

Зертханалық жұмыс №1

Тақырыбы:

Оқиғаның салыстырмалы жиілігі. Іқтималдықтың статистикалық анықтамасы. Іқтималдықтың геометриялық анықтамасы.

Жұмыстың маңсаты:

- Салыстырмалы жиілік ұғымын және оның орнықтылық (тұрақтылық) қасиетін зерттеу.
- Іқтималдықтың статистикалық анықтамасын тәжірибе жүзінде растау (үлкен сандар заңының бастапқы деңгейі).
- Геометриялық ықтималдыққа есептер шығаруды және модельдеуді үйрену
(Монте-Карло әдісі).

Қолданылатын құралдар:

Python (random, numpy, matplotlib кітапханалары)

Қысқаша теориялық мәлімет

- А оқиғасының салыстырмалы жиілігі келесі формуламен есептеледі:

$$W(A) = \frac{m}{n}$$

Мұндағы

- m — А оқиғасы болған сынақтар саны,
- n — жүргізілген барлық сынақтар саны.

2. Іқтималдықтың статистикалық анықтамасы:

$n \rightarrow \infty$ болғанда, салыстырмалы жиілік $W(A)$ оқиғаның ықтималдығына $P(A)$ ұмтылады.

3. Дискретті кездейсоқ шаманың математикалық күтімі X (теориялық орташа мән):

$$E(X) = \sum x_i p_i$$

Мұндағы

- x_i — шаманың мәндері,
- p_i — сол мәндердің ықтималдықтары.

4. Үлкен сандар заңы (орташа мән үшін):

$n \rightarrow \infty$ болғанда, кездейсоқ шаманың n бақылауынан алынған арифметикалық орташа оның математикалық күтіміне $E(X)$ ұмтылады.

5. Геометриялық ықтималдық:

Егер барлық мүмкін нәтижелер жиыны Ω өлшемі $S(\Omega)$ болатын геометриялық фигура ретінде, ал қолайлы нәтижелер жиыны $S(A)$ өлшемі бар Ω -ның бөлігі ретінде көрсетілсе, онда:

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)}$$

Жұмыстың орындалу барысы

Тапсырма 1. Іқтималдықтың статистикалық анықтамасы

(Текшеңі лақтыруды модельдеу)

Мақсаты:

Сынақтар саны артқан сайын салыстырмалы жиіліктің орнықтылық қасиетін тексеру.

1. Гипотеза құрынызы:

Ойын тасының «6» қырының түсінің теориялық ықтималдығы қандай?

$$P = \frac{1}{6} \approx 0.1667$$

2. Python тілінде эксперимент жүргізіңіз:

- Ойын тасының бір рет лақтырылуын модельденіз (1-ден 6-ға дейінгі кездесең бүтін сан).
- Эртүрлі лақтыру саны бар 4 серия жүргізіңіз (n):
 - $n = 20$
 - $n = 100$
 - $n = 500$
 - $n = 1000$ (немесе одан көп)

3. Деректерді өндөу:

- Әр серия үшін «6» санының түсі санын (m) есептеңіз.
- Салыстырмалы жиілікті есептеңіз:

$$W = \frac{m}{n}$$

4. Талдау:

Кестені толтырынызы:

Сынақтар саны (n)	Сәтті нәтижелер саны (m)	Салыстырмалы жиілік (W)	Теориялық ықтималдық (P)	Ауытқу W - P
20	0.1667	...
100	0.1667	...
500	0.1667	...
1000	0.1667	...

Тапсырма 2. Үлкен сандар заңының орташа мән үшін иллюстрациясы

Мақсаты:

Таңдамалық орташа мәннің теориялық математикалық күтімге жақындаудын тексеру.

Аналитикалық есептеу:

1. X кездесең шамасы — таста түскен сан.
2. Тасты лақтыру үшін $E(X)$ математикалық күтімін есептеңіз.

Python тіліндегі эксперимент:

3. $n = 100, 1000, 10000$ үшін 3 серия жүргізіңіз.
4. Әр серияда n нәтиже генерациялаңыз.
5. Әр серия үшін таңдамалық орташа мәнді есептеніз.

Талдау:

6. Алынған мәндерді теориялық $E(X) = 3.5$ мәнімен салыстырыңыз.
7. n санының артуы жуықтау дәлдігіне қалай әсер ететінін түсіндіріңіз.

