Chapter 1

行列式

Linear Algebra

November 20, 2017

黄正华, 数学与统计学院, 武汉大学

1.1

目录

1.2

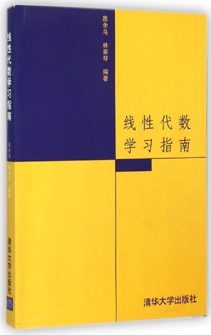
0 课程简介

使用教材

[1] 居余马 等 编著, 线性代数 (第 2 版). 清华大学出版社, 2002

[2] 居余马 林翠琴 编著, 线性代数学习指南. 清华大学出版社, 2003

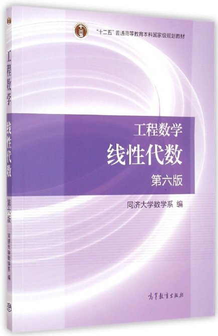
1.3

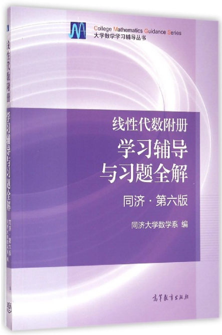


书籍推荐

[3] 同济大学数学系 编, *线性代数 (第六版)*. 高等教育出版社, 2014

[4] 同济大学数学系 编, *线性代数附册学习辅导与习题全解*. 高等教育出版社, 2014



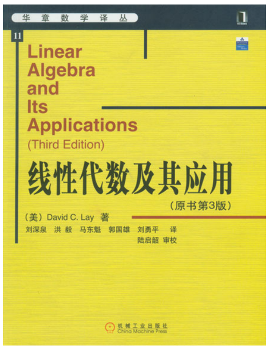


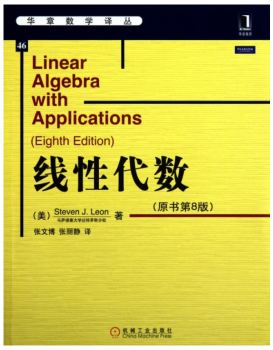
☞ 特点: 语言简洁、逻辑清晰、全国通用. 建议每个人都认真研读该教材. 1.4

书籍推荐

[5] David C. Lay 著, 刘深泉 等 译, *线性代数及其应用*. 机械工业出版社, 2005

[6] Steven J. Leon 著, 张文博 张丽静 译, *线性代数*. 机械工业出版社, 2010

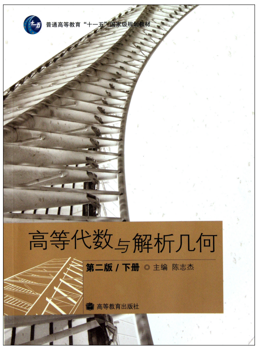




☞ 特点: 结合实践, 背景知识丰富, 理论在科技中的应用介绍较多. 1.5

[7] 陈志杰 主编, *高等代数与解析几何 (第二版), 上下册*. 高等教育出版社, 2008

☞ 特点: 强调用几何方法诠释线性代数, 知识呈现的结构不同于常见的国内教材. 内容细致、深入.



本科非数学专业《线性代数》是线性代数的 Basic 版; 本科数学专业《线性代数》或《高等代数》是线性代数的 Standard 版.

(1) **教材的问题**. 大学没有统一指定教材. 不同学校、不同专业、不同教师, 都有自己选用的教材. 同一门课程的教材内容, 也不尽相同, 甚至符号和名词都没有统一. 教材要多看几本, 一个问题在不同的教材往往有不同角度的阐述.

建议: 找一本合自己眼缘的教材. 不同的难度、讲述方式、排版印刷, 都会有不同的体验. 习题集可以看看往年的考研复习资料. 考研真题都很有嚼头, 值得细细品味.

(2) **充分利用网络**. 网络获取资料有时比查书更便捷. 遇到疑难, 可以搜索网络, 有很多问题, 别人已经遇到过, 别人已经问过了. 网络资料丰富多样, 例如精品课程[1], MOOC 视频课程[2], 维基百科 (www.wikipedia.com) 等.

(3) **时间要够**. 时间安排要满足 2:1. 每上一节课, 至少课外有两节课的时间在做预习或者复习. 很多概念在诞生之初, 比如极限的思想、线性空间的概念, 是突破了人类认知水平的. 同样地, 今天我们看到的一些观念, 超越了我们的思维能力, 正在逐步打开我们的"脑洞". 这些浓缩了人类智慧的观念, 需要我们花时间去慢慢领悟. 1.6

时间要到位? 2:1?

- 上课用时
  54 学时 $= 40.5$ 小时$= 1.6875$ 天.
- 做到 $1:1$
  54 学时 $\times 2 = 3.375$ 天.
- 做到 $2:1$
  54 学时 $\times 3 = 5.0625$ 天.

1.7

什么是线性 (Linear)

形如 $ax + by = c$ 的方程 (a, b, c 为常数), 其全部解在平面上构成一条直线, 此时 x, y 之间呈现为线性关系. 方程 $ax + by = c$ 称为线性方程.

推而广之, 含有 n 个变量的一次方程

$$k_1x_1 + k_2x_2 + \cdots + k_nx_n = b$$

称为线性方程, 这里 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是变量, $k_1, k_2, \cdots, k_n, b$ 是常数. 此时变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 之间呈现为线性关系.

[1]例如, 同济大学《线性代数》精品课程: `http://www.tongji.edu.cn/~math/xxds/`.

[2]例如, 精品开放课程共享系统——爱课程: `http://www.icourses.cn`.

非线性关系的例子:

$$y=2x^2+3,\quad y=2\sqrt{x}+3,\quad y=2\sin x+3,\quad xy=1,$$

上述 x, y 之间为非线性关系. 1.8

什么是线性代数

线性代数 (Linear Algebra) 是代数学的一个分支, 主要处理线性关系问题. 它的核心内容是研究 (1) 有限维线性空间的结构, (2) 线性空间的线性变换.

本课程介绍线性代数的基础知识, 核心话题是: 线性方程组的求解. 1.9

高斯消元法

一般地, 将含有 n 个未知量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的线性方程组记为:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m. \end{cases} \tag{1}$$

该方程组中含有 m 个方程. 其中 a_{ij} 是系数, b_i 是常数项, $i=1,2,\cdots,m$, $j=1,2,\cdots,n$. 系数 a_{ij} 有两个下标, 下标 i, j 分别表示 a_{ij} 在第 i 行、第 j 列.

高斯消元法是求解线性方程组的经典方法, 简单实用, 永不过时. 1.10

为什么出现线性方程组? 比如这样一个问题: 给一个数列, 第 1 项是 1, 第 2 项是 2, 第 3 项有没有可能是 0 呢? 这其实就涉及到线性方程组求解问题. 先看下面的例子.

Example 1. 求曲线 $y=\lambda_0+\lambda_1x+\lambda_2x^2$ 过点 $(1,1)$, $(2,2)$, $(3,0)$.

解: 代入三点, 得到一个关于 $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ 的线性方程组:

$$\begin{cases} \lambda_0+\lambda_1+\lambda_2=1, \\ \lambda_0+2\lambda_1+4\lambda_2=2, \\ \lambda_0+3\lambda_1+9\lambda_2=0. \end{cases}$$

使用高斯消元法. 先化为阶梯形:(以下用 r_i 表示第 i 个方程, 例如 r_3-r_2 表示将第 3 个方程减去第 2 个方程)

$$\begin{cases} \lambda_0+\lambda_1+\lambda_2=1, \\ \lambda_0+2\lambda_1+4\lambda_2=2, \\ \lambda_0+3\lambda_1+9\lambda_2=0. \end{cases} \xrightarrow[r_2-r_1]{r_3-r_2} \begin{cases} \lambda_0+\lambda_1+\lambda_2=1, \\ \lambda_1+3\lambda_2=1, \\ \lambda_1+5\lambda_2=-2. \end{cases}$$

$$\xrightarrow{r_3-r_2} \begin{cases} \lambda_0+\lambda_1+\lambda_2=1, \\ \lambda_1+3\lambda_2=1, \\ 2\lambda_2=-3. \end{cases} \xrightarrow{r_3\div 2} \begin{cases} \lambda_0+\lambda_1+\lambda_2=1, \\ \lambda_1+3\lambda_2=1, \\ \lambda_2=-\frac{3}{2}. \end{cases}$$

1.11

再回代:

$$\begin{cases}\lambda_0+\lambda_1+\ \ \lambda_2= & 1,\\ \qquad\lambda_1+3\lambda_2= & 1,\\ \qquad\qquad\lambda_2= & -\frac{3}{2}.\end{cases}\xrightarrow[r_1-r_3]{r_2-3r_3}\begin{cases}\lambda_0+\lambda_1 & =\frac{5}{2},\\ \qquad\lambda_1 & =\frac{11}{2},\\ \qquad\qquad\lambda_2 & =-\frac{3}{2}.\end{cases}\xrightarrow{r_1-r_2}\begin{cases}\lambda_0 & =-3,\\ \qquad\lambda_1 & =\frac{11}{2},\\ \qquad\qquad\lambda_2 & =-\frac{3}{2}.\end{cases}$$

即所求曲线方程为 $y=-3+\frac{11}{2}x-\frac{3}{2}x^2$. □

可见如果数列的前 3 项分别是 1, 2, 0, 则通项可以是 $y=-3+\frac{11}{2}n-\frac{3}{2}n^2$. 此通项是否唯一呢? 答案是否定的. 见后续例 33 的讨论.

以上就是**高斯消元法**, 主要是两个步骤: 化为阶梯形, 回代. 高斯消元法算法简单, 非常适合编程. 1.12

围绕线性方程组这个主题, 课程还将讨论以下三个概念: 行列式, 矩阵, 向量.

这是求解线性方程组的三个有效工具. 下面我们简单说明这三个工具出现的原因. 1.13

高斯消元法 $\longrightarrow$ 矩阵的初等行变换.

前述解法中, 未知量并没有参与运算. 实际参与运算的只有系数和常数, 把方程组的主要信息记录在一个矩形阵列(简称**矩阵**) 里:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\1&2&4&2\\1&3&9&0\end{array}\right)\tag{2}$$

方程的运算与变换, 体现为矩阵中, 各行元素的相应运算.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\1&2&4&2\\1&3&9&0\end{array}\right)\xrightarrow[r_2-r_1]{r_3-r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\0&1&3&1\\0&1&5&-2\end{array}\right)\xrightarrow{r_3-r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\0&1&3&1\\0&0&2&-3\end{array}\right)\xrightarrow{r_3\div 2}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\0&1&3&1\\0&0&1&-\frac{3}{2}\end{array}\right)\xrightarrow[r_1-r_3]{r_2-3r_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&\frac{5}{2}\\0&1&0&\frac{11}{2}\\0&0&1&-\frac{3}{2}\end{array}\right)\xrightarrow{r_1-r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&-3\\0&1&0&\frac{11}{2}\\0&0&1&-\frac{3}{2}\end{array}\right).$$

将矩阵施以**行变换**, 其本质还是高斯消元法. 但形式简洁, 适合编程和存储. 1.14

线性方程组等同于矩阵方程

记

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}.$$

这里 $\boldsymbol{A}$ 记录的是系数, $\boldsymbol{b}$ 记录的是常数. 引入矩阵乘法: $\boldsymbol{Ax}$ 定义为 $\boldsymbol{A}$ 各行的向量与 $\boldsymbol{x}$ 做内积. 例如 $\boldsymbol{A}$ 的第二行与 $\boldsymbol{x}$ 做内积, 有

$$(1,2,4)\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=x_1+2x_2+4x_3.$$

则

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ x_1 + 3x_2 + 9x_3 \end{pmatrix}.$$

1.15

从而线性方程组可表达为

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

而这本质上是一个矩阵方程.

如果我们能一般地解决矩阵方程的求解, 事实上就完成了线性方程组的求解. 1.16

线性方程组求解等同于向量组的线性表示问题

把前述线性方程组记为

$$\lambda_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

则 “线性方程组” 等同于 “向量的线性表示” 问题. 更重要的是, 用向量的观点, 可以几何地解释线性方程组解的结构问题. 1.17

线性方程组与几何联系

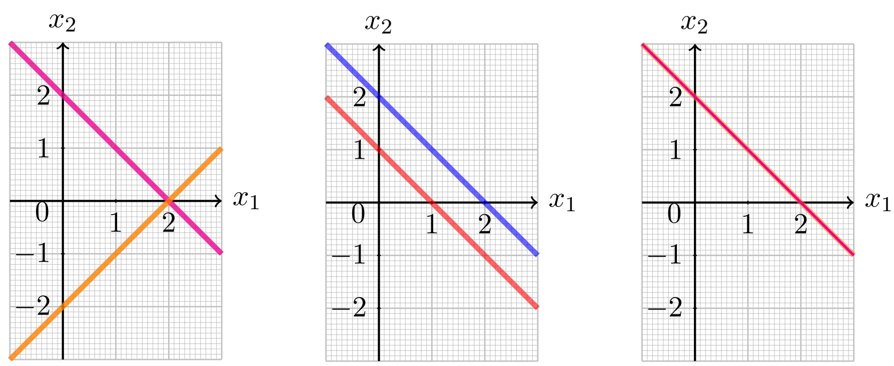
从几何角度考虑线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$$

每一个方程均对应于平面上的一条直线. 求解方程组, 相当于求两条直线的交点. 1.18

考虑以下三个不同的线性方程组:

(i) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ x_1 - x_2 = 2. \end{cases}$ (ii) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$ (iii) $\begin{cases} x_1 + x_2 = \ \ 2, \\ -x_1 - x_2 = -2. \end{cases}$



(a) 相交: 唯一解 (b) 平行: 无解 (c) 重合: 无穷多解

1.19

两条直线之间的关系有三种情况: 相交、平行、重合. 相应地:

一个线性方程组的解, 有下列三种情况:

(1) 有唯一解;

(2) 无解;

(3) 有无穷多解.

