# ТЕХНОЛОГІЇ ТА ЗАСОБИ РОЗРОБКИ КОМП'ЮТЕРНОЇ ГРАФІКИ ТА МУЛЬТИМЕДІА

# ПИТАННЯ

- **ТРИВИМІРНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ**
  - МАТРИЦЯ ПЕРЕТВОРЕНЬ
  - ТРИВИМІРНЕ МАСШТАБУВАННЯ
  - ТРИВИМІРНІ ЗМІЩЕННЯ
  - ТРИВІМІРНЕ ОБЕРТАННЯ

# ПРОСТОРОВІ ПЕРЕТВОРЕННЯ

ЗДАТНІСТЬ ВІЗУАЛІЗУВАТИ ПРОСТОРОВИЙ ОБ'ЄКТ Є ОСНОВОЮ ДЛЯ РОЗУМІННЯ ФОРМИ ЦЬОГО ОБ'ЄКТА.

У БАГАТЬОХ ВИПАДКАХ ДЛЯ ЦЬОГО ВАЖЛИВА ЗДАТНІСТЬ ОБЕРТАТИ, ПЕРЕНОСИТИ І БУДУВАТИ ВИДИ ПРОЄКЦІЙ ОБ'ЄКТА. ЦЕ ЛЕГКО ДЕМОНСТРУЄТЬСЯ НА ПРИКЛАДІ ЗНАЙОМСТВА З ВІДНОСНО СКЛАДНИМ НЕЗНАЙОМИМ ОБ'ЄКТОМ. ЩОБ ЗРОЗУМІТИ ЙОГО ФОРМУ, МИ ПОЧИНАЄМО ОБЕРТАТИ ОБ'ЄКТ, ПЕРЕМІЩАТИ НА ВІДСТАНЬ, ПЕРЕСУВАТИ ВГОРУ І ВНИЗ, ВПЕРЕД І НАЗАД І Т. Д.

# ПРОСТОРОВІ ПЕРЕТВОРЕННЯ

ЩОБ ЗРОБИТИ ТЕ Ж САМЕ ЗА ДОПОМОГОЮ КОМП'ЮТЕРА, МИ ПОВИННІ ПОШИРИТИ НАШ ПОПЕРЕДНІЙ ДВОВИМІРНИЙ АНАЛІЗ НА ТРИ ВИМІРИ.

ГРУНТУЮЧИСЬ НА ОТРИМАНОМУ ДОСВІДІ, МИ ВВОДИМО ОДНОРІДНІ КООРДИНАТИ. ТАКИМ ЧИНОМ, ТОЧКА В ТРИВИМІРНОМУ ПРОСТОРІ [***x y z***] ПРЕДСТАВЛЯЄТЬСЯ ЧОТИРИВИМІРНИМ ВЕКТОРОМ

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \end{bmatrix},$$

ДЕ [***T***] Є МАТРИЦЕЮ ПЕВНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ.

# ПРОСТОРОВІ ПЕРЕТВОРЕННЯ

ЯК І РАНІШЕ, ПЕРЕТВОРЕННЯ З ОДНОРІДНИХ КООРДИНАТ В ЗВИЧАЙНІ ЗАДАЄТЬСЯ ФОРМУЛОЮ

$$\begin{bmatrix} x^* & y^* & z^* & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' & y' & z' & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x'}{h} & \frac{y'}{h} & \frac{z'}{h} & 1 \end{bmatrix}$$

УЗАГАЛЬНЕНУ МАТРИЦЮ ПЕРЕТВОРЕННЯ РОЗМІРНОСТІ 4*4 ДЛЯ ТРИВИМІРНИХ ОДНОРІДНИХ КООРДИНАТ МОЖНА ПРЕДСТАВИТИ В НАСТУПНОМУ ВИГЛЯДІ:

$$[T] = \begin{bmatrix} a & b & c & p \\ d & e & f & q \\ g & i & j & r \\ l & m & n & s \end{bmatrix}$$

# ПРОСТОРОВІ ПЕРЕТВОРЕННЯ

МАТРИЦЮ ПЕРЕТВОРЕННЯ 4*4 МОЖНА РОЗДІЛИТИ НА ЧОТИРИ ОКРЕМІ ЧАСТИНИ:

$$[T]=\begin{bmatrix} a & b & c & p \\ d & e & f & q \\ g & i & j & r \\ l & m & n & s \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} & & & 3 \\ & 3\times 3 & & \times \\ & & & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ & 1\times 3 & & 1\times 1 \end{array}\right]$$

# ПРОСТОРОВІ ПЕРЕТВОРЕННЯ

$$\left[\begin{array}{ccc:c} & & & 3 \\ & 3\times3 & & \times \\ & & & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ & 1\times3 & & 1\times1 \end{array}\right]$$

**ВЕРХНЯ ЛІВА** (3*3) - ПІДМАТРИЦЯ ЗАДАЄ ЛІНІЙНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ В ФОРМІ МАСШТАБУВАННЯ, ЗМІЩЕННЯ, ВІДДЗЕРКАЛЕННЯ І ОБЕРТАННЯ.

**ЛІВА НИЖНЯ** (1*3) - ПІДМАТРИЦЯ ЗАДАЄ ПЕРЕМІЩЕННЯ,

**ПРАВА ВЕРХНЯ** (3*1)- ПІДМАТРИЦЯ - ПЕРСПЕКТИВНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ.

**ПРАВА НИЖНЯ** (1*1) - ПІДМАТРИЦЯ ЗАДАЄ ЗАГАЛЬНЕ МАСШТАБУВАННЯ.

# ПРОСТОРОВІ ПЕРЕТВОРЕННЯ

ЗАГАЛЬНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ, ОТРИМАНЕ ПІСЛЯ ЗАСТОСУВАННЯ ЦІЄЇ (4*4) - МАТРИЦІ ДО ОДНОРІДНОГО ВЕКТОРУ І ОБЧИСЛЕННЯ ЗВИЧАЙНИХ КООРДИНАТ, НАЗИВАЄТЬСЯ БІЛІНІЙНИМ ПЕРЕТВОРЕННЯМ.

У ЗАГАЛЬНОМУ ВИПАДКУ ДАНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЗДІЙСНЮЄ КОМБІНАЦІЮ ЗСУВУ, ЛОКАЛЬНОГО МАСШТАБУВАННЯ, ОБЕРТАННЯ, ВІДДЗЕРКАЛЕННЯ, ПЕРЕМІЩЕННЯ, ПЕРСПЕКТИВНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ І ЗАГАЛЬНОГО МАСШТАБУВАННЯ.

# ПРОСТОРОВІ ПЕРЕТВОРЕННЯ

**ТРИВИМІРНЕ МАСШТАБУВАННЯ**

ДІАГОНАЛЬНІ ЕЛЕМЕНТИ (4*4) - МАТРИЦІ УЗАГАЛЬНЕНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ ЗАДАЮТЬ ЛОКАЛЬНЕ І ЗАГАЛЬНЕ МАСШТАБУВАННЯ.

РОЗГЛЯНЕМО ПЕРЕТВОРЕННЯ, ЯКЕ ПОКАЗУЄ ДІЮ ЛОКАЛЬНОГО МАСШТАБУВАННЯ:

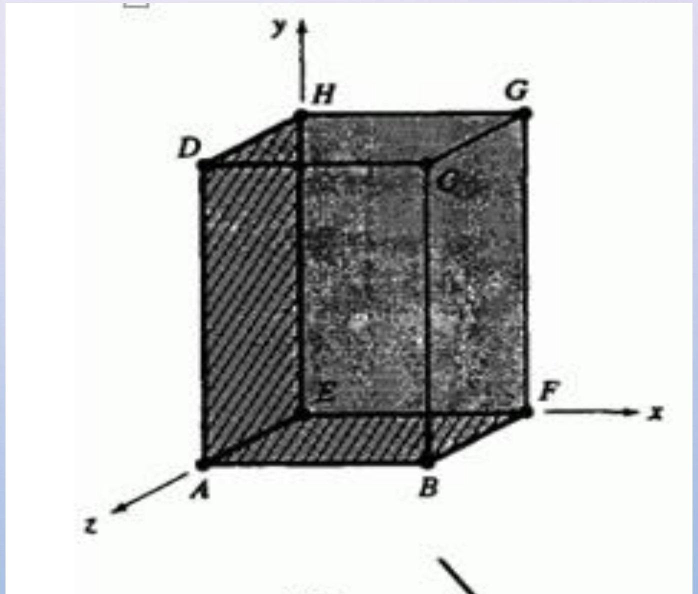
$$[X][T]=[x \quad y \quad z \quad 1]\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=[ax \quad ey \quad jz \quad 1]=[x^* \quad y^* \quad z^* \quad 1]$$

# ПРОСТОРОВІ ПЕРЕТВОРЕННЯ

## ПРИКЛАД ЛОКАЛЬНОГО МАСШТАБУВАННЯ

РОЗГЛЯНЕМО ПРЯМОКУТНИЙ ПАРАЛЕЛЕПІПЕД З НАСТУПНИМИ ОДНОРІДНИМИ КООРДИНАТАМИ ВЕРШИН:

$$[X]=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



(a)

# ПРОСТОРОВІ ПЕРЕТВОРЕННЯ

ЩОБ ОТРИМАТИ ОДИНИЧНИЙ КУБ З ПРЯМОКУТНОГО ПАРАЛЕЛЕПІПЕДА ЗА ДОПОМОГОЮ ЛОКАЛЬНОГО МАСШТАБУВІАННЯ, НЕОБХІДНІ МАСШТАБНІ МНОЖНИКИ 1/2, 1/3, 1 УЗДОВЖ ОСЕЙ ***x, y, z*** ВІДПОВІДНО.

ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛОКАЛЬНОГО МАСШТАБУВАННЯ ЗАДАЄТЬСЯ МАТРИЦЕЮ

$$[T]=\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[X]=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# ПРОСТОРОВІ ПЕРЕТВОРЕННЯ

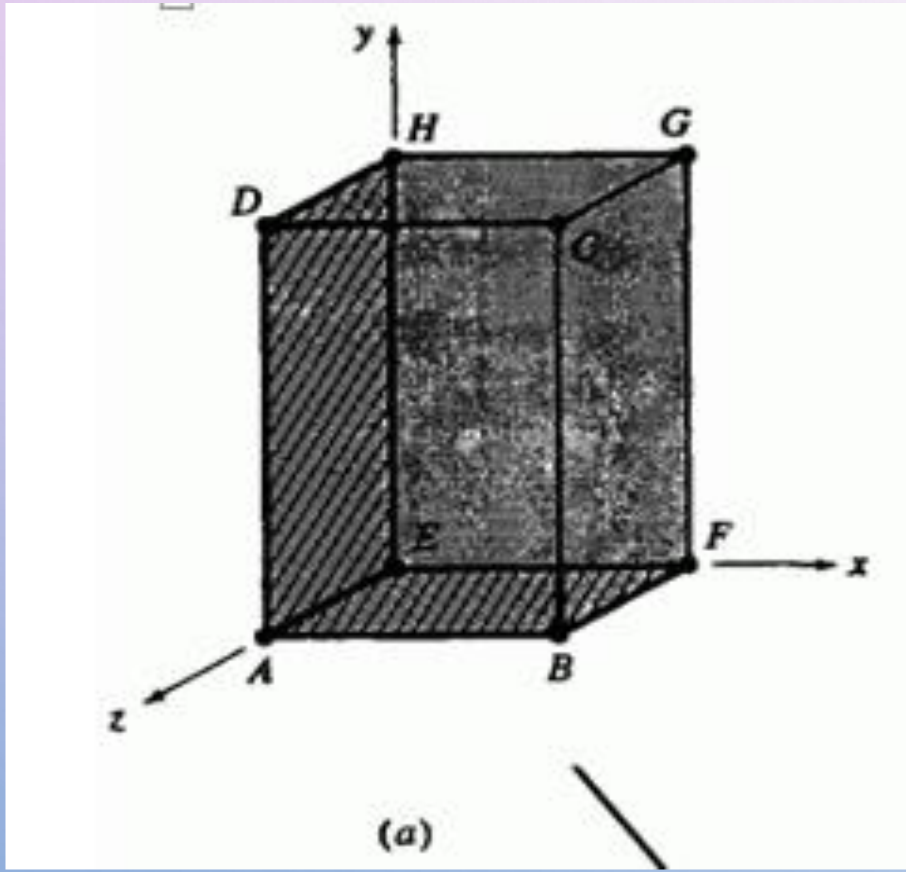
РЕЗУЛЬТУЮЧИЙ КУБ МАЄ НАСТУПНІ ОДНОРІДНІ КООРДИНАТИ ВЕРШИН:

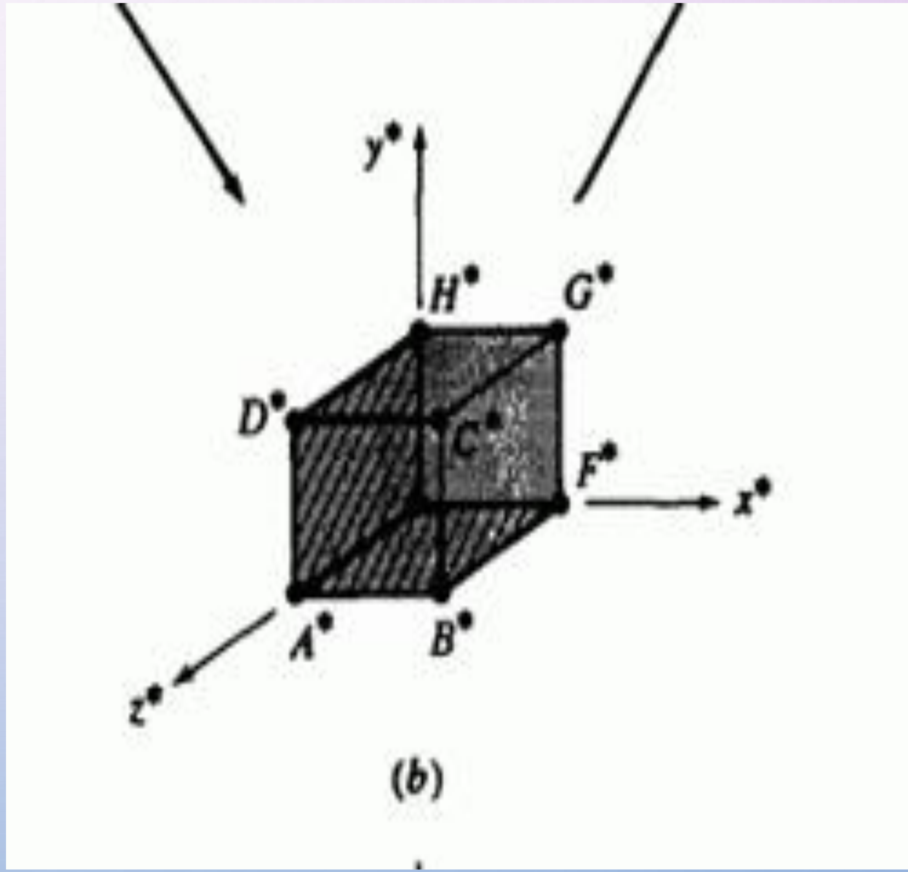
$$\left[X^{*}\right]=[X][T]=\begin{bmatrix}0&0&1&1\\2&0&1&1\\2&3&1&1\\0&3&1&1\\0&0&0&1\\2&0&0&1\\2&3&0&1\\0&3&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/2&0&0&0\\0&1/3&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&1&1\\1&0&1&1\\1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&0&1\\1&0&0&1\\1&1&0&1\\0&1&0&1\end{bmatrix}$$

ОДНОРІДНИЙ КООРДИНАТНИЙ МНОЖНИК ***h*** ДОРІВНЮЄ ***1*** ДЛЯ КОЖНОЇ З ПЕРЕТВОРЕНИХ ВЕРШИН.

# ПРОСТОРОВІ ПЕРЕТВОРЕННЯ

## РЕЗУЛЬТАТ МАСШТАБУВАННЯ



# ПРОСТОРОВІ ПЕРЕТВОРЕННЯ

ЗАГАЛЬНЕ МАСШТАБУВАННЯ МОЖНА ЗДІЙСНИТИ, СКОРИСТАВШИСЬ ЧЕТВЕРТИМ ДІАГОНАЛЬНИМ ЕЛЕМЕНТОМ

$$[X][T]=[x \quad y \quad z \quad 1]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s \end{bmatrix}=[x' \quad y' \quad z' \quad s] \qquad (1)$$

ЗВИЧАЙНІ АБО ФІЗИЧНІ КООРДИНАТИ МАЮТЬ ВИГЛЯД

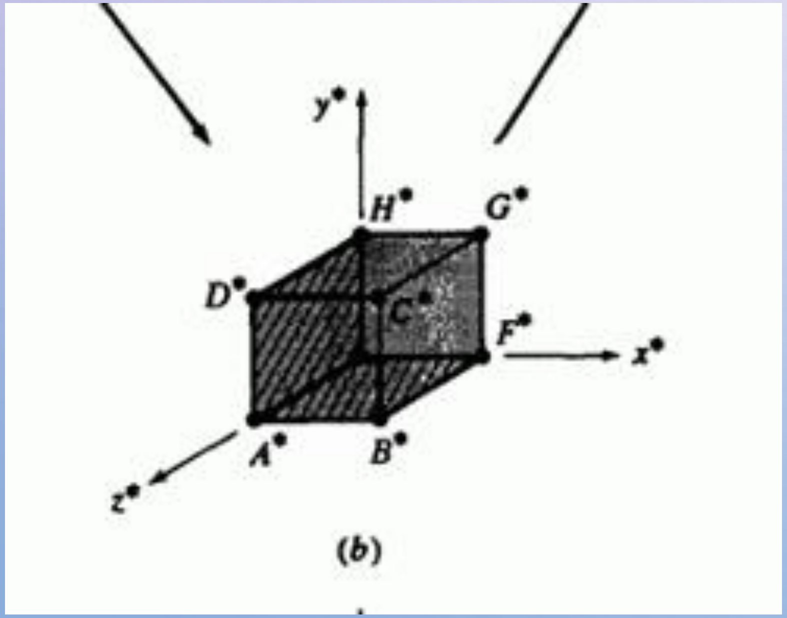
$$\begin{bmatrix} x^* & y^* & z^* & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{x'}{s} & \frac{y'}{s} & \frac{z'}{s} & 1 \end{bmatrix}$$

# ПРОСТОРОВІ ПЕРЕТВОРЕННЯ

## ПРИКЛАД ЗАГАЛЬНОГО МАСШТАБУВАННЯ

ДЛЯ ЗАГАЛЬНОГО МАСШТАБУВАННЯ ОДИНИЧНОГО КУБА (РИС. Ь), НА МНОЖНИК ДВА (ПОДВОЄННЯ РОЗМІРУ), НЕОБХІДНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ 1

$$[X][T] = [x \quad y \quad z \quad 1]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s \end{bmatrix} = [x' \quad y' \quad z' \quad s]$$




$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

# ПРОСТОРОВІ ПЕРЕТВОРЕННЯ

ОТРИМАНИЙ В РЕЗУЛЬТАТІ ПАРАЛЕЛЕПІПЕД МАЄ НАСТУПНІ ОДНОРІДНІ КООРДИНАТИ ВЕРШИН:

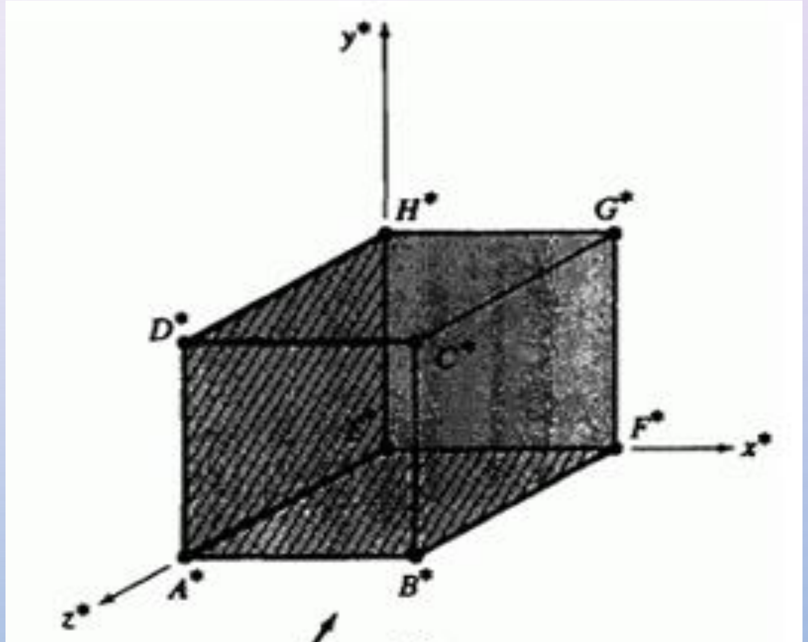
$$[X'] = \left[X^*\right][T] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0.5 \\ 1 & 0 & 1 & 0.5 \\ 1 & 1 & 1 & 0.5 \\ 0 & 1 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 \\ 1 & 0 & 0 & 0.5 \\ 1 & 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

ОДНОРІДНИЙ КООРДИНАТНИЙ МНОЖНИК ***h*** ДЛЯ КОЖНОЇ З ПЕРЕТВОРЕНИХ ВЕРШИН ДОРІВНЮЄ 0.5

# ПРОСТОРОВІ ПЕРЕТВОРЕННЯ

ДЛЯ ТОГО ЩОБ ОТРИМАТИ ЗВИЧАЙНІ АБО ФІЗИЧНІ КООРДИНАТИ, КОЖЕН ВЕКТОР НЕОБХІДНО РОЗДІЛИТИ НА ***h*.** РЕЗУЛЬТАТ, ПОКАЗАНИЙ НА РИС. с, ДОРІВНЮЄ

$$\left[X^*\right]=\begin{bmatrix}0 & 0 & 2 & 1\\ 2 & 0 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 2 & 1\\ 0 & 2 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 2 & 0 & 0 & 1\\ 2 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0 & 1\end{bmatrix}$$



(c)

# ПРОСТОРОВІ ПЕРЕТВОРЕННЯ

ТУТ, ЯК І В ВИПАДКУ ДВОВИМІРНОГО ЗАГАЛЬНОГО МАСШТАБУВАННЯ, ОДНОРІДНИЙ КООРДИНАТНИЙ МНОЖНИК НЕ ДОРІВНЮЄ ОДИНИЦІ. ЦЕ ОЗНАЧАЄ ПЕРЕТВОРЕННЯ З ФІЗИЧНОГО ОБ'ЄМУ $h=1$ В ІНШИЙ ОБ'ЄМ В 4-ВИМІРНОМУ ПРОСТОРІ. ПЕРЕТВОРЕНІ ФІЗИЧНІ КООРДИНАТИ ВИХОДЯТЬ ПРОЄКЦІЮВАННЯМ ЧЕРЕЗ ЦЕНТР 4-ВИМІРНОЇ КООРДИНАТНОЇ СИСТЕМИ НАЗАД В ФІЗИЧНИЙ ОБ'ЄМ $h=1$.

