ТЕХНОЛОГІЇ ТА ЗАСОБИ РОЗРОБКИ КОМП’ЮТЕРНОЇ ГРАФІКИ ТА МУЛЬТИМЕДІА

ПИТАННЯ

- **ДВОВИМІРНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ**
  - ПРОЄКЦІЮВАННЯ - ГЕОМЕТРИЧНА ІНТЕРПРЕТАЦІЯ ОДНОРІДНИХ КООРДИНАТ
  - ПРОПОРЦІЙНЕ МАСШТАБУВАННЯ
  - ТОЧКИ НЕСКІНЧЕННОСТІ
  - ПРАВИЛА ВИКОНАННЯ ПЕРЕТВОРЕНЬ

ПЕРЕТВОРЕННЯ ГРАФІЧНОЇ ІНФОРМАЦІЇ

ПРОЄКЦІЮВАННЯ - ГЕОМЕТРИЧНА ІНТЕРПРЕТАЦІЯ ОДНОРІДНИХ КООРДИНАТ

МАТРИЦЮ ПЕРЕТВОРЕННЯ РОЗМІРОМ 3*3 ДЛЯ ДВОВИМІРНИХ ОДНОРІДНИХ КООРДИНАТ МОЖНА РОЗБИТИ НА ЧОТИРИ ЧАСТИНИ

$$[T] = \begin{bmatrix} a & b & \vdots & p \\ c & d & \vdots & q \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ m & n & \vdots & s \end{bmatrix}$$

ПЕРЕТВОРЕННЯ ГРАФІЧНОЇ ІНФОРМАЦІЇ

$$[T]=\begin{bmatrix} a & b & \vdots & p \\ c & d & \vdots & q \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ m & n & \vdots & s \end{bmatrix}$$

КОЕФІЦІЄНТИ ***a, b, c, d*** - КОЕФІЦІЄНТИ МАСШТАБУВАННЯ, ОБЕРТАННЯ, ВІДДЕРКАЛЕННЯ І ЗСУВУ ВІДПОВІДНО.

ЕЛЕМЕНТИ ***m*** ТА ***n*** ЗАДАЮТЬ ПЕРЕМІЩЕННЯ.

МИ РОЗГЛЯДАЛИ ВИПАДКИ, ПРИ ЯКИХ КОЕФІЦІЄНТИ МАЛИ ЗНАЧЕННЯ ***p=q=0, s=1***.

ПЕРЕТВОРЕННЯ ГРАФІЧНОЇ ІНФОРМАЦІЇ

ВСТАНОВИМО ВЕЛЕЧИНИ ***p*** ТА ***q*,** ЯКІ НЕ ДОРІВНЮЮТЬ 0.

ЯКИЙ ЕФЕКТ МИ ОТРИМАЄМО?

В ДАНОМУ ВИПАДКУ КОРИСНО РОЗГЛЯНУТИ ГЕОМЕТРИЧНУ ІНТЕРПРЕТАЦІЮ.

ПРИ ***p=q=0*** ТА ***s=1*** ОДНОРІДНІ КООРДИНАТИ ПЕРЕТВОРЕНИХ ВЕКТОРІВ ЗАВЖДИ РІВНІ ***h=1***. ГЕОМЕТРИЧНО ЦЕЙ РЕЗУЛЬТАТ ІНТЕРПРЕТУЄТЬСЯ ЯК ОБМЕЖЕННЯ ПЕРЕТВОРЕННЯ ФІЗИЧНОЮ ПЛОЩИНОЮ ***h=1***.

$$[T]=\begin{bmatrix} a & b & \vdots & p \\ c & d & \vdots & q \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ m & n & \vdots & s \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} hx & hy & h \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' & y' & h \end{bmatrix}$$

$$x = x' / h$$

$$y = y' / h$$

ПЕРЕТВОРЕННЯ ГРАФІЧНОЇ ІНФОРМАЦІЇ

ДЛЯ ІЛЮСТРАЦІЇ ЕФЕКТУ ПЕРЕТВОРЕННЯ ПРИ ***p*** ТА ***q***, ВІДМІННИХ ВІД НУЛЯ, РОЗГЛЯНЕМО ТАКИЙ ВИРАЗ

$$\begin{bmatrix} X & Y & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} hx & hy & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & q \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

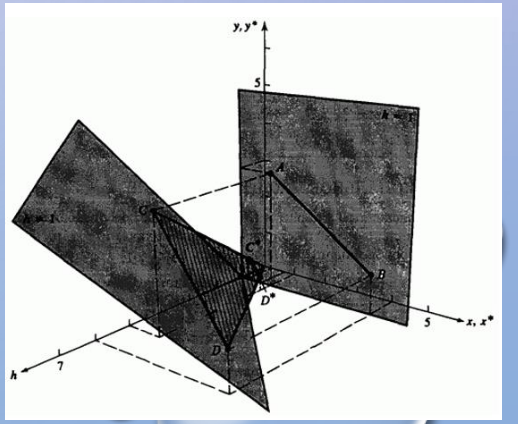
$$= \begin{bmatrix} x & y & (px+qy+1) \end{bmatrix}$$

ПЕРЕТВОРЕННЯ ГРАФІЧНОЇ ІНФОРМАЦІЇ

В ДАНОМУ ВИРАЗІ $X = hx$, $Y = hy$ ТА $h = px + qy + 1$. ПЕРЕТВОРЕНИЙ КООРДИНАТНИЙ ВЕКТОР, ВИРАЖЕНИЙ В ОДНОРІДНИХ КООРДИНАТАХ, ЛЕЖИТЬ ТЕПЕР В ТРИВИМІРНОМУ ПРОСТОРІ, ВИЗНАЧЕНОМУ ЯК $h = px + qy + 1$.

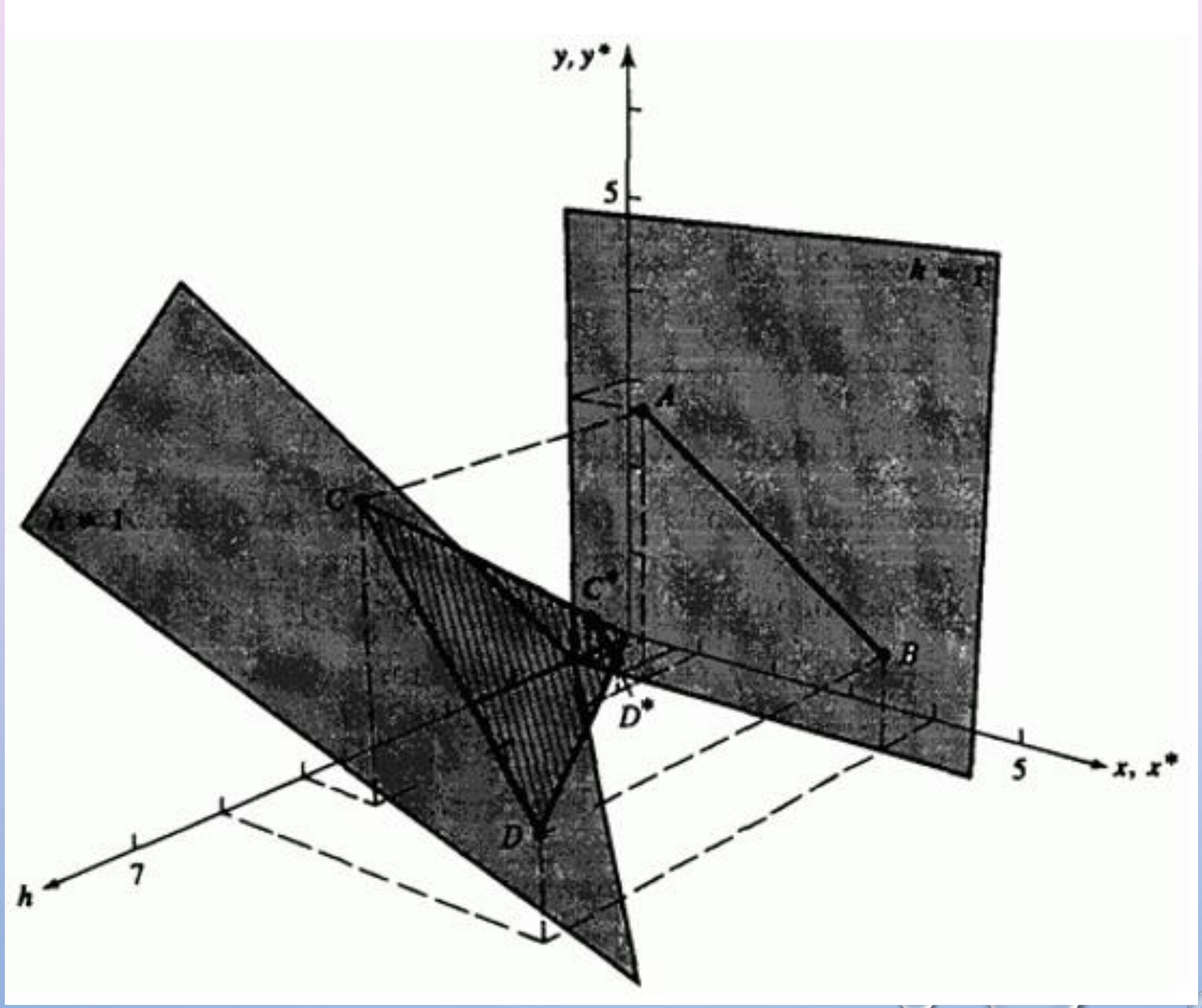
ЦЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ПОКАЗАНО НА НАСТУПНОМУ РИСУНКУ, ДЕ ВІДРІЗОК ***AB***, ЩО НАЛЕЖИТЬ ФІЗИЧНІЙ ПЛОЩИНІ $h = 1$, ПЕРЕТВОРЮЄТЬСЯ В ***CD*** ЗІ ЗНАЧЕННЯМ $h \neq 1$, ТОБТО