这个结论将在第 3 章进行一般讨论. 1.20

对 “无穷多解” 感到陌生?

无穷多解的情形我们一直都在面对, 比如

$$2x + 3y = 1,$$

在几何中, 它是二维平面内的直线方程; 在线性代数中, 它是一个线性方程组 (虽然只有一个方程). 该线性方程组显然有无穷多组解, 全部解所构成的集合, 呈现为二维平面中的一条直线. 1.21

线性方程组解的几何诠释

比如线性方程组 (虽然只有一个方程):

$$x - 2y - 3z = 0. \tag{3}$$

由 $x - 2y - 3z = 0 \iff x = 2y + 3z \iff \begin{cases} x = 2y + 3z, \\ y = \ \ y \qquad\ , \\ z = \qquad\ \ z. \end{cases}$

$$\iff \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$ 1.22

故线性方程组 (3) 有无穷多解, 其全部解都可以用向量 $\boldsymbol{\eta}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\eta}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 线性表示. 或者说, 其全部解的集合, 体现为三维空间内由向量 $\boldsymbol{\eta}_1$, $\boldsymbol{\eta}_2$ 所张成的一个二维子空间. (在几何中, $x - 2y - 3z = 0$ 表示三维空间中的一个平面.)

另外, $x - 2y - 3z = 0$, 意味着向量 $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ 与向量 $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$ 垂直, 求解方程组即相当于求所有与向量 $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$ 垂直的向量. 显然, 所有满足条件的向量, 构成一个平面. 即其解集构成一个二维子空间. 1.23

为什么要讨论行列式

不妨先看看克拉默法则: 给定线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{4}$$

如果系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0, \tag{5}$$

那么线性方程组 (4) 有解, 并且解是惟一的: 1.24

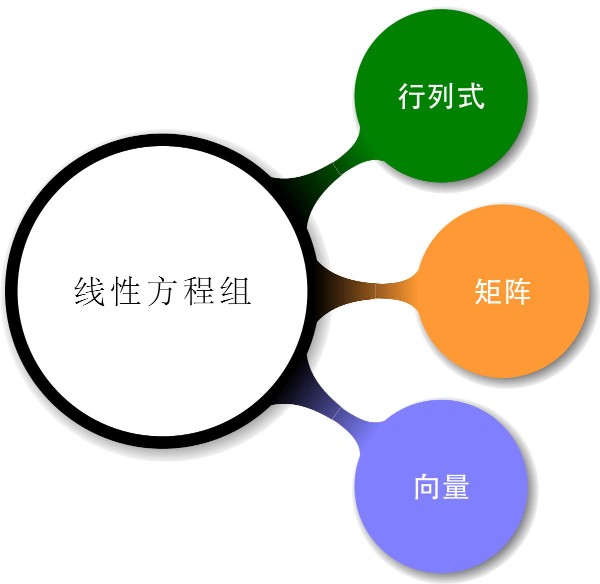
$$x_1=\frac{D_1}{D}, \quad x_2=\frac{D_2}{D}, \quad \cdots, \quad x_n=\frac{D_n}{D}, \tag{6}$$

其中 D_j 是把行列式 D 中第 j 列换成方程组的常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 所成的行列式, 即

$$D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{7}$$

行列式的出现原因可以这样理解: 完美地表达了一部分线性方程组的解的规律. 从这个角度讲, 行列式是人为创造的一个符号, 它形式简洁地、浓缩地记载了一些规律性的内容.

☞ 什么是行列式? 如何计算? 将是课程第 1 章的内容. 1.25



宏观上讲, 线性代数的学习必须和几何相结合, 运用几何的视角去理解线性代数, 去表达线性代数.

微观上讲, 线性方程组的求解, 需要借助以下三个工具: 行列式、矩阵、向量. 同时在今后的学习中, 要特别注意这三个问题的相互转化. 例如矩阵的问题, 可能需要转化为向量的问题去解决, 或者反过来.

高斯消元法是求解线性方程组的最简单有效的方法. 那么是不是高斯消元法解决了线性方程组的全部问题呢? 显然不是. 为什么无解或有无穷多解, 还需要从理论上彻底解决. 无解是不是就丢弃不管了呢? 实际工程和科学计算中, 无解

的情形还需要考虑有没有近似解、最优解. 这个话题就是线性代数方程组的数值解法, 在计算方法、数值代数、矩阵分析等课程中会有讨论. 另外求解未知数很多的大型线性方程组, 还涉及到计算机的存储、能耗, 计算精度等等话题. 如何利用计算机更精确、更有效地求解大型线性代数方程组, 是计算数学研究中的基本性的重要课题之一. 1.26

本章内容

这一章关注: 行列式的性质与计算. 学习中要注意以下问题:

(1) 为什么要讨论行列式?

(2) 行列式有哪些性质?

(3) n 阶行列式的计算, 有哪些常见方法? 1.27

1 n 阶行列式的定义及性质

为什么要讨论行列式?

行列式的给出, 可以方便地表达线性方程组解的规律. 下面先从简单的情形说起.

对于二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases}$$

用消元法容易求得其解: 当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时, 方程组有惟一解

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{12}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

我们引入一种记号

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \triangleq ad - bc, \tag{8}$$

称这种记号为二阶**行列式**. 则

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

从而方程组的解可以叙述为: 当二阶行列式 1.28

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

时, 该方程组有惟一解:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

这个表达方式的规律是:

(1) 各解的分母是方程组的系数构成的行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$;

(2) x_j 的解的表达式中, 分子行列式是将分母行列式的第 j 列元素用常数项 b_1, b_2 代替后得到的. 1.29

有趣的是, n 元线性方程组也有这样的规律.

设有三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, & (9) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, & (10) \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. & (11) \end{cases}$$

用消元法我们可以求得方程组的解. 引入行列式, 可以方便地表达解的规律. 1.30

分别用 $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}$ 乘 (9), $-\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33}$ 乘 (10), $\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}$ 乘 (11), 再把得到的 3 个式子相加, 就消去了 x_2, x_3, 得到

$$\begin{aligned} &(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31})x_1 \\ =\ & b_1a_{22}a_{33} + b_2a_{23}a_{31} + b_3a_{21}a_{32} - b_1a_{23}a_{32} - b_2a_{21}a_{33} - b_3a_{22}a_{31} \end{aligned}$$

故当

$$D = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \neq 0$$

时, 就可以解出 x_1. 类似地可解出 x_2, x_3. 1.31

引入三阶行列式

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ \triangleq\ & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \quad (12) \\ =\ & a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \quad (13) \\ =\ & a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \quad (14) \\ =\ & (-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \quad (15) \end{aligned}$$

1.32

当三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

时, 上述三元线性方程组有惟一解:

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D},$$

其中

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13}\\ b_2 & a_{22} & a_{23}\\ b_3 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13}\\ a_{21} & b_2 & a_{23}\\ a_{31} & b_3 & a_{33}\end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & b_2\\ a_{31} & a_{32} & b_3\end{vmatrix}.$$

这里借助行列式所表达出来的解的规律, 是显而易见的. 1.33

(14) 式中

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix},\qquad \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix},\qquad \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}$$

是在三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

中分别去掉 a_{11}, a_{12}, a_{13} 所在的行、列而得到的, 分别称为 a_{11}, a_{12}, a_{13} 所对应的**余子式**. 分别记为 M_{11}, M_{12}, M_{13}. 即

$$M_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix},\qquad M_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix},\qquad M_{13}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}.$$

则有

$$D=(-1)^{1+1}a_{11}M_{11}+(-1)^{1+2}a_{12}M_{12}+(-1)^{1+3}a_{13}M_{13}.$$

1.34

而 (15) 式中

$$(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix},\qquad (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix},\qquad (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}$$

分别称为 a_{11}, a_{12}, a_{13} 所对应的**代数余子式**. 分别记为 A_{11}, A_{12}, A_{13}. (它们的正式定义在后续将会给出, 参见**定义** 2.)

即

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}M_{11}.$$

其余类似. 从而

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}.$$

☞ 三阶行列式等于第一行元素与其对应代数余子式的乘积之和. 更高阶的行列式也可以相仿定义. 1.35

按照这个规律, 我们可以类似地定义 4 阶行列式为

$$
\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \\
&\quad + (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} + (-1)^{1+4} a_{14} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}.
\end{aligned}
$$

1.36

注意, 上式体现出的规则有两条:

1. 与元素 a_{1j} 相乘的行列式, 是将原行列式中的 a_{1j} 所在的行、列去掉而成的行列式, 即 a_{1j} 对应的余子式 M_{1j}.
2. 展开式中, 元素 a_{1j} 所在项的符号为 $(-1)^{1+j}$.

继续下去, 按照这个规则, 我们可以递归定义出 5 阶、6 阶等更高阶的行列式.

由此, 我们得到一个递归形式的行列式定义. 1.37

n 阶行列式的定义

由 $n \times n$ 个数排成的 n 阶**行列式** (determinant)

$$
D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

表示这样一个数:

1. $n = 1$ 时,
   这个数就是行列式的元素本身. 即 $D = \begin{vmatrix} a_{11} \end{vmatrix} = a_{11}$;
2. $n \geqslant 2$ 时,
   行列式 D 表示这样一个数:

$$
\begin{aligned}
D &= (-1)^{1+1} a_{11} M_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} M_{12} + \cdots + (-1)^{1+n} a_{1n} M_{1n} \qquad (16) \\
&= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} M_{1j}.
\end{aligned}
$$

   其中 $M_{1j}\,(j = 1, 2, \cdots, n)$ 是从 D 中划掉第 1 行、第 j 列后余下的 $(n-1)^2$ 个数 (其相对顺序不变) 所组成的 $n-1$ 阶行列式, 称为元素 a_{1j} 的**余子式**.

(16) 式称为 n 阶行列式 D 按第 1 行的展开式. 1.38

将

$$A_{1j} = (-1)^{1+j} M_{1j}$$

称为元素 a_{1j} 的**代数余子式**, 则有

$$D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j}. \tag{17}$$

下面给出余子式、代数余子式的一般定义. 1.39

Definition 2. 在行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

中划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行与第 j 列, 剩下的 $(n-1)^2$ 个元素按原来的排法构成一个 $n-1$ 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \tag{18}$$

称为元素 a_{ij} 的**余子式** (minor determinant, minor), 记为 M_{ij}. 1.40

记

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

称 A_{ij} 为元素 a_{ij} 的**代数余子式** (adjunct, 或 cofactor). 1.41

Example 3. 在 4 阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 9 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \\ 7 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

中, 去掉第 3 行、第 2 列得到一个 3 阶行列式, 即为 $a_{32} = 5$ 的余子式

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 7 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

☞ 仅改变 a_{ij} 的取值, 不会影响 M_{ij} 和 A_{ij}. 1.42

行列式中, $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ 所在的对角线称为行列式的**主对角线**, 并把元素 $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ 称为**主对角元**; 另一条对角线称为行列式的**副对角线**.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(图中的实线、虚线, 分别表示行列式的主对角线、副对角线.) 1.43

行列式的定义反映以下特点:

1. 行列式展开式中, 每一项乘积都是由行列式中位于不同行且不同列的 n 个元素构成的, 并且展开式恰恰就是由所有这种可能的乘积组成;
2. n 阶行列式的展开式中共有 $n!$ 项.

☞ 这个特点很重要: 任一元素都不能与其同一行或同一列的元素相乘. 1.44

为什么? 比如, a_{11} 只能与 M_{11} 相乘, 但是 M_{11} 中是不会出现与 a_{11} 在同一行或同一列的元素的.

由此我们也就容易明白, 展开式恰恰就是由所有 "位于不同行和不同列的 n 个元素" 的乘积组成. 而由排列组合的知识, 这种所有可能的组合共有 $n!$ 项, 所以 n 阶行列式的展开式中共有 $n!$ 项.

当 n 较大时, 其项数十分庞大. 比如 $n = 10$, 那么就会得到 $10! = 3628800$ 个项做加减法.