ЯК І РАНІШЕ, ЯКЩО $s<1$, ВІДБУВАЄТЬСЯ ОДНОРІДНЕ РОЗШИРЕННЯ. ЯКЩО $s>1$, ВІДБУВАЄТЬСЯ ОДНОРІДНЕ СТИСНЕННЯ КООРДИНАТНОГО ВЕКТОРА.

# ПРОСТОРОВІ ПЕРЕТВОРЕННЯ

ТАКИЙ РЕЗУЛЬТАТ МОЖНА ОТРИМАТИ, ВИКОРИСТОВУЮЧИ ОДНАКОВІ КОЕФІЦІЄНТИ ЛОКАЛЬНИХ МАСШТАБУВАНЬ. В ЦЬОМУ ВИПАДКУ МАТРИЦЯ ПЕРЕТВОРЕННЯ МАЄ ВИГЛЯД

$$[T]=\begin{bmatrix} 1/s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ВІДЗНАЧИМО, ЩО ТУТ ОДНОРІДНИЙ КООРДИНАТНИЙ МНОЖНИК ДОРІВНЮЄ ОДИНИЦІ, ТОБТО ***h=1***. ТАКИМ ЧИНОМ, ВСІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ВІДБУВАЄТЬСЯ У ФІЗИЧНОМУ ОБ’ЄМІ ***h=1*** .

# ПРОСТОРОВІ ПЕРЕТВОРЕННЯ

## ТРИВИМІРНІ ЗМІЩЕННЯ

НЕДІАГОНАЛЬНІ ЕЛЕМЕНТИ У ВЕРХНІЙ ЛІВІЙ (3*3) - ПІДМАТРИЦІ УЗАГАЛЬНЕНОЇ МАТРИЦІ ПЕРЕТВОРЕННЯ РОЗМІРОМ (4*4) ЗАДАЮТЬ ЗМІЩЕННЯ В ТРЬОХ ВИМІРАХ, ТОБТО

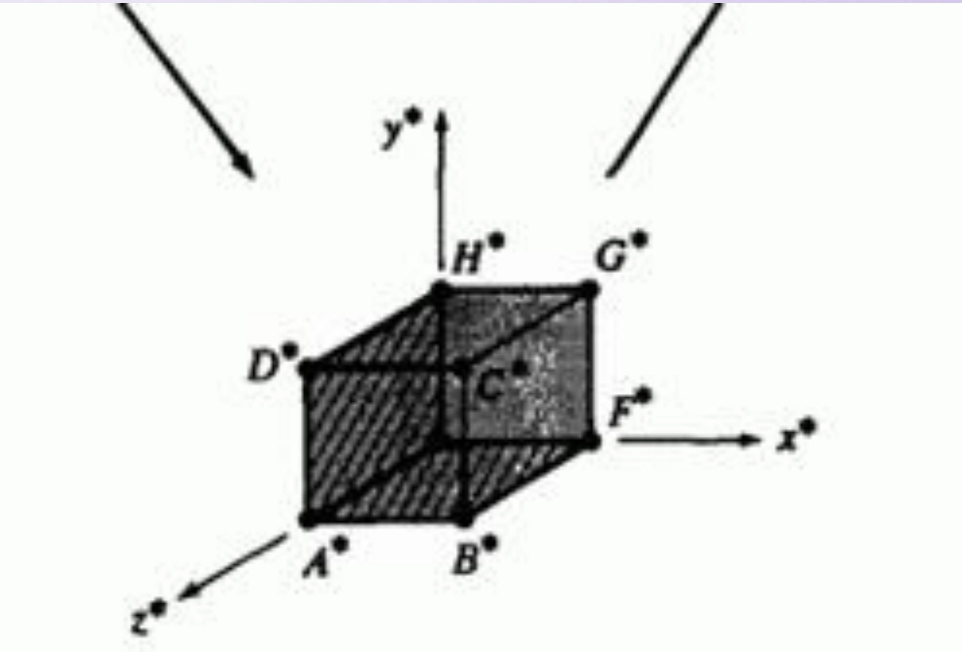
$$[X][T]=[x \quad y \quad z \quad 1]\begin{bmatrix} 1 & b & c & 0 \\ d & 1 & d & 0 \\ g & i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=[x+yd+gz \quad bx+y+iz \quad cx+fy+z \quad 1]$$

# ПРОСТОРОВІ ПЕРЕТВОРЕННЯ

<u>ПРИКЛАД ЗМІЩЕННЯ</u>

РОЗГЛЯНЕМО ОДИНИЧНИЙ КУБ, ЗОБРАЖЕНИЙ НА РИС. Ь. ЗАСТОСУВАВШИ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЗМІЩЕННЯ

$$[T]=\begin{bmatrix} 1 & -0.85 & 0.25 & 0 \\ -0.75 & 1 & 0.7 & 0 \\ 0.5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



(b)

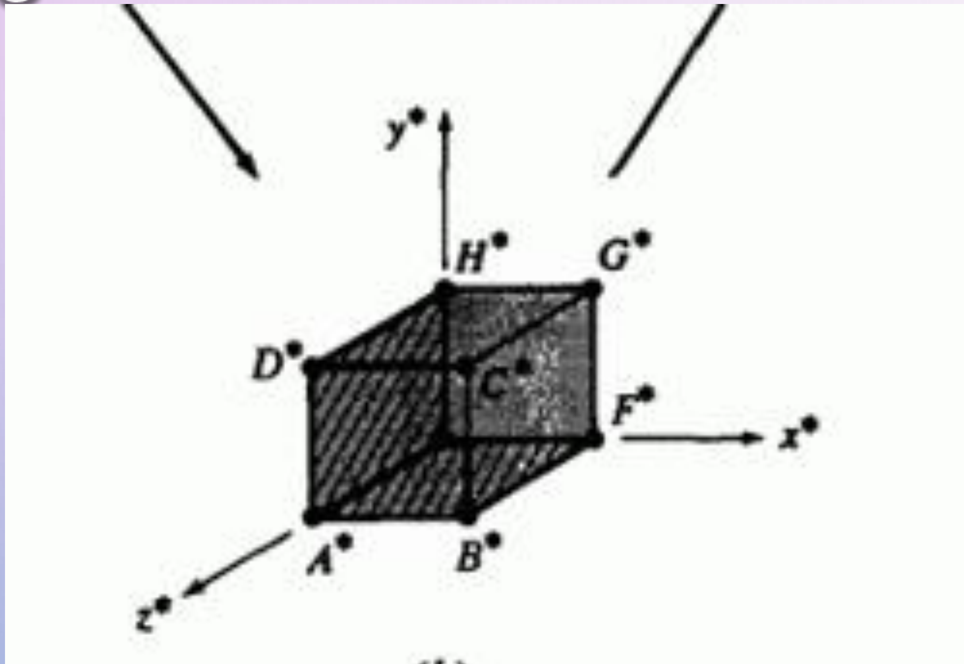
# ПРОСТОРОВІ ПЕРЕТВОРЕННЯ

ОТРИМАЄМО

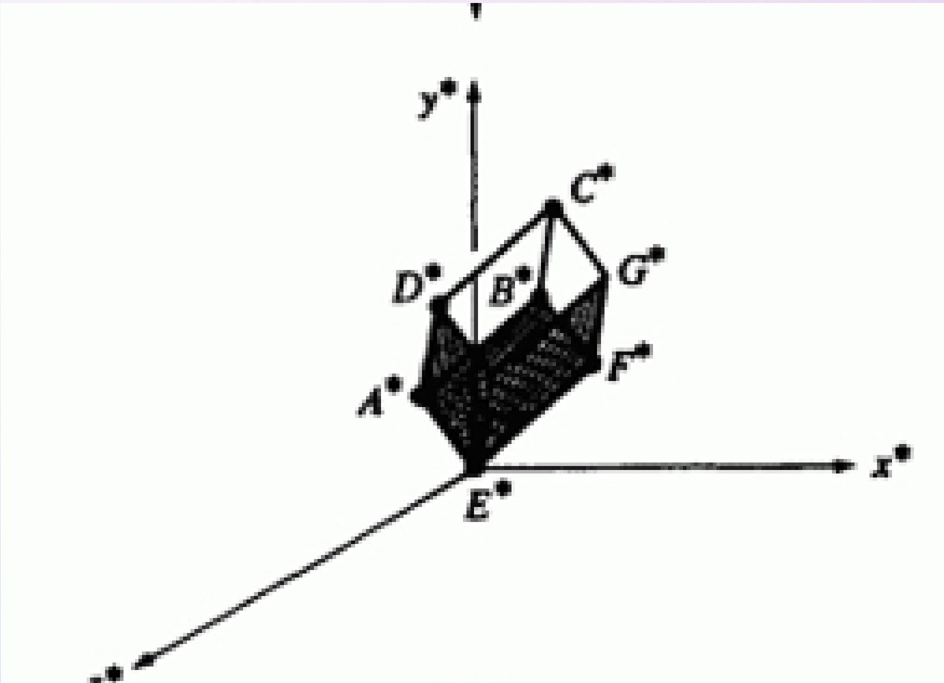
$$\left[X^*\right]=[X][T]=\begin{bmatrix}0&0&1&1\\1&0&1&1\\1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&0&1\\1&0&0&1\\1&1&0&1\\0&1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-0.85&0.25&0\\-0.75&1&0.7&0\\0.5&1&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.5&1&1&1\\1.5&0.15&1.25&1\\0.75&1.15&1.95&1\\-0.25&2&1.7&1\\0&0&0&1\\1&-0.85&0.25&1\\0.25&0.15&0.95&1\\-0.75&1&0.7&1\end{bmatrix}$$

# ПРОСТОРОВІ ПЕРЕТВОРЕННЯ

РЕЗУЛЬТАТ ПОКАЗАНИЙ НА РИС. d.