$$pX + qY - h + 1 = 0$$



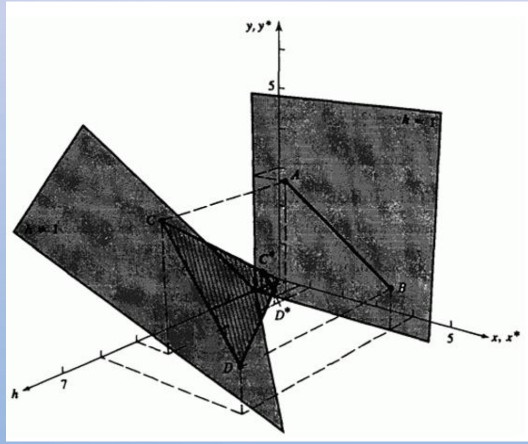
ПЕРЕТВОРЕННЯ ГРАФІЧНОЇ ІНФОРМАЦІЇ

•



ПЕРЕТВОРЕННЯ ГРАФІЧНОЇ ІНФОРМАЦІЇ

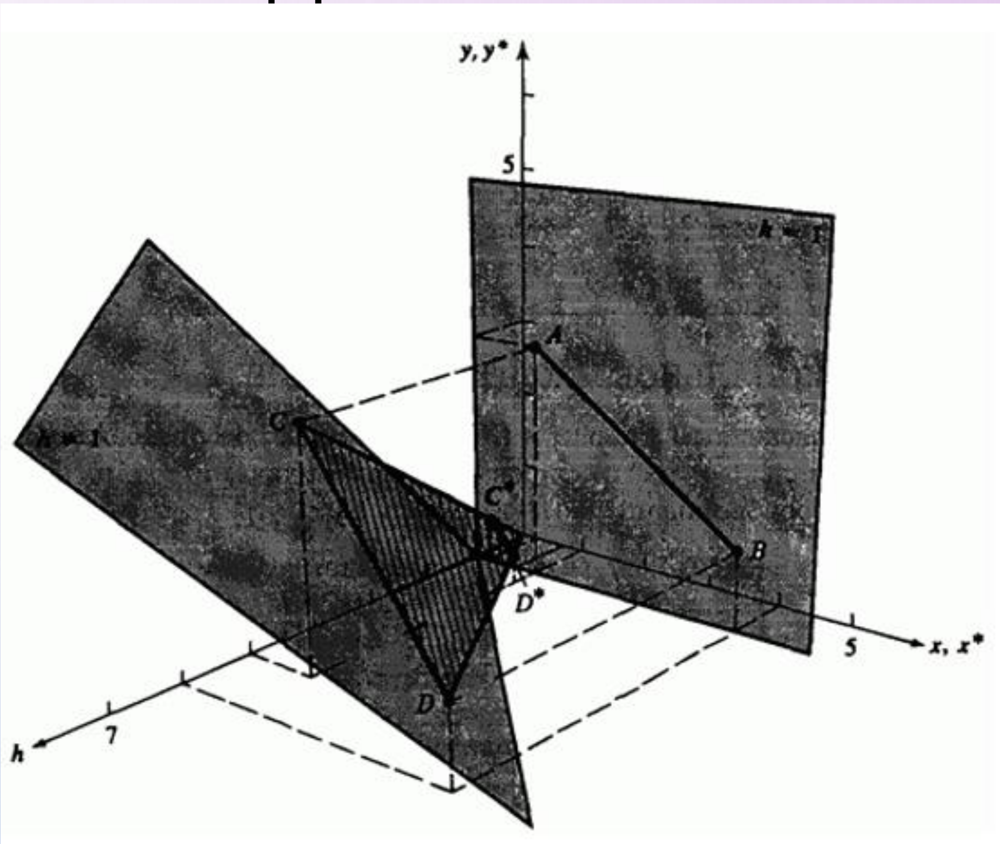
АЛЕ СТАНОВЛЯТЬ ІНТЕРЕС РЕЗУЛЬТАТИ, ЩО НАЛЕЖАТЬ ФІЗИЧНІЙ ПЛОЩИНІ $h=1$, ЯКІ МОЖНА ОТРИМАТИ ШЛЯХОМ ГЕОМЕТРИЧНОГО ПРОЄКЦІЮВАННЯ ПРЯМОЇ ***CD*** З ПЛОЩИНИ $h \neq 1$ НАЗАД НА ПЛОЩИНУ $h=1$ З ВИКОРИСТАННЯМ ДЛЯ ЦЬОГО ПРОМЕНІВ ПРОЄЦІЮВАННЯ, ЩО ПРОХОДЯТЬ ЧЕРЕЗ ПОЧАТОК КООРДИНАТ. ВІДБУВАЄТЬСЯ ЗМЕНШЕННЯ ПРЯМОЇ ***C*D****



ПЕРЕТВОРЕННЯ ГРАФІЧНОЇ ІНФОРМАЦІЇ

З РИСУНКУ, ВИКОРИСТОВУЮЧИ ПРАВИЛО ПОДІБНОСТІ ТРИКУТНИКІВ, ОТРИМАЄМО

$$x^* = \frac{X}{h} \qquad y^* = \frac{Y}{h}$$



АБО В ОДНОРІДНИХ КООРДИНАТАХ

$$\begin{bmatrix} x^* & y^* & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{X}{h} & \frac{Y}{h} & 1 \end{bmatrix}$$

РИСУНОК: ПЕРЕТВОРЕННЯ З ФІЗИЧНОЇ ПЛОЩИНИ $h = 1$ НА ПЛОЩИНУ $h \neq 1$ І ПРОЄКТУВАННЯ НАЗАД НА ФІЗИЧНУ ПЛОЩИНУ.

