2018-2019-2 学期《线性代数》考前辅导讲义

信息科学与工程学院　梁宇龙

一、行列式

【例 1】计算行列式 $D=\begin{vmatrix}3&2&2&2\\2&3&2&2\\2&2&3&2\\2&2&2&3\end{vmatrix}$

【解】$D=\begin{vmatrix}9&2&2&2\\9&3&2&2\\9&2&3&2\\9&2&2&3\end{vmatrix}=9\begin{vmatrix}1&2&2&2\\1&3&2&2\\1&2&3&2\\1&2&2&3\end{vmatrix}=9\begin{vmatrix}1&2&2&2\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{vmatrix}=9$

【例 2】计算行列式 $\mathrm{D}=\begin{vmatrix}9&4&2&1&6\\5&0&0&1&4\\0&2&0&0&2\\5&-1&0&0&0\\7&0&0&0&0\end{vmatrix}$

$$\mathrm{D}=\begin{vmatrix}9&4&2&1&6\\5&0&0&1&4\\0&2&0&0&2\\5&-1&0&0&0\\7&0&0&0&0\end{vmatrix}=7\times(-1)^{5+1}\begin{vmatrix}4&2&1&6\\0&0&1&4\\2&0&0&2\\-1&0&0&0\end{vmatrix}=7\times(-1)\times(-1)^{4+1}\begin{vmatrix}2&1&6\\0&1&4\\0&0&2\end{vmatrix}=28$$

【例 3】设 $D=\begin{vmatrix}3&-5&2&1\\1&1&0&-5\\-1&3&1&3\\2&-4&-1&-3\end{vmatrix}$，求 $M_{11}+M_{21}+M_{31}+M_{41}$

【解】$M_{11}+M_{21}+M_{31}+M_{41}=\begin{vmatrix}1&-5&2&1\\-1&1&0&-5\\1&3&1&3\\-1&-4&-1&-3\end{vmatrix}=0$

二、矩阵

【例 1】已知方阵 A 满足 $A^2-A-3E=O$，求 $(A\text{-}3E)^{-1}$

【解】由 $A^2-A-3E=O$ 可知 $(A-3E)(A+2E)=-3E$。于是

$(A-3E)^{-1}=-\frac{1}{3}(A+2E)$

【例 2】已知 $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\-1&0&1\\2&-1&0\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\\-1&0\end{pmatrix}$，解矩阵方程 $(A+E)X=C$

【解】$(A+E)=\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&1&1\\2&-1&1\end{pmatrix}$.(2 分) $(A+E,C)=\begin{pmatrix}1&0&1&1&1\\-1&1&1&0&1\\2&-1&1&-1&0\end{pmatrix}$

$\to\Lambda\to\begin{pmatrix}1&0&0&3&1\\0&1&0&5&2\\0&0&1&-2&0\end{pmatrix}$ 故 $X=\begin{pmatrix}3&1\\5&2\\-2&0\end{pmatrix}$

三、向量

【例 1】求向量组 $a_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\4\end{pmatrix}$，$a_2=\begin{pmatrix}9\\100\\10\\4\end{pmatrix}$，$a_3=\begin{pmatrix}-2\\-4\\2\\-8\end{pmatrix}$ 的秩,并求一个最大无关组

【解】$(a_1,a_2,a_3)=\begin{pmatrix}1&9&-2\\2&100&-4\\-1&10&2\\4&4&-8\end{pmatrix}\to\Lambda\to\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

向量组的秩是 2，一个最大无关组是 a_1,a_2

【例 2】设向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\3\\0\\5\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-3\\6\\-1\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\4\end{pmatrix}$，$\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\3\end{pmatrix}$，求该向量组的秩和一个极大无关组，并把不属于该极大无关组的其余向量用该极大无关组线性表示。

【解】$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\3&-3&2&1\\0&6&1&2\\5&-1&4&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&-6&-1&-2\\0&6&1&2\\0&-6&-1&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&\frac{5}{6}&\frac{2}{3}\\0&1&\frac{1}{6}&\frac{1}{3}\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ 所以该向量组的秩为 2

故 α_1，α_2 为该向量组的一个极大无关组　　$\alpha_3=\frac{5}{6}\alpha_1+\frac{1}{6}\alpha_2$，$\alpha_4=\frac{2}{3}\alpha_1+\frac{1}{3}\alpha_2$

【例 3】设矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=\begin{pmatrix}2&-1&-1&1&2\\1&1&-2&1&4\\4&-6&2&-2&4\\3&6&-9&7&9\end{pmatrix}$，求矩阵 A 的列向量组的秩，及该列向量组的一个极大无关组，并把不属于这个极大无关组的列向量用该极大无关组线性表示。

【解】

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=\begin{pmatrix}2&-1&-1&1&2\\1&1&-2&1&4\\4&-6&2&-2&4\\3&6&-9&7&9\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\2&-1&-1&1&2\\4&-6&2&-2&4\\3&6&-9&7&9\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\0&-3&3&-1&-6\\0&-10&10&-6&-12\\0&3&-3&4&-3\end{pmatrix}\to\Lambda\to\begin{pmatrix}1&0&-1&0&4\\0&1&-1&0&3\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

所以列向量组的秩为 3，极大无关组为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$， $\alpha_3=-\alpha_1-\alpha_2$， $\alpha_5=4\alpha_1+3\alpha_2-3\alpha_4$

四、线性方程组

【例 1】求齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=0\\3x_1+2x_2+x_3+x_4=0\\x_2+2x_3+2x_4=0\end{cases}$ 的通解