行列式如何计算? 行列式的定义给出了一个算法, 使用这个算法已经可以计算任何一个行列式, 但这显然不是一个好的算法. 1.45

三阶行列式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$\triangleq a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

上述表达式是 6 个项的代数和,

其计算可以使用**沙路法**:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

实线上的三个元作乘积, 取正号; 虚线上的元所作的乘积取负号. 1.46

二阶行列式的计算最简单, 三阶行列式的展开可以用沙路法. 更高阶的行列式就不能使用沙路法了.

Example 4.

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 5\cdot 2 - (-1)\cdot 3 = 13.$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix} = a^2 - (-b^2) = a^2 + b^2.$$

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 2 & -5 & 0 \\ 1 & 3 & -3 \\ 4 & -1 & 6 \end{vmatrix} &= 2\cdot 3\cdot 6 + (-5)\cdot(-3)\cdot 4 + 0\cdot 1\cdot(-1) \\ &\quad - 0\cdot 3\cdot 4 - 2\cdot(-3)\cdot(-1) - (-5)\cdot 1\cdot 6 \\ &= 36 + 60 + 0 - 0 - 6 - (-30) = 120.\end{aligned}$$

1.47

Example 5. 计算行列式:

$$D = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

解:

$$\begin{aligned} D &= (-1)^{1+1}\cdot 0\cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}\cdot(-1)\cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &\quad + (-1)^{1+3}\cdot(-1)\cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{1+4}\cdot 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 0 + 2 + 10 - 8 = 4. \end{aligned}$$

1.48

Example 6. 证明**下三角形行列式** (主对角线以上元素全为 0)

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}. \qquad (19)$$

证: 展开第一行得

$$D_n = (-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

依次继续, 易得

$$D_n = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

1.49

换句话说, 下三角形行列式就等于**主对角线**上元素的乘积. 作为 (19) 的特殊情形有

$$\begin{vmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{vmatrix} = d_1 d_2 \cdots d_n. \tag{20}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1. \tag{21}$$

1.50

Example 7. 计算 n 阶行列式 (副对角线以上元素全为 0)

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & * \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_2 & \cdots & * & * \\ a_1 & * & \cdots & * & * \end{vmatrix},$$

其中 “$*$” 表示任意数.

解: 展开第一行得

$$D_n = (-1)^{n+1} a_n \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots \\ 0 & a_2 & \cdots & * \\ a_1 & * & \cdots & * \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} a_n D_{n-1},$$

1.51

递推可得

$$\begin{aligned} D_n &= (-1)^{n-1} a_n D_{n-1} \\ &= (-1)^{n-1} a_n (-1)^{n-2} a_{n-1} D_{n-2} \\ &= \cdots\cdots \\ &= (-1)^{(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1} a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 \\ &= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1. \end{aligned}$$

1.52

1.2 n 阶行列式的性质

记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

行列式 D^{T} 称为行列式 D 的**转置行列式**.

☞ 将行列式 D 沿主对角线翻转, 得到其转置行列式 D^{T}. 1.53

命题 8. 行列式与它的转置行列式相等. 即

$$D^{\mathrm{T}} = D. \tag{22}$$

(证明略.)

这表明, 在行列式中行与列的地位是等同的. 因此, 行列式凡是有关行的性质, 对列也同样成立. 1.54

Example 9. 试证: 对于**上三角行列式** (当 $i > j$ 时, $a_{ij} = 0$) 有

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}. \tag{23}$$

证:

$$D = D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

☞ 行列式计算的一般方法: 将行列式转化为上三角形行列式. 这其中需要使用行列式的一些基本性质. 1.55

命题 10. 行列式按任一行展开, 其值相等. 例如按第 i 行展开, 将第 i 行元素乘以对应的代数余子式, 再作和. 即

$$\begin{aligned} D &= (-1)^{i+1}a_{i1}M_{i1} + (-1)^{i+2}a_{i2}M_{i2} + \cdots + (-1)^{i+n}a_{in}M_{in} \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij}M_{ij}. \end{aligned} \tag{24}$$

或记为

$$\begin{aligned} D &= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}. \end{aligned} \tag{25}$$

亦可按列展开, 比如按第 j 列展开: 1.56

$$\begin{aligned} D &= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}. \end{aligned} \tag{26}$$

其中 $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$. 1.57

命题 11 (线性性质)**.** 有以下两条: **(i)**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{27}$$

- 一行的公因子可以提出去.
- 以一数乘行列式, 相当于用这个数乘此行列式的某一行.

1.58

事实上, 由性质 2

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} &= ka_{i1}A_{i1} + ka_{i2}A_{i2} + \cdots + ka_{in}A_{in} \\ &= k(a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}) \\ &= k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

令 $k = 0$, 就有: 如果行列式中某一行元素全为零, 那么行列式为零. 1.59

(ii)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & \cdots & b_n + c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{28}$$

这就是说，如果某一行是两组数的和，那么这个行列式就等于两个行列式的和，而这两个行列式除这一行外，其余行与原来行列式的对应的行一样. 1.60

事实上，设这一行是第 i 行，于是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & \cdots & b_n+c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (b_1+c_1)A_{i1} + (b_2+c_2)A_{i2} + \cdots + (b_n+c_n)A_{in}$$

$$= (b_1A_{i1} + b_2A_{i2} + \cdots + b_nA_{in}) + (c_1A_{i1} + c_2A_{i2} + \cdots + c_nA_{in})$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 3 之 **(ii)** 显然可以推广到某一行为多组数的和的情形. 1.61

1. 强调：行列式不能作这种形式上的加法：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & \cdots & a_{nn}+b_{nn} \end{vmatrix}.$$

   这是对上述性质的错误理解.

2. 用途：将行列式裂开为两个行列式. 这是计算行列式的一个常用方法. 例如

$$\begin{vmatrix} x & a & a & a \\ b & x & a & a \\ b & b & x & a \\ b & b & b & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ b & x & a & a \\ b & b & x & a \\ b & b & b & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x-a & a & a & a \\ 0 & x & a & a \\ 0 & b & x & a \\ 0 & b & b & x \end{vmatrix}.$$

1.62

Corollary 12. *如果行列式中某一行元素全为零，那么行列式为零.*

命题 13. 如果行列式中有两行相同，那么行列式为零.

(用数学归纳法可以证明，具体过程略去.) 1.63

Corollary 14. *如果行列式中两行成比例，那么行列式为零.*

证:
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

这里第一步是根据性质 3 之 **(i)**, 第二步是根据性质 4. 1.64

命题 15. 把一行的倍数加到另一行, 行列式不变.

证:
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ca_{k1} & a_{i2}+ca_{k2} & \cdots & a_{in}+ca_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ca_{k1} & ca_{k2} & \cdots & ca_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

这里, 第一步是根据性质 3, 第二步是根据性质 5. 1.65

命题 16. 对换行列式中两行的位置, 行列式反号.

证:
$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+a_{k1} & a_{i2}+a_{k2} & \cdots & a_{in}+a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+a_{k1} & a_{i2}+a_{k2} & \cdots & a_{in}+a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{i1} & -a_{i2} & \cdots & -a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{i1} & -a_{i2} & \cdots & -a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

这里, 第一步是把第 k 行加到第 i 行, 第二步是把第 i 行的 (-1) 倍加到第 k 行, 第三步是把第 k 行加到第 i 行, 最后再把第 k 行的公因子 (-1) 提出. 1.66

1.67

命题 17 ($\diamond$). 在行列式中, 一行的元素与另一行相应元素的代数余子式的乘积之和, 等于零. 即

$$a_{k1}A_{i1}+a_{k2}A_{i2}+\cdots+a_{kn}A_{in}=0, \qquad (k\neq i). \tag{29}$$

例如

$$a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23}+a_{14}A_{24}=0. \tag{30}$$

事实上, 下述行列式按第 2 行展开, 有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23}+a_{14}A_{24}.$$

而该行列式有两行相同, 其值为零, 故 (30) 式成立. 1.68

设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

A_{ij} 表示元素 a_{ij} 的代数余子式, 则下列公式成立:

$$a_{k1}A_{i1}+a_{k2}A_{i2}+\cdots+a_{kn}A_{in}=\begin{cases} D, & k=i, \\ 0, & k\neq i. \end{cases} \tag{31}$$

用连加号简写为

$$\sum_{s=1}^{n} a_{ks}A_{is}=\begin{cases} D, & k=i, \\ 0, & k\neq i; \end{cases} \tag{32}$$

1.69

使用克罗内克记号 (Kronecker Delta)[3]

$$\delta_{ij}=\begin{cases} 1, & \text{当 } i=j, \\ 0, & \text{当 } i\neq j. \end{cases} \tag{33}$$

可以将 (32) 记为

$$\sum_{s=1}^{n} a_{ks}A_{is}=\delta_{ki}D, \tag{34}$$

1.70

[3]克罗内克记号本质是二元函数, 自变量是两个正整数. 如果两者相等, 则其输出值为 1, 否则为 0. 克罗内克 (Leopold Kronecker, 1823 –1891), 德国数学家, 研究领域为数论、代数和逻辑. 他有一句名言: 上帝创造了整数, 其余都是人做的工作.

在计算数字行列式时, 直接应用展开式

$$a_{k1}A_{i1}+a_{k2}A_{i2}+\cdots+a_{kn}A_{in}=\begin{cases}D, & k=i,\\ 0, & k\neq i.\end{cases} \tag{35}$$

$$a_{1l}A_{1j}+a_{2l}A_{2j}+\cdots+a_{nl}A_{nj}=\begin{cases}D, & l=j,\\ 0, & l\neq j.\end{cases} \tag{36}$$

不一定能简化计算, 因为把一个 n 阶行列式的计算换成 n 个 $(n-1)$ 阶行列式的计算并不减少计算量, 只是在行列式中某一行或某一列含有较多的 0 时, 应用上述公式才有意义.

但这个公式在理论上是重要的. 1.71

Example 18. 行列式

$$\begin{vmatrix}5 & 3 & -1 & 2 & 0\\ 1 & 7 & 2 & 5 & 2\\ 0 & -2 & 3 & 1 & 0\\ 0 & -4 & -1 & 4 & 0\\ 0 & 2 & 3 & 5 & 0\end{vmatrix}=(-1)^{2+5}\cdot 2\begin{vmatrix}5 & 3 & -1 & 2\\ 0 & -2 & 3 & 1\\ 0 & -4 & -1 & 4\\ 0 & 2 & 3 & 5\end{vmatrix}$$
$$=-2\cdot 5\begin{vmatrix}-2 & 3 & 1\\ -4 & -1 & 4\\ 2 & 3 & 5\end{vmatrix}=-10\begin{vmatrix}-2 & 3 & 1\\ 0 & -7 & 2\\ 0 & 6 & 6\end{vmatrix}=(-10)(-2)\begin{vmatrix}-7 & 2\\ 6 & 6\end{vmatrix}$$
$$=20(-42-12)=-1080.$$

这里第一步是按第 5 列展开, 然后再按第 1 列展开, 这样就归结到一个三阶行列式的计算. 1.72

小结

前面学习了 7 个性质、2 个推论, 共 10 个结论 (其中性质 3 有 2 个结论). 下面做三点归纳.

(一) 行列式的三种变换.

性质 3 之 (i)、性质 5、性质 6 是三个重要的结论, 它们涉及了行列式的三种重要变换:

1. 提出某一行的公因子, 记作: $r_i \div k$ (列的情形为 $c_i \div k$).
2. 把某一行的 k 倍加到另一行, 记作: $r_i + kr_j$ (列的情形为 $c_i + kc_j$).
3. 互换某两行, 记作: $r_i \leftrightarrow r_j$ (列的情形为 $c_i \leftrightarrow c_j$).

上面的写法中, 我们约定: 把要改变的行 (列), 写在表达式的开头.

比如, $r_1 + r_2$ 和 $r_2 + r_1$ 的含义是不同的:

- $r_1 + r_2$: 把 r_2 加到 r_1, 被改变的将是 r_1.
- $r_2 + r_1$: 把 r_1 加到 r_2, 被改变的将是 r_2.

☞ 计算行列式最常用的一种方法就是利用变换 $r_i + kr_j$ 和 $r_i \leftrightarrow r_j$, 把行列式化为上三角形行列式, 从而算得行列式的值. 具体的例子见下一节. 1.73

(二) 行列式为零的三种情形:

- 某行元素全为零 (推论 1);
- 两行 (列) 相同 (性质 4);
- 两行 (列) 成比例 (推论 2). 1.74

(三) 行列式按某行展开的三种情形:

- 按第一行展开 (最简单的情形, 即课本中行列式的定义);
- 按任一行展开 (性质 2, 上述情形的推广)
- 一行元素乘以另一行对应元素的代数余子式, 其和为零 (性质 7).

上述三种情形, 综合起来就是一个表达式:

$$a_{k1}A_{i1} + a_{k2}A_{i2} + \cdots + a_{kn}A_{in} = \sum_{s=1}^{n} a_{ks}A_{is} = \begin{cases} D, & k = i, \\ 0, & k \neq i; \end{cases} \tag{37}$$

1.75

剩下还有两个结论, 比较简单:

- $D^{\mathrm{T}} = D$ (性质 1).
- 行列式的裂开 (性质 3 之 (ii)).