(b)




(d)

*У ВСІХ*

*ПРИКЛАДАХ ЗАЛИШАЄТЬСЯ НЕЗМІННОЮ ВЕРШИНА ПАРАЛЕЛЕПІПЕДА, ЩО ЗНАХОДИТЬСЯ В ПОЧАТКУ КООРДИНАТ.*

# ПРОСТОРОВІ ПЕРЕТВОРЕННЯ

## ТРИВИМІРНЕ ОБЕРТАННЯ

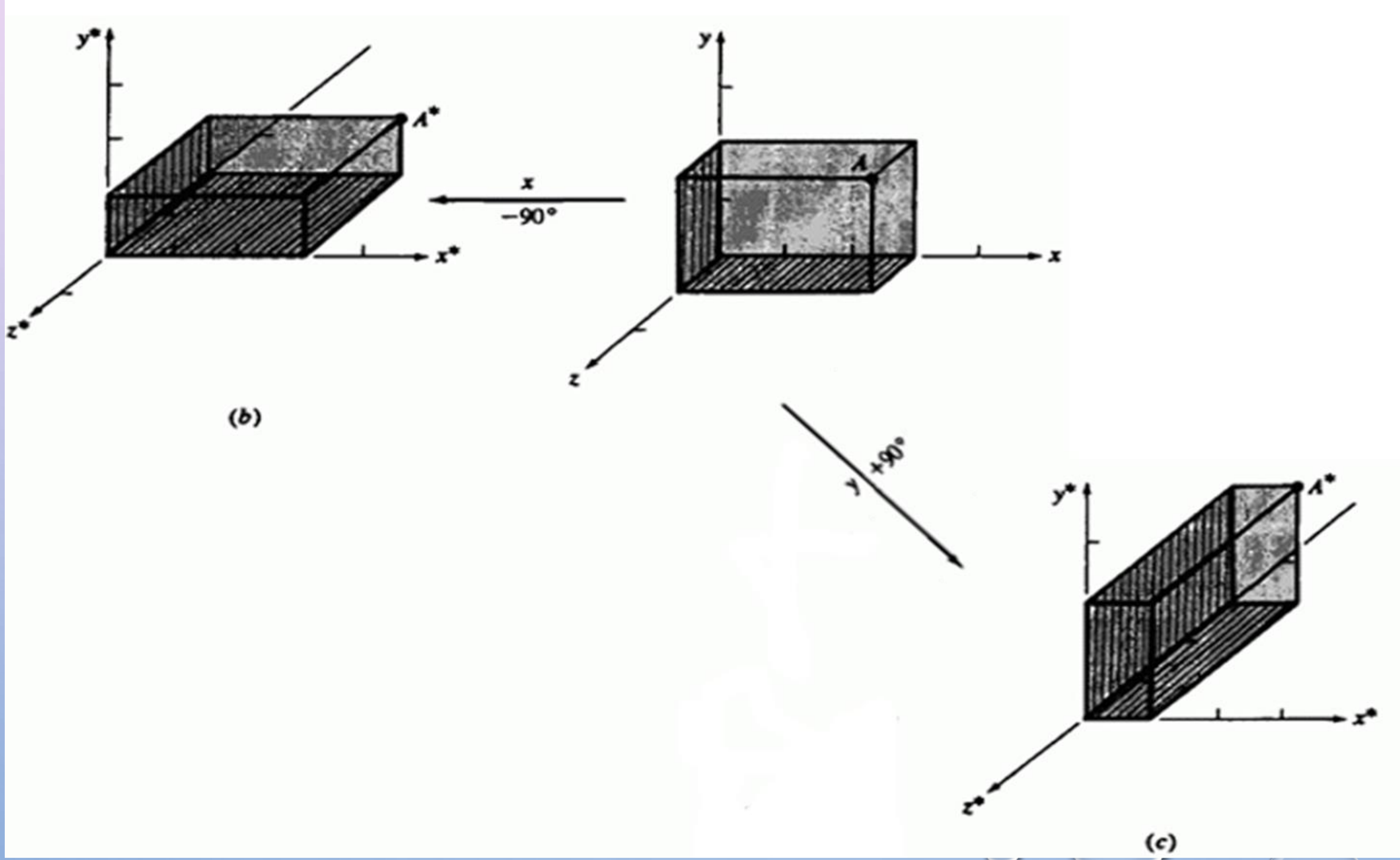
ПЕРШ НІЖ ПЕРЕХОДИТИ ДО ТРИВИМІРНОГО ОБЕРТАННЯ НАВКОЛО ДОВІЛЬНОЇ ОСІ, РОЗГЛЯНЕМО ОБЕРТАННЯ НАВКОЛО КОЖНОЇ З КООРДИНАТНИХ ОСЕЙ.

ПРИ ОБЕРТАННІ НАВКОЛО ОСІ ***x*** ЗАЛИШАЮТЬСЯ НЕЗМІННИМИ ***x-*** КООРДИНАТИ КООРДИНАТНОГО ВЕКТОРА.

ФАКТИЧНО ОБЕРТАННЯ ВІДБУВАЄТЬСЯ В ПЛОЩИНАХ, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНИХ ОСІ ***x***.

# ПРОСТОРОВІ ПЕРЕТВОРЕННЯ

## ТРИВИМІРНІ ОБЕРТАННЯ



# ПРОСТОРОВІ ПЕРЕТВОРЕННЯ

АНАЛОГІЧНИМ ЧИНОМ ОБЕРТАННЯ НАВКОЛО ОСЕЙ ***y*** ТА ***z*** ВІДБУВАЄТЬСЯ В ПЛОЩИНАХ, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНИХ ОСЯМ ***y*** ТА ***z*** ВІДПОВІДНО.

ПЕРЕТВОРЕННЯ КООРДИНАТНОГО ВЕКТОРА В КОЖНІЙ З ЦИХ ПЛОЩИН ЗАДАЄТЬСЯ МАТРИЦЕЮ ДВОВИМІРНОГО ОБЕРТАННЯ

$$[T]=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$

# ПРОСТОРОВІ ПЕРЕТВОРЕННЯ

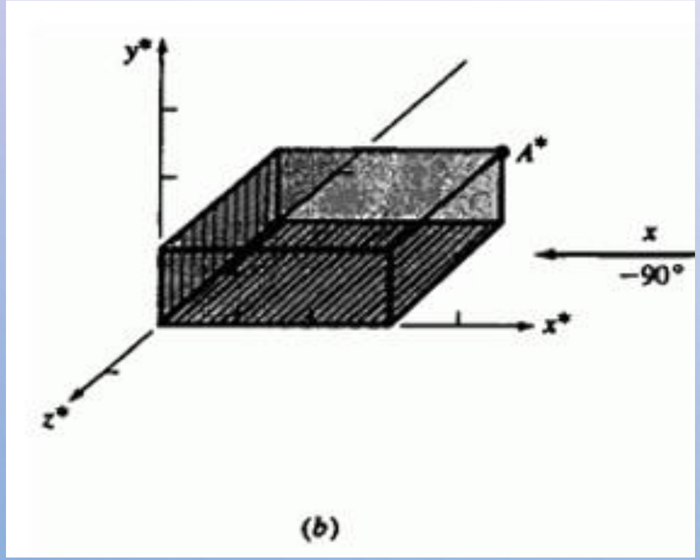
ЦЯ МАТРИЦЯ І НЕЗМІННІСТЬ КООРДИНАТИ ***x*** ПРИ ОБЕРТАННІ НАВКОЛО ОСІ ***x*** ДОЗВОЛЯЮТЬ ЗАПИСАТИ (4*4) - ПЕРЕТВОРЕННЯ ОДНОРІДНИХ КООРДИНАТ ПРИ ОБЕРТІ НА КУТ $\theta$ У ВИГЛЯДІ

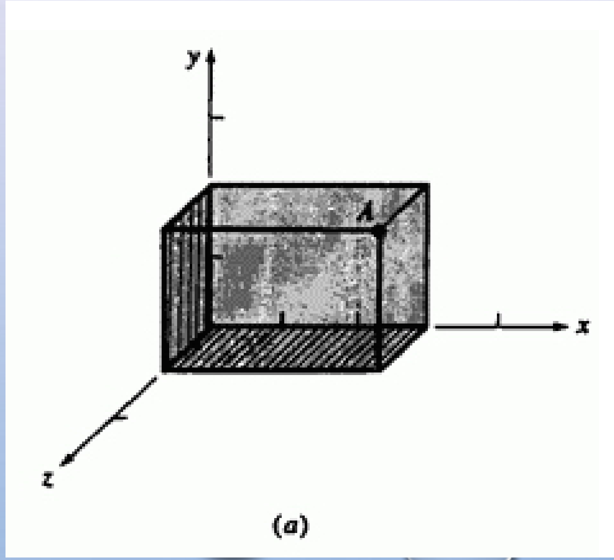
$$[T]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# ПРОСТОРОВІ ПЕРЕТВОРЕННЯ

ОБЕРТАННЯ ВВАЖАЄТЬСЯ ДОДАТНІМ ЗА ПРАВИЛОМ ПРАВОЇ РУКИ (ЗА ГОДИННИКОВОЮ СТРІЛКОЮ), ЯКЩО ДИВИТИСЯ З ПОЧАТКУ КООРДИНАТ В ДОДАТНЬОМУ НАПРЯМКУ ОСІ ОБЕРТАННЯ.

НА РИС. b ПОКАЗАНИЙ ПАРАЛЕЛЕПІПЕД, ОТРИМАНИЙ ОБЕРТАННЯМ НА $-90°$ НАВКОЛО ОСІ **x** ПАРАЛЕЛЕПІПЕДА НА РИС. a



# ПРОСТОРОВІ ПЕРЕТВОРЕННЯ

АНАЛОГІЧНО МАТРИЦЯ ПЕРЕТВОРЕННЯ ДЛЯ ОБЕРТАННЯ НАВКОЛО ОСІ $z$ НА КУТ $\psi$ МАЄ ВИГЛЯД

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# ПРОСТОРОВІ ПЕРЕТВОРЕННЯ

ПРИ ОБЕРТАННІ НА КУТ $\phi$ НАВКОЛО ОСІ ***y*** ПЕРЕТВОРЕННЯ МАЄ ВИГЛЯД

$$[T]=\begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & -\sin\phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\phi & 0 & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# ПРОСТОРОВІ ПЕРЕТВОРЕННЯ

ЗАУВАЖИМО, ЩО В (3) ЗНАКИ У СИНУСІВ ПРОТИЛЕЖНІ ЗНАКАМ ЦИХ ЧЛЕНІВ В РІВНОСТЯХ (1) І (2). ЦЕ ПОТРІБНО ДЛЯ ТОГО, ЩОБ ВИКОНУВАЛОСЬ ПОГОДЖЕННЯ ПРО ДОДАТНІЙ НАПРЯМОК ЗА ПРАВИЛОМ ПРАВОЇ РУКИ.