ПЕРЕТВОРЕННЯ ГРАФІЧНОЇ ІНФОРМАЦІЇ

ПІСЛЯ ЦЬОГО, НОРМАЛІЗУЄМО ВИРАЗ $\begin{bmatrix} x & y & (px+qy+1) \end{bmatrix}$ РОЗПОДІЛОМ ОДНОРІДНИХ КООРДИНАТ НА ВЕЛИЧИНУ ***h***, ЗНАХОДИМО

$$\begin{bmatrix} x^* & y^* & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{X}{h} & \frac{Y}{h} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x}{px+qy+1} & \frac{y}{px+qy+1} & 1 \end{bmatrix}$$

АБО

$$x^* = \frac{X}{h} = \frac{x}{px+qy+1} \qquad y^* = \frac{Y}{h} = \frac{y}{px+qy+1}$$

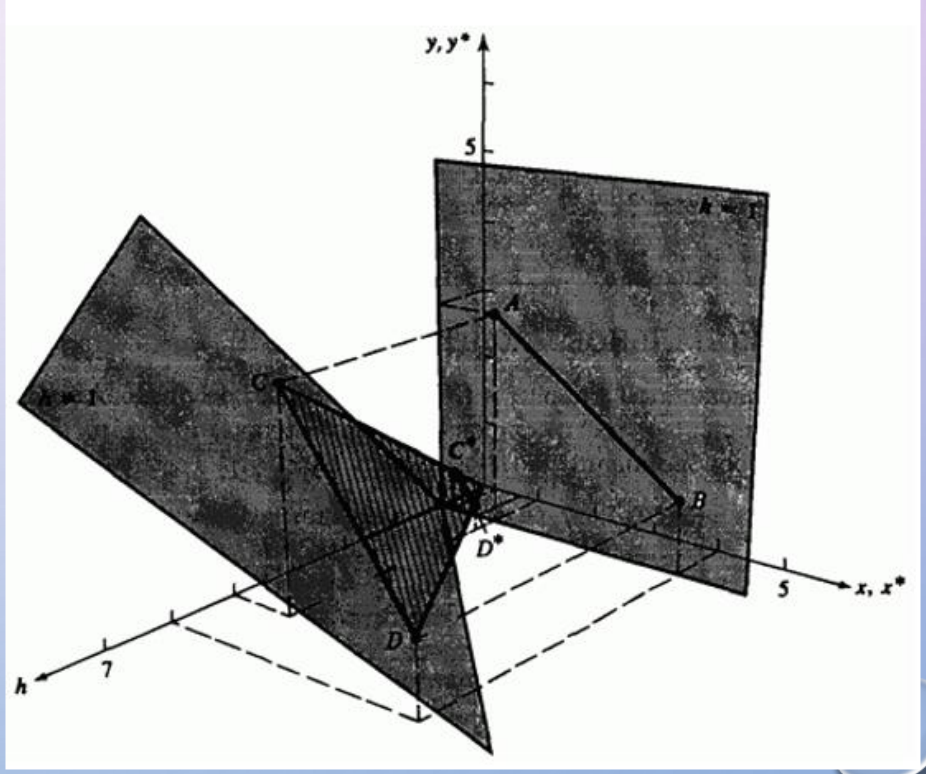
ПЕРЕТВОРЕННЯ ГРАФІЧНОЇ ІНФОРМАЦІЇ

ДЕТАЛЬНО ДІЮ ПЕРЕТВОРЕННЯ РОЗГЛЯНЕМО НА НАСТУПНОМУ ПРИКЛАДІ

ДЛЯ ВІДРІЗКА **AB** З РИСУНКА МАЄМО

p=q=1, **[A]=[1 3 1] , [B]=[4 1 1]**

$$\begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

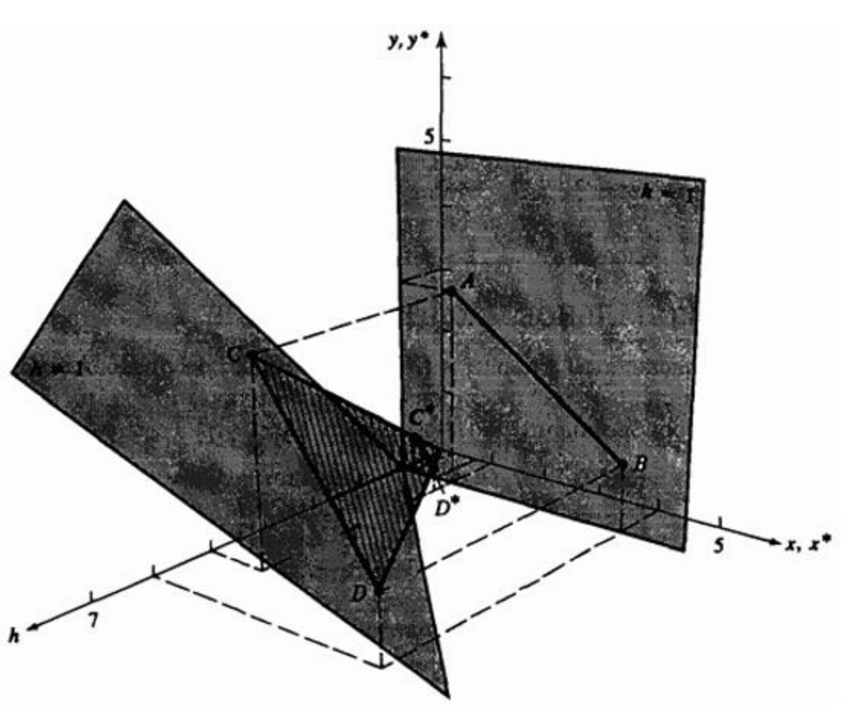


ПЕРЕТВОРЕННЯ ГРАФІЧНОЇ ІНФОРМАЦІЇ

ТАКИМ ЧИНОМ **[C]=[1 3 5]** ТА **[D]=[4 1 6]** НА ПЛОЩИНІ ***h=x+y+1***. ЗДІЙСНИМО ПРОЄКЦІЮ НАЗАД НА ПЛОЩИНУ ***h=1*** ШЛЯХОМ ДІЛЕННЯ НА КОЄФІЦІЄНТ ОДНОРІДНИХ КООРДИНАТ ***h***, ПРОВЕДЕМО ДВОВИМІРНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ТОЧОК

$$\left[C^*\right]=\left[1 \quad 3 \quad 5\right]=\left[1/5 \quad 3/5 \quad 1\right]$$

$$\left[D^*\right]=\left[4 \quad 1 \quad 6\right]=\left[2/3 \quad 1/6 \quad 1\right]$$



ПЕРЕТВОРЕННЯ ГРАФІЧНОЇ ІНФОРМАЦІЇ

ПРОПОРЦІЙНЕ МАСШТАБУВАННЯ

ЗАЛИШАЄТЬСЯ НЕПОЯСНЕНИМ ЕЛЕМЕНТ ***s*** МАТРИЦІ ПЕРЕТВОРЕННЯ (3*3) ВІДПОВІДАЄ ПРОПОРЦІЙНОМУ МАСШТАБУВАННЮ, ПРИ ЯКОМУ ВСІ КОМПОНЕНТИ ВЕКТОРА ЗМІНЮЮТЬСЯ ПРОПОРЦІЙНО. ПОКАЖЕМО ЦЕ, РОЗГЛЯНУВШИ НАСТУПНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ:

$$\begin{bmatrix} X & Y & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & s \end{bmatrix}$$

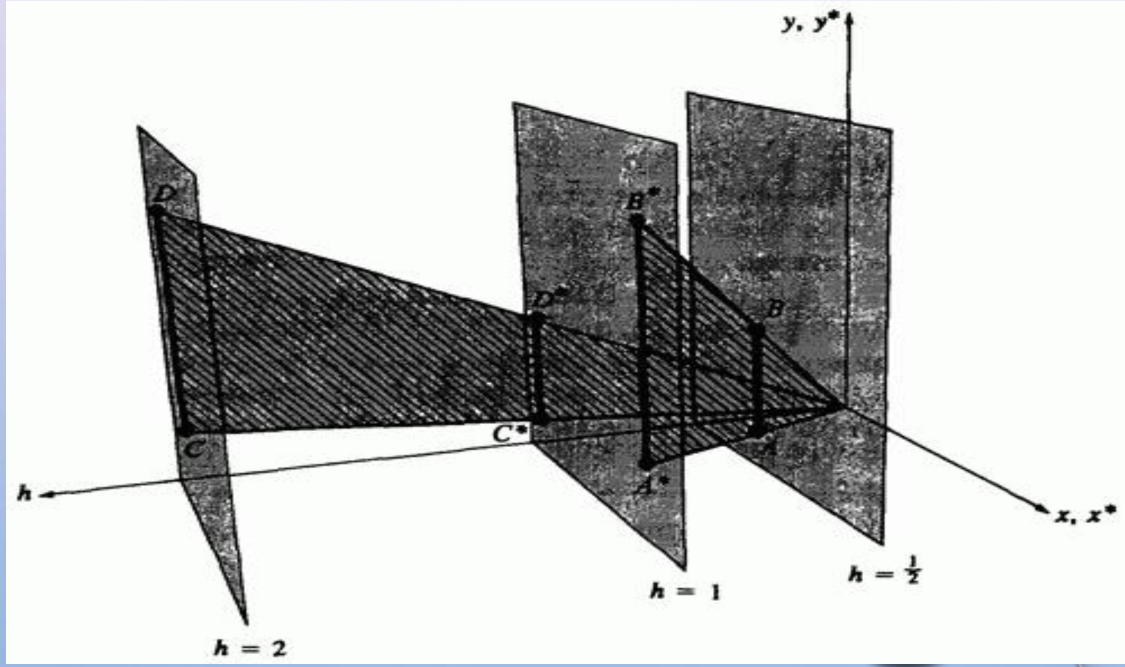
ПЕРЕТВОРЕННЯ ГРАФІЧНОЇ ІНФОРМАЦІЇ

$$[X \quad Y \quad h] = [x \quad y \quad 1]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} = [x \quad y \quad s]$$