行列式的重点是计算, 应当在理解行列式的概念、熟练掌握行列式性质的基础上, 正确地计算低阶行列式, 会用恒等变形化行列式为上 (下) 三角形行列式, 从而直接求其值. 1.76

2 n 阶行列式的计算

计算行列式最常用的一种方法: 利用行列式变换, 把行列式化为上三角形行列式, 再使用结论

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}, \tag{38}$$

算得行列式的值. 1.77

Example 19. 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}.$$

解:

$$D \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_2} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 4 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3 - 10r_1]{r_2 - 4r_1} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -7 & 2 & -4 \\ 0 & -15 & 2 & -20 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2\leftrightarrow r_4}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -15 & 2 & -20 \\ 0 & -7 & 2 & -4 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4+7r_2]{r_3+15r_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 17 & 85 \\ 0 & 0 & 9 & 45 \end{vmatrix} = 0.$$

1.78

注意, 如果 $a_{11} \neq 1$, 一般通过互换行 (列) 使 a_{11} 为 1, 再进行计算.

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1\leftrightarrow r_2} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 4 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}.$$

从这个例子可以看到, 计算一般的数字行列式可以非常地机械:

Step 1 把 a_{11} 调整为 1, 用 $r_i + kr_1$ 把 a_{11} 下方的数字变为 0.

Step 2 把 a_{22} 调整为 1, 用 $r_i + kr_2$ 把 a_{22} 下方的数字变为 0.

Step 3 如此反复, 总可以把行列式变为上三角行列式, 得到计算结果.

当然, 也可把 a_{11} 调整为第一列元素的公因子. 更多的时候, 需要我们观察各行 (列) 数字间的关系或规律, 灵活运用行列式变换, 使计算简便. 1.79

Example 20. 计算 4 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & -6 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

解: 方法一. 行列变换, 化为上三角形行列式.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & -6 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-r_1]{r_2+r_1,\, r_3-2r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 2 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2\leftrightarrow r_4} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3-2r_2} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -14 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \end{vmatrix}$$

1.80

$$\xlongequal{c_3\leftrightarrow c_4} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & -14 \\ 0 & 0 & 3 & -5 \end{vmatrix} \xlongequal{r_4+r_3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & -19 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot (-3) \cdot (-19) = 57.$$

方法二. 逐步降阶:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & -6 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-r_1]{r_2+r_1,\, r_3-2r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 2 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{展开}c_1} \begin{vmatrix} 0 & -5 & 3 \\ 2 & -4 & -3 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2-2r_3} \begin{vmatrix} 0 & -5 & 3 \\ 0 & -14 & -3 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{展开}c_1} \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ -14 & -3 \end{vmatrix} = 57.$$

1.81

方法三. 观察行列关系, 灵活处理:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & -6 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-2r_4]{r_2+r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & -14 & -3 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4-r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & -14 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{展开}c_1} \begin{vmatrix} 0 & -5 & 3 \\ 0 & -14 & -3 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{展开}c_1} \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ -14 & -3 \end{vmatrix} = 57.$$

1.82

Example 21. 计算 4 阶行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 11 \\ 3 & 0 & 9 & 2 \end{vmatrix}$.

解:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 11 \\ 3 & 0 & 9 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3-2r_2} \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \\ 3 & 0 & 9 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_3+c_4} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 11 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{展开 } r_3} (-1)^{3+4} \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \\ 3 & 0 & 11 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_1-4r_2} -5 \begin{vmatrix} -7 & 0 & -25 \\ 2 & 1 & 7 \\ 3 & 0 & 11 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{展开 } c_2} -5 \begin{vmatrix} -7 & -25 \\ 3 & 11 \end{vmatrix} = 10.$$

1.83

Example 22. 判断: 计算

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \xlongequal[r_1+r_2]{r_2-r_1} \begin{vmatrix} a+c & b+d \\ c-a & d-b \end{vmatrix}$$

是否正确?

解: 计算错误.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \xlongequal{r_2-r_1} \begin{vmatrix} a & b \\ c-a & d-b \end{vmatrix}$$
$$\xlongequal[r_1+r_2]{} \begin{vmatrix} c & d \\ c-a & d-b \end{vmatrix} \neq \begin{vmatrix} a+c & b+d \\ c-a & d-b \end{vmatrix}.$$

1.84

Example 23 (经典例题 ★). 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}.$$

解: **解法一**. 将第一行乘以 (-1) 依次加到其余各行, 得

$$D_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a-x & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ a-x & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a-x & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix},$$

再将各列都加到第一列上, 得

1.85

$$D_n = \begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & a & \cdots & a \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix} = \big[x+(n-1)a\big](x-a)^{n-1}.$$

1.86

解法二. 将各列都加到第一列, 得

$$D_n = \begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & \cdots & a \\ x+(n-1)a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x+(n-1)a & a & \cdots & x \end{vmatrix} = \big[x+(n-1)a\big] \begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ 1 & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

再将第一行乘以 (-1) 依次加到其余各行, 得

$$D_n = \big[x+(n-1)a\big]\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix} = \big[x+(n-1)a\big](x-a)^{n-1}.$$

1.87

解法三. 升阶法.

$$D_n = \left|\begin{array}{c|cccc} 1 & a & a & \cdots & a \\ \hline 0 & x & a & \cdots & a \\ 0 & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a & a & \cdots & x \end{array}\right|_{(n+1)} \xlongequal[i=2,3,\cdots]{r_i - r_1} \begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ -1 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}_{(n+1)}$$

若 $x=a$, 则 $D_n = 0$.
若 $x \neq a$, 则将 $\frac{1}{x-a}c_j$ 加到 c_1, $j=2,3,\cdots,n+1$:

$$\begin{aligned} D_n &= \begin{vmatrix} 1+\frac{a}{x-a}n & a & a & \cdots & a \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}_{(n+1)} \\ &= \Big(1+\frac{na}{x-a}\Big)(x-a)^n = \big[x+(n-1)a\big](x-a)^{n-1}. \end{aligned}$$

1.88

解法四. 将 D_n 的第 1 列拆开, 得

$$D_n = \begin{vmatrix} x-a & a & a & \cdots & a \\ 0 & x & a & \cdots & a \\ 0 & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a & a & \cdots & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix} = (x-a)D_{n-1} + a(x-a)^{n-1}.$$

所以

$$\begin{cases} D_n = (x-a)D_{n-1} + a(x-a)^{n-1}, \\ (x-a)D_{n-1} = (x-a)^2 D_{n-2} + a(x-a)^{n-1}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (x-a)^{n-2}D_2 = (x-a)^{n-1}D_1 + a(x-a)^{n-1}. \end{cases}$$

将上述等式累和, 并注意到 $D_1 = x$, 则

$$D_n = (x-a)^{n-1}x + (n-1)a(x-a)^{n-1} = \big(x+(n-1)a\big)(x-a)^{n-1}.$$

这个行列式经常以不同的样子出现, 比如 1.89

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (n-1)(-1)^{n-1},$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ a & 1 & a & \cdots & a \\ a & a & 1 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & 1 \end{vmatrix} = [1+(n-1)a](1-a)^{n-1},$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+\lambda & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+\lambda & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+n)\lambda^{n-1}.$$

注意, 这是一个重要的例题. 解法一最简单. 1.90

解法二的特点是: 所有的列 (行) 加到某一列 (行), 其值相等, 可以提出公因子. 这是一个常用的方法.

解法三称为 "升阶法" 或 "加边法", 在这个题中看似笨拙, 实则是一类重要的方法. 比如这个题目可以改一下:

$$D_n = \begin{vmatrix} x_1 & a & \cdots & a \\ a & x_2 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x_n \end{vmatrix}. \tag{39}$$

此时解法二是不适用的. 这个题还可以进一步改为:

$$D_n = \begin{vmatrix} x_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & x_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & x_n \end{vmatrix}. \tag{40}$$

行列式 (39) 和 (40) 用升阶法很方便. 1.91

行列式 (39) 的结果:

假定 $x_i \neq a$, 得

$$D_n = \left(1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{a}{x_i - a}\right) \prod_{i=1}^{n} (x_i - a).$$

行列式 (40) 的结果:

假定 $x_i \neq a_i$, 得

$$D_n = \left(1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{x_i - a_i}\right) \prod_{i=1}^{n} (x_i - a_i).$$

1.92

行列式 (39) 和 (40) 有很多不同的出现形式, 常见于各类教材和习题 (比如教材中习题 20, 28, 36, 42), 也是极常见的试题. 比如

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2+a & 2 & \cdots & 2 \\ 3 & 3 & 3+a & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n+a \end{vmatrix} = \left(a + \frac{n(n+1)}{2}\right) a^{n-1}.$$

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1+b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+b & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3+b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+b \end{vmatrix} = b^{n-1}\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i + b\Big).$$

(2003 年考研数学三)

1.93

"爪形" 行列式

在解法三中出现了下面形式的行列式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

可以谓之 "爪形" 行列式. 它的解法是固定的. 1.94

Example 24. 计算行列式 (假定 $a_i \neq 0$):

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}.$$

解: 分别将第 i $(i=2,\cdots,n+1)$ 列乘以 $-\frac{1}{a_{i-1}}$ 加到第 1 列, 得

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} a_0-\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}=a_1a_2\cdots a_n\Big(a_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\Big).$$

1.95

Example 25. 计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ -a & x & a & \cdots & a \\ -a & -a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a & -a & -a & \cdots & x \end{vmatrix}$.

解: 将第 1 列裂开,

$$\begin{aligned} D_n &= \begin{vmatrix} a & a & a & \cdots & a \\ -a & x & a & \cdots & a \\ -a & -a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a & -a & -a & \cdots & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x-a & a & a & \cdots & a \\ 0 & x & a & \cdots & a \\ 0 & -a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & -a & -a & \cdots & x \end{vmatrix} \\ &= a(x+a)^{n-1}+(x-a)D_{n-1}. \end{aligned} \tag{41}$$

对称地可知 1.96

$$D_n^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} x & -a & -a & \cdots & -a \\ a & x & -a & \cdots & -a \\ a & a & x & \cdots & -a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}=-a(x-a)^{n-1}+(x+a)D_{n-1}^{\mathrm{T}}.$$

即 $D_n^{\mathrm{T}}=-a(x-a)^{n-1}+(x+a)D_{n-1}^{\mathrm{T}}$. 而 $D^{\mathrm{T}}=D$, 故

$$D_n=-a(x-a)^{n-1}+(x+a)D_{n-1}. \tag{42}$$

于是, 联立 (41) 和 (42), 消去 D_{n-1}, 当 $a\neq 0$ 时, 有

$$D_n=\frac{(x+a)^n+(x-a)^n}{2}.$$

易见当 $a=0$ 时, 结论也成立. 1.97

Example 26. 计算 n 阶行列式 $(a \neq b)$:

$$D_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a & a \\ b & x & a & \cdots & a & a \\ b & b & x & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & x & a \\ b & b & b & \cdots & b & x \end{vmatrix}.$$

解: 从 r_1 开始, 各行减去下一行: 1.98

$$\begin{aligned} D_n &\xlongequal[i=1,\cdots,n-1]{r_i - r_{i+1}} \begin{vmatrix} x-b & a-x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x-b & a-x & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-b & a-x \\ b & b & b & \cdots & b & x \end{vmatrix} \\ &\xlongequal{\text{展开}c_1} (x-b)D_{n-1} + (-1)^{n+1} \cdot b \cdot (a-x)^{n-1} \\ &= (x-b)D_{n-1} + b(x-a)^{n-1}. \end{aligned} \tag{43}$$

由 D_n 表达式中 a, b 的对称性, 还可得

$$D_n = (x-a)D_{n-1} + a(x-b)^{n-1}. \tag{44}$$

(或由 $D_n = (x-b)D_{n-1} + b(x-a)^{n-1}$, 知

$$D^{\mathrm{T}} = (x-a)D_{n-1}^{\mathrm{T}} + a(x-b)^{n-1},$$

而 $D = D^{\mathrm{T}}$, 得 (44) 式.) 联立 (43) 和 (44) 式, 消去 D_{n-1}, 得 1.99

$$D_n = \frac{a(x-b)^n - b(x-a)^n}{a-b}.$$

或者裂项得到 D_n 与 D_{n-1} 的递推关系. 1.100

$$\begin{aligned} D_4 &= \begin{vmatrix} x & a & a & a \\ b & x & a & a \\ b & b & x & a \\ b & b & b & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ b & x & a & a \\ b & b & x & a \\ b & b & b & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x-a & a & a & a \\ 0 & x & a & a \\ 0 & b & x & a \\ 0 & b & b & x \end{vmatrix} \\ &= \frac{a}{b} \begin{vmatrix} b & b & b & b \\ b & x & a & a \\ b & b & x & a \\ b & b & b & x \end{vmatrix} + (x-a)D_3 \\ &= \frac{a}{b} \begin{vmatrix} b & b & b & b \\ 0 & x-b & a-b & a-b \\ 0 & 0 & x-b & a-b \\ 0 & 0 & 0 & x-b \end{vmatrix} + (x-a)D_3 \end{aligned}$$

$$= a(x-b)^3 + (x-a)D_3.$$

Example 27. 行列式

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} \tag{45}$$

称为 n 阶**范德蒙** (Vandermonde) 行列式.[4]

试证明: 对任意的 $n \geqslant 2$, n 阶范德蒙行列式等于 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 这 n 个数的所有可能之差 $a_i - a_j$ 的乘积, 其中 $1 \leqslant j < i \leqslant n$. 即

$$V_n = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (a_i - a_j).$$

证: 对 n 作归纳法. 当 $n = 2$ 时,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1,$$

结果成立. 设对于 $n-1$ 阶的范德蒙行列式结论成立, 下面来看 n 阶的情形.