【解】 $\begin{pmatrix}1&1&1&1\\3&2&1&1\\0&1&2&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&-1&-2&-2\\0&1&2&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1&-1\\0&1&2&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

组为 $\begin{cases}x_1=x_3+x_4\\x_2=-2x_3-2x_4\end{cases}$　　令 $x_3=c_1$， $x_4=c_2$，

可得方程组的通解为 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}$ （c_1,c_2 为任意常数）

【例 2】求线性方程组 $\begin{cases}2x_1+x_2-x_3+x_4=0\\x_1+2x_2+x_3-x_4=0\\x_1+x_2+2x_3+x_4=0\end{cases}$ 的通解

【解】

$$\begin{pmatrix}2&1&-1&1\\1&2&1&-1\\1&1&2&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&2&1\\0&1&-1&-2\\0&-1&-5&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&3&3\\0&1&-1&-2\\0&0&-6&-3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{3}{2}\\0&1&0&-\frac{3}{2}\\0&0&1&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

对应的方程组为$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{3}{2}x_4 \\ x_2 = \dfrac{3}{2}x_4 \\ x_3 = -\dfrac{1}{2}x_4 \end{cases}$ 令$x_4 = 1$，可得方程组的一个基础解系为$\xi = \begin{pmatrix} -3/2 \\ 3/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$

通解为$x = c\xi$

【例 3】求齐次线性方程组$\begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_1 + 6x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 0 \end{cases}$的基础解系，并将其通解用基础解系表示

【解】系数矩阵$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 6 & -2 & -4 \\ 2 & -2 & 4 & -7 \end{pmatrix}$， 经初等行变换后化为$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

写成方程组形式为$\begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = x_3 \\ x_4 = 0 \end{cases}$,令$x_3 = 1$，可得齐次线性方程组的一个基础解系 $\xi = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

所以齐次线性方程组的通解为：$x = k\xi$（其中k为任意常数）

五、特征值与特征向量

【例 1】设矩阵$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，求一个正交矩阵$P$，使$P^{-1}AP = \Lambda$为对角矩阵

【解】由$|\lambda E - A| = (\lambda\text{-}1)(\lambda\text{-}2)(\lambda\text{-}5) = 0$，求得$A$的特征值为$\lambda_1=1$，$\lambda_2=2$，$\lambda_3=5$。

对于$\lambda_1=1$，解$(E-A)X=0$,得基础解系$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$。对于$\lambda_2=2$，解$(2E-A)X=0$,得基础解系$\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$。对于$\lambda_3=5$，解$(5E-A)X=0$,得基础解系$\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$。将$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$单位化,

得 $p_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix}$，$p_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，得 $p_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix}$。取 $P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&1&0\end{pmatrix}$，$\Lambda=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&5\end{pmatrix}$，

则 $P^{-1}AP=\Lambda$。

【例 2】设矩阵 $A=\begin{pmatrix}5&2&2\\2&5&2\\2&2&5\end{pmatrix}$，求正交矩阵 P 和对角矩阵 Λ，使得 $P^{-1}AP=\Lambda$

【解】$|\lambda E-A|=(\lambda-9)(\lambda-3)^2$　所以 $\lambda_1=3,\lambda_2=9$，对 $\lambda_1=3$,

解 $(3E-A)X=0$　得基础解系　$\alpha_1=(-1,1,0)'$ $\alpha_2=(-1,0,1)'$　正交化得　$\beta_1=\alpha_1$，

$\beta_2=(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1)'$ 再单位化得 $\eta_1=(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0)'$ $\eta_2=(-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}})'$ 对 $\lambda_2=9$，

解 $(9E-A)X=0$ 得基础解系 $\alpha_3=(1,1,1)$，单位化得 $\eta_3=(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$

令 $P=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$　则 $P^{-1}AP=\wedge=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&9\end{pmatrix}$

六、二次型

【例 1】判断二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+5x_3^2-x_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$ 是否为正定二次型，并说明理由

【解】因为二次型的矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&-1\\-\frac{1}{2}&1&2\\-1&2&5\end{pmatrix}$。矩阵 A 的各阶顺序主子式

$d_1 = 1 > 0$，$d_2 = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} > 0$，$d_3 = |A| = \frac{3}{4} > 0$。即该二次型是正定的

【例 2】判断 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ 是否为正定矩阵，并说明理由

【解】$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ 是正定阵（2 分）因为 $1 > 0, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 > 0, |A| = 1 > 0$

【例 3】用正交变换化二次型

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 8x_2x_3 + 4x_1x_3$ 为标准形，写出所用的正交变换和 f 的标准形。

【解】该二次型矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ $|\lambda E - A| = (\lambda - 2)^2(\lambda + 7)$

解得 $\lambda_1 = 2$（二重），$\lambda_2 = -7$ 对 $\lambda_1 = 2$，解 $(2E - A)X = 0$ 得基础解系 $\alpha_1 = (-2,1,0)'$，$\alpha_2 = (2,0,,1)'$ 正交化得 $\beta_1 = \alpha_1$，$\beta_2 = (\frac{2}{5}, \frac{4}{5}, 1)'$ 再单位化 $\boldsymbol{\eta_1 = (-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0)}$，$\eta_2 = (\frac{2}{3\sqrt{5}}, \frac{4}{3\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{5}}{3})$ 对 $\lambda_2 = -7$，解 $\boldsymbol{(-7E - A)X = 0}$ 得基础解系 $\alpha_3 = (-\frac{1}{2}, -1, 1)'$ 单位化得 $\eta_3 = (-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})'$ 令 $P = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{f}$ 通过正交变换 $x = Py$ 化为标准形

$f = 2y_1^2 + 2y_2^2 - 7y_3^2$