ДЕ $X = x$,$Y = y$ ТА $h = s$. ПІСЛЯ НОРМАЛІЗАЦІЇ ОТРИМАЄМО $X^* = x/s$ ТА $Y^* = y/s$. ТАКИМ ЧИНОМ, ПЕРЕТВОРЕННЯ $[x \quad y \quad 1][T] = [x/s \quad y/s \quad 1]$ Є РІВНОМІРНИМ МАСШТАБУВАННЯМ КООРДИНАТНОГО ВЕКТОРА. ЯКЩО $s < 1$, ТО ВІДБУВАЄТЬСЯ РОЗТЯГНЕННЯ, А ЯКЩО $s > 1$ - СТИСНЕННЯ.

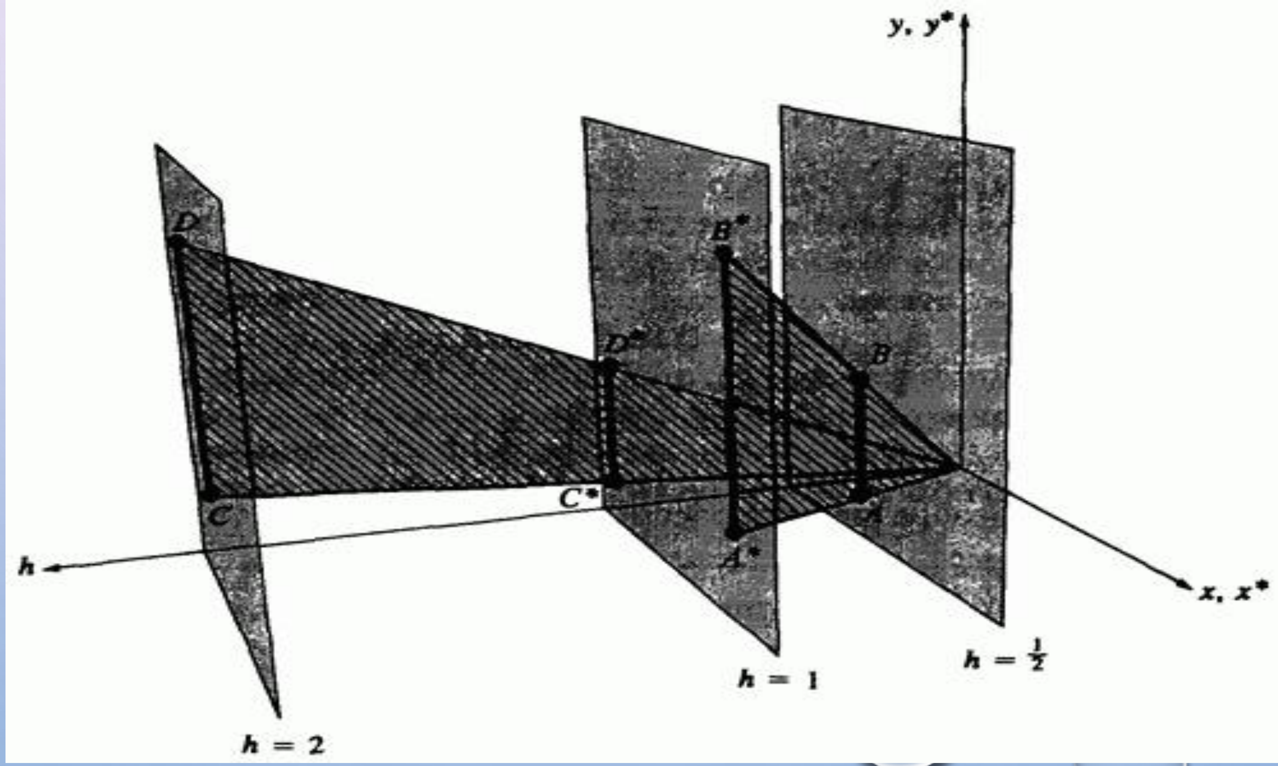
ПЕРЕТВОРЕННЯ ГРАФІЧНОЇ ІНФОРМАЦІЇ

ВІДМІТИМО ТЕ, ЩО ЦЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЗДІЙСНЮЄТЬСЯ ТАКОЖ В ПЛОЩИНІ ***h=1***. ТУТ ***h = s = const***, І ТОМУ ПЛОЩИНА $h \neq 1$ ПАРАЛЛЕЛЬНА ПЛОЩИНІ ***h=1***. ГЕОМЕТРИЧНА ІНТЕРПРЕТАЦІЯ ДАНОГО ЕФЕКТУ ПОКАЗАНА НА РИСУНКУ



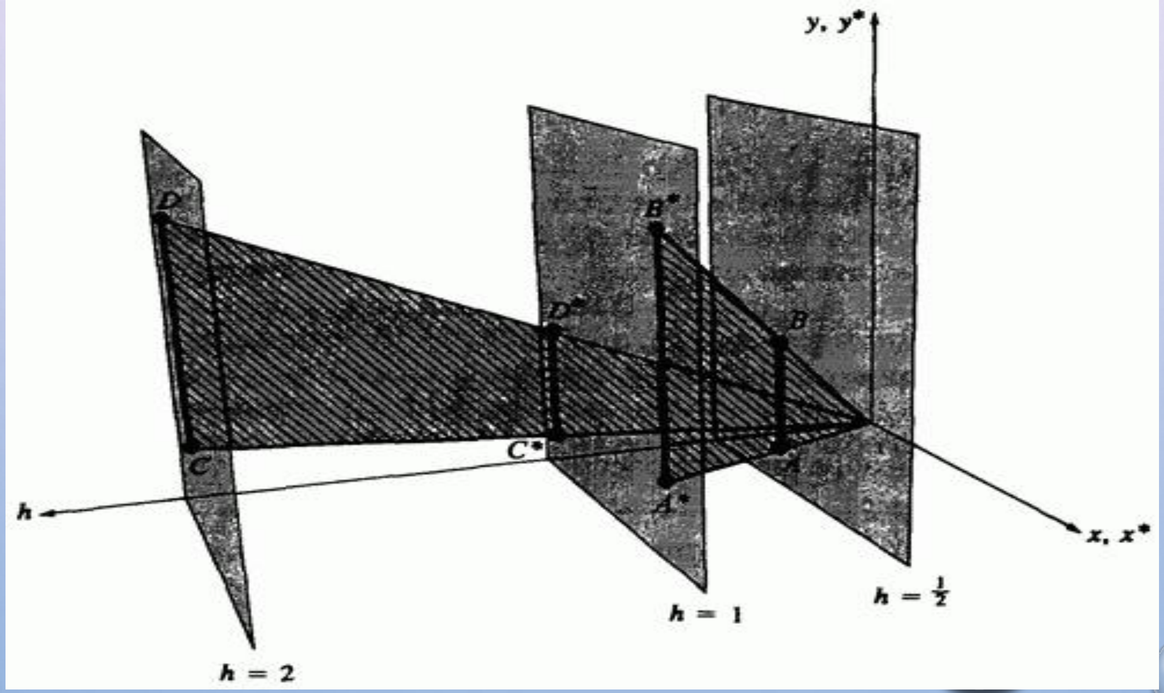
ПЕРЕТВОРЕННЯ ГРАФІЧНОЇ ІНФОРМАЦІЇ

ЯКЩО ***s<1***, ТО ***h = const*** ЗАДАЄ ПЛОЩИНУ, ЯКА ЛЕЖИТЬ МІЖ ПЛОЩИНАМИ ***h=1*** ТА ***h=0***. ОТЖЕ, КОЛИ ПЕРЕТВОРЮЮТЬСЯ ПРЯМА ***AB*** ПРОЄЦІЮЄТЬСЯ НАЗАД НА ПЛОЩИНУ ***h=1***, ТО ***A*B**** ЗБІЛЬШУЄТЬСЯ.