在 (45) 中, 第 n 行减去第 $n-1$ 行的 a_1 倍, 第 $n-1$ 行减去第 $n-2$ 行的 a_1 倍, 由下而上, 依次地在每一行减去它上一行的 a_1 倍, 有

$$\begin{aligned} V_n &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \cdots & a_n - a_1 \\ 0 & a_2^2 - a_1 a_2 & a_3^2 a_1 a_3 & \cdots & a_n^2 - a_1 a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_2^{n-1} - a_1 a_2^{n-2} & a_3^{n-1} - a_1 a_3^{n-2} & \cdots & a_n^{n-1} - a_1 a_n^{n-2} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \cdots & a_n - a_1 \\ a_2^2 - a_1 a_2 & a_3^2 - a_1 a_3 & \cdots & a_n^2 - a_1 a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2^{n-1} - a_1 a_2^{n-2} & a_3^{n-1} - a_1 a_3^{n-2} & \cdots & a_n^{n-1} - a_1 a_n^{n-2} \end{vmatrix} \\ &= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)\cdots(a_n - a_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

[4]范德蒙 (Alexandre-Théophile Vandermonde, 1735 –1796), 法国音乐家、数学家、化学家. 他是一个小提琴家, 直到 1770 年才开始数学的研究. 范德蒙行列式也可以写为本文形式的转置.

后面这行列式是一个 $n-1$ 阶的范德蒙行列式, 根据归纳法假设, 它等于所有可能差 $a_i - a_j$ $(2 \leqslant j < i \leqslant n)$ 的乘积, 而包含 a_1 的差全在前面出现了, 因此, 结论对 n 阶范德蒙行列式也成立. 根据数学归纳法, 完成了证明.

用连乘号, 这个结果可以简写为

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (a_i - a_j).$$

由这个结果立即得出, 范德蒙行列式为零的充分必要条件是 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 这 n 个数当中至少有两个相等. 1.102

Example 28. 证明

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{r1} & \cdots & c_{rk} & b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix}. \tag{46}$$

证: 对 k 用数学归纳法. 当 $k=1$ 时, (46) 的左端为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{r1} & b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix}.$$

按第一行展开, 就得到所要的结论. 1.103

假设 (46) 对 $k=m-1$ 成立, 现在来看 $k=m$ 的情形. 记

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix}, \qquad |\boldsymbol{B}| = \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix}.$$

用 $M_{1j}^{\boldsymbol{A}}$ 表示: 在 $\boldsymbol{A}$ 中去掉 a_{1j} 所在的行、列之后, 余下的那一部分数字块. M_{1j} 表示: a_{1j} 在行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 中对应的余子式. 则行列式按第 1 行展开得

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ * & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} M_{11}^{\boldsymbol{A}} & \boldsymbol{O} \\ * & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} M_{12}^{\boldsymbol{A}} & \boldsymbol{O} \\ * & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} + \cdots + (-1)^{1+m} a_{1m} \begin{vmatrix} M_{1m}^{\boldsymbol{A}} & \boldsymbol{O} \\ * & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{1+1} a_{11} M_{11} |\boldsymbol{B}| + (-1)^{1+2} a_{12} M_{12} |\boldsymbol{B}| + \cdots + (-1)^{1+m} a_{1m} M_{1m} |\boldsymbol{B}| \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left[(-1)^{1+1}a_{11}M_{11} + (-1)^{1+2}a_{12}M_{12} + \cdots + (-1)^{1+m}a_{1m}M_{1m}\right]\left|\boldsymbol{B}\right| \\
&= \left|\boldsymbol{A}\right|\left|\boldsymbol{B}\right|.
\end{aligned}
$$

1.104

小结: (46) 式可简记为

$$
D = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ * & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|. \tag{47}
$$

同样也有

$$
D = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & * \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|. \tag{48}
$$

结论 (47) 容易推广为:

$$
\begin{vmatrix} \boldsymbol{A_1} & & & \\ * & \boldsymbol{A_2} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ * & * & \cdots & \boldsymbol{A_k} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A_1}||\boldsymbol{A_2}|\cdots|\boldsymbol{A_k}|. \tag{49}
$$

这在形式上与下三角行列式的结果是一致的. 对上三角行列式的情形有类似结论.

1.105

Example 29.

$$
\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -3 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & -1 & 2 & 7 \\ 6 & -7 & 4 & 0 & -2 & 5 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}
\left|\begin{array}{cc:c:ccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 5 & -3 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 2 & 7 & -1 & 2 & 7 \\ 6 & -7 & 4 & 0 & -2 & 5 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right|
= \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 7 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -24.
$$

1.106

注意,

$$
\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_{nn} \\ \boldsymbol{B}_{mm} & \boldsymbol{C}_{mn} \end{vmatrix} \neq -\left|\boldsymbol{A}_{nn}\right| \cdot \left|\boldsymbol{B}_{mm}\right|.
$$

事实上,

$$
\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_{nn} \\ \boldsymbol{B}_{mm} & \boldsymbol{C}_{mn} \end{vmatrix} = (-1)^{mn}\left|\boldsymbol{A}_{nn}\right| \cdot \left|\boldsymbol{B}_{mm}\right|, \tag{50}
$$

$$
\begin{vmatrix} \boldsymbol{C}_{nm} & \boldsymbol{A}_{nn} \\ \boldsymbol{B}_{mm} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix} = (-1)^{mn}\left|\boldsymbol{A}_{nn}\right| \cdot \left|\boldsymbol{B}_{mm}\right|. \tag{51}
$$

因为, 将 $\boldsymbol{A}_{nn}$ 所在的每一列依次与其前面的 m 列逐列对换, 共进行 $n \times m$ 次相邻互换, 得

$$
\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_{nn} \\ \boldsymbol{B}_{mm} & \boldsymbol{C}_{mn} \end{vmatrix} = (-1)^{n\times m}\begin{vmatrix} \boldsymbol{A}_{nn} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C}_{mn} & \boldsymbol{B}_{mm} \end{vmatrix} = (-1)^{mn}\left|\boldsymbol{A}_{nn}\right| \cdot \left|\boldsymbol{B}_{mm}\right|.
$$

1.107

习题 30 (P.33 习题 17). $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 8 \end{vmatrix}$.

解:

$$D = (-1)^{2\times 3} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2 - r_1} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} \cdot (-5) = -60.$$

1.108

3 克拉默 (Cramer) 法则

克拉默法则

克拉默[5]法则给出了一类线性方程组的公式解.

Theorem 31 (克拉默法则, Cramer's Rule, 1750). *如果线性方程组*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{52}$$

的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0, \tag{53}$$

那么线性方程组 (52) 有解, 并且解是惟一的, 解可以通过系数表为

1.109

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad \cdots, \quad x_n = \frac{D_n}{D}, \tag{54}$$

其中 D_j 是把行列式 D 中第 j 列换成方程组的常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 所成的行列式, 即

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{55}$$

1.110

注: 克拉默法则的局限

[5]克拉默 (Gabriel Cramer, 1704–1752), 瑞士数学家. 克莱姆早年就显示其数学天赋, 18 岁获博士学位, 20 岁成为日内瓦大学数学学科的 co-chair.

- 克拉默法则面对的线性方程组要满足两个条件: (1) 未知量个数和方程组个数相同, (2) 系数行列式 $D \neq 0$.
- 克拉默法则从理论上完美地解决了一少部分线性方程组的求解问题, 但因其中行列式计算量太大, 实际求解并不用此方法. 高斯消元法仍然是行之有效的简单解法. *有的习题会要求使用克拉默法则求解线性方程组, 这类题目请大家直接无视.* 1.111

齐次线性方程组

常数项全为零的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

称为**齐次线性方程组**. 显然, 齐次线性方程组总是有解的, 因为 $(0, 0, \dots, 0)$ 就是一个解, 它称为**零解**.

对于齐次线性方程组, 我们关心的问题是: 它除去零解以外还有没有其它解, 或者说, 它有没有非零解. 1.112

Corollary 32. *如果齐次线性方程组*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0. \end{cases} \tag{56}$$

的系数行列式 $D \neq 0$, 那么它只有零解. 换句话说, 如果方程组 (56) 有非零解, 那么必有 $D = 0$.

证: 由克拉默法则, 因 $D \neq 0$, 故有唯一解. 而 $(0, 0, \cdots, 0)$ 已经是它的解, 故它只有零解. □

☞ 在第 3 章, 我们将会证明: $D = 0$ 是齐次方程组有非零解的充要条件. 1.113

流传于微信朋友圈的一个问题

Example 33. $1 = 4$, $2 = 8$, $3 = 24$, $4 = ?$

分析: 有人说 $4 = 1$, 因为 $1 = 4$. 有人说 $4 = 96$, 因为 $4 \times 2 = 8$, $8 \times 3 = 24$.

解: 设曲线 $y = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2$ 过点 $(1, 4)$, $(2, 8)$, $(3, 24)$. 代入三点坐标, 得到一个关于 λ_0, λ_1, λ_2 的线性方程组:

$$\begin{cases} \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 4, \\ \lambda_0 + 2\lambda_1 + 4\lambda_2 = 8, \\ \lambda_0 + 3\lambda_1 + 9\lambda_2 = 24. \end{cases}$$

由高斯消元法得

$$\lambda_0 = 12, \quad \lambda_1 = -14, \quad \lambda_2 = 8.$$

故 $y = 12 - 14x + 8x^2$, 得 $y(4) = 94$. 1.114

思考: 数列前 3 项依次为 4, 8, 24, 第 4 项能否取别的值? 甚至是任意数值?!

事实上, 令第 4 项的值为任意常数 c, 设曲线

$$y = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 x^3$$

经过点 $(1,4)$, $(2,8)$, $(3,24)$, $(4,c)$. 代入四点坐标, 得到一个关于 λ_0, λ_1, λ_2, λ_3 的线性方程组:

$$\begin{cases} \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 4, \\ \lambda_0 + 2\lambda_1 + 4\lambda_2 + 8\lambda_3 = 8, \\ \lambda_0 + 3\lambda_1 + 9\lambda_2 + 27\lambda_3 = 24, \\ \lambda_0 + 4\lambda_1 + 16\lambda_2 + 64\lambda_3 = c. \end{cases}$$

它的系数行列式 D 是范德蒙行列式, 且每个 a_i 都不相同, 故 $D \neq 0$. 由克拉默法则, 方程组必有唯一解. □

这也表明通过前三点的多项式曲线有无穷多条. 从而说明: 给出数列的前 n 项, 满足这 n 项取值的通项公式有无穷多个! 1.115

☞ 一般地, 过 $n+1$ 个 x 坐标不同的点 (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\cdots$, (x_{n+1}, y_{n+1}), 可以唯一地确定一个 n 次曲线方程

$$y = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \cdots + \lambda_n x^n.$$

但是, 满足这 $n+1$ 个已知点的多项式有无穷多个.

上述结论, 是范德蒙行列式的一个重要应用. 它得到了一个理论上的重要结果: 要想知道两个变量之间的函数关系, 可以测量若干点的取值, 总存在多项式函数可以描述这个两个变量之间的关系, 并且函数严格通过每一个测量点. 但这个方法并不实用, 因其次数太高, 计算量大; 由于测量误差的存在, 也使得所求曲线没有必要严格通过每一个点 (例如原本可能是线性关系, 上述做法一般得到的是高次多项式函数). 这是数学、科研当中一个非常重要的问题: 函数的插值与逼近. 数值分析或计算方法课程会深入讨论这个问题. 1.116

Example 34. 求 λ 在什么条件下, 方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 = 0, \\ x_1 + \lambda x_2 = 0. \end{cases}$$

有非零解.

解: 根据推论, 如果方程组有非零解, 那么系数行列式

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0,$$

所以 $\lambda = \pm 1$. □

当 $\lambda = 1$ 时, 方程组有非零解, 且有无数多组解: $(x_1, x_2) = (k, -k)$, k 为任意常数.

