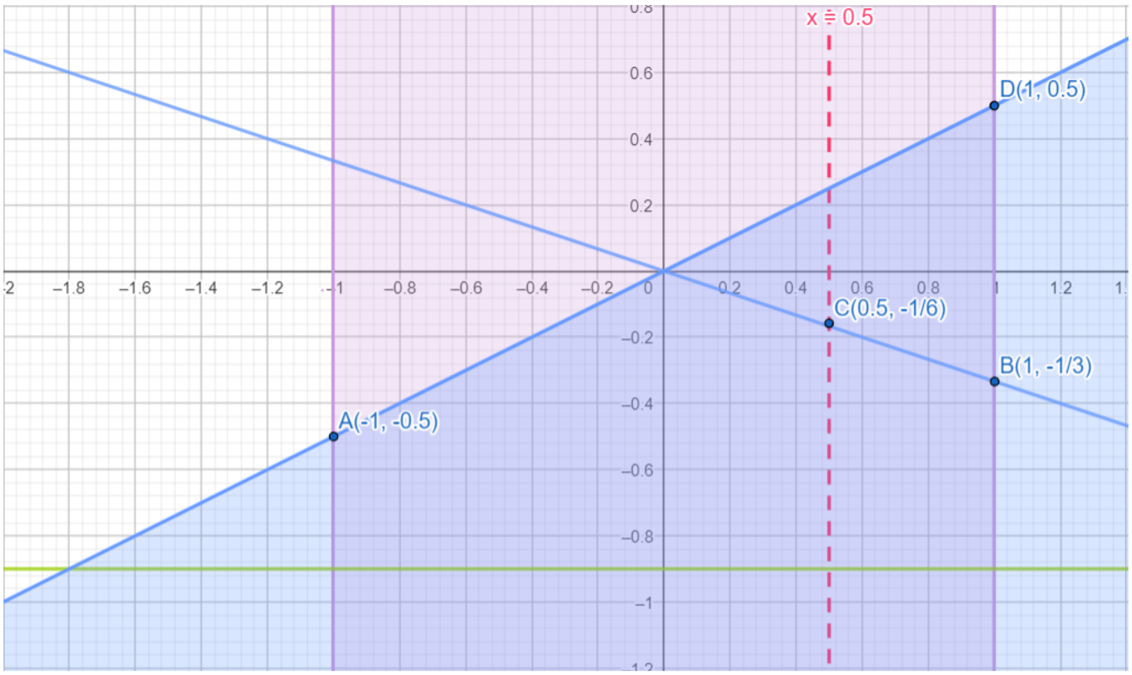


Пересечение допустимых областей - нижняя трапеция, смотрим только на нее. Найдем некоторые точки пересечения кривых:

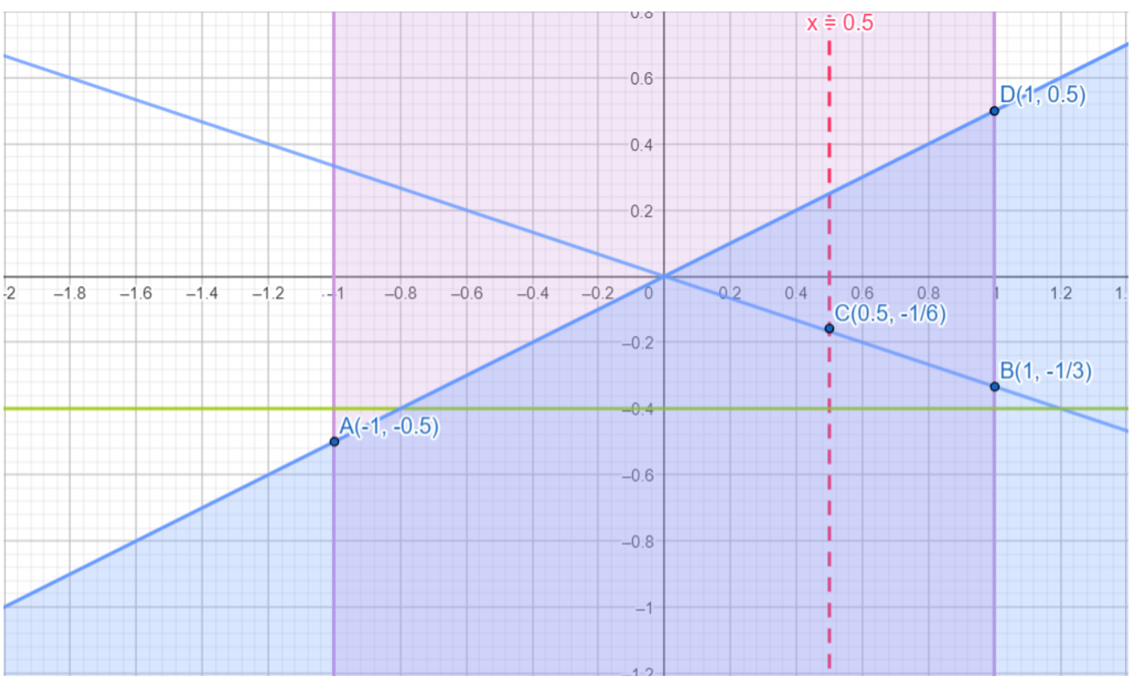
- $A = (x = -1) \cap (x = 2a), A(-1, -0.5)$.
- $B = (x = 1) \cap (x = -3a), B(-1, -1/3)$.
- $C = (x = 0.5) \cap (x = -3a), C(0.5, -1/6)$.
- $D = (x = 1) \cap (x = 2a), D(1, 0.5)$.
- $E = (x = 0.5) \cap (x = 2a), E(0.5, 0.25)$.

Параметр a - некоторое число, поэтому возьмем функцию $a = c$ и будем менять константу c. Графически движение горизонтальной прямой вдоль оси a.

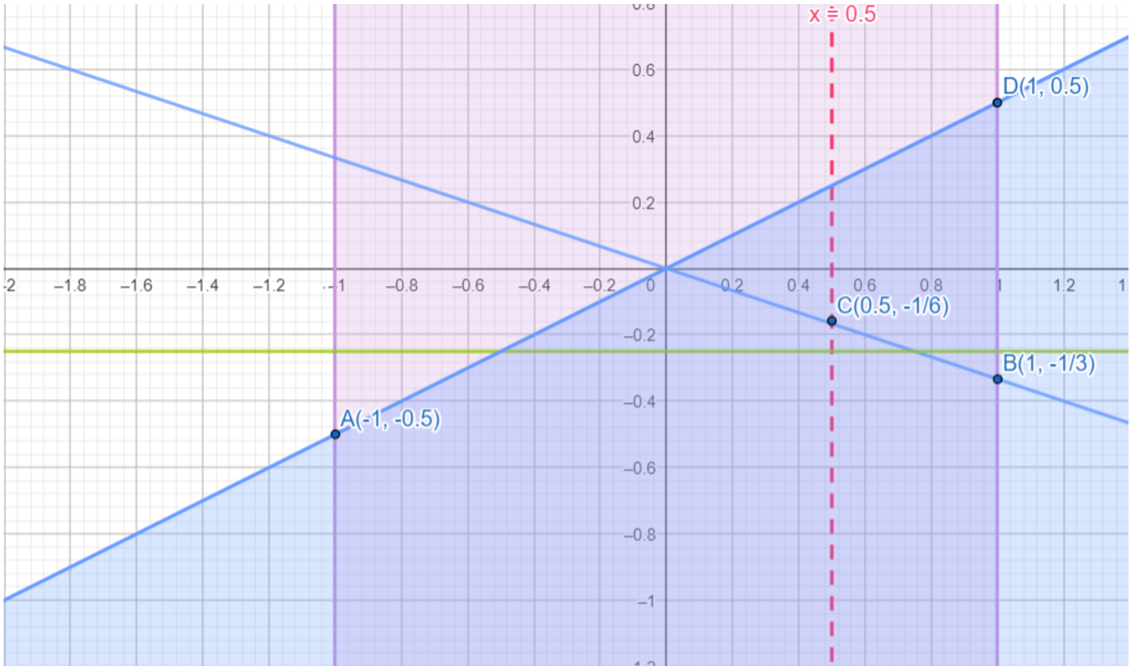
Решение нам дают синие прямые, поэтому будем искать пересечение горизонтальной прямой (зеленая) с ними.