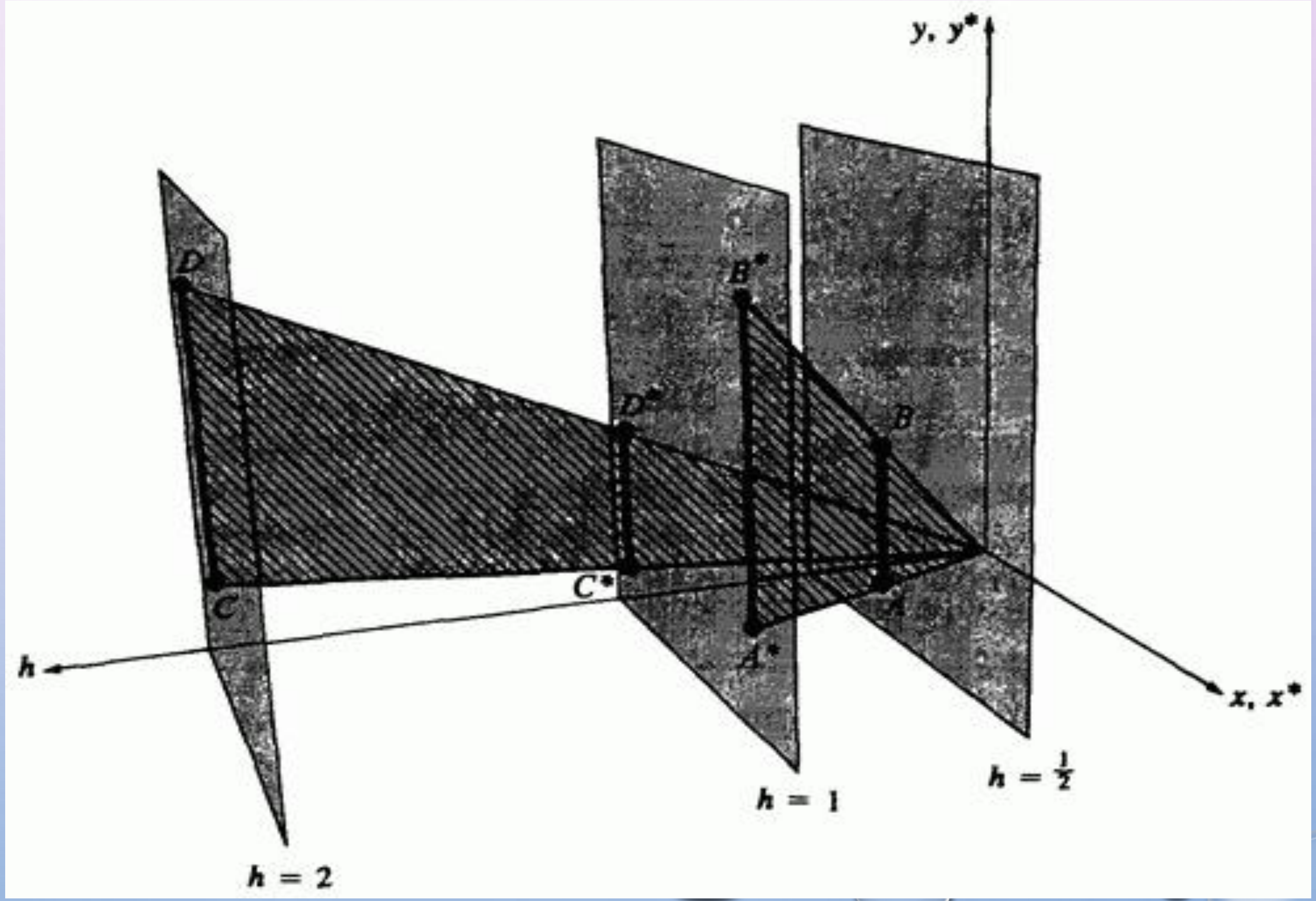
ПЕРЕТВОРЕННЯ ГРАФІЧНОЇ ІНФОРМАЦІЇ

АНАЛОГИЧНО, ЯКЩО ***s*>1**, ***h* = const**, ВИЗНАЧАЄ ПЛОЩИНУ, РОЗТАШОВАНУ ЗА ПЛОЩИНОЮ ***h*=1** І ПЛОЩИНОЮ, ЯКА ПРОХОДИТЬ ВЗДОВЖ ОСІ ***h***. У РАЗІ ПРОЕЦІЮВАННЯ ПРЯМОЇ ***CD*** НА ПЛОЩИНУ ***h*=1** ВІДБУВАЄТЬСЯ ЗМЕНШЕННЯ ПРЯМОЇ ***C*D****



ПЕРЕТВОРЕННЯ ГРАФІЧНОЇ ІНФОРМАЦІЇ

ГЕОМЕТРЧНА ІНТЕРПРЕТАЦІЯ ПРОПОРЦІЙНОГО МАСШТАБУВАННЯ



ПЕРЕТВОРЕННЯ ГРАФІЧНОЇ ІНФОРМАЦІЇ

ТОЧКИ НЕСКІНЧЕННОСТІ

ОДНОРІДНІ КООРДИНАТИ НАДАЮТЬ ЗРУЧНИЙ І ЕФЕКТИВНИЙ СПОСІБ ПЕРЕНЕСЕННЯ ТОЧОК З ОДНІЄЇ СИСТЕМИ КООРДИНАТ В ВІДПОВІДНІ ТОЧКИ АЛЬТЕРНАТИВНОЇ КООРДИНАТНОЇ СИСТЕМИ.

НЕСКІНЧЕННА ОБЛАСТЬ В ОДНІЙ СИСТЕМІ КООРДИНАТ ЧАСТО ПЕРЕТВОРЮЄТЬСЯ В СКІНЧЕННУ ОБЛАСТЬ В АЛЬТЕРНАТИВНІЙ СИСТЕМІ.

ПЕРЕТВОРЕННЯ ГРАФІЧНОЇ ІНФОРМАЦІЇ

ПРИ НЕКОРЕКТНОМУ ВИБОРІ ПЕРЕНЕСЕННЯ ПАРАЛЕЛЬНІСТЬ ПРЯМИХ МОЖЕ НЕ ЗБЕРІГАТИСЯ.

ОДНАК ТОЧКИ ПЕРЕТИНУ ПІСЛЯ ПЕРЕТВОРЕННЯ ВИЯВЛЯЮТЬСЯ ЗНОВУ В ТОЧКАХ ПЕРЕТИНУ.

ДАНА ВЛАСТИВІСТЬ ВИКОРИСТОВУЄТЬСЯ ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ ОДНОРІДНИХ КООРДИНАТ ПРЕДСТАВЛЕННЯ ТОЧОК НЕСКІНЧЕННОСТІ.

ПЕРЕТВОРЕННЯ ГРАФІЧНОЇ ІНФОРМАЦІЇ

РОЗГЛЯНЕМО ПАРУ ПРЯМИХ, ЯКІ ПЕРЕТИНАЮТЬСЯ, ЗАДАНИХ РІВНЯННЯМИ $x+y=1$ $x=1-y$ $x+2/5=1$

$2x-3y=0$ $2(1-y)-3y=2-5y$ $-5y=-2$ $x=1-2/5$

ПРЯМІ ПЕРЕТИНАЮТЬСЯ В ТОЧЦІ З КООРДИНАТАМИ $x=3/5, y=2/5$

ЗАПИШЕМО РІВНЯННЯ У ВИГЛЯДІ $x+y-1=0$ $2x-3y=0$ ТА ПРЕДСТАВИМО ЇХ В МАТРИЧНІЙ ФОРМІ

$$[x \quad y \quad 1]\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}=[0 \quad 0]$$

АБО

$$[X][M']=[R]$$

ПЕРЕТВОРЕННЯ ГРАФІЧНОЇ ІНФОРМАЦІЇ

ЯКЩО МАТРИЦЯ $[M']$ КВАДРАТНА, ТО ПЕРЕТИН МОЖЕ БУТИ ОТРИМАНО ШЛЯХОМ ОБЕРНЕННЯ МАТРИЦІ. ЗМІНИМО СИСТЕМУ ВИХІДНИХ РІВНЯНЬ НАСТУПНИМ ЧИНОМ:

$$x+y-1=0$$
$$2x-3y=0$$
$$1=1$$

АБО В МАТРИЧНІЙ ФОРМІ

$$[X][M]=[R]$$

ПЕРЕТВОРЕННЯ ГРАФІЧНОЇ ІНФОРМАЦІЇ

ТОБТО

$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

КВАДРАТНА МАТРИЦЯ, ОБЕРНЕНА ДО ДАНОЇ, МАЄ ТАКИЙ ВИГЛЯД:

$$\left[M\right]^{-1} = \begin{bmatrix} 3/5 & 2/5 & 0 \\ 1/5 & -1/5 & 0 \\ 3/5 & 2/5 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