1

$$[T]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0\\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

2

$$[T]=\begin{bmatrix}\cos\psi & \sin\psi & 0 & 0\\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

3

$$[T]=\begin{bmatrix}\cos\phi & 0 & -\sin\phi & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ \sin\phi & 0 & \cos\phi & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

# ПРОСТОРОВІ ПЕРЕТВОРЕННЯ

З РІВНОСТЕЙ (1), (2), (3) ВИПЛИВАЄ, ЩО ДЕТЕРМІНАНТ КОЖНОЇ З МАТРИЦЬ ПЕРЕТВОРЕНЬ ДОРІВНЮЄ 1, ЩО І НЕОБХІДНО ДЛЯ ЧИСТОГО ОБЕРТАННЯ.

1

$$[T]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0\\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

2

$$[T]=\begin{bmatrix}\cos\psi & \sin\psi & 0 & 0\\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

3

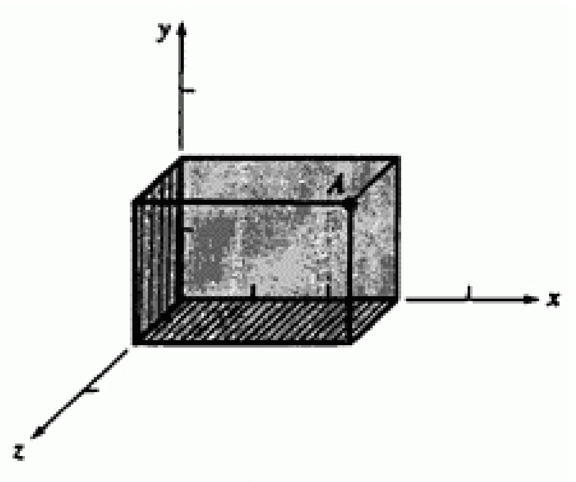
$$[T]=\begin{bmatrix}\cos\phi & 0 & -\sin\phi & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ \sin\phi & 0 & \cos\phi & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

# ПРОСТОРОВІ ПЕРЕТВОРЕННЯ

<u>ПРИКЛАД ОБЕРТАННЯ</u>

РОЗГЛЯНЕМО ПРЯМОКУТНИЙ ПАРАЛЕЛЕПІПЕД, ЗОБРАЖЕНИЙ НА РИС. а. МАТРИЦЯ **[X]** КООРДИНАТНОГО ВЕКТОРА МАЄ ВИГЛЯД

$$[X] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ A \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$



(a)

В ДАНОМУ ВИПАДКУ РЯДОК **А** В МАТРИЦІ **[X]**, ВІДПОВІДАЄ ТОЧЦІ **А**

# ПРОСТОРОВІ ПЕРЕТВОРЕННЯ

РІВНІСТЬ (1) ДЛЯ ОБЕРТУ НА $\theta = -90^\circ$ НАВКОЛО ОСІ ***x*** ПРИЗВОДИТЬ ДО НАСТУПНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ:

1

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# ПРОСТОРОВІ ПЕРЕТВОРЕННЯ

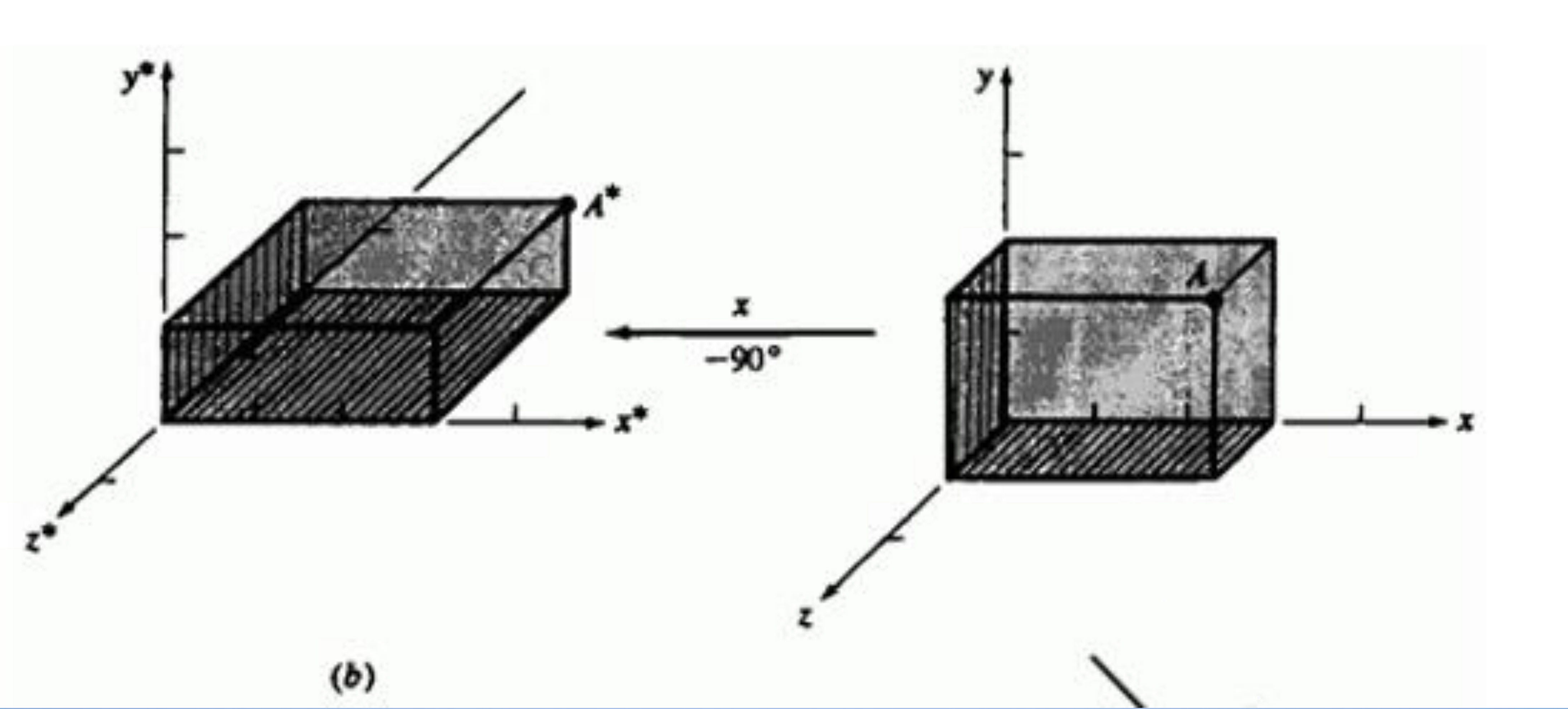
ЗАСТОСУВАННЯ ЦЬОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ ДАЄ НОВІ КООРДИНАТИ:

$$\left[X^*\right]=[X][T]=\begin{bmatrix}0&0&1&1\\3&0&1&1\\3&2&1&1\\0&2&1&1\\0&0&0&1\\3&0&0&1\\3&2&0&1\\0&2&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\3&1&0&1\\3&1&-2&1\\0&1&-2&1\\0&0&0&1\\3&0&0&1\\3&0&-2&1\\0&0&-2&1\end{bmatrix}A^*$$

ВІДЗНАЧИМО, ЩО, ЯК І ПОВИННО БУТИ, **x**-КОМПОНЕНТИ [X] ТА $\left[X^*\right]$ ІДЕНТИЧНІ. РЕЗУЛЬТАТ ДАНОГО ПОВОРОТУ ЗОБРАЖЕНИЙ НА РИС. Ь.

# ПРОСТОРОВІ ПЕРЕТВОРЕННЯ

- 



# ПРОСТОРОВІ ПЕРЕТВОРЕННЯ

ДЛЯ ОБЕРТУ НА КУТ $\phi = +90^\circ$ НАВКОЛО ОСІ ***y*** УРАВЛІННЯ (3) ДАЄ НАСТУПНУ МАТРИЦЮ ПЕРЕТВОРЕННЯ.

3

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & -\sin\phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\phi & 0 & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# ПРОСТОРОВІ ПЕРЕТВОРЕННЯ

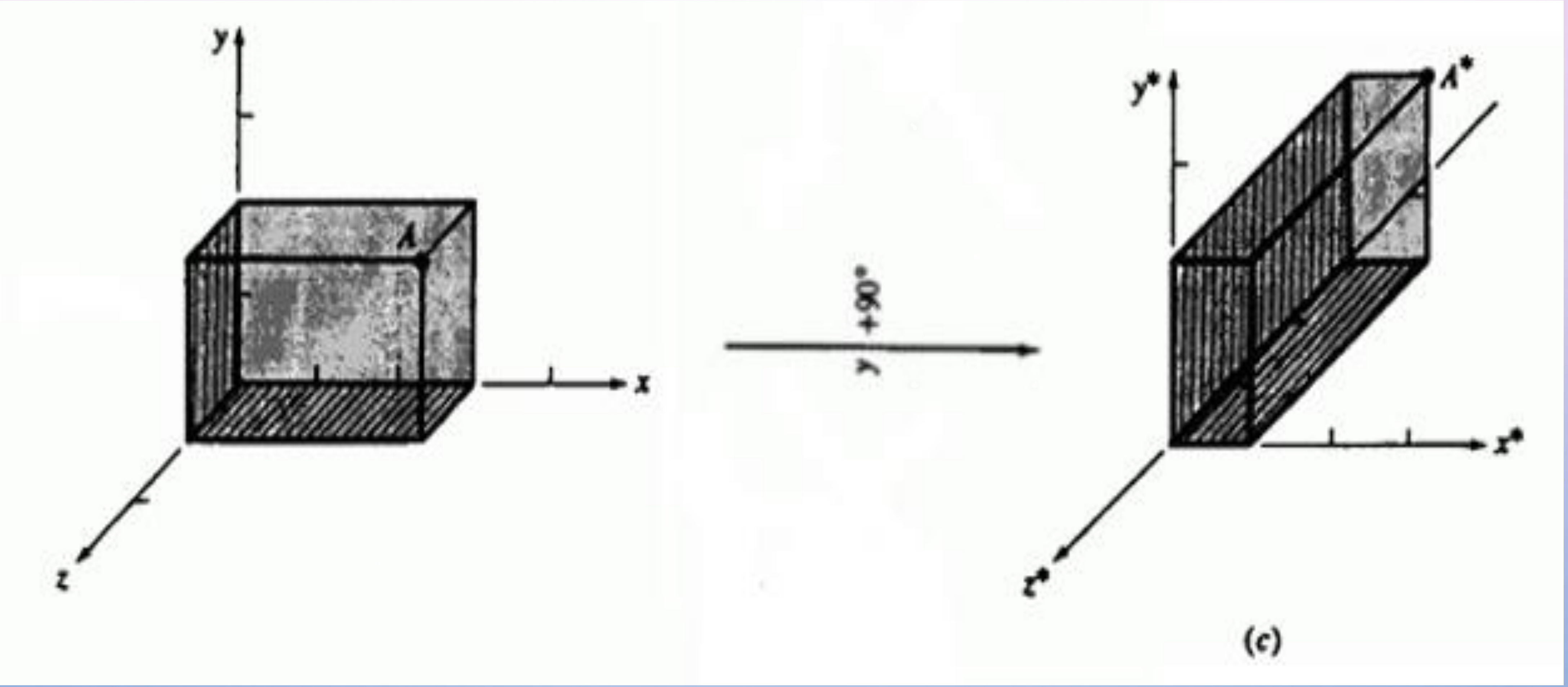
ЗНОВУ ЗАСТОСУВАВШИ ПЕРЕТВОРЕННЯ ДО ВИХІДНОГО ПАРАЛЕЛЕПІПЕДА, ОТРИМАЄМО НОВІ КООРДИНАТИ:

$$\left[X^{*}\right]=[X][T']=\begin{bmatrix}0&0&1&1\\3&0&1&1\\3&2&1&1\\0&2&1&1\\0&0&0&1\\3&0&0&1\\3&2&0&1\\0&2&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&-1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&1\\1&0&-3&1\\1&2&-3&1\\1&2&0&1\\0&0&0&1\\0&0&-3&1\\0&2&-3&1\\0&2&0&1\end{bmatrix}A^{*}$$

В ЦЬОМУ ВИПАДКУ ІДЕНТИЧНІ ***y***-КОМПОНЕНТИ [X] ТА $\left[X^{*}\right]$. РЕЗУЛЬТАТ ЗОБРАЖЕНИЙ НА РИС. с.

# ПРОСТОРОВІ ПЕРЕТВОРЕННЯ

•



# ПРОСТОРОВІ ПЕРЕТВОРЕННЯ

ТАК ЯК ТРИВИМІРНІ ОБЕРТАННЯ ВИХОДЯТЬ ЗА ДОПОМОГОЮ МНОЖЕННЯ МАТРИЦЬ, ТО ВОНИ НЕ КОМУТАТИВНІ (ПОРЯДОК ПЕРЕМНОЖЕННЯ ВПЛИВАЄ НА КІНЦЕВИЙ РЕЗУЛЬТАТ).

ЩОБ ПОКАЗАТИ ЦЕ, РОЗГЛЯНЕМО ДВА ПОСЛІДОВНИХ ОБЕРТИ НА ОДИН І ТОЙ ЖЕ КУТ - СПОЧАТКУ НАВКОЛО ОСІ ***x***, ПОТІМ НАВКОЛО ОСІ ***y***. ВИКОРИСТОВУЮЧИ (1), (2), (3)

1

$$[T]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2

$$[T]=\begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3

$$[T]=\begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & -\sin\phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\phi & 0 & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# ПРОСТОРОВІ ПЕРЕТВОРЕННЯ

ОТРИМАЄМО



$$[T]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0\\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta & 0 & -\sin\theta & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ \sin\theta & 0 & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & 0 & -\sin\theta & 0\\ \sin^2\theta & \cos\theta & \cos\theta\sin\theta & 0\\ \cos\theta\sin\theta & -\sin\theta & \cos^2\theta & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

# ПРОСТОРОВІ ПЕРЕТВОРЕННЯ

З ІНШОГО БОКУ, ЗВОРОТНЯ ОПЕРАЦІЯ - ОБЕРТ НАВКОЛО ОСІ ***y***, А ПОТІМ НАВКОЛО ОСІ ***x*** З КУТОМ $\theta = \phi$ ДАЄ



$$[T] = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin^2\theta & -\cos\theta\sin\theta & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ \sin\theta & -\cos\theta\sin\theta & \cos^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# ПРОСТОРОВІ ПЕРЕТВОРЕННЯ

ПОРІВНЮЮЧИ ПРАВІ ЧАСТИНИ (4) ТА (5), БАЧИМО, ЩО ВОНИ <u>НЕ ОДНАКОВІ</u>. ЯКЩО ПОТРІБНО ЗРОБИТИ БІЛЬШ ОДНОГО ОБЕРТУ, ТО СЛІД ПАМ'ЯТАТИ ПРО НЕКОМУТОВАНІСТЬ ТРИВИМІРНИХ ОБЕРТАНЬ.

4

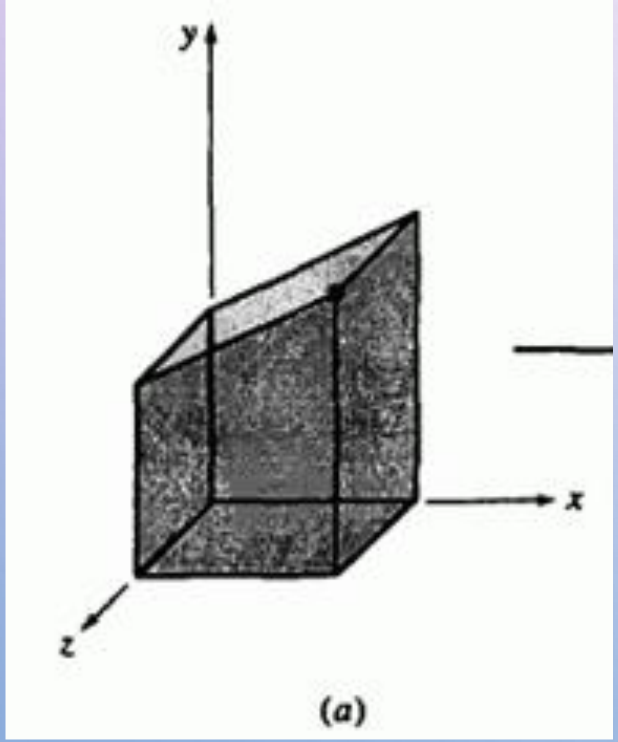
$$= \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta & 0 \\ \sin^2\theta & \cos\theta & \cos\theta\sin\theta & 0 \\ \cos\theta\sin\theta & -\sin\theta & \cos^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

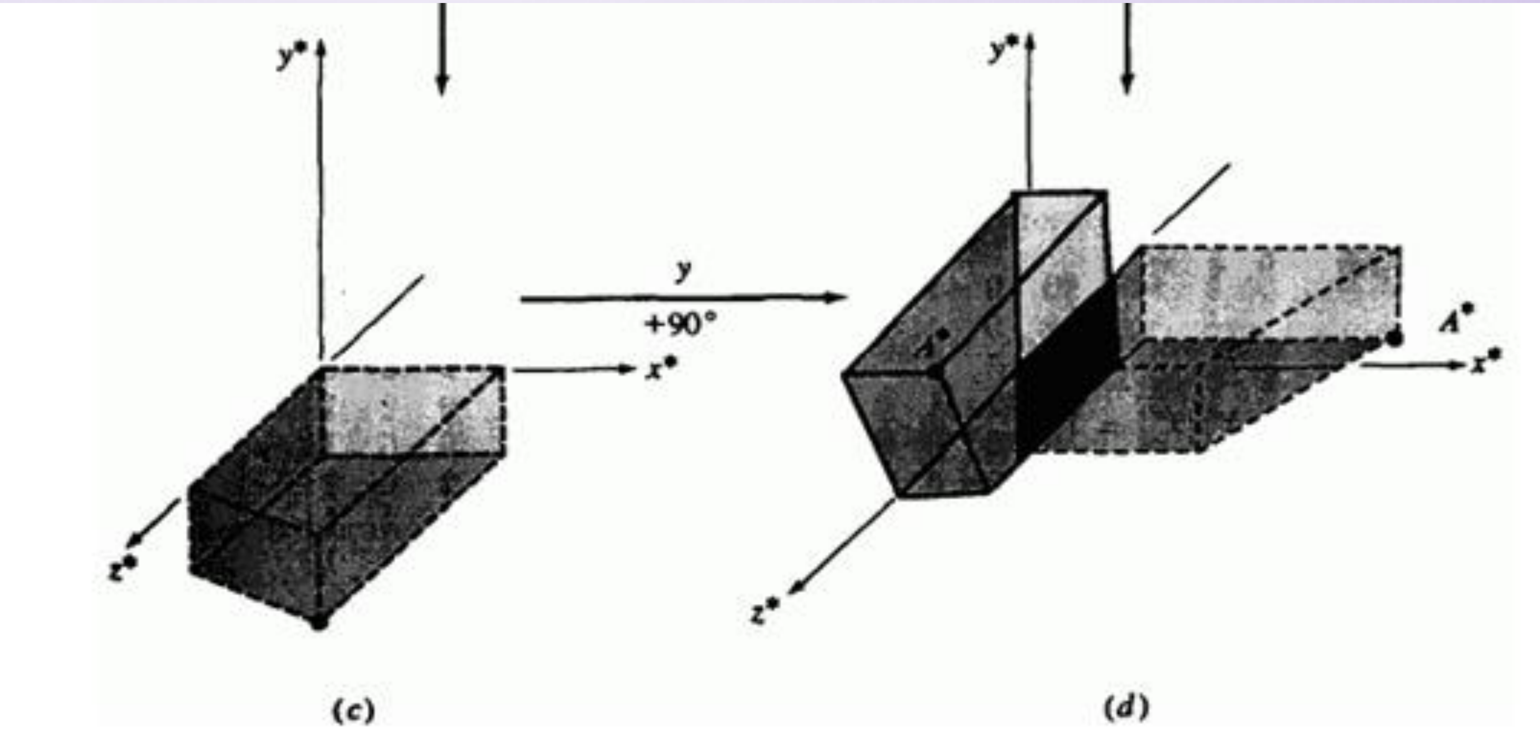
5

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin^2\theta & -\cos\theta\sin\theta & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ \sin\theta & -\cos\theta\sin\theta & \cos^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# ПРОСТОРОВІ ПЕРЕТВОРЕННЯ

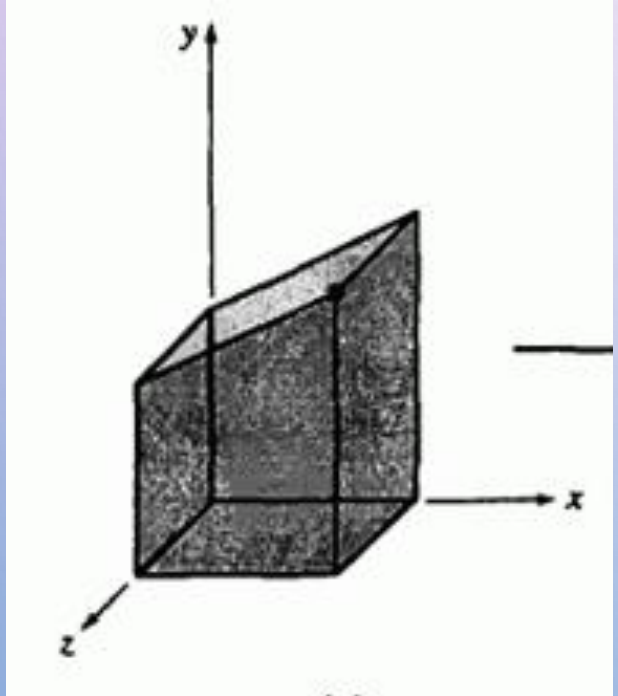
НА РИС. c ТА d ШТРИХОВОЮ ЛІНІЄЮ ЗОБРАЖЕНО РЕЗУЛЬТАТ ПЕРЕТВОРЕННЯ, ЩО СКЛАДАЄТЬСЯ З ДВОХ ОБЕРТІВ НА 90° ЗА ДОПОМОГОЮ ПЕРЕМНОЖЕННЯ МАТРИЦЬ 3 (4) ДЛЯ ОБ’ЄКТУ РИС. a.