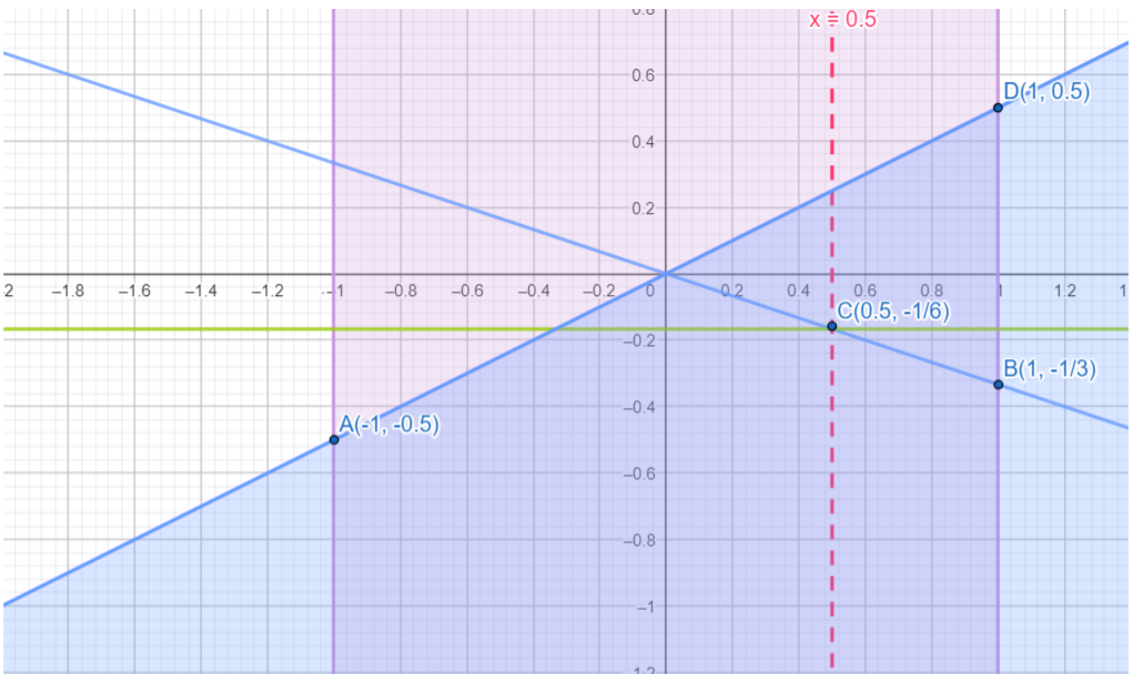
При $c < 0.5$ прямая не пересекает синие прямые, нет решений.



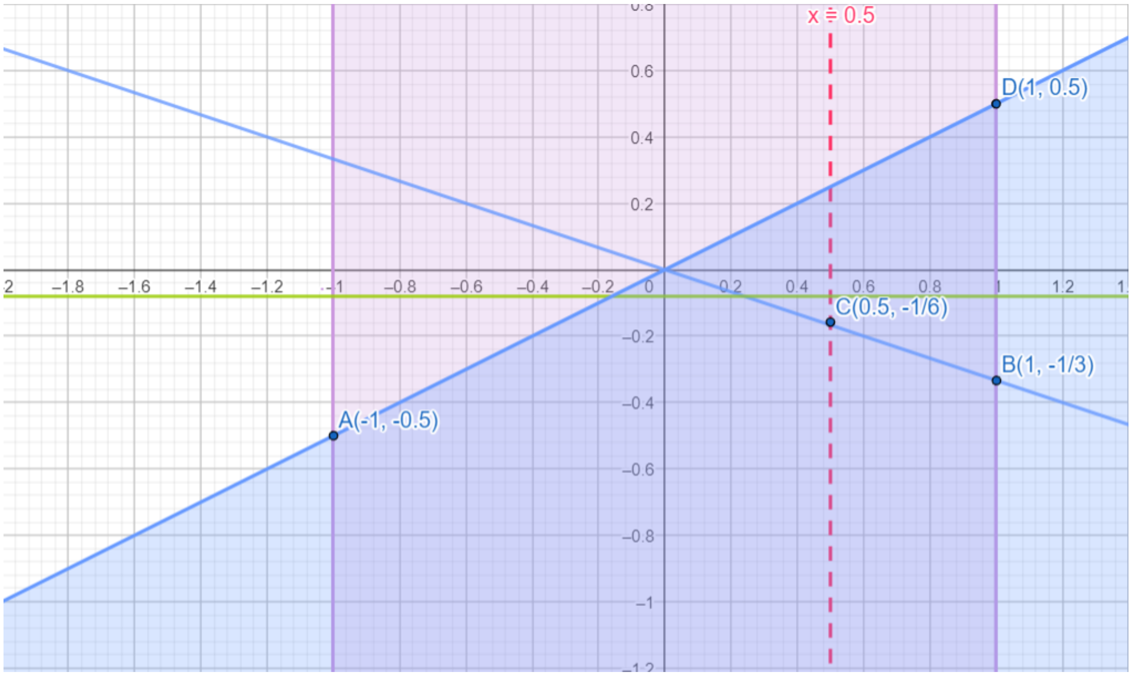
При $0.5 \leq c < \frac{1}{3}$ прямая пересекает синие прямые в одной точке, одно решение.



