参考答案

一、(15 分) 1、$y''-2y'+2y=0$　2、$y^*=(A\cos 2x+B\sin 2x)e^x$　3、$\int_0^2 dy\int_{y/2}^{y} f(x,y)dx+\int_2^4 dy\int_{y/2}^{2} f(x,y)dx$　4、$\frac{1}{2}$　5、$\frac{5}{3}$

二、(15) C A C B C

三、1、解：$\iint\limits_D \sin\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_\pi^{2\pi}\sin r\cdot rdr=2\pi\cdot(-3\pi)=-6\pi$　(5 分)

2、解：方程可化为 $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}-\left(\frac{y}{x}\right)^2$，　令 $\frac{y}{x}=u$，代入上式得：$-\frac{du}{u^2}=\frac{dx}{x}\Rightarrow\frac{1}{u}=\ln|x|+c\Rightarrow y=\frac{x}{\ln|x|+c}$　(5 分)

3、

解：令 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-2z$，则 $F_x=2x$，$F_y=2y$，$F_z=2z-2$，

于是有 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{x}{1-z}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{y}{1-z}$，因此 $dz=\frac{xdx+ydy}{1-z}$

(5 分)

4、解：由题意，$f_x+2xf_y=3x^2\Rightarrow x^2-x^4+2xf_y=3x^2,\therefore\ f_y(x,x^2)=x+\frac{x^3}{2}$　(5 分)

四、1、解：$\iiint\limits_\Omega\sqrt{x^2+y^2}dV=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 r^3dr\int_0^{4-r^2}dz=2\pi\int_0^2 r^3(4-r^2)dr=\frac{32}{3}\pi$　(5 分)

2、解：$V=\iint\limits_D(6-2x-3y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^1(6-2x-3y)dy=\int_0^1(\frac{9}{2}-2x)dx=\frac{7}{2}$　(5 分)

3、解：　添加辅助线 $BA:y=0,x:-2\to 2$，则由格林公式有

$$\oint\limits_{L+BA} xy^2dx+\left(x^2y+2x-1\right)dy=\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\iint\limits_D\left(2xy+2-2xy\right)dxdy=4\pi$$

$\int\limits_{BA} xy^2dx+\left(x^2y+2x-1\right)dy=\int_{-2}^2 0dx=0$　$\int\limits_L xy^2dx+\left(x^2y+2x-1\right)dy=4\pi-0=4\pi$　(5 分)

4、解：　添加辅助平面 $\Sigma_1:z=0$ 被球面所截部分下侧，则 $\Sigma_1+\Sigma$ 为封闭曲面的外侧

利用高斯公式，$\iint\limits_{\Sigma_1+\Sigma}(x+z^2)dydz+(y+x^3)dzdx+(z+y^3)dxdy=\iiint\limits_\Omega\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dV=3\iiint\limits_\Omega dV=2\pi$

$\iint\limits_{\Sigma_1}(x+z^2)dydz+(y+x^3)dzdx+(z+y^3)dxdy=\iint\limits_{\Sigma_1}y^3dxdy=-\iint\limits_D y^3dxdy=0$，则 $\iint\limits_\Sigma(x+z^2)dydz+(y+x^3)dzdx+(z+y^3)dxdy=2\pi$　(5 分)

五、解：(1) $r^2-3r+2=0,r=1,2,Y=c_1e^x+c_2e^{2x}$　(3 分)　(2) $y^*=axe^x,y^{*'}=a(x+1)e^x,y^{*''}=a(x+2)e^x$, 带入得 $a=-1$

通解 $y=c_1e^x+c_2e^{2x}-xe^x$ ...6 分　(3) 由题意 $y(0)=1,y'(0)=-1,c_1=2,c_2=-1,y=2e^x-e^{2x}-xe^x$　(6 分)

六、解：$\because\ \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{y^2-2xy-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial P}{\partial y}$，　$x^2+y^2\neq 0$，　所以曲线积分 $y>0$ 的上半平面与路径无关，　(3 分)

