答案：

一：1 A　2 A　3 C　4 B 5 B　6 C　7　C

二： 1、　$e(dx+dy)$　**2**、　$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho$　**3**、$\frac{1}{4}$　　4、$\underline{yF_y'(x,y)=xF_x'(x,y)}$　　5 0　6、　2　7、$\frac{1}{6}$　8　$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}-3=0$ 9、30　10、4π

三、计算题（每题 4 分，共 20 分）

1、$\begin{cases} f_x(x,y)=4-2x=0 \\ f_y(x,y)=-4-2y=0 \end{cases} \Rightarrow (2,-2)$ ………………2 分

由 $AC-B^2>0$ 及 $A<0 \Rightarrow f(2,-2)=8$ 为极大值…4 分

2、$F(x,y,z)=e^z-z+xy-3$，　$\vec{n}\Big|_{(2,1,0)}=(1,2,0)$　2 分

切平面方程为 $x+2y-4=0$　法线方程为 $\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{0}$　………………………4 分

3、$F(x,y,z)=e^z-xyz$　　$F_x=-yz, F_Y=-xz, F_z=e^z-xy$ ……………………2 分

$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yz}{e^z-xy}, \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xz}{e^z-xy}$. …………………………4 分

4、$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1+f_2\frac{1}{y}$　2 分　$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{11}+\frac{2}{y}f_{12}+\frac{1}{y^2}f_{22}$　………………………4 分

四、1、$S=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}dxdy$　2 分 $=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{2}dxdy=\sqrt{2}\pi$　5 分

2、$\int_0^1 dy\int_y^{2-y} f(x,y)dx$ ………………………………5 分

3、$y=xe^{-\sin x}$ 是方程 $y'+y\cos x=Q(x)$ 的一个解　得 $Q(x)=e^{-\sin x}$　3 分

$y=(x+c)e^{-\sin x}$　……………………………………………5 分

4、$x^2+y^2=a^2$　$(y\geq 0)$ 到点 $B(a,0)$ 的弧段。

$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y^2-4x^2}{(4x^2+y^2)^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}$　…………2 分

取路径 l_1：$\begin{cases} x=a\cos t \\ y=2a\sin t \end{cases}$ 得 $I=-\frac{\pi}{2}$ …………5 分

六、设内接长方体的长、宽、高分别为$2x, 2y, z$，

则长方体的体积为 $V = 2x\cdot 2y\cdot z = 4xyz$ ………**2** 分

设$L(x,y,z) = 4xyz + \lambda(x^2+y^2+z^2-a^2)$

$$\begin{cases} L_x = 8yz + 2x\lambda = 0 \\ L_y = 8xz + 2y\lambda = 0 \\ L_z = 8xy + 2z\lambda = 0 \\ x^2+y^2+z^2 = a^2 \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{a}{\sqrt{3}}\right)$$ …………4 分

由于驻点唯一，实际问题存在最大值，

所以当$x = y = z = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$时，即长、宽、高分别为$\dfrac{2a}{\sqrt{3}}$，$\dfrac{2a}{\sqrt{3}}$，$\dfrac{a}{\sqrt{3}}$时，体积最大。…6 分

七、（**6** 分）设$\Sigma_1: \begin{cases} x^2+y^2 \le 1 \\ z = 1 \end{cases}$的上侧，$\Omega$为$\Sigma$与$\Sigma_1$所围的空间区域（2 分）

$$I = \oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} xzdydz + z^2dxdy - \iint\limits_{\Sigma_1} xzdydz + z^2dxdy = \iiint\limits_{\Omega} 3zdv - \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} dxdy = 3\pi\int_0^1 r(1-r^4)dr - \pi = 0$$

（6 分）

八、解：记 $P = (\sin x - \varphi(x))\cdot\dfrac{y}{x}$ ，$Q = \varphi(x)$

则有 $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\sin x - \varphi(x)}{x}$ ，$\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \varphi'(x)$ 因曲线积分与路径无关 所以 $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$

即 $\dfrac{\sin x - \varphi(x)}{x} = \varphi'(x)$ ……3 分

整理得 $\varphi'(x) + \dfrac{1}{x}\varphi(x) = \dfrac{\sin x}{x}$

所以 $\varphi(x) = e^{-\int\frac{1}{x}dx}\left[\int \dfrac{\sin x}{x} e^{\int\frac{1}{x}dx} + c\right] = \dfrac{1}{x}(-\cos x + c)$ ……5 分又因 $\varphi(\pi) = 1$ 所以

$c = \pi - 1$，所以 $\varphi(x) = \dfrac{\pi - 1 - \cos x}{x}$ ……6 分

九、（**6** 分）证明：左边$= \int_{x_0}^{u} f(y)dy \int_y^u (x-y)^n dx$

$$= \int_{x_0}^{u} f(y)dy \int_y^u (x-y)^n d(x-y) = \int_{x_0}^{u} f(y)dy\cdot\frac{1}{n+1}(x-y)^{n+1}\Big|_y^u$$

$\dfrac{1}{n+1}\int_{x_0}^{u} (u-y)^{n+1} f(y)dy =$ 右边…………………………6 分