ПЕРЕТВОРЕННЯ ГРАФІЧНОЇ ІНФОРМАЦІЇ

ПОМНОЖИВШИ ОБИДВІ ЧАСТИНИ РІВНЯННЯ НА $[M]^{-1}$ І ВРАХОВУЮЧИ, ЩО $[M][M]^{-1}=[I]$ Є ТОТОЖНЬОЮ МАТРИЦЕЮ, ОДЕРЖИМО

$$[x \quad y \quad 1]\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 1 & -3 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}=[0 \quad 0 \quad 1]$$

$$[M]^{-1}=\begin{bmatrix}3/5 & 2/5 & 0\\ 1/5 & -1/5 & 0\\ 3/5 & 2/5 & 1\end{bmatrix}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}3 & 2 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 3 & 2 & 5\end{bmatrix}$$

$$[x \quad y \quad 1]=\frac{1}{5}[0 \quad 0 \quad 1]\begin{bmatrix}3 & 2 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 3 & 2 & 5\end{bmatrix}=[3/5 \quad 2/5 \quad 1]$$

ТАКИМ ЧИНОМ, ТОЧКА ПЕРЕТИНУ ЗНОВУ МАЄ КООРДИНАТИ

$$x=3/5 \qquad y=2/5$$

ПЕРЕТВОРЕННЯ ГРАФІЧНОЇ ІНФОРМАЦІЇ

РОЗГЛЯНЕМО ТЕПЕР ДВІ ПАРАЛЕЛЬНІ ПРЯМІ, ЗАДАНІ НАСТУПНИМ ЧИНОМ:

$$x+y=1$$
$$x+y=0$$

ЗА ВИЗНАЧЕННЯМ ГЕОМЕТРІЇ ЕВКЛІДА, ТОЧКА ПЕРЕТИНУ ДВОХ ПАРАЛЕЛЬНИХ ПРЯМИХ РОЗТАШОВАНА В НЕСКІНЧЕННОСТІ. ПРОДОВЖУЮЧИ ПОПЕРЕДНІ МІРКУВАННЯ, ОБЧИСЛИМО ТОЧКУ ПЕРЕТИНУ ЦИХ ПРЯМИХ, ЗАДАНИХ В МАТРИЧНОЇ ФОРМІ,

$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ПЕРЕТВОРЕННЯ ГРАФІЧНОЇ ІНФОРМАЦІЇ

АЛЕ, НЕЗВАЖАЮЧИ НА ТЕ, ЩО МАТРИЦЯ КВАДРАТНА, ВОНА НЕ МАЄ ОБЕРНЕНОЇ, ТАК ЯК ЇЇ ДВА РЯДКИ ТОТОЖНІ.

ТАКА МАТРИЦЯ НАЗИВАЄТЬСЯ СИНГУЛЯРНОЮ.

МОЖЛИВЕ ІНШЕ ФОРМУЛЮВАННЯ З ОБЕРНЕНОЮ МАТРИЦЕЮ. ОТРИМАЄМО ЇЇ, ПЕРЕПИСУЮЧИ СИСТЕМУ РІВНЯНЬ НАСТУПНИМ ЧИНОМ:

$$x + y - 1 = 0$$

$$x + y = 0$$

$$x = x$$

ПЕРЕТВОРЕННЯ ГРАФІЧНОЇ ІНФОРМАЦІЇ

$$x+y-1=0$$

$$x+y=0$$

$$x=x$$

АБО В МАТРИЧНІЙ ФОРМІ

$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & x \end{bmatrix}$$

В ДАНОМУ ВИПАДКУ МАТРИЦЯ НЕ Є СИНГУЛЯРНОЮ І ІСНУЄ ЇЇ ОБЕРНЕНА

$$[M]^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

ПЕРЕТВОРЕННЯ ГРАФІЧНОЇ ІНФОРМАЦІЇ

ДОМНОЖИВШИ ОБИДВІ ЧАСТИНИ ВИРАЗУ НА ОБЕРНЕНУ МАТРИЦЮ, ОТРИМУЄМО

$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & -x & 0 \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

РЕЗУЛЬТУЮЧІ ОДНОРІДНІ КООРДИНАТИ **[1 -1 0]** ВИЗНАЧАЮТЬ ТОЧКУ ПЕРЕТИНУ ДВОХ ПАРАЛЕЛЬНИХ ПРЯМИХ, ТОБТО ТОЧКУ НЕСКІНЧЕННОСТІ. ЗОКРЕМА, ВОНИ ПРЕДСТАВЛЯЮТЬ ДАНУ ТОЧКУ В НАПРЯМКУ **[1 -1]** ДВОВИМІРНОГО ПРОСТОРУ. У ЗАГАЛЬНОМУ ВИГЛЯДІ ДВОВИМІРНИЙ КООРДИНАТНИЙ ВЕКТОР **[a b 0]** ПРЕДСТАВЛЯЄ ТОЧКУ НЕСКІНЧЕННОСТІ НА ПРЯМІЙ ***ay-bx=0*** .

ПЕРЕТВОРЕННЯ ГРАФІЧНОЇ ІНФОРМАЦІЇ

ПРИКЛАД:

[1 0 0]   ТОЧКА НА ДОДАТНІЙ ОСІ ***x***,

[-1 0 0] ТОЧКА НА ВІД'ЄМНІЙ ОСІ ***x***,

[0 1 0]   ТОЧКА НА ДОДАТНІЙ ОСІ ***y***,

[0 -1 0] ТОЧКА НА ВІД'ЄМНІЙ ОСІ ***y***,

[1 1 0]   ВЗДОВЖ ПРЯМОЇ ***x=y*** В НАПРЯМКУ [1 1].

ПЕРЕТВОРЕННЯ ГРАФІЧНОЇ ІНФОРМАЦІЇ

ВЕКТОР З ОДНОРІДНОЮ КОМПОНЕНТОЮ ***h*=0** ДІЙСНО ПРЕДСТАВЛЯЄ ТОЧКУ НЕСКІНЧЕННОСТІ І МОЖЕ БУТИ ТАКОЖ ІНТЕРПРЕТОВАНИЙ ЯК РУХ ДО ЛІМІТУ

h	x^*	y^*	X	Y
1	4	3	4	3
1/2	8	6	4	3
1/3	12	9	4	3
⋮				
1/10	40	30	4	3
⋮				
1/100	400	300	4	3
⋮				

ПЕРЕТВОРЕННЯ ГРАФІЧНОЇ ІНФОРМАЦІЇ

РОЗГЛЯНЕМО ПРЯМУ $y^* = (3/4)x^*$ І ТОЧКУ $\begin{bmatrix} X & Y & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.

ТАК ЯК, В ОДНОРІДНИХ КООРДИНАТАХ НЕ ІСНУЄ ЄДИНОГО ПРЕДСТАВЛЕННЯ КООРДИНАТНОГО ВЕКТОРА

h	x^*	y^*	X	Y
1	4	3	4	3
1/2	8	6	4	3
1/3	12	9	4	3
⋮				
1/10	40	30	4	3
⋮				
1/100	400	300	4	3
⋮				

ТО ТОЧКА [4 3 1] ПРЕДСТАВЛЕНА В ОДНОРІДНИХ КООРДИНАТАХ В УСІХ НАПРЯМКАХ.