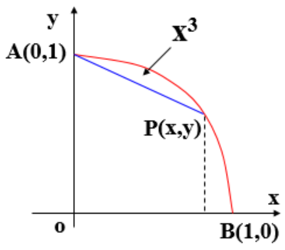
$\therefore I=\int_\pi^0\frac{a^2(-\cos t\sin t+\sin^2t+\cos^2t+\cos t\sin t)}{a^2}dt=\int_\pi^0 dt=-\pi$。　(6 分)

七、解：设曲线方程　$y=y(x)$，由题意 $\int_0^x y(t)dt=\frac{1}{2}(1+y)x+x^3,y(1)=0,$ 两边求导，$y=\frac{1}{2}(y+1)+\frac{1}{2}xy'+3x^2$,

整理得 $y'-\frac{1}{x}y=-\frac{1+6x^2}{x}$，(3 分)，解得 $y=x(c+\frac{1}{x}-6x)$, 将 (1,0) 代入，$c=5,y=1+5x-6x^2$ (6 分)

设所求曲线方程为 $y = y(x)$,由已知条件得

$$\int_0^x y dx - \frac{1}{2}(1+y)x = x^3.$$



两边对 x 求导，得

$$y - \frac{1}{2}(1+y) - \frac{1}{2}y'x = 3x^2,$$

$$\Rightarrow y' - \frac{1}{x}y = -\frac{1}{x} - 6x,$$

$$\Rightarrow y = e^{\int \frac{1}{x}dx}\left[\int(-\frac{1}{x} - 6x)e^{\int(-\frac{1}{x})dx}dx + c\right]$$

$$\Rightarrow y = e^{\int \frac{1}{x}dx}\left[\int(-\frac{1}{x} - 6x)e^{\int(-\frac{1}{x})dx}dx + c\right]$$

$$= x\left[\int(-\frac{1}{x} - 6x)\cdot\frac{1}{x}dx + c\right]$$

$$= x\left[\int(-\frac{1}{x^2} - 6)dx + c\right] = x\left[\frac{1}{x} - 6x + c\right]$$

$$= 1 - 6x^2 + cx.$$

由 $y(1) = 0$, 得 $c = 5$, 故有

$$y = 1 - 6x^2 + 5x.$$

八、解：设切点为(x_0, y_0, z_0)，切平面方程为$\frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y + \frac{z_0}{c^2}z = 1$, 与$x, y, z$轴得交点为（$\frac{x_0}{a^2}, 0, 0), (0, \frac{y_0}{b^2}, 0), (0, 0, \frac{z_0}{c^2}), V = \frac{1}{6}\frac{a^2b^2c^2}{x_0y_0z_0}$,

体积最小，只须$x_0y_0z_0$最大即可。设拉格朗日函数为$L = xyz + \lambda(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2})$ （3 分）

$$\begin{cases} L_X = yz + \frac{2\lambda}{a^2}x = 0 \\ L_y = xz + \frac{2\lambda}{b^2}y = 0 \\ L_z = xy + \frac{2\lambda}{c^2}z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{3}a \\ y = \frac{\sqrt{3}}{3}b \\ z = \frac{\sqrt{3}}{3}c \end{cases}$$

实际问题，最小体积存在，且驻点唯一，所以切点为（$(\frac{\sqrt{3}}{3}a, \frac{\sqrt{3}}{3}b, \frac{\sqrt{3}}{3}c)$，最小体积为$V = \frac{\sqrt{3}}{2}abc$ （6 分）

九、

证明：取 $y = kx$,

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} \frac{3xy}{x^2 + y^2}$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0 \\ y=kx}} \frac{3x\cdot kx}{x^2 + k^2x^2}$$

$$= \frac{3k}{1+k^2},$$

其值随 k 的不同而变化，故极限不存在.

（6 分）

。