2018-2019-2 学期《高等数学 2》考前辅导讲义

信息科学与工程学院 梁宇龙

一、常微分方程

1.$(y'')^3+e^{-2x}y'=0$ 是_____阶微分方程

【解析】微分方程阶数等于最高阶导数级数。

【答案】2

2.$(1+x^2)\frac{dy}{dx}=1+y^2$的通解为______________

【解析】可分离变量型，方程化为$\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{1}{1+y^2}dy$，方程两侧同时积分

【答案】$\arctan x=\arctan y+c$

3. $(1+2e^{\frac{x}{y}})dx+2e^{\frac{x}{y}}(1-\frac{x}{y})dy=0$的通解为_________

【解析】齐次方程，令$\mathrm{u}=\frac{y}{x}$ 则 $\frac{dy}{dx}=x\frac{du}{dx}+u$

【答案】$x+2ye^{\frac{x}{y}}=c$

4.微分方程$y''+2y'+y=5xe^{-x}$的特解形式为____________

【解析】二阶非齐次线性微分方程，求出对应齐次方程的特征方程，解出r_1，r_2

【答案】x^2（$ax+b$）e^{-x}

5.微分方程 $\mathrm{F}[\mathrm{x},y^5,(y''')^2,y'']=0$ 通解（独立的）任意常数个数是_______________个

【解析】任意常数个数等于最高阶导数级数

【答案】3

6.求微分方程$y'+\frac{y}{x}=\frac{\cos x}{x}$满足条件$y|_{x=\pi}=1$的特解

【解】$\mathrm{y}=e^{-\int\frac{dx}{x}}\left[\int\frac{\cos x}{x}\cdot e^{\int\frac{dx}{x}}dx+\mathrm{c}\right]=\frac{1}{x}(\cos x\,dx+C)=\frac{1}{x}(\sin x+C)$

将$y|_{x=\pi}=1$代入，得 $\mathrm{C}=\pi$，$\mathrm{y}=\frac{1}{x}(\sin x+\pi)$

二、多元函数微分学

1.函数 z=f(x,y)在点(x,y)处可微，是函数 z=f(x,y) 在点(x,y)各偏导数连续的________

【解析】偏导数连续 → 可微 → 偏导数存在/偏导数连续 → 可微 → 函数连续

【答案】必要条件

2.要使$f(x,y)=\frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$在(0,0)连续，则应定义$f(0,0)=$ ________

【答案】$-\frac{1}{4}$

3.若$\frac{(x+a\ \ )dx+y}{(x+y)^2}$是某一个二元函数的全微分，则常数 a=____________

【解析】等价命题：与路径无关，$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$

【答案】2

4.已知函数$f(x)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$,在$(0,0)$点下列叙述正确的是(　　)

(A) 连续但偏导不存在　　(B) 连续偏导也存在

(C) 不连续偏导也不存在　　(D) 不连续但偏导存在

【解析】取 y=kx , k 值的不同对应极限值不同；分段点处求偏导数用定义

【答案】D

5.梯度与方向导数的关系为：梯度的方向是方向导数取得最大值的方向，梯度的模是方向导数的最大值

6.若$f'_x(x_0,y_0)=0, f'_y(x_0,y_0)=0$,则在点（$x_0,y_0$）处函数$z=f(x,y)$（　　　）

(A) 的全微分 $dz|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}=0$　(B) 连续　(C)一定取得极值　(D) 可能取得极值

【解析】由$\mathrm{AC}-B^2$的值决定

【答案】D

7.设$z=f(x,\frac{x}{y})$，其中f具有二阶连续偏导数，求$\frac{\partial z}{\partial x}\ \frac{\partial z}{\partial y}\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

【解】$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1+\frac{1}{y}f_2$　　$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}f_2$　　$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{x}{y^2}f_{12}-\frac{x}{y^3}f_{22}-\frac{1}{y^2}f_2$

8.内接于椭球$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$的最大长方体体积，长方体各面平行于坐标面。

【解】设长方体长宽高为 2x，2y，2z。 则 V=8xyz

又 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$， 令$\mathrm{F}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z})=8\mathrm{xyz}+\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)$