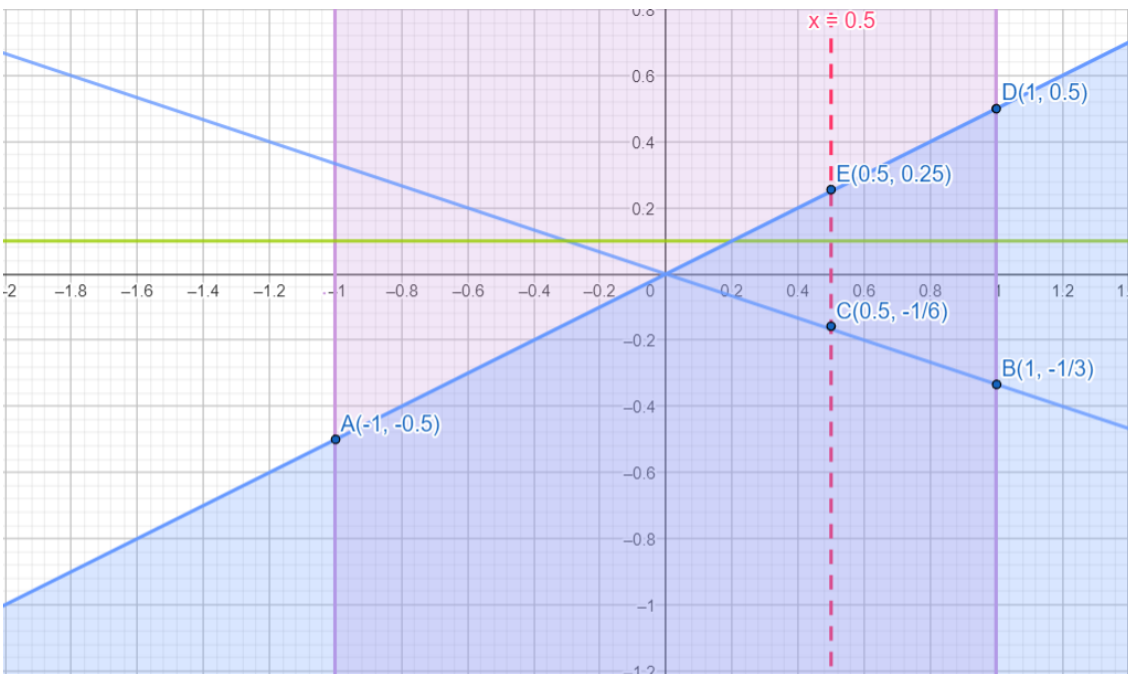
При $\frac{1}{3} \leq c < \frac{1}{6}$ прямая пересекает синие прямые в двух точках, два решения.



