离散数学练习题

一、选择题

1、下列语句中哪个是真命题（C）。

A．我正在说谎。　　　　　　　　　B．如果 1+2=3，那么雪是黑色的。

C．如果 1+2=5，那么雪是白色的。　D．严禁吸烟！

2、下列句子中是命题的有 ……………………………………………… （D）

A.上课时请不要说话！　B．我在说谎.

C.你吃饭了吗？　　　　D.上海是中国的首都.

3、 下列句子是命题的是（ C ）

A.水开了吗?　　　　B. 这朵花多好看呀！

C.2 是常数。　　　　D.我正在说谎。

4、设命题公式$G = p \to (p \wedge (q \to r))$，则 G 是（ C ）。

A. 恒假的；　　B. 恒真的；

C. 可满足的；　　D. 析取范式。

5、谓词公式$F(x, y, z) \to \forall x \exists y G(x, y, z)$中的变元$x$（ C ）。

A．是自由变元但不是约束变元；　　B．既不是自由变元又不是约束变元；

C．既是自由变元又是约束变元；　　D．是约束变元但不是自由变元。

6、设 A={1，2，3}，则下列关系 R 不是等价关系的是（C ）

A．R={<1，1>，<2，2>，<3，3>}；

B．R={<1，1>，<2，2>，<3，3>，<2，3>，<3，2>}；

C．R={<1，1>，<2，2>，<3，3>，<1，4>}；

D．R={<1，1>，<2，2>，<3，3>，<1，2>，<1，3>，<2，3>，<2，1>，<3，1>，<3，2>}。

7、设 R 为实数集，映射σ=R→R，σ（x）= $-x^2+2x-1$，则σ是（ D ）。

A．单射而非满射 B．满射而非单射 C．双射 D．既不是单射，也不是满射

8、下列二元运算在所给的集合上不封闭的是（ D ）

A. S={2x-1|x∈Z^+}，S 关于普通的乘法运算

B. S={0，1}，S 关于普通的乘法运算

C. 整数集合 Z 和普通的减法运算

D. S={x | x=2^n，n∈Z^+}，S 关于普通的加法运算

9、*运算如下表所示，哪个能使（{a,b}，*）成为含幺元半群（ D ）

*	a	b
a	a	b
b	a	b

A

*	a	b
a	a	a
b	b	b

B

*	a	b
a	a	a
b	a	a

C

*	a	b
a	a	b
b	b	a

D

10、下列各组数中,能构成无向图的度数列是（ D ）

A．1,1,1,2,4　　　　B．1,2,3,4,5

C．0,1,0,2,4　　　　D．1,2,3,3,5

11、一棵树有 2 个 4 度顶点，3 个 3 度顶点，其余都是树叶，则该树中树叶的个数是（ B ）

A .8　　　　B. 9　　　C.　10　　　　D.　11

12、图 G 是有 6 个顶点的连通图，总度数为 20，则从 G 中删去（ B ）边后使之变成树。

A .10 ;　　　　B. 5;　　　　C. 3 ;　　　　D. 2。

13、“所有的人都是要死的。苏格拉底是人，所以苏格拉底是要死的。”则该句话（　B　）

A. 不是命题;　　B. 是真命题;　　C. 是假命题;　　D. 是悖论。

14、一个公式在等价意义下，下面哪个写法是唯一的（　C　）。

A. 析取范式;　　B. 合取范式;　　C. 主析取范式;　　D. 以上答案都不对。

15、设论域 E={a, b}，且 P(a,a)=1，P(a,b)=0，P(b,a)=1，P(b,b)=0 则下列公式中真值为 1 的是（　D　）

A. $\exists x\forall yP(x,y)$　　B. $\forall x\forall yP(x,y)$　　C. $\forall xP(x,x)$　　D. $\forall x\exists yP(x,y)$

16、设集合 A={1, 2, 3 }，A 上的关系 R={<1, 1 >,<2, 2 > }，则 R 不具有（　A　）性质。

A. 自反性　　B. 对称性　　C. 传递性　　D. 反对称性

17、设集合 A={a,b,c,d},B={1,2,3,4},则从 A 到 B 的函数 f={<a,2>,<b,1>,<c,3 >,<d,2 >}是（　D ）。

A. 双射函数　　　　B. 单射函数

C. 满射函数　　　　D. 即不是满射又是不是单射函数

18、设 N 为自然数集(含 0)，函数 F：N→N×N，F(n)=<n,n+1>是(　C　)

A. 满射，不是单射；B. 不是单射，不是满射；C. 单射，不是满射；D. 双射。

19、下面给出的一阶逻辑等值式中，（　B　）是错的。

A. $\exists x(A(x)\vee B(x))\Leftrightarrow \exists xA(x)\vee \exists xB(x)$;　　C. $\neg\forall xA(x)\Leftrightarrow \exists x(\neg A(x))$;

B. $\forall x(A(x)\vee B(x))\Leftrightarrow \forall xA(x)\vee \forall xB(x)$;　　D. $A\to \forall xB(x)\Leftrightarrow \forall x(A\to B(x))$.