当 $\lambda = -1$ 时, 方程组也有无数多组解: $(x_1, x_2) = (c, c)$, c 为任意常数. 1.117

Example 35 (典型例题, P36 习题 37). 试证

$$D_n=\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n.$$

1.118

证: 解法一. 设法把主对角线上的 x 变为 0, 再按第一列展开.

$$D_n=\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_3 & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{c_{n-1}+xc_n}}\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_3 & x^2+a_1x+a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

1.119

$$\underline{\underline{c_{n-2}+xc_{n-1}}}\begin{vmatrix} x & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & x^3+a_1x^2+a_2x+a_3 & x^2+a_1x+a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{c_j+xc_{j+1}}}_{j=n-3,\cdots,2,1}\begin{vmatrix} 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ P_n & P_{n-1} & \cdots & x^2+a_1x+a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

其中 $P_n=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$, $P_{n-1}=x^{n-1}+a_1x^{n-2}+\cdots+a_{n-2}x+a_{n-1}$.

1.120

$$\xlongequal{\text{展开}c_1}(-1)^{n+1}(x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n)\begin{vmatrix} -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix}_{(n-1)\text{阶}}$$

$$=(-1)^{n+1}(x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n)(-1)^{n-1}$$

$$=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n.$$

1.121

解法二. 设法把 -1 全部变为 0, 得到一个下三角矩阵.

若 $x=0$, 则 $D_n=a_n$. 等式成立.

若 $x\neq 0$, 则

$$D_n \xlongequal{c_2+\frac{1}{x}c_1} \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1}+\frac{a_n}{x} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_3+\frac{1}{x}c_2} \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1}+\frac{a_n}{x} & a_{n-2}+\frac{a_{n-1}}{x}+\frac{a_n}{x^2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

1.122

$$\xlongequal[j=4,5,\cdots,n]{c_j+\frac{1}{x}c_{j-1}} \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 0 \\ a_n & a_{n-1}+\frac{a_n}{x} & a_{n-2}+\frac{a_{n-1}}{x}+\frac{a_n}{x^2} & \cdots & P_2 & P_1 \end{vmatrix}$$

这里,

$$P_2=a_2+\frac{a_3}{x}+\frac{a_4}{x^2}+\cdots+\frac{a_n}{x^{n-2}},$$
$$P_1=x+a_1+\frac{a_2}{x}+\frac{a_3}{x^2}+\cdots+\frac{a_n}{x^{n-1}}.$$

得到下三角阵, 所以

$$D_n=x^{n-1}\cdot P_1=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n.$$

1.123

解法三. 用递归法证明. 展开 c_1 得

$$D_n=\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

$$=x\begin{vmatrix} x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}+(-1)^{n+1}a_n\begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix}$$

$$=xD_{n-1}+(-1)^{n+1}a_n(-1)^{n-1}$$

$$=xD_{n-1}+a_n.$$

所以, $D_n=xD_{n-1}+a_n$. 由此递归式得

$$D_n=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n.$$

1.124

解法四. 按最后一行展开. 先看 a_{n-i} 的代数余子式. 因为

$$D_n=\left|\begin{array}{ccccc:c:ccccc} x & -1 & & & & & & & & & \\ & x & -1 & & & & & & & & \\ & & x & \ddots & & & & & & & \\ & & & \ddots & -1 & & & & & & \\ & & & & x & -1 & & & & & \\ \hdashline & & & & & x & -1 & & & & \\ & & & & & & x & \ddots & & & \\ & & & & & & & \ddots & -1 & & \\ & & & & & & & & x & -1 & \\ \hdashline a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_{n-(i-1)} & \color{red}{a_{n-i}} & a_{n-(i+1)} & & & a_2 & x+a_1 \end{array}\right|$$

划掉 a_{n-i} 所在的行、所在的列, 则余下的 $n-1$ 阶行列式中: 左上角是 $i\times i$ 的方块, 右下角是 $(n-i-1)\times(n-i-1)$ 的方块, 余下全为 0.

则 a_{n-i} 的代数余子式为 (注意到 a_{n-i} 处在第 n 行、第 $i+1$ 列) 1.125

$$(-1)^{n+i+1}\begin{vmatrix} x & -1 & & & \\ & x & -1 & & \\ & & x & \ddots & \\ & & & \ddots & -1 \\ & & & & x \end{vmatrix}_{i\,阶}\cdot\begin{vmatrix} -1 & & & \\ x & \ddots & & \\ & \ddots & -1 & \\ & & x & -1 \end{vmatrix}_{(n-i-1)阶}=x^i$$

所以, D_n 按最后一行展开, 得到

$$\begin{aligned} D_n &= a_n + a_{n-1}x + a_{n-2}x^2 + \cdots + a_{n-i}x^i + \cdots + a_2x^{n-2} + (x+a_1)x^{n-1} \\ &= x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n. \end{aligned}$$

1.126

解法五. 针对 c_1 作变换.

$$D_n = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_1+xc_2} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x^2 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n+a_{n-1}x & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

1.127

$$\xlongequal{c_1+x^2c_3} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ x^3 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n+a_{n-1}x+a_{n-2}x^2 & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[j=4,5,\cdots,n]{c_1+x^{j-1}c_j} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ P & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix},$$

这里, $P = a_n + a_{n-1}x + a_{n-2}x^2 + \cdots + a_1x^{n-1} + x^n$. 再按第一列展开, 得

$$D_n = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n.$$

1.128

4 行列式计算的常见方法

- 宏观思路: 三角化、降阶法、递推法等;

- 微观手法: 行累加、主行消法、逐行消法、逐行相邻互换等;
- 非主流方法: 升阶、裂开等. 1.129

4.1 基本计算思路

三角化

化行列式为三角形是计算行列式的最基本思路. 通过观察行列式的特点, 利用行列式的性质将其作变形, 再将其化为三角形行列式. 1.130

Example 36. 计算行列式 $D_n = \begin{vmatrix} n & n-1 & \cdots & 3 & 2 & 1 \\ n & n-1 & \cdots & 3 & 3 & 1 \\ n & n-1 & \cdots & 5 & 2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & 2n-3 & \cdots & 3 & 2 & 1 \\ 2n-1 & n-1 & \cdots & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

解: 各行只有副对角线元素不同. 将第 1 行乘以 (-1) 加到第 $2, 3, \ldots, n$ 行, 得

$$D_n = \begin{vmatrix} n & n-1 & \cdots & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & n-2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(n-1)!.$$

1.131

Example 37. 计算行列式 $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$.

解: 注意到从第 1 列开始, 每一列与它后一列中有 $n-1$ 个数相差 1. 依次进行列运算: $c_n - c_{n-1}, c_{n-1} - c_{n-2}, \cdots, c_2 - c_1$, 得

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 3 & 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

1.132

$$\xlongequal[i=2,\cdots,n]{r_i - r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -n \\ 2 & 0 & 0 & \cdots & -n & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & -n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,\cdots,n]{r_1+\frac{1}{n}r_i}\begin{vmatrix} 1+\frac{1}{n}(1+\cdots+(n-1)) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -n \\ 2 & 0 & \cdots & -n & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ n-1 & -n & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

1.133

$$\xlongequal{\text{展开 } r_1}\frac{(n+1)}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -n \\ 0 & 0 & \cdots & -n & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & -n & \cdots & 0 & 0 \\ -n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$$

$$= \frac{(n+1)}{2}\cdot(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}\cdot(-n)^{n-1}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot\frac{(n+1)}{2}\cdot n^{n-1}.$$

1.134

降阶法

按一行 (列) 展开, 或使用 Laplace 定理展开 (见本文附录), 使行列式降阶, 此方法统称为**降阶法**.

Example 38. 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}.$$

解: 按第一列展开,

$$D_n = a^n + (-1)^{n+1}b^n.$$

1.135

递推法

一般地, 递推方法是通过降阶等途径, 建立 n 阶行列式 D_n 和较它阶低的结构相同的行列式之间的关系, 并求得 D_n. 1.136

Example 39. 计算三对角行列式 $D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & & & \\ 1 & a+b & ab & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & a+b & ab \\ & & & 1 & a+b \end{vmatrix}.$

解: 按第 1 列展开, 得

$$
\begin{aligned}
D_n &= (a+b)D_{n-1} - \begin{vmatrix} ab & 0 & 0 & & & \\ 1 & a+b & ab & & & \\ & 1 & a+b & ab & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & a+b & ab \\ & & & & 1 & a+b \end{vmatrix} \\
&= (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}. \qquad (57)
\end{aligned}
$$

由 (57) 得到 1.137

$$D_n - bD_{n-1} = a(D_{n-1} - bD_{n-2}) = a^2(D_{n-2} - bD_{n-3}) = \cdots = a^{n-2}(D_2 - bD_1).$$

又 $D_1 = a+b$, $D_2 = a^2+b^2+ab$, 得

$$D_n - bD_{n-1} = a^n. \qquad (58)$$

同理 (或由 a, b 的对称性) 得

$$D_n - aD_{n-1} = b^n. \qquad (59)$$

若 $a \neq b$, 联立 (58) 和 (59) 消去 D_{n-1}, 得

$$D_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}.$$

若 $a = b$, 则 $D_n = aD_{n-1} + a^n$. 依此递推, 得 $D_n = (n+1)a^n$. 1.138

注 1. 与递推过程相反的方法是归纳. 如要计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 3 & 2 & & & \\ 1 & 3 & 2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 3 & 2 \\ & & & 1 & 3 \end{vmatrix},$$

因为 $D_1 = 3 = 2^2 - 1$, $D_2 = 7 = 2^3 - 1$, $D_3 = 15 = 2^4 - 1$. 因此, 猜想

$$D_n = 2^{n+1} - 1,$$

并利用数学归纳法易证此结论成立.

1.139

4.2 常用化简手法

总结上面例子有以下常用手法:

- 行累加, 即把行列式的某 $n-1$ 个行, 加到余下的一行. 当行列式的各行的和相同时常使用此技巧.

- 主行消法, 即某行的适当倍数, 加到其余的各行.
- 逐行消法, 即第 i 行乘以 k 加到第 $i+1$ 行, $i=n-1,n-2,\cdots,1$; 或第 $i+1$ 行乘以 k 加到第 i 行, $i=1,2,\cdots,n-1$.
- 逐行相邻互换.

☞ 这些方法都是行列式三种基本变换的“高级形式”. 1.140

Example 40. 计算行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & 1-n \end{vmatrix}.$$

解: 各列加到第一列, 再展开第一列, 得

$$D_n=(-1)^{n-1}\frac{(n+1)!}{2}.$$

1.141

4.3 辅助算法

升阶

将 n 阶行列式添上一行、一列, 变为 $n+1$ 阶行列式再化简计算, 称为**升阶法**, 也称**加边法**.

☞ 其关键: 每行或每列是否有相同的元素. 1.142

Example 41. 计算 n 阶行列式:

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1^2+1 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n \\ x_2x_1 & x_2^2+1 & \cdots & x_2x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_nx_1 & x_nx_2 & \cdots & x_n^2+1 \end{vmatrix}.$$

分析: 暂时不看主对角线上的 1, 则第 i 行是 x_i 与 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ 相乘. 该行列式每行有相同的元素 $x_1,x_2,\ldots,x_n$, 从而考虑加边法.

解:

$$D_n=\left|\begin{array}{c:cccc} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \hdashline 0 & x_1^2+1 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n \\ 0 & x_2x_1 & x_2^2+1 & \cdots & x_2x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_nx_1 & x_nx_2 & \cdots & x_n^2+1 \end{array}\right|_{(n+1)\text{阶}}$$

1.143

$$\xlongequal[i=1,\cdots,n]{r_{i+1}-x_ir_1}\begin{vmatrix}1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ -x_1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ -x_2 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ -x_n & 0 & 0 & \cdots & 1\end{vmatrix}_{n+1}$$

$$\xlongequal[i=1,\cdots,n]{c_1+x_ic_{i+1}}\begin{vmatrix}1+\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{vmatrix}_{n+1}=1+\sum_{i=1}^{n}x_i^2.$$

☞ 升阶法最大的特点就是要找出每行或每列相同的元素, 把 1 及这些相同的元素作为新行列式的第一行, 那么升阶之后, 就可利用行列式的性质把绝大部分元素化为零, 从而简化计算. 1.144

裂开

将一个行列式裂开成 2 个 (或 2 个以上) 行列式来化简计算.