$F_x=8yz+\frac{2\lambda\mathrm{x}}{a^2}$ $F_y=8xz+\frac{2\lambda\mathrm{y}}{b^2}$ $F_z=8xy+\frac{2\lambda\mathrm{z}}{c^2}$

因为 $F_x=F_y=F_z=0$，且$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$得：$\frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}=\frac{1}{3}$

解得：$\mathrm{x}=\frac{\sqrt{3}}{3}a\,,\mathrm{y}=\frac{\sqrt{3}}{3}b\,,\mathrm{z}=\frac{\sqrt{3}}{3}c$ $V_{max}=8\mathrm{xyz}=\frac{8}{9}\sqrt{3}abc$

9.在曲面$\mathrm{z}=\frac{x^2}{2}+y^2$上求一点，使曲面在该点处的切平面平行于平面$2\mathrm{x}+2\mathrm{y}-\mathrm{z}=0$，并求出该平面切平面方程。

【解】设$(x_{0,}y_{0,}z_{0,})$为曲面上的切点，令$\mathrm{F}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z})=\frac{x^2}{2}+y^2-z$

则 曲面在点（$x_{0,}y_{0,}z_{0,}$）处的法向量为 $\vec{n}=(x_{0,}2y_{0,}-1)$

依题意，切平面平行于已知平面

得：$\frac{x_{0,}}{2}=\frac{y_{0,}}{2}=\frac{-1}{-1}$ $x_0=2$，$y_0=1$，$z_0=3$

所求切点为(2,1,3) 法向量为$\vec{n}=(2,2,-1)$

曲面在点(2,1,3)处切平面方程为 2(x-2)+2(y-1)-(z-3)=0

即，2x+2y-z=3

三、重积分

1.交换积分次序 $\int_0^1 dy\int_{1-y}^{1+y^2}f(x,y)dx$

【答案】 $I=\int_0^1 dx\int_{1-x}^{1}f(x,y)dy+\int_1^2 dx\int_{\sqrt{x-1}}^{1}f(x,y)dy$

2.将 $\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{x-x^2}}f(x,y)dy$化为极坐标形式

【答案】$\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\cos\theta}f(r\cos\theta\,,r\sin\theta)rdr$

3.设区域 D 为：$|\mathrm{x}|\le 2$，$|\mathrm{y}|\le 1$，则 $\iint_D(2+x^2 siny)dxdy=$____________

【解析】被积函数在积分区域内的奇偶性

【答案】16

4. 计算二重积分$\iint_D (x^2+y^2-x)dxdy$，其中D是由直线$y=2$，$y=x$及$y=2x$所围成的闭区域。

【答案】$\frac{13}{6}$

5. 求$\iiint_\Omega \sqrt{x^2+y^2}\,dV$,其中$\Omega$是由抛物面$z=4-x^2-y^2$及$z=0$所围成的空间闭区域.

【答案】$\frac{128}{15}\pi$

6.设函数$f(x)$ 连续且恒大于零，h>0，定义在$F(t)=\iiint_{\Omega(t)} f(x^2+y^2)\,dV$,其中$\Omega(t)=\{(x,y,z)|0\le z\le h, x^2+y^2\le t^2\}$，证明：$F(t)$在$(0,+\infty)$内单调增加。

【证明】$F(t)=\iiint_{\Omega(t)} f(x^2+y^2)\,dV=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^t \rho d\rho\int_0^h f(\rho^2)dz=2\pi h\int_0^t \rho f(\rho^2)d\rho$

则 $F'(t)=2\pi h t f(t^2)$

由题设，当 t>0 时，$F'(t)>0$,

故$F(t)$在$(0,+\infty)$内单调递增。

四、曲线积分与曲面积分

1. 曲线$x=\phi(t), y=\psi(t)$自$t=a$的点到$t=b$的点$(a\le t\le b)$间的弧长$l=$__________

【答案】$\int_a^b \sqrt{\phi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt$

2. 设Σ: $x^2+y^2+z^2=a^2$，则曲面积分$\oiint_\Sigma (x^2+y^2+z^2)ds=$__________

【答案】$4\pi a^4$.