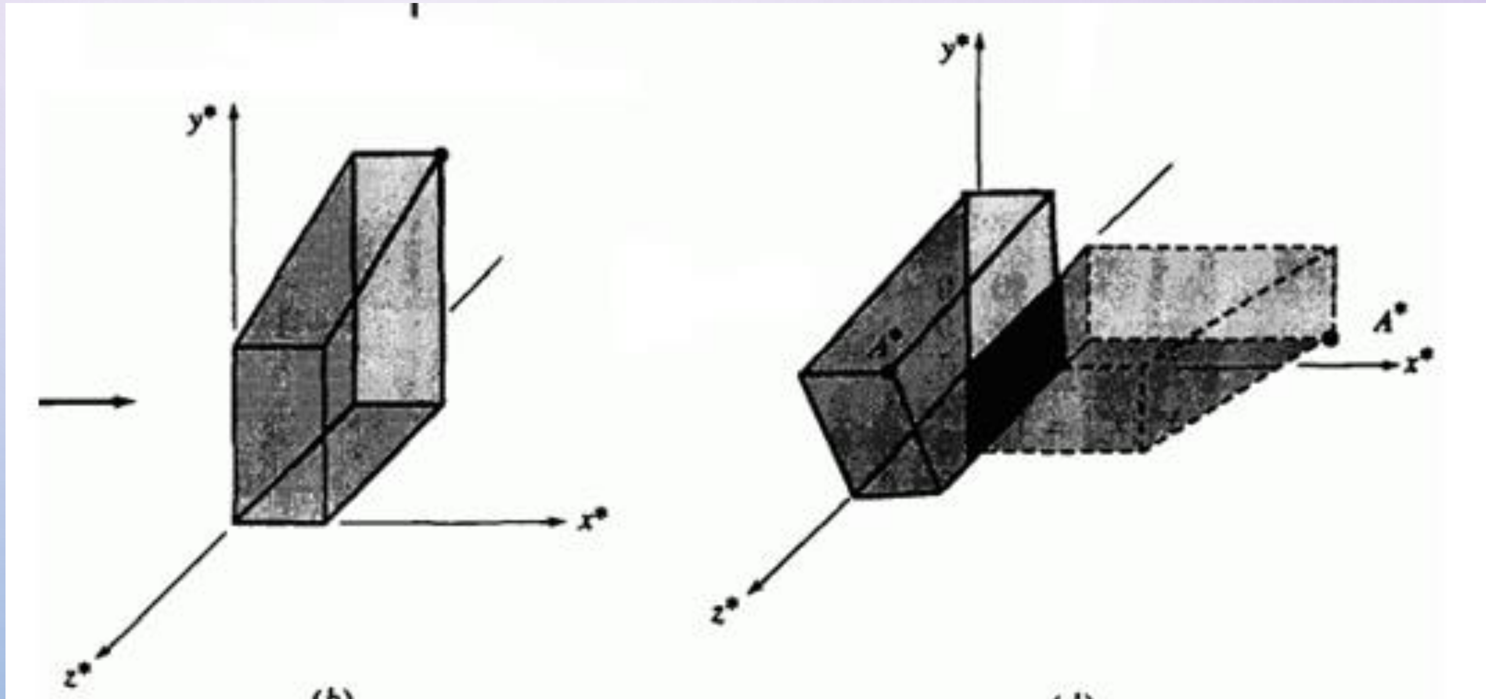



# ПРОСТОРОВІ ПЕРЕТВОРЕННЯ

ЗДІЙСНЮЮЧИ ОБЕРТАННЯ, ЗАДАНІ (5), В ЗВОРОТНЬОМУ ПОРЯДКУ, ОТРИМАЄМО ФІГУРИ, ЗОБРАЖЕНІ СУЦІЛЬНИМИ ЛІНІЯМИ НА РИС. Ь ТА d.



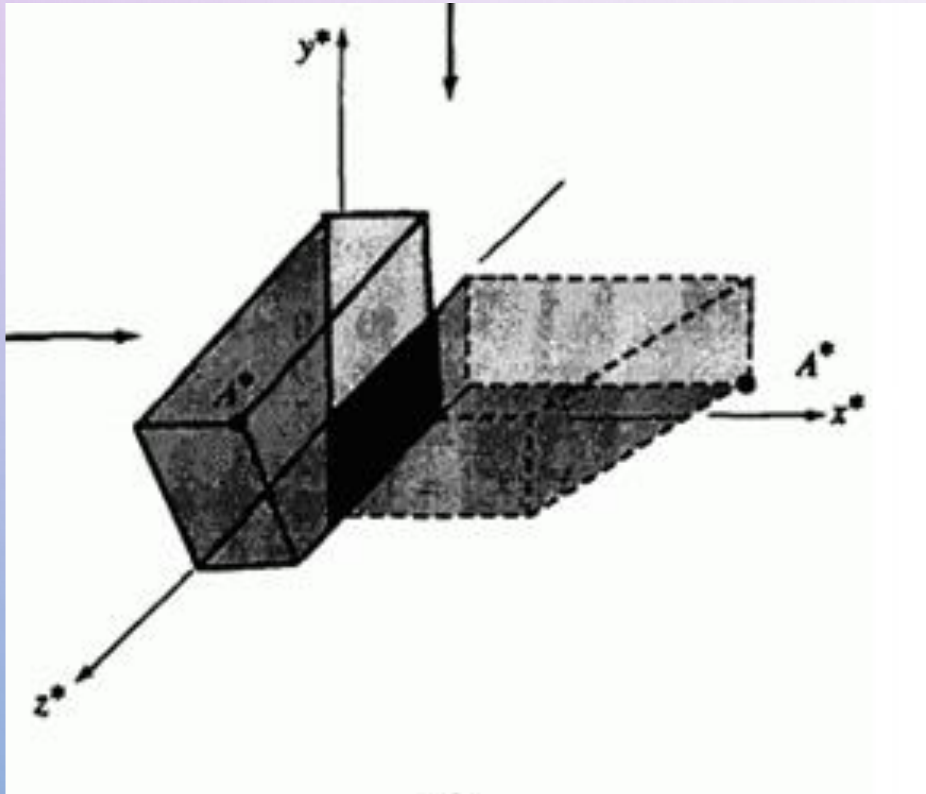

(a)




(b) (d)

# ПРОСТОРОВІ ПЕРЕТВОРЕННЯ

РИС. d НАОЧНО ПОКАЗУЄ, ЩО ПРИ ЗМІНІ ПОРЯДКУ ОБЕРТАННЯ ВИХОДЯТЬ РІЗНІ РЕЗУЛЬТАТИ.



(d)

НЕКОМУТАТИВНІСТЬ ТРИВІМІРНИХ ОБЕРТІВ

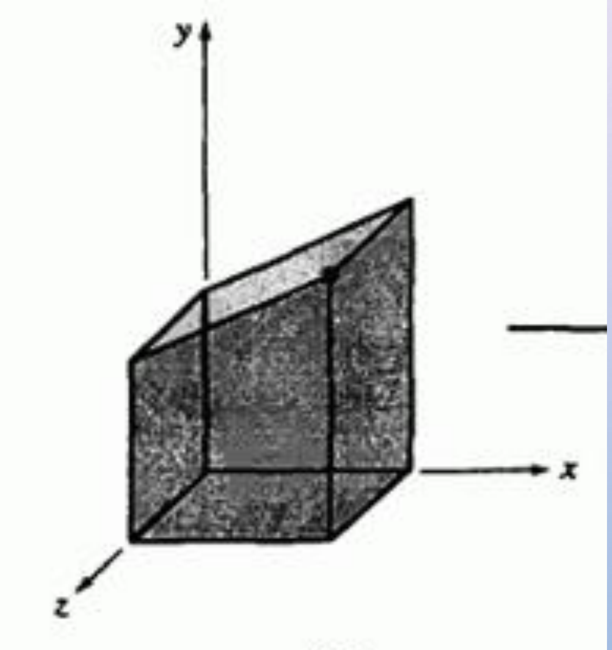
# ПРОСТОРОВІ ПЕРЕТВОРЕННЯ

НАВЕДЕНИЙ ЧИСЕЛЬНИЙ ПРИКЛАД ІЛЮСТРУЄ ЦЕ.