Example 42. 试证

$$\begin{vmatrix}b+c & c+a & a+b\\ q+r & r+p & p+q\\ y+z & z+x & x+y\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}a & b & c\\ p & q & r\\ x & y & z\end{vmatrix}.$$

解: 记左端行列式为 D, 利用行列式的性质, 将 D 的第 1 列拆开得到两个行列式

$$D=\begin{vmatrix}b & c+a & a+b\\ q & r+p & p+q\\ y & z+x & x+y\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}c & c+a & a+b\\ r & r+p & p+q\\ z & z+x & x+y\end{vmatrix}.$$

将第一个行列式中将第 3 列减去第 1 列, 在第 2 个行列式中将第 2 列减去第 1 列: 1.145

$$\begin{aligned}D&=\begin{vmatrix}b & c+a & a\\ q & r+p & p\\ y & z+x & x\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}c & a & a+b\\ r & p & p+q\\ z & x & x+y\end{vmatrix}\\ &=\begin{vmatrix}b & c & a\\ q & r & p\\ y & z & x\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}c & a & b\\ r & p & q\\ z & x & y\end{vmatrix}\\ &=2\begin{vmatrix}a & b & c\\ p & q & r\\ x & y & z\end{vmatrix}.\end{aligned}$$

1.146

4.4 特殊行列式: Vandermonde 行列式

Example 43. 计算行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1+1 & a_2+1 & \cdots & a_n+1 \\ a_1^2+a_1 & a_2^2+a_2 & \cdots & a_n^2+a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1}+a_1^{n-2} & a_2^{n-1}+a_2^{n-2} & \cdots & a_n^{n-1}+a_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

解: 从第二行起, 各行减去上一行, 得范德蒙行列式, 故

$$D_n = \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n} (a_i - a_j).$$

1.147

Example 44. 计算行列式:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2^2 & \cdots & 2^n \\ 3 & 3^2 & \cdots & 3^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n^2 & \cdots & n^n \end{vmatrix}.$$

解: 将第 i 行提公因子 i, 得

$$D_n = n! \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \cdots & 2^{n-1} \\ 1 & 3 & 3^2 & \cdots & 3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & n & n^2 & \cdots & n^{n-1} \end{vmatrix} = n! \prod_{n\geqslant i>j\geqslant 1} (i-j)$$

1.148

$$\begin{aligned} &= n!\,(2-1)(3-1)(4-1)\cdots(n-1) \\ &\qquad \cdot (3-2)(4-2)\cdots(n-2) \\ &\qquad\qquad \cdots\cdots \\ &\qquad\qquad \cdot \big(n-(n-1)\big) \\ &= n!\,(n-1)!\,(n-2)!\,\cdots\,2!\,1!. \end{aligned}$$

1.149

习题 45 (P35 习题 30)**.** 计算 $\begin{vmatrix} a_1^n & a_1^{n-1}b_1 & a_1^{n-2}b_1^2 & \cdots & a_1 b_1^{n-1} & b_1^n \\ a_2^n & a_2^{n-1}b_2 & a_2^{n-2}b_2^2 & \cdots & a_2 b_2^{n-1} & b_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{n+1}^n & a_{n+1}^{n-1}b_{n+1} & a_{n+1}^{n-2}b_{n+1}^2 & \cdots & a_{n+1} b_{n+1}^{n-1} & b_{n+1}^n \end{vmatrix}$.

解: 1.150

$$
\begin{aligned}
&\begin{vmatrix}
a_1^n & a_1^{n-1}b_1 & a_1^{n-2}b_1^2 & \cdots & a_1b_1^{n-1} & b_1^n \\
a_2^n & a_2^{n-1}b_2 & a_2^{n-2}b_2^2 & \cdots & a_2b_2^{n-1} & b_2^n \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\
a_{n+1}^n & a_{n+1}^{n-1}b_{n+1} & a_{n+1}^{n-2}b_{n+1}^2 & \cdots & a_{n+1}b_{n+1}^{n-1} & b_{n+1}^n
\end{vmatrix} \\
\xlongequal{r_i \div a_i^n}\ & a_1^n a_2^n \cdots a_{n+1}^n
\begin{vmatrix}
1 & \dfrac{b_1}{a_1} & \left(\dfrac{b_1}{a_1}\right)^2 & \cdots & \left(\dfrac{b_1}{a_1}\right)^n \\
1 & \dfrac{b_2}{a_2} & \left(\dfrac{b_2}{a_2}\right)^2 & \cdots & \left(\dfrac{b_2}{a_2}\right)^n \\
\vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
1 & \dfrac{b_{n+1}}{a_{n+1}} & \left(\dfrac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right)^2 & \cdots & \left(\dfrac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right)^n
\end{vmatrix} \\
\xlongequal[\text{Vandermonde 行列式}]{n+1\text{ 阶}}\ & a_1^n a_2^n \cdots a_{n+1}^n \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n+1} \left(\frac{b_j}{a_j} - \frac{b_i}{a_i}\right) \\
=\ & \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n+1} (a_i b_j - a_j b_i).
\end{aligned}
$$

1.151

习题 46 (P37 习题 44)**.** 证明 $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^n & x_2^n & x_3^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \left(\sum\limits_{i=1}^n x_i\right) \prod\limits_{1\leqslant j<i\leqslant n} (x_i - x_j)$.

证: 考虑 $n+1$ 阶 Vandermonde 行列式

$$
V_{n+1} = \begin{vmatrix}
1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\
x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n & y \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} & y^{n-2} \\
x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} & y^{n-1} \\
x_1^n & x_2^n & x_3^n & \cdots & x_n^n & y^n
\end{vmatrix}
$$

1.152

这里 y^{n-1} 的余子式 $M_{n,n+1}$ 即所求的 D_n.

一方面, 由 Vandermonde 行列式的结果可知:

$$
\begin{aligned}
V_{n+1} &= (y-x_1)(y-x_2)\cdots(y-x_n) \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n} (x_i - x_j) \\
&= \left[y^n - (x_1+x_2+\cdots+x_n)y^{n-1} + \cdots + (-1)^n x_1x_2\cdots x_n\right] \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n} (x_i - x_j).
\end{aligned} \tag{60}
$$

另一方面, 将 V_{n+1} 按第 $n+1$ 列展开得:

$$
V_{n+1} = 1 \cdot A_{1,n+1} + y \cdot A_{2,n+1} + \cdots + y^{n-1} \cdot A_{n,n+1} + y^n \cdot A_{n+1,n+1}. \tag{61}
$$

因 (60) 和 (61) 对应项的系数相等, 从而有:

$$A_{n,n+1} = -(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (x_i - x_j).$$

注意到 $A_{n,n+1} = (-1)^{2n+1} M_{n,n+1} = -M_{n,n+1} = -D_n$, 所以:

$$D_n = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (x_i - x_j).$$

1.153

5 习题讲解

习题 47 (P38 习题 50)**.** 已知 $a^2 \neq b^2$, 证明方程组

$$\begin{cases} a x_1 & & + & & b x_{2n} & = 1, \\ & a x_2 & + & b x_{2n-1} & & = 1, \\ & & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & & \\ & & a x_n + b x_{n+1} & & & = 1, \\ & & b x_n + a x_{n+1} & & & = 1, \\ & & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & & \\ & b x_2 & + & a x_{2n-1} & & = 1, \\ b x_1 & & + & & a x_{2n} & = 1, \end{cases}$$

有唯一解, 并求解.

证: 由 $a^2 \neq b^2$ 可知, a, b 不同时为 0. 若 $a \neq 0$, $b = 0$, 方程组有唯一解 $x_i = \dfrac{1}{a}$.
若 $a = 0$, $b \neq 0$, 方程组也有唯一解 $x_i = \dfrac{1}{b}$. 下面讨论 a, b 均不为 0 的情形. 1.154

因为方程组的系数行列式

$$D_{2n} = \begin{vmatrix} a & & & & & & & b \\ & a & & & & & b & \\ & & \ddots & & & \iddots & & \\ & & & a & b & & & \\ & & & b & a & & & \\ & & \iddots & & & \ddots & & \\ & b & & & & & a & \\ b & & & & & & & a \end{vmatrix}$$

$$
\xlongequal[i=0,1,\cdots,n-1]{r_{2n-i}-\frac{b}{a}r_{1+i}}
\begin{vmatrix}
a & & & & & & & b \\
& a & & & & & b & \\
& & \ddots & & & \iddots & & \\
& & & a & b & & & \\
& & & 0 & \frac{a^2-b^2}{a} & & & \\
& & \iddots & & & \ddots & & \\
& 0 & & & & & \frac{a^2-b^2}{a} & \\
0 & & & & & & & \frac{a^2-b^2}{a}
\end{vmatrix}
$$

$$
=(a^2-b^2)^n \neq 0.
$$

所以方程组有唯一解. 1.155

由第 1 个方程和第 $2n$ 个方程

$$
\begin{cases} ax_1+bx_{2n}=1, \\ bx_1+ax_{2n}=1, \end{cases}
$$

可得:

$$
x_1=\frac{\begin{vmatrix} 1 & b \\ 1 & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix}}=\frac{a-b}{a^2-b^2}=\frac{1}{a+b}, \qquad x_{2n}=\frac{\begin{vmatrix} a & 1 \\ b & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix}}=\frac{a-b}{a^2-b^2}=\frac{1}{a+b}.
$$

同理, 由第 2 个方程和第 $2n-1$ 个方程得 $x_2=x_{2n-1}=\dfrac{1}{a+b}$, $\cdots$, 由第 n 个方程和第 $n+1$ 个方程可以求出 $x_n=x_{n+1}=\dfrac{1}{a+b}$.

所以方程组的解为

$$
x_i=\frac{1}{a+b}, \quad i=1,2,\cdots,2n.
$$

1.156

Example 48. 计算 $D_{2n}=\begin{vmatrix}
a_n & & & 0 & & & b_n \\
& \ddots & & & & \iddots & \\
& & & a_1 & b_1 & & \\
0 & & & & & & 0 \\
& & & c_1 & d_1 & & \\
& \iddots & & & & \ddots & \\
c_n & & & 0 & & & d_n
\end{vmatrix}$.

解: 方法一. 将 c_{2n} 作 $2n-2$ 次列的相邻对换, 移到第二列; 再将 r_{2n} 作 $2n-2$ 1.157

次行的相邻对换, 移到第二行, 得

$$D_{2n}=(-1)^{2n-2}(-1)^{2n-2}\left|\begin{array}{cc:cccccc} a_n & b_n & & & & & & \\ c_n & d_n & & & & & & \\ \hdashline & & a_{n-1} & & & & & b_{n-1} \\ & & & \ddots & & & \iddots & \\ & & & & a_1 & b_1 & & \\ & & & & c_1 & d_1 & & \\ & & & \iddots & & & \ddots & \\ & & c_{n-1} & & & & & d_{n-1} \end{array}\right|$$

$$=(a_nd_n-b_nc_n)D_{2(n-1)},$$

又 $n=1$ 时 $D_2=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix}=a_1d_1-b_1c_1$, 所以

$$D_{2n}=(a_nd_n-b_nc_n)\cdots(a_1d_1-b_1c_1)=\prod_{i=1}^{n}(a_id_i-b_ic_i).$$

1.158

方法二.

$$D_{2n}\xlongequal{\text{展开 } r_1}a_n\begin{vmatrix} a_{n-1} & & 0 & & b_{n-1} & 0 \\ & \ddots & & \iddots & & \\ 0 & & \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{matrix} & & 0 & \vdots \\ & \iddots & & \ddots & & \\ c_{n-1} & & 0 & & d_{n-1} & 0 \\ 0 & & \cdots & & 0 & d_n \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{2n+1}b_n\begin{vmatrix} 0 & a_{n-1} & & 0 & & b_{n-1} \\ & & \ddots & & \iddots & \\ 0 & \vdots & & \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{matrix} & & 0 \\ & & \iddots & & \ddots & \\ 0 & c_{n-1} & & & & d_{n-1} \\ c_n & 0 & & 0 & & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{展开} r_{2n-1}}a_nd_nD_{2n-2}-b_nc_nD_{2n-2}.$$

由此得递推公式: 1.159

$$D_{2n}=(a_nd_n-b_nc_n)D_{2n-2},$$

即

$$D_{2n}=\prod_{i=2}^{n}(a_id_i-b_ic_i)D_2.$$

而 $D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} = a_1 d_1 - b_1 c_1$, 得

$$D_{2n} = \prod_{i=1}^{n} (a_i d_i - b_i c_i).$$

方法三. 用 Laplace 定理 (定理叙述见本文附录). 选取第 1 行、第 $2n$ 行展 1.160
开, 注意到由这两行构成的 2 阶子式只有 $\begin{vmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{vmatrix}$ 有可能不为 0, 得

$$\begin{aligned} D_{2n} &= (-1)^{(1+2n)+(1+2n)} \begin{vmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{n-1} & & & 0 & & & b_{n-1} \\ & \ddots & & & & \iddots & \\ & & a_1 & & b_1 & & \\ 0 & & & & & & 0 \\ & & c_1 & & d_1 & & \\ & \iddots & & & & \ddots & \\ c_{n-1} & & & 0 & & & d_{n-1} \end{vmatrix} \\ &= (a_n d_n - b_n c_n) D_{2(n-1)} \\ &= \prod_{i=1}^{n} (a_i d_i - b_i c_i). \end{aligned}$$

1.161

习题 49 (27). 计算 $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$.

解:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} &\xlongequal{c_2 \leftrightarrow c_4} - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & a_2 \\ 0 & 0 & a_3 & b_3 \\ b_4 & a_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2 \leftrightarrow r_4} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ b_4 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & b_3 \\ 0 & 0 & b_2 & a_2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ b_4 & a_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix} = (a_1 a_4 - b_1 b_4)(a_2 a_3 - b_2 b_3). \end{aligned}$$

1.162

Example 50. 设

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix},$$

D 的 (i,j) 元的代数余子式记作 A_{ij}, 求

$$A_{31} + 3A_{32} - 2A_{33} + 2A_{34}.$$

解: 在任何行列式中, 仅改变 a_{ij} 的取值, 不会改变其对应的代数余子式 A_{ij}. 形如

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ * & * & * & * \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

的行列式, 其第 3 行元素的代数余子式, 都是相同的. 所以 1.163

$$A_{31} + 3A_{32} - 2A_{33} + 2A_{34} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 24.$$

☞ 代数余子式 A_{ij}, 与 a_{ij} 的取值无关. 1.164

Example 51. 计算 $D_n = \det(a_{ij})$, 其中 $a_{ij} = |i-j|$.