ПЕРЕТВОРЕННЯ ГРАФІЧНОЇ ІНФОРМАЦІЇ

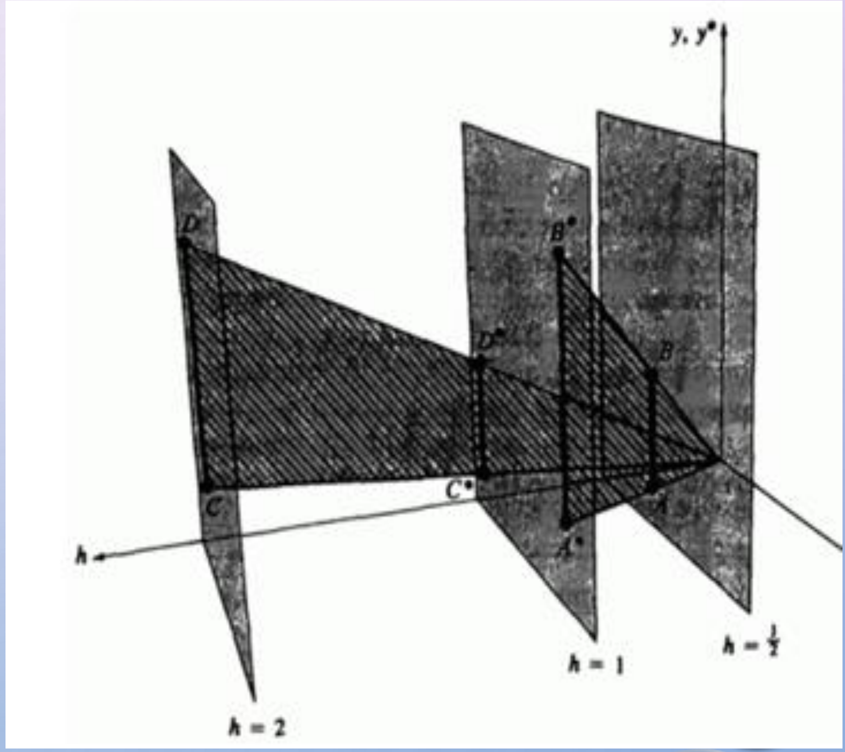
ЗАУВАЖИМО, ЩО В ЦІЙ ТАБЛИЦІ ПРИ $h \to 0$ ВІДНОШЕННЯ ***y*/x**** ЗАЛИШАЄТЬСЯ РІВНИМ ***3*/*4***, ЯК І ПОТРІБНО ДЛЯ ЗБЕРЕЖЕННЯ РІВНЯННЯ.

ОКРІМ ЦЬОГО, НАСТУПНА ПАРА (***x* y****), ВСІ ТОЧКИ ЯКОЇ РОЗТАШОВУЮТЬСЯ НА ЛІНІЇ ***y*=(3/4)x**** , ШВИДКО НАБЛИЖАЮТЬСЯ ДО НЕСКІНЧЕНОСТІ. ТАКИМ ЧИНОМ, ЛІМІТ ПРИ $h \to 0$ І Є ТОЧКА НЕСКІНЧЕННОСТІ, ЗАДАНА В ОДНОРІДНИХ КООРДИНАТАХ ЯК $\begin{bmatrix} X & Y & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

ПЕРЕТВОРЕННЯ ГРАФІЧНОЇ ІНФОРМАЦІЇ

НА РИСУНКУ ЛЕГКО ПРОДЕМОНСТРУВАТИ ГЕОМЕТРИЧНУ ІНТЕРПРЕТАЦІЮ ПРОЦЕСУ РУХУ ДО ЛІМІТУ (МЕЖІ) ПРИ $h \to 0$.

РОЗГЛЯНЕМО ВІДРІЗОК ОДИНИЧНОЇ ДОВЖИНИ, ЩО ПРОХОДИТЬ ВІД ТОЧКИ ПОЧАТКУ КООРДИНАТ В НАПРЯМКУ **[1 0]** НА ПЛОЩИНІ ***h*=*s*** (***s*<*1***).



ПРИ $s \to 0$ ПРОЄКЦІЯ ЦІЄЇ ПРЯМОЇ НАЗАД НА ФІЗИЧНУ ПЛОЩИНУ ***h*=*1*** В НАПРЯМКУ ПРОМЕНІВ, ЯКІ ПРОХОДЯТЬ ЧЕРЕЗ ПОЧАТОК КООРДИНАТ, СТАЄ НЕСКІНЧЕННОЇ ДОВЖИНИ.

ОТЖЕ, КІНЦЕВА ТОЧКА ПРЯМОЇ ПОВИННА ПРЕДСТАВЛЯТИСЯ ТОЧКОЮ НЕСКІНЧЕННОСТІ НА ОСІ ***x***.

ПЕРЕТВОРЕННЯ ГРАФІЧНОЇ ІНФОРМАЦІЇ

ПРАВИЛА ВИКОНАННЯ ПЕРЕТВОРЕНЬ

ДЛЯ ПРЕДСТАВЛЕННЯ ДАНИХ І ВИКОНАННЯ ПЕРЕТВОРЕНЬ ЗА ДОПОМОГОЮ МНОЖЕННЯ МАТРИЦЬ ВИКОРИСТОВУЮТЬСЯ РІЗНІ ПОГОДЖЕННЯ.

НАЙБІЛЬШУ УВАГУ ПОТРІБНО ПРИДІЛЯТИ ФОРМУЛЮВАННЮ ЗАВДАНЬ ТА ІНТЕРПРЕТАЦІЇ РЕЗУЛЬТАТІВ.

НАПРИКЛАД, ПЕРЕД ВИКОНАННЯМ ОБЕРТУ НЕОБХІДНО ОТРИМАТИ ВІДПОВІДІ НА НАСТУПНІ ПИТАННЯ:

ПЕРЕТВОРЕННЯ ГРАФІЧНОЇ ІНФОРМАЦІЇ

- У ПРАВОСТОРОННІЙ АБО ЛІВОСТОРОННІЙ СИСТЕМІ КООРДИНАТ ВИЗНАЧАЮТЬСЯ КООРДИНАТНІ ВЕКТОРИ, ЯКІ ОБЕРТАЮТЬСЯ?
- ОБЕРТАЄТЬСЯ ОБ'ЄКТ АБО СИСТЕМА КООРДИНАТ?
- ЯК ВИЗНАЧАЮТЬСЯ ДОДАТНІЙ І ВІД’ЄМНИЙ ПОВОРОТИ (ОБЕРТИ)?
- КООРДИНАТИ ЗАПИСУЮТЬСЯ У ВИГЛЯДІ РЯДКА АБО СТОВПЦЯ МАТРИЦІ?
- НАВКОЛО ЯКОЇ ЛІНІЇ АБО ОСІ ЗДІЙСНЮЄТЬСЯ ПОВОРОТ?

ПЕРЕТВОРЕННЯ ГРАФІЧНОЇ ІНФОРМАЦІЇ

В НАШОМУ ВИКЛАДІ:

- ВИКОРИСТОВУЄТЬСЯ ПРАВОСТОРОННЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ,
- ОБ'ЄКТ ОБЕРТАЄТЬСЯ В НЕРУХОМІЙ СИСТЕМІ КООРДИНАТ,
- ДОДАТНІЙ ОБЕРТ ПРОТИ ГОДИННИКОВОЇ СТРІЛКИ, ВІД'ЄМНИЙ – ЗА ГОДИННИКОВОЮ СТРІЛКОЮ (СПОСТЕРЕЖЕННЯ З ТОЧКИ ПОЧАТКУ КООРДИНАХ В ДОДАТНЬОМУ НАПРЯМКУ КООРДИНАТНОЇ ОСІ)
- КООРДИНАТНІ ВЕКТОРИ ПОДАЮТЬСЯ У ВИГЛЯДІ РЯДКА МАТРИЦІ.

ПЕРЕТВОРЕННЯ ГРАФІЧНОЇ ІНФОРМАЦІЇ

ВИРАЗ

$$[T]=\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

ЗАДАЄ ПЕРЕТВОРЕННЯ ДЛЯ ДОДАТНЬОГО ОБЕРТУ НАВКОЛО ПОЧАТКУ КООРДИНАТ АБО ОСІ ***z***.

ТАК ЯК ВЕКТОР ЗАДАЄТЬСЯ РЯДКОМ МАТРИЦІ, ТО МАТРИЦЮ ПЕРЕТВОРЕННЯ СЛІД РОЗМІСТИТИ ПІСЛЯ ДАНИХ АБО МАТРИЦІ КООРДИНАТНИХ ВЕКТОРІВ. ЦЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЗАДАЄТЬСЯ ШЛЯХОМ МНОЖЕННЯ СПРАВА.