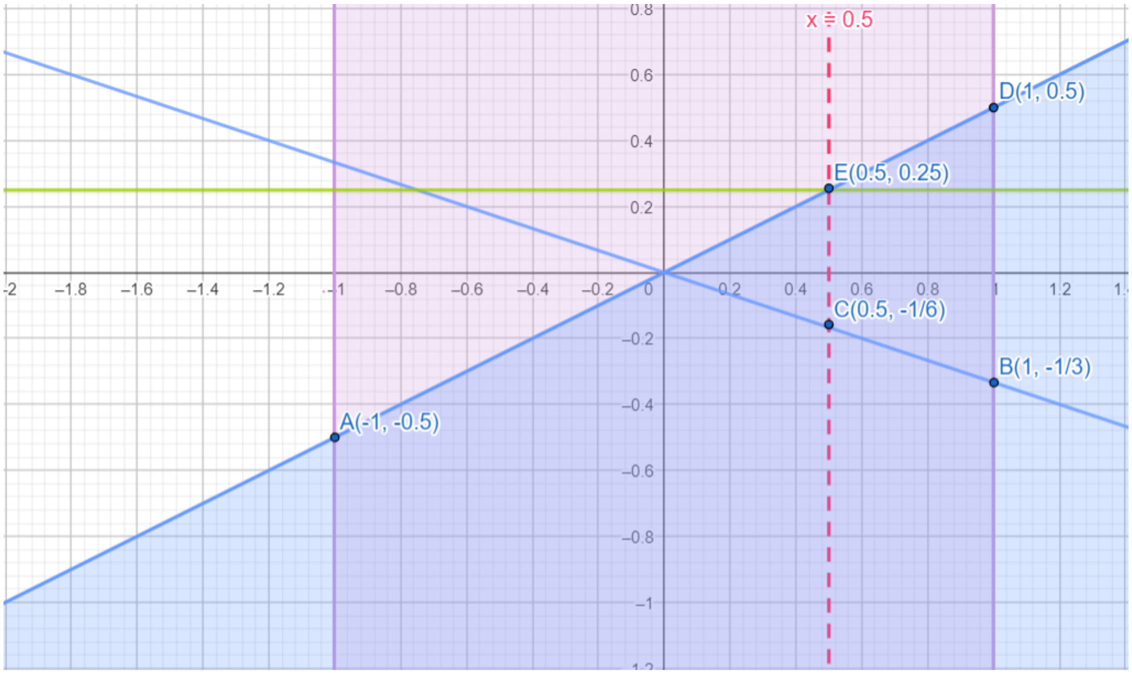
При $c = \frac{1}{6}$ прямая пересекает синие прямые в одной точке ($x = 0.5$ выколотая прямая), одно решение.



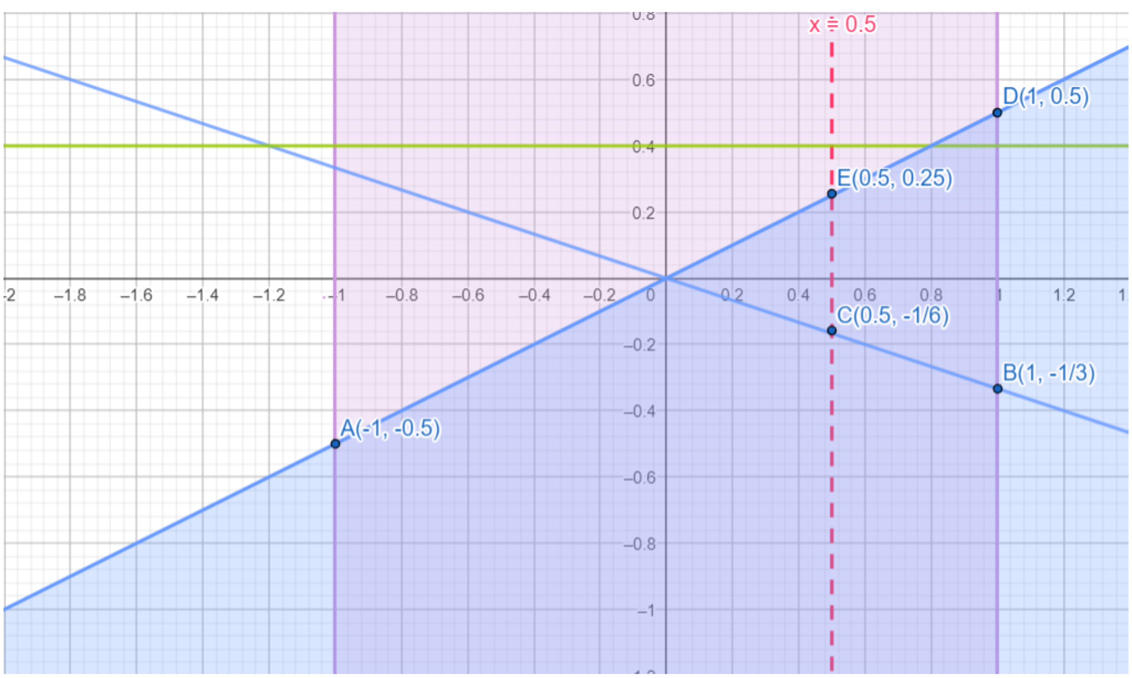
При $\frac{1}{6} \leq c < 0$ прямая пересекает синие прямые в двух точках, два решения.