解: 由 $a_{ij} = |i-j|$ 得

$$D_n = \det(a_{ij}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & \cdots & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n-2 & n-3 & n-4 & n-5 & \cdots & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & n-4 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=1,2,\cdots]{r_i - r_{i+1}} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & n-4 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

1.165

$$\xlongequal[j=2,3,\cdots]{c_j + c_1} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & -2 & -2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -2 & -2 & -2 & \cdots & 0 \\ n-1 & 2n-3 & 2n-4 & 2n-5 & \cdots & n-1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}.$$

1.166

Example 52. 设 n 阶行列式 $D=\det(a_{ij})$, 把 D 上下翻转、或逆时针旋转 $90°$、或依副对角线翻转, 依次得

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{1n} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{n1} \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a_{nn} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{11} \end{vmatrix},$$

证明 $D_1=D_2=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D$, $D_3=D$. 1.167

证:

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix} \overline{\overline{\underset{\text{使 } r_n \text{ 换到第一行}}{n-1\text{ 次行的相邻互换}}}} (-1)^{n-1}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \end{vmatrix}$$

$$\overline{\overline{\underset{\text{使 } r_n \text{ 换到第二行}}{n-2\text{ 次行的相邻互换}}}} (-1)^{n-1}(-1)^{n-2}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{31} & \cdots & a_{3n} \end{vmatrix}=\cdots$$

$$=(-1)^{n-1}(-1)^{n-2}\cdots(-1)\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{1+2+\cdots+(n-2)+(n-1)}D=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D.$$

同理可证 1.168

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{1n} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{n1} \end{vmatrix} \overline{\overline{\text{上下翻转}}} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D^{\mathrm{T}}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D.$$

$$D_3=\begin{vmatrix} a_{nn} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{11} \end{vmatrix} \overline{\overline{\text{左右翻转}}} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D_2$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D$$

$$=(-1)^{n(n-1)}D=D.$$

1.169

Example 53. 计算

$$D_n=\begin{vmatrix} a & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & a \end{vmatrix},$$

其中对角线上元素都是 a, 未写出的元素都是 0.

解: 方法一. 将 r_n 作 $n-2$ 次行的相邻对换, 移到第 2 行:

$$D_n = \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} = (-1)^{n-2} \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 \end{vmatrix}$$

将 c_n 作 $n-2$ 次列的相邻对换, 移到第二列: 1.170

$$\begin{aligned} D_n &= (-1)^{n-2}(-1)^{n-2} \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a \end{vmatrix}_{(n-2)} \\ &= (a^2-1)a^{n-2}. \end{aligned}$$

方法二. 1.171

$$D_n = \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{展开 } c_1} a \begin{vmatrix} a & & \\ & \ddots & \\ & & a \end{vmatrix}_{(n-1)} + (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & \boxed{1} \\ a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & a & 0 \end{vmatrix}_{(n-1)}$$

$$\xlongequal{\text{展开 } r_1} a^n + (-1)^{n+1}(-1)^{(n-1)+1} \begin{vmatrix} a & & \\ & \ddots & \\ & & a \end{vmatrix}_{(n-2)}$$

$$= a^n - a^{n-2}.$$

1.172

Example 54. 计算 $D_{n+1} = \begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$. (提示: 利用范德蒙德行列式的结果.)

解: 把行列式上下翻转: 从第 $n+1$ 行开始, 第 $n+1$ 行经过 n 次相邻对换, 换到 1.173
第 1 行; 新的第 $n+1$ 行 (原式中的第 n 行) 经 $(n-1)$ 次对换换到第 2 行. 反复此过程, 经 $n+(n-1)+\cdots+1=\frac{n(n+1)}{2}$ 次行交换, 得

$$D_{n+1}=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \end{vmatrix},$$

此为 $n+1$ 阶范德蒙德行列式.

对照范德蒙德行列式的写法, 记 $a=x_1$, $a-1=x_2$, $\cdots$, $a-(n-1)=x_n$, $a-n=x_{n+1}$. 即

$$x_i=a-(i-1),\ x_j=a-(j-1).$$

所以 1.174

$$\begin{aligned} D_{n+1} &= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\prod_{n+1\geqslant i>j\geqslant 1}(x_i-x_j) \\ &= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\prod_{n+1\geqslant i>j\geqslant 1}\big[(a-i+1)-(a-j+1)\big] \\ &= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\prod_{n+1\geqslant i>j\geqslant 1}\big[-(i-j)\big] \\ &= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\times(-1)^{n+(n-1)+\cdots+1}\times\prod_{n+1\geqslant i>j\geqslant 1}(i-j) \\ &= \prod_{n+1\geqslant i>j\geqslant 1}(i-j). \end{aligned}$$

1.175

6 附录: 拉普拉斯 (Laplace) 定理

拉普拉斯[6]定理, 是行列式按一行展开公式的推广.

Definition 55 (k 阶子式, k 阶余子式)**.** 在一个 n 阶行列式 D 中任意选定 k 行 k 列 $(k\leqslant n)$.

- 位于这些行与列的交点上的 k^2 个元素按原来的次序组成的一个 k 阶行列式 M, 称为行列式 D 的一个 **k 阶子式**.

[6]拉普拉斯 (Pierre-Simon Laplace, 1749 -1827), 法国著名科学家, 其研究工作对数学、统计学、物理学、天文学有着举足轻重的影响. 拉普拉斯被视为史上最伟大的科学家之一, 被称为是法国的牛顿. 他是拉普拉斯变换和拉普拉斯方程的发现者, 这些数学工具在数学物理的各个分支领域得到了广泛的应用. 拉普拉斯是 "三 L" 之一. 法国 18 世纪后期到 19 世纪初数学界有三个著名人物: 拉格朗日 (Lagrange)、拉普拉斯 (Laplace) 和勒让德 (Legendre). 因为他们三个姓氏的第一个字母为 "L", 又生活在同一时代, 所以被称为 "三 L". 拉普拉斯在 1806 年成为法兰西第一帝国的伯爵, 后于 1817 年受封为侯爵.

- 在 D 中划去这 k 行 k 列后, 余下的元素按原来的次序组成的 $n-k$ 阶行列式 M', 称为 k 阶子式 M 的**余子式**.

从定义知, M 也是 M' 的余子式, 所以 M 和 M' 可以称为 D 的一对互余的子式. 1.176

Example 56. 在 4 阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

中选定第 1、3 行, 第 2、4 列得到一个 2 阶子式

$$M = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix},$$

M 的余子式为

$$M' = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

1.177

Example 57. 在 5 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

中

$$M = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{15} \\ a_{22} & a_{23} & a_{25} \\ a_{42} & a_{43} & a_{45} \end{vmatrix} \quad 与 \quad M' = \begin{vmatrix} a_{31} & a_{34} \\ a_{51} & a_{54} \end{vmatrix}$$

是一对互余的余子式.

1.178

Definition 58. 设 D 的 k 阶子式 M 在 D 中所在的行、列指标分别是 $i_1, i_2, \cdots, i_k; j_1, j_2, \cdots, j_k$. 则 M 的余子式 M' 前面加上符号 $(-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)}$ 后称为 M 的**代数余子式**. 记为

$$A \triangleq (-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)} M'.$$

Theorem 59 (Laplace 定理)**.** *行列式 D 中任意取定 k $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$ 个行. 由这 k 行元素所组成的一切 k 阶子式与它们的代数余子式的乘积的和, 等于行列式 D.*

设 D 中取定 k 行后得到的子式为 $M_1, M_2, \cdots, M_t$, 它们的代数余子式分别为 $A_1, A_2, \cdots, A_t$, 则

$$D = M_1A_1 + M_2A_2 + \cdots + M_tA_t.$$

1.179

例如, 在行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

中取定第一、二行, 得到六个 2 阶子式:

$$M_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, \quad M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}, \quad M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix},$$

$$M_4 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}, \quad M_5 = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, \quad M_6 = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

它们对应的代数余子式为

$$\begin{aligned} A_1 &= (-1)^{(1+2)+(1+2)}M_1' = M_1', & A_2 &= (-1)^{(1+2)+(1+3)}M_2' = -M_2', \\ A_3 &= (-1)^{(1+2)+(1+4)}M_3' = M_3', & A_4 &= (-1)^{(1+2)+(2+3)}M_4' = M_4', \\ A_5 &= (-1)^{(1+2)+(2+4)}M_5' = -M_5', & A_6 &= (-1)^{(1+2)+(3+4)}M_6' = M_6'. \end{aligned}$$

根据拉普拉斯定理 1.180

$$\begin{aligned} D &= M_1A_1 + M_2A_2 + \cdots + M_6A_6 \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &\quad + \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &\quad - \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (-1) \times (-8) - 2 \times (-3) + 1 \times (-1) + 5 \times 1 - 6 \times 3 + (-7) \times 1 \\ &= 8 + 6 - 1 + 5 - 18 - 7 = -7. \end{aligned}$$

1.181

7 杂谈

行列式的几何意义

设有向量 $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, c_3)$. 则它们的混合积 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}$ 的绝对值, 等于这 3 个向量张成的平行六面体的体积 V. 当 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 构成右手系时, 混合积取正值; 构成左手系时, 混合积取负值.

这样可以定义这 3 个向量张成的平行六面体的**有向体积**: 当 3 个向量构成右手系时, 混合积取正值; 构成左手系时, 混合积取负值. 于是 3 个向量的混合积就等于这 3 个向量张成的平行六面体的有向体积. 这个有向体积的计算公式是

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

因此, **三阶行列式的值就是它的 3 个列向量张成的平行六面体的有向体积**. 相仿地, n 阶行列式的值就是它的 n 个列向量张成的平行多面体的有向体积.

行列式的性质 3(i) 说明: 如果其中一个向量变成原来的 k 倍, 那么它的有向体积也成为原来的 k 倍. 性质 3(ii) 说明: 如果其中一个向量能分解成两个向量之和, 那么它的有向体积也能分解成两部分之和. 性质 6 说明: 如果其中两个向量交换了位置, 那么相应地平行多面体改变了方向, 从而它的有向体积要改变符号. 1.182

线性方程组应用举例: 商品交换的经济模型

假设一个原始社会的部落中, 人们从事三种职业: 农业生产、手工业制作、缝制衣物. 最初, 假设部落中不存在货币制度, 所有的商品和服务均进行实物交换.

农民留他们收成的一半给自己、1/4 给手工业者, 另 1/4 给制衣工人. 手工业者将其产品平均分为三份, 每一类成员得到 1/3. 制衣工人将一半的衣物给农民, 并将剩余的一半平均分给手工业者和他们自己. 我们记这三类人为 F, M 和 C, 可得如下表格:

	F	M	C
F	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
M	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$
C	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$

上述各列表示产品的分配, 各行是三种职业获得的产品比例.

当部落规模增大时, 实物交易系统就变得非常复杂, 因此, 部落决定使用货币系统. 问题是: 如何给三种产品定价, 才可以公平地实现当前的实物交易系统.

这个问题可以利用经济学家瓦西里 · 列昂季耶夫 (Wassily Leontief, 1906 – 1999) 提出的经济模型转化为线性方程组. 对这个模型, 我们令 x_1 为所有农产品的价值, x_2 为所有手工业品的价值, x_3 为所有服装的价值. 由表格的第一行, 农民总共得到的产品价值为 $\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{2}x_3$. 如果这个系统是公平的, 那么农民获得的产品价值应等于农民生产的产品总价值 x_1. 即

$$\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = x_1.$$

相仿地, 手工业者、制衣工人的生产和消费分配相等, 分别得到

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{4}x_3 &= x_2, \\ \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{4}x_3 &= x_3. \end{aligned}$$

由此得到齐次线性方程组

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{3}x_2+\frac{1}{2}x_3&=0,\\
\frac{1}{4}x_1-\frac{2}{3}x_2+\frac{1}{4}x_3&=0,\\
\frac{1}{4}x_1+\frac{1}{3}x_2-\frac{3}{4}x_3&=0.
\end{aligned}
$$

得到通解为 $(5k,3k,3k)$. 即变量 x_1, x_2, x_3 应按下面的比例取值:

$$x_1:x_2:x_3=5:3:3.$$

这个简单的系统是列昂季耶夫生产—消费模型 (input–output model) 的例子. 该模型是我们理解经济体系的基础. 列昂季耶夫在 1973 年获诺贝尔经济学奖. 他的三个博士生也获得了这一奖项 (Paul Samuelson 1970, Robert Solow 1987, Vernon L. Smith 2002).

有趣的是, 这个模型和 Google 搜索的 PageRank 算法模型, 其实是一样的. 在第 5 章我们会解释该算法. 1.183