ПЕРЕТВОРЕННЯ ГРАФІЧНОЇ ІНФОРМАЦІЇ

У РАЗІ ОДНОРІДНИХ КООРДИНАТ ДЛЯ ДОДАТНЬОГО ОБЕРТУ ОБ'ЄКТА НА КУТ θ НАВКОЛО ПОЧАТКУ КООРДИНАТ (ОСІ ***z***) ВИКОРИСТАННЯ МНОЖЕННЯ СПРАВА ПРИЗВОДИТЬ ДО НАСТУПНОГО РЕЗУЛЬТАТУ:

$$\left[X^*\right]=\left[X\right]\left[R\right]$$

$$\begin{bmatrix} x^* & y^* & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ПЕРЕТВОРЕННЯ ГРАФІЧНОЇ ІНФОРМАЦІЇ

ЯКЩО МИ ПІДСТАВИМО КООРДИНАТНІ ВЕКТОРИ, ЗАДАНІ В ОДНОРІДНИХ КООРДИНАТАХ У ВИГЛЯДІ СТОВПЧИКА МАТРИЦІ, ТО ОБЕРТИ МОЖНА ВИКОНАТИ НАСТУПНИМ ЧИНОМ:

$$\left[X^*\right] = \left[R\right]^{-1}\left[X\right]$$

$$\begin{bmatrix} x^* \\ y^* \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

ПЕРЕТВОРЕННЯ ГРАФІЧНОЇ ІНФОРМАЦІЇ

ВИРАЗ $\begin{bmatrix} x^* \\ y^* \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$

НАЗИВАЄТЬСЯ ПЕРЕТВОРЕННЯМ З МНОЖЕННЯМ ЗЛІВА, ТАК ЯК МАТРИЦЯ ПЕРЕТВОРЕННЯ РОЗТАШОВАНА ПЕРЕД СТОВПЦЕМ КООРДИНАТНОГО ВЕКТОРА АБО ДАНИХ.

(3*3)-МАТРИЦЯ У ДАНОМУ ВИРАЗІ Є ТРАНСПОЗИЦІЯ (3*3) - МАТРИЦІ З ВИРАЗУ $\begin{bmatrix} x^* & y^* & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

ЦЕ СВІДЧИТЬ ПРО НЕЗАЛЕЖНІСТЬ РЯДКІВ І СТОВПЦІВ МАТРИЦІ.

ПЕРЕТВОРЕННЯ ГРАФІЧНОЇ ІНФОРМАЦІЇ

ДЛЯ ТОГО, ЩОБ ПОВЕРНУТИ СИСТЕМУ КООРДИНАТ І ЗАЛИШИТИ НЕЗМІНЕНИМИ КООРДИНАТНІ ВЕКТОРИ, НЕОБХІДНО У ВИРАЗІ

$$\begin{bmatrix} x^* & y^* & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ЗАМІНИТИ θ НА $-\theta$. ВРАХУЄМО, ЩО $\sin\theta = -\sin(-\theta)$, $\cos\theta = \cos(-\theta)$

ВИРАЗ БУДЕ МАТИ ВИГЛЯД

$$\begin{bmatrix} x^* & y^* & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ПЕРЕТВОРЕННЯ ГРАФІЧНОЇ ІНФОРМАЦІЇ

ПОМІТИМО, ЩО (3*3) - МАТРИЦЯ ЗНОВУ МАЄ ОБЕРНЕНУ І ТАКОЖ ТРАНСПОНУЄТЬСЯ В МАТРИЦЮ 3

$$\begin{bmatrix} x^* & y^* & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

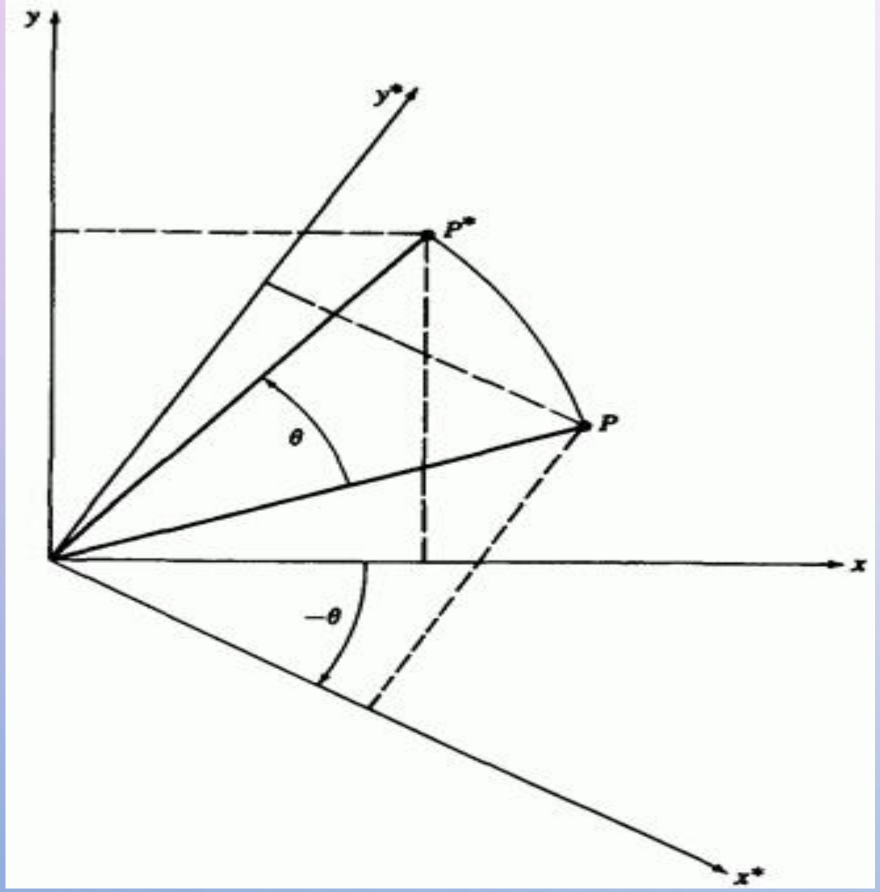
ПЕРЕТВОРЕННЯ ГРАФІЧНОЇ ІНФОРМАЦІЇ

ЯКЩО ОБЕРТАЄТЬСЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ І ВИКОРИСТОВУЄТЬСЯ ЛІВОСТОРОННЯ КООРДИНАТНА СИСТЕМА, ТО ЗАМІНУ θ НА $-\theta$ ТРЕБА РОБИТИ ДВІЧІ, А РІВНЯННЯ

$$\begin{bmatrix} x^* & y^* & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ЗНОВУ Є СПРАВЕДЛИВИМ ПРИ ПРИПУЩЕННІ, ЩО ЗАСТОСОВУЄТЬСЯ НАСТУПНЕ МНОЖЕННЯ НА РЯДОК МАТРИЦІ ДАНИХ.

ПЕРЕТВОРЕННЯ ГРАФІЧНОЇ ІНФОРМАЦІЇ



ОБЕРТАННЯ ПРОТИ ГОДИННИКОВОЇ СТРІЛКИ ВЕКТОРІВ, ЯКІ ЗАДАЮТЬ ОБ'ЄКТ, ІДЕНТИЧНО ОБЕРТУ В ТОМУ Ж НАПРЯМКУ КООРДИНАТНИХ ОСЕЙ ПРИ НЕРУХОМОМУ ОБ'ЄКТІ.

ЗНОВУ НЕМАЄ НЕОБХІДНОСТІ В ЗМІНІ ВМІСТУ МАТРИЦІ ПЕРЕТВОРЕННЯ РОЗМІРОМ (3*3), ЯКЩО НЕМАЄ ІНШИХ ПРИЧИН ДЛЯ ЇЇ РЕДАГУВАННЯ.

ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ ПЕРЕТВОРЕННЯ КООРДИНАТНИХ ВЕКТОРІВ І СИСТЕМ КООРДИНАТ.

ПЕРЕТВОРЕННЯ ГРАФІЧНОЇ ІНФОРМАЦІЇ

ЦІ КІЛЬКА ПРИКЛАДІВ ПОКАЗУЮТЬ, НАСКІЛЬКИ ОБЕРЕЖНО НЕОБХІДНО ВИКОНУВАТИ МАТРИЧНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ.

ТЕХНОЛОГІЇ ТА ЗАСОБИ РОЗРОБКИ КОМП'ЮТЕРНОЇ ГРАФІКИ ТА МУЛЬТИМЕДІА

ДЯКУЮ ЗА УВАГУ!

СТ. ВИКЛ. ІСТ ХМЕЛЮК М.С.