Тапсырма 3. Кесіндідегі геометриялық ықтималдық (бірөлшемді жағдай)

Шарт:

- [0,1] кесіндісінде кездейсоқ нүкте таңдалады.
Оның [0.3, 0.8] аралығына түсі ықтималдығы қандай?

Аналитикалық шешім:

$$P = \frac{\text{А ұзындығы}}{\Omega \text{ ұзындығы}}$$

Имитациялық модельдеу:

1. [0,1] аралығында $N = 10000$ кездейсоқ сан генерацияланыз.
2. Олардың [0.3, 0.8] аралығына түскен M санын есептеңіз.
3. Эмпирикалық ықтималдықты табыңыз:

$$P_{\text{эмп}} = \frac{M}{N}$$

Талдау:

Аналитикалық және модельдеу нәтижелерін салыстырып, қателікті бағалаңыз.

Тапсырма 4. Геометриялық ықтималдық (кездесу есебі)

Шарт:

Екі студент кітапханада 12:00–13:00 аралығында кездесуге келісті.
Алғаш келген студент екіншісін 15 минут күтеді де, кетіп қалады.
Әрқайсысы келу уақытын кездейсоқ таңдайды.
Кездесу ықтималдығын табыңыз.

Аналитикалық шешім:

- Мүмкін нәтижелер аймағын (қабырғасы 60 минут болатын квадрат) салыңыз.
- Қолайлы аймақты көрсетіңіз:

$$|x - y| \leq 15$$

- Аудандарды есептеп, геометриялық ықтималдық формуласы арқылы P табыңыз.

Имитациялық модельдеу:

- Python тілінде 0–60 аралығындағы екі кездейсоқ баған жасаңыз ($n = 500$).
- Кездесу шартын тексеретін үшінші баған қосыңыз.
- Сәтті кездесулер үлесін есептеп, аналитикалық нәтижемен салыстырыңыз.

Тапсырма 5. Геометриялық ықтималдық (π санын Монте-Карло әдісімен табу)

1. Қабырғасы $a = 2$ болатын квадрат және оған іштей сзылған $R = 1$ радиусты шеңбер.
2. Теориялық ықтималдық:

$$P = \frac{S_{\text{шеңбер}}}{S_{\text{квадрат}}} = \frac{\pi}{4}$$

3. Эксперимент:

- $N = 1000$ нүктө (x, y) генерациялаңыз.
- Шартты тексеріңіз:

$$x^2 + y^2 \leq 1$$

- Эмпирикалық ықтималдықты есептеңіз.
- π санының жуық мәнін табыңыз:

$$\pi \approx 4 \cdot P_{\text{эмп}}$$

Бақылау сұрақтары

1. Ықтималдықтың классикалық, статистикалық және геометриялық анықтамаларының айырмашылығы неде?
2. Салыстырмалы жиіліктің және таңдамалық орташа мәннің жинақталу айырмашылығы қандай?
3. Неліктен кездесу есебінде аудан, ал кесінді есебінде ұзындық қолданылады?
4. N артқанда π мәнінің дәлдігі неге өседі?
5. Классикалық әдіспен шешілмейтін, бірақ геометриялық ықтималдықпен шешілетін есепке мысал келтіріңіз.

Есеп беру келесі мәліметтерді қамтуы тиіс:

- Студенттің **аты-жөні, тобы.**
- **Жұмыстың мақсаты.**
- **1-тапсырма:** Нәтижелер кестесі және салыстырмалы жиіліктің сынақтар санына тәуелділік графигі. Жиіліктің жинақталуы (сходимость) туралы қорытынды.
- **2-тапсырма:** $E(X)$ мәнін есептеу, модельдеу нәтижелерінің кестесі, орташа мәннің жинақталуы туралы қорытынды.
- **3-тапсырма:** Аналитикалық есептеу, модельдеу нәтижесі және оларды салыстыру.
- **4-тапсырма:** Аналитикалық шешімге арналған сыйба, есептеулер және модельдеу нәтижесі.
- **5-тапсырма:** Эксперимент барысында алынған π санының есептік мәні және оның нақты мәнмен (3.1415...) салыстырғандағы пайыздық қателігі.

- **Бақылау сұрақтарына жауаптар.**
- **Есептеулер файлын (Python коды)** файлдың соңына қосу қажет, егер есеп Word форматында болса, немесе есеп Jupyter Notebook форматында болса, кодты тікелей файлдың ішінде беру керек (*sample.ipynb* — *есептің улгісі*).