R3 概率学概念

学习目标

1. 定义随机变量、结果和事件
2. 识别概率的两个定义属性，包括相互排斥和详尽的事件，并比较和对比经验概率、主观概率和先验概率
3. 用支持和反对事件的几率来描述事件的概率
4. 计算和解释条件概率
5. 演示概率乘法和加法规则的应用
6. 比较和对比依赖和独立事件

7. 使用全概率规则计算和解释无条件概率
8. 计算和解释随机变量的期望值、方差和标准差
9. 解释在投资应用中使用条件期望
10. 解释概率树并展示其在投资问题中的应用
11. 计算和解释投资组合收益的期望值、方差、标准差、协方差和相关性
12. 使用联合概率函数计算和解释投资组合收益的协方差
13. 使用贝叶斯公式计算和解释更新的概率
14. 确定解决特定计数问题的最合适方法，并使用阶乘、组合和排列概念分析计数问题

条件概率和联合概率

- unconditional probability 无条件概率
- conditional probability 条件概率
- joint probability 联合概率
- $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$,$P(B)\neq 0$
- Multiplication Rule for Probability $P(AB)=P(A|B)P(B)$
- addition rule for probabilities $P(AorB)=P(A)+P(B)-P(AB)$
- 事件A和B是independent独立的，当且仅当$P(A|B)=P(A)$或$P(B|A)=P(B)$
- 事件是dependent依赖（相关）的：一个事件发生的概率与另一个事件的发生有关。
- Multiplication Rule for Independent Events独立事件的乘法规则$P(AB)=P(A)P(B)$
- total probability rule $P(A)=P(AS)+P(AS^C)$

期望值(平均值)、方差和期望值和方差的条件测量

- 随机变量的期望值$E(X)$
- 随机变量的方差$\sigma^2(X) = E\{[X - E(X)]^2\}$
- standard deviation标准差是方差的正平方根
- $\sigma^2(X) = \sum_{i=1}^{n} P(X_i)[X_i - E(X)]^2$
- conditional expected values $E(X|S) = P(X_1|S)X_1 + P(X_2|S)X_2 + \cdots + P(X_n|S)X_n$
- total probability rule for expected value:
  $E(X) = E(X|S)P(S) + E(X|S^C)P(S^C)$
  $E(X) = E(X|S_1)P(S_1) + E(X|S_2)P(S_2) + \cdots + E(X|S_n)P(S_n)$
- probability tree diagram, node
- conditional variances

期望值，方差，标准差，协方差和相关性

- Calculation of Portfolio Expected Return 投资组合预期回报的计算
  $E(R_p) = E(w_1 R_1 + w_2 R_2 + \cdots + w_n R_n)$
  $= w_1 E(R_1) + w_2 E(R_2) + \cdots + w_n E(R_n)$
- 两个随机变量R_i和R_j的协方差
  $Cov(R_i, R_j) = E[(R_i - ER_i)(R_j - ER_j)]$
  $Cov(R_i, R_j) = \sum_{n=1}^{n}(R_{i,t} - \bar{R}_i)(R_{j,t} - \bar{R}_j)/(n-1)$
- covariance matrix 协方差矩阵
- 两个随机变量R_i和R_j之间的correlation相关性
  $\rho(R_i, R_j) = Cov(R_i, R_j)/[\sigma(R_i)\sigma(R_j)]$
  $Cov(R_i, R_j) = \rho(R_i, R_j)\sigma(R_i)\sigma(R_j)$

给定联合概率分布的协方差

- joint probability function联合概率函数计算协方差
- $Cov(R_A, R_B) = \sum_i \sum_j P(R_{A,i}, R_{B,j})(R_{A,i} - ER_A)(R_{B,j} - ER_B)$
- 两个随机变量X和Y是独立当且仅当$P(X,Y) = P(X)P(Y)$
- 不相关随机变量乘积期望值的乘法规则
  $E(XY) = E(X)E(Y)$

给定一组感兴趣事件的先验概率，如果你收到新的信息，更新事件概率的规则是
$$= \frac{Probability\ of\ the\ new\ information\ given\ event}{Unconditional\ probability\ of\ the\ new\ information} * Prior\ probability\ of\ event$$
$$P(Event|Information) = \frac{P(Information|Event)}{P(Information)} * P(Event)$$

- prior probability先验概率
- likehoods观察的条件概率
- posterior probability后验概率：反映或出现在新信息之后的更新概率。

计数原理

- Multiplication Rule for Counting计数的乘法原理$(n_1)(n_2)\cdots(n_k)$
- Multinomial Formula (General Formula for Labeling Problems)多项式公式(标签问题的通用公式)
$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}, n_1 + n_2 + \cdots + n_K = n$$
- combination组合是一个列表，其中列出的项目的顺序无关紧要。
- Combination Formula (Binomial formula) 二项式公式
$$C_n^r = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$