<u>ПРИКЛАД - КОМБІНОВАНІ ПОВОРОТИ</u>

ОБ'ЄКТ НА РИС. а МАЄ НАСТУПНІ КООРДИНАТНІ ВЕКТОРИ:

$$[X]=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$$



(a)

# ПРОСТОРОВІ ПЕРЕТВОРЕННЯ

ЗАГАЛЬНА МАТРИЦЯ ДЛЯ ОБЕРТАННЯ СПОЧАТКУ НАВКОЛО ОСІ ***x*** НА КУТ $\theta = -90^\circ$, А ПОТІМ НАВКОЛО ОСІ ***y*** НА КУТ $\phi = 90^\circ$ ЗАДАЄТЬСЯ РІВНЯННЯМ (4) У ВИГЛЯДІ

4

$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta & 0 \\ \sin^2\theta & \cos\theta & \cos\theta\sin\theta & 0 \\ \cos\theta\sin\theta & -\sin\theta & \cos^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

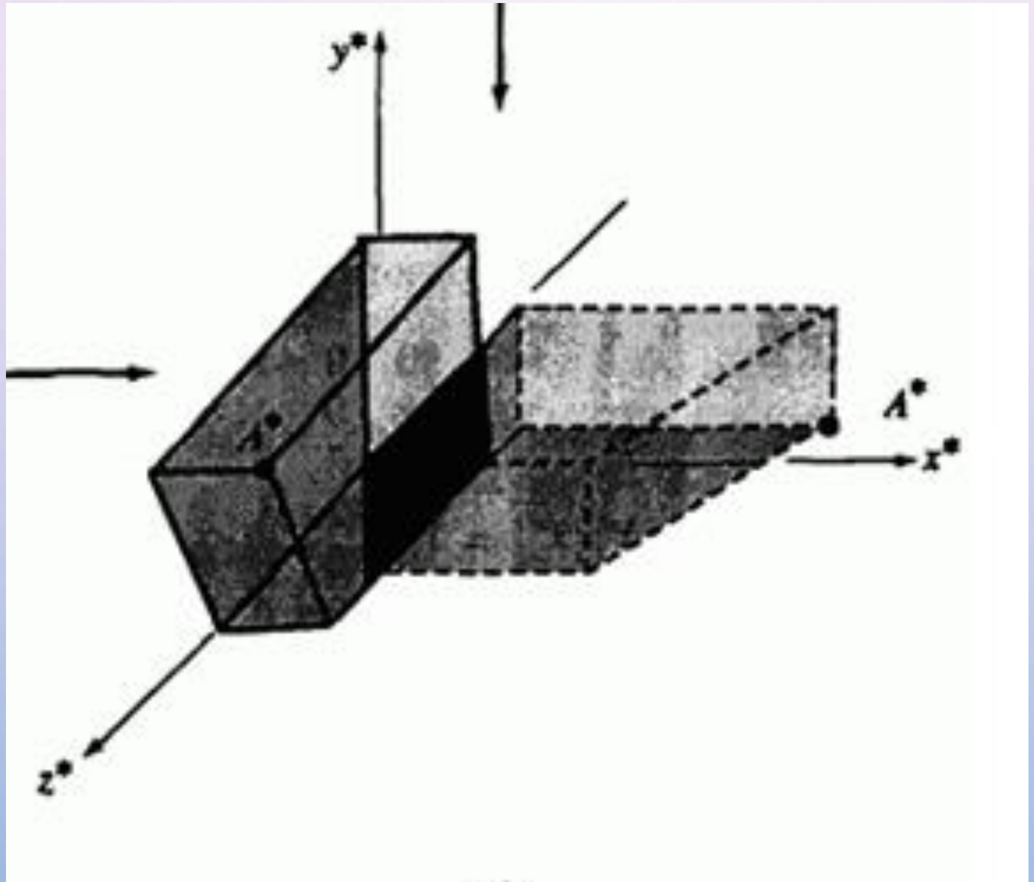
# ПРОСТОРОВІ ПЕРЕТВОРЕННЯ

ПЕРЕТВОРЕНІ КООРДИНАТНІ ВЕКТОРИ РІВНІ

$$\left[X^*\right]=[X][T]=\begin{bmatrix}0&0&1&1\\2&0&1&1\\2&3&1&1\\0&2&1&1\\0&0&0&1\\2&0&0&1\\2&3&0&1\\0&2&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&-1&0\\1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-1&0&1\\0&-1&-2&1\\3&-1&-2&1\\2&-1&0&1\\0&0&0&1\\0&0&-2&1\\3&0&-2&1\\2&0&0&1\end{bmatrix}A^*$$

# ПРОСТОРОВІ ПЕРЕТВОРЕННЯ

ПЕРЕТВОРЕНИЙ ОБ'ЄКТ ЗОБРАЖЕНИЙ ШТРИХОВИМИ ЛІНІЯМИ НА РИС. d



(d)

# ПРОСТОРОВІ ПЕРЕТВОРЕННЯ

ЗАГАЛЬНА МАТРИЦЯ ДЛЯ ОБЕРТАННЯ СПОЧАТКУ НАВКОЛО ОСІ ***y*** НА КУТ $\phi = 90°$, А ПОТІМ НАВКОЛО ОСІ ***x*** НА КУТ $\theta = -90°$ ЗАДАЄТЬСЯ РІВНЯННЯМ (5) У ВИГЛЯДІ

5

$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin^2\theta & -\cos\theta\sin\theta & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ \sin\theta & -\cos\theta\sin\theta & \cos^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

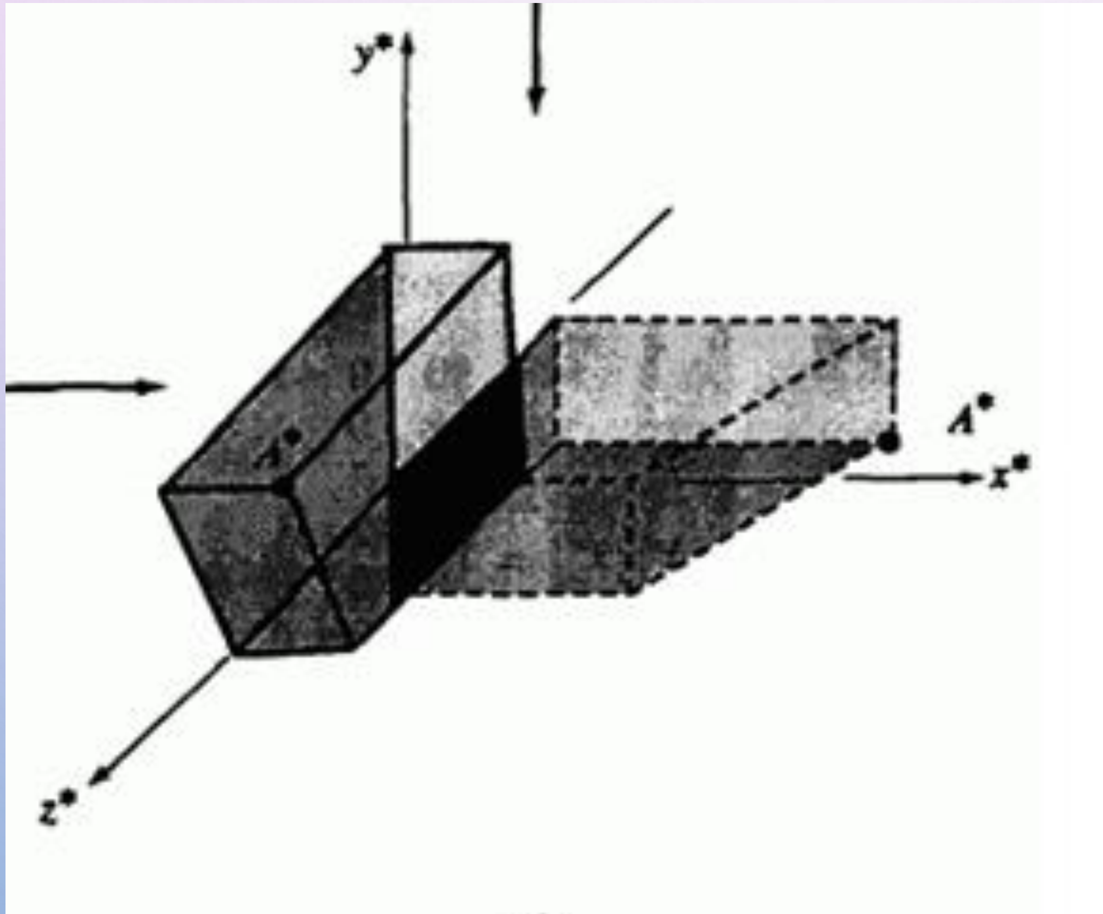
# ПРОСТОРОВІ ПЕРЕТВОРЕННЯ

В ЦЬОМУ ВИПАДКУ ПЕРЕТВОРЕНІ КООРДИНАТНІ ВЕКТОРИ РІВНІ

$$\left[X^{*\prime}\right]=[X][T']=\begin{bmatrix}0&0&1&1\\2&0&1&1\\2&3&1&1\\0&2&1&1\\0&0&0&1\\2&0&0&1\\2&3&0&1\\0&2&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&1\\1&2&0&1\\1&2&3&1\\1&0&2&1\\0&0&0&1\\0&2&0&1\\0&2&3&1\\0&0&2&1\end{bmatrix}A^{*\prime}$$

# ПРОСТОРОВІ ПЕРЕТВОРЕННЯ

ПЕРЕТВОРЕНИЙ ОБ'ЄКТ ЗОБРАЖЕНИЙ СУЦІЛЬНИМИ ЛІНІЯМИ НА РИС. d.

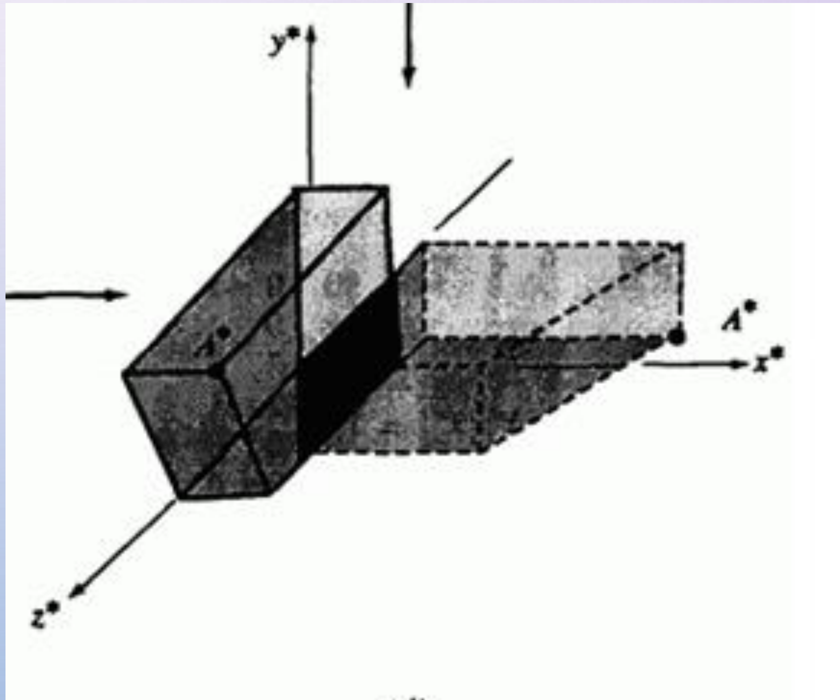



(d)

# ПРОСТОРОВІ ПЕРЕТВОРЕННЯ

ПОРІВНЯННЯ ДВОХ ЧИСЛОВИХ РЕЗУЛЬТАТІВ ТАКОЖ ПОКАЗУЄ, ЩО ОРІЄНТАЦІЯ ПЕРЕТВОРЕНИХ ОБ'ЄКТІВ АБСОЛЮТНО РІЗНА. ОТЖЕ, ПОРЯДОК МНОЖЕННЯ МАТРИЦЬ ДУЖЕ ВАЖЛИВИЙ.

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A^{*} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} A^{**}$$




(d)

# ТЕХНОЛОГІЇ ТА ЗАСОБИ РОЗРОБКИ КОМП'ЮТЕРНОЇ ГРАФІКИ ТА МУЛЬТИМЕДІА

## ДЯКУЮ ЗА УВАГУ!

СТ. ВИКЛ. ІСТ ХМЕЛЮК М.С.