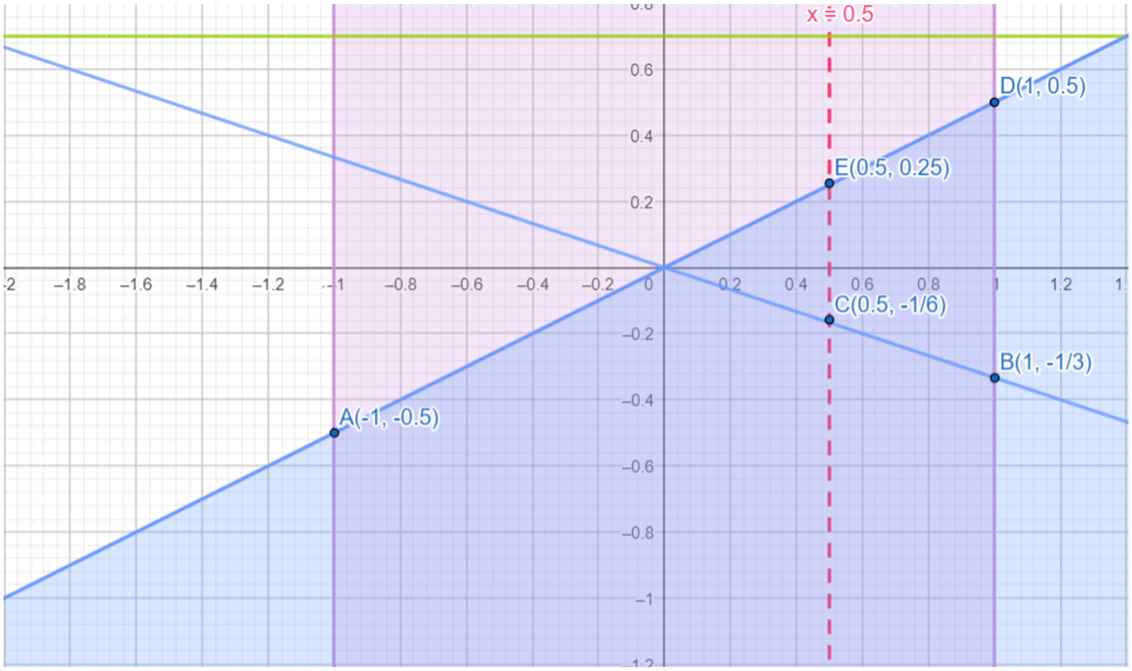
При $1 \leq c < 0.25$ прямая пересекает синие прямые в одной точке, одно решение.



При $c = 0.25$ прямая не пересекает синие прямые ($x = 0.5$ выколотая прямая), нет решений.



При $0.25 < c \leq 0.5$ прямая пересекает синие прямые в одной точке, одно решение.



При $c > 0.5$ прямая выходит за пределы трапеции (то есть за пределы области определения), нет решений.

Мы нашли количество решений при всех c. Так как $a = c$, то мы нашли количество решений при всех a и можем ответить на вопрос задачи:

Ответ: уравнение имеет решение при $a \in [0.5, 0.25) \cup (0.25, 0.5]$.