Лабораторная работа №1

Тема: Относительная частота события. Статистическое определение вероятности. Геометрическое определение вероятности.

Цель работы:

1. Изучить понятие относительной частоты и её свойство устойчивости.
2. Экспериментально подтвердить статистическое определение вероятности (закон больших чисел на начальном уровне).
3. Научиться решать задачи и проводить моделирование на геометрическую вероятность (метод Монте-Карло).

Инструментарий: Python (библиотеки random, numpy, matplotlib)

Краткая теоретическая справка

1. **Относительная частота** события A вычисляется по формуле:
$$W(A) = \frac{m}{n}$$
где m — число испытаний, в которых событие A наступило, n — общее число произведенных испытаний.
2. **Статистическое определение вероятности:** При $n \to \infty$ относительная частота $W(A)$ стремится к вероятности $P(A)$.
3. **Математическое ожидание** дискретной случайной величины X (теоретическое среднее): $E(x) = \sum x_i p_i$ где x_i - значения величины, p_i - их вероятности.
4. **Закон больших чисел (для среднего):** При n → ∞ среднее арифметическое n наблюдений случайной величины стремится к её математическому ожиданию E(X).
5. **Геометрическая вероятность:** Если множество всех исходов Ω можно изобразить в виде геометрической фигуры меры $S(\Omega)$ (длина, площадь, объем), а множество благоприятных исходов — в виде фигуры меры $S(A)$, являющейся частью Ω, то:
$$P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)}$$

Ход работы

Задание 1. Статистическое определение вероятности (Моделирование подбрасывания кубика)

Задача: Проверить свойство устойчивости относительной частоты при увеличении числа испытаний.

1. Сформулируйте гипотезу: Какова теоретическая вероятность выпадения грани «6» при броске игральной кости? ($P = 1/6 \approx 0.1667$).
2. Проведите эксперимент в Python:
    - Смоделируйте бросок игральной кости (генерация случайного целого числа от 1 до 6).
    - Проведите 4 серии испытаний с разным количеством бросков (n):
        - $n = 20$
        - $n = 100$

        - $n = 500$
        - $n = 1000$ (или более)
3. Обработка данных:
    - Для каждой серии подсчитайте количество выпадений «6» (m).
    - Вычислите относительную частоту $W = m/n$.
4. Анализ:
    - Заполните таблицу:

Число испытаний (n)	Число успехов (m)	Относительная частота (W)	Теоретическая вер-ть (P)	Отклонение $\mid W - P \mid$
20	...	...	0.1667	...
100	...	...	0.1667	...
500	...	...	0.1667	...
1000	...	...	0.1667	...

Задание 2. Иллюстрация Закона больших чисел для среднего значения

Задача: Проверить сходимость выборочного среднего к теоретическому математическому ожиданию.

Аналитический расчет:

1. Случайная величина X — число, выпавшее на кости.
2. Вычислите теоретическое математическое ожидание E(X) для броска кости.

Эксперимент в Python:

3. Проведите 3 серии испытаний с n = 100, 1000, 10000.
4. Для каждой серии сгенерируйте n исходов броска кости.
5. Вычислите выборочное среднее (среднее арифметическое) для каждой серии.

Анализ:

6. Сравните полученные выборочные средние с теоретическим E(X) = 3.5.
7. Сделайте вывод, как число испытаний n влияет на точность приближения.

Задание 3. Геометрическая вероятность на отрезке (Одномерный случай)

Задача: Решить задачу на геометрическую вероятность в одномерном пространстве.

Условие: На отрезке [0, 1] случайным образом выбирается точка. Какова вероятность, что она попадет в подынтервал [0.3, 0.8]?

Аналитическое решение: Вычислите теоретическую вероятность, используя формулу P = Длина(A) / Длина(Ω).

Имитационное моделирование:

1. Сгенерируйте N = 10000 случайных чисел в диапазоне от 0 до 1.
2. Подсчитайте, сколько из них (M) попало в интервал [0.3, 0.8].
3. Вычислите эмпирическую вероятность P_эмп = M/N.

Анализ: Сравните аналитический результат с результатом моделирования. Оцените погрешность.

Задание 4. Геометрическая вероятность (Задача о встрече)
Условие: Два студента условились встретиться в библиотеке между 12:00 и 13:00. Пришедший первым ждет другого в течение 15 минут, после чего уходит. Какова вероятность того, что встреча состоится, если каждый выбирает момент прихода наудачу?

1. Аналитическое решение:
   - Изобразите область возможных исходов (квадрат со стороной 60 мин).
   - Изобразите область благоприятных исходов (полоса $| x - y | \leq 15$).
   - Вычислите площадь благоприятной области и найдите теоретическую вероятность по формуле геометрической вероятности.
2. Имитационное моделирование (Проверка):
   - Сгенерируйте в Python две колонки случайных чисел от 0 до 60 (время прихода 1-го и 2-го студента). Объем выборки $n = 500$
   - Создайте третью колонку, проверяющую условие встречи:
     $| t_1 - t_2 | \leq 15$. (Если условие выполняется — 1, если нет — 0).
   - Посчитайте долю успешных встреч.
   - Сравните полученное значение с аналитическим решением из пункта 1.

Задание 5. Геометрическая вероятность (Метод Монте-Карло для числа π)
Задача: Определить геометрическую вероятность попадания точки в круг, вписанный в квадрат.

1. Рассмотрим квадрат со стороной $a = 2$ (координаты x, y от -1 до 1) и вписанный в него круг радиуса $R = 1$.
2. Теоретическая вероятность попадания точки в круг:

$$P = \frac{S_{\text{круга}}}{S_{\text{квадрата}}} = \frac{\pi R^2}{(2R)^2} = \frac{\pi}{4}$$

.

3. Эксперимент:
   - Сгенерируйте $N = 1000$ пар случайных чисел (x, y), равномерно распределенных от -1 до 1.
   - Проверьте условие попадания в круг:

$x^2 + y^2 \leq 1$.

   - Подсчитайте количество точек M, попавших в круг.
   - Вычислите эмпирическую вероятность $P_{\text{эмп}} = M/N$.
   - Исходя из формулы $P \approx \pi/4$, вычислите приближенное значение числа π по формуле: $\pi \approx 4 \cdot P_{\text{эмп}}$.

Контрольные вопросы

1. В чем различие между классическим, статистическим и геометрическим определениями вероятности?
2. В чем разница между сходимостью относительной частоты (Задание 1) и сходимостью выборочного среднего (Задание 2)?

3. Почему для "Задачи о встрече" мы используем площадь, а для задачи на отрезке — длину?
4. Как изменится точность вычисления числа π (Задание 5), если увеличить количество точек N с 10 000 до 1 000 000? Почему?
5. Приведите пример задачи, которую невозможно решить классическим методом, но можно решить с помощью геометрического определения вероятности.

Требования к отчету

Отчет должен содержать:

1. Титульный лист.
2. Цель работы.
3. **Задание 1:** Таблица с результатами и график зависимости относительной частоты от числа испытаний. Вывод о сходимости частоты.
4. **Задание 2:** Расчет E(X), таблицу с результатами моделирования, вывод о сходимости среднего.
5. **Задание 3:** Аналитический расчет, результат моделирования и их сравнение.
6. **Задание 4:** Чертеж к аналитическому решению, расчеты и результат моделирования.
7. **Задание 5:** Расчетное значение числа π, полученное в ходе эксперимента, и процент ошибки относительно истинного значения (3.1415...).
8. Ответы на контрольные вопросы.
9. Файл с расчетами (код Python) добавить в конец файла.