3. 设$F(x,\ y)$为可微函数，则曲线积分$\int_{A\hat{B}} F(x,y)(ydx+xdy)$与路径无关的充分必要条件是__________

【答案】$yF_y'(x,y)=xF_x'(x,y)$

4.计算第二型曲线$\int_L \frac{-ydx+xdy}{x^2+4y^2}$,其中 A(1,0)沿抛物线$y=1-x^2$到 B（-1,0）的有向线段

【解】令 P=$\frac{-y}{x^2+4y^2}$，Q=$\frac{x}{x^2+4y^2}$ $\because \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{x^2+4y^2-2x^2}{(x^2+4y^2)^2}=\frac{4y^2-x^2}{(x^2+4y^2)^2}=\frac{\partial P}{\partial y}$

故积分曲线与路径无关　　令 x=cos t ， $y=\frac{1}{2}\sin t$

原式$=\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2}sin^2t+\frac{1}{2}cos^2t\right)dt=\frac{\pi}{2}$

5.计算$\mathrm{I}=\oint_L \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$,其中 L：$3x^2+5y^2=15$ 取逆时针方向

【解】令 P=$\frac{-y}{x^2+y^2}$，Q=$\frac{x}{x^2+y^2}$　$\because\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial P}{\partial y}$

故积分曲线与路径无关　　补有向曲线l：$x^2+y^2=a$ （a 为充分小正数） 逆时针方向

由 Green 公式：$\oint_{L+l^-}\frac{-ydx+xdy}{x^2+4y^2}=0$　　　　又 $\oint_l \frac{-ydx+xdy}{x^2+4y^2}=\int_0^{2\pi}d\theta=2\pi$

$\therefore\ \mathrm{I}=\oint_{L+l^-}+\oint_l\ =2\pi$

5.设$f(x)$具有二阶连续导数，满足条件$f(1)$=1，且积分$\int_L\ [\ln x-f(x)]\frac{y}{x}dx+f(x)dy$与路径无关，求$f(x)$。

【解】令 P= $[\ln x-f(x)]\frac{y}{x}$，Q=$f(x)$　$\because\frac{\partial Q}{\partial x}=\ f'(x)$　$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\ln x-f(x)}{x}$

$\because$积分曲线与路径无关$\therefore\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$　　即$f'(x)+\frac{f(x)}{x}=\frac{\ln x}{x}$

故$f(x)=[\int\frac{\ln x}{x}\cdot e^{\int\frac{1}{x}dx}dx+C]e^{-\int\frac{1}{x}dx}$=$\ln x-1+\frac{C}{x}$

又$f(1)=1$　　　故 C=2　　　　$\therefore f(x)=\ln x-1+\frac{2}{x}$

6.计算$\mathrm{I}=\iint_\Sigma\ 2x^3dydz+2y^3dzdx+3(z^2-1)\mathrm{dxdy}$,其中$\sum$是曲面$z=1-x^2-y^2(\mathrm{z}\ge 0)$的上侧

【解】取$\sum_1$为圆域$x^2+y^2\le 1$的下侧，记Ω为由$\sum$和$\sum_1$所围成的区域，则$\mathrm{I}=\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}2x^3dydz+2y^3dzdx+3(z^2-1)\mathrm{dxdy}-\iint_{\Sigma_1}2x^3dydz+2y^3dzdx+3(z^2-1)\mathrm{dxdy}$

由 · Gauss 公式得：$\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}2x^3dydz+2y^3dzdx+3(z^2-1)\mathrm{dxdy}=\iiint_\Omega(6x^2+6y^2+6z)\,dV=6\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho d\rho\int_0^{1-\rho^2}(z+\rho^2)dz=12\pi\int_0^1[\frac{1}{2}\rho(1-\rho^2)^2+\rho^3\,(1-\rho^2)]d\rho=2\pi$

而　$\iint_{\Sigma_1}2x^3dydz+2y^3dzdx+3(z^2-1)\mathrm{dxdy}=-\iint_{x^2+y^2\le 1}(-3)dxdy=3\pi$

故　$\mathrm{I}=2\pi-3\pi=-\pi$