20、下列各代数系统中，不含零元素的是　（　C　）

A. $<M_n(R),*>$，$M_n(R)$ 是全体 n 阶实矩阵集合，$*$ 是矩阵乘法运算。

B. $<p(S),\text{Y}>$，$p(S)$ 是集合 S 的幂集合，Y 是集合的并运算。

C. $<R,+>$，R 是有理数集，$+$ 是数的加法运算。

D. $<I,\text{o}>$，I 是整数集，o是数的乘法运算。

21、在具有 n 个结点的无向连通图中，（B ）。

A. 恰好有 n 条边　　　　B. 至少有 n-1 条边

C. 最多有 n 条边　　　　D. 至少有 n 条

22. 半群、群及独异点的关系是（ A）

（A）{群}⊂{独异点}⊂{半群}　　（B）{独异点}⊂{半群}⊂{群}

（C）{独异点}⊂{群}⊂{半群}　　（D）{半群}⊂{独异点}⊂{群}

23. 设集合 A={1, 2, 3 }，A 上的关系 R={<1, 1 >,<2, 2 >,<3,3>}，则 R 不具有（D）

(A) 自反性　　(B) 对称性　　(C) 传递性　　(D) 反自反性

24. ∗运算如下表所示，哪个能使<{*a, b*}，∗>成为含幺元半群…………（D）

(A)

∗	*a*	*b*
a	*a*	*b*
b	*a*	*b*

(B)

∗	*a*	*b*
a	*a*	*a*
b	*b*	*b*

(C)

∗	*a*	*b*
a	*a*	*a*
b	*a*	*a*

(D)

∗	*a*	*b*
a	*a*	*b*
b	*b*	*a*

25. 设 *P*：张三可以做这件事，*Q*：李四可以做这件事。命题“张三或李四可以做这件事”符号化为（A）

(A) $P \vee Q$　　(B) $P \vee \sim Q$　　(C) $P \leftrightarrow Q$　　(D) $\sim(\sim P \vee \sim Q)$

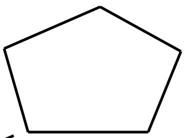
26. 4、设 A={a, b, c}，则 A 上关系 R={〈a, a〉，〈b, b〉，〈a, c〉}的对称闭包 S(R)是（ C ）

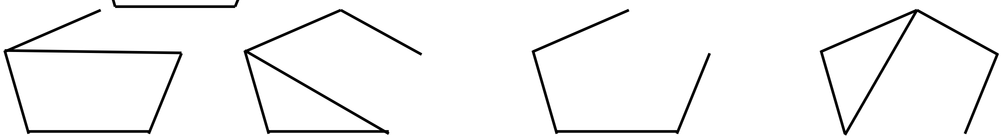
A. R∪IA；　B. R；C. R∪{〈c,a〉}；　D. R∩IA。

27. 以下命题公式中，为永假式的是（ C ）

(A) $p \to (p \vee q \vee r)$　　(B) $(p \to \neg p) \to \neg p$

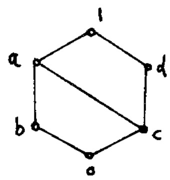
(C) $\neg(q \to q) \wedge p$　　(D) $\neg(q \vee \neg p) \to (p \wedge \neg p)$

38. 图  的生成子图为……………………………（ C ）



(A)　　(B)　　(C)　　(D)

29. 如下图所示的有界格中，元素 b 的补元是（ D ）



（A）a

（B）0

（C）c

（D）d

30. 设 A={a, b, c}，则下列是集合 A 的划分的是（ D ）

(A) {{b, c}, {c}}　(B) {{a, b}, {a, c}}　(C) {{a, b}, c}　(D) {{a}, {b, c}}

31. 整数集合 Z 上“<”关系的自反闭包是关系　（ D ）

(A) =　(B) ≠　(C) >　(D) ≤

32. 下列式子正确的是（ B ）

(A) $\varnothing \in \varnothing$　(B) $\varnothing \subseteq \varnothing$　(C) $\{\varnothing\} \subseteq \varnothing$　(D) $\{\varnothing\} \in \varnothing$

33. 设 i 是虚数，• 是复数乘法运算，则 G=<{1, −1, i, −i}, •>是群，下列是 G 的子群是（ A ）

(A) <{1}, •>　(B) 〈{−1}, •〉　(C) 〈{i}, •〉　(D) 〈{−i}, •〉

34. 集合 A={1, 2}的幂集 P(A)的基数是（ D ）

(A) 0　(B) 1　(C) 2　(D) 4

35. 下列哪个联结词运算不可交换？（A）

(A) →　(B) ↔　(C) ∨　(D) ∧

36. 设集合 A={1, 2, 3, …, 10}，下列定义的哪种运算关于集合 A 是不封闭的（D）

(A) x∗y=max{x, y}　(B) x∗y=(x, y) 即 x, y 的最大公约数

(C) x*y=min{x, y}　　　　(D) x*y=[x, y] 即 x, y 的最小公倍数

37. 设 R 为实数集，函数 f：R→R，f(x)=2x，则 f 是（　C　）

A. 满射函数　　B. 单射函数　　C. 双射函数　　D. 非单射非满射

38. 若<A, *>是一个代数系统, 且满足结合律, 则<A, *>必为（A ）

(A) 半群　　(B) 独异点　　(C) 群　　(D) 交换群

39. 设 R 是 A 上的等价关系, 即 R 是（D）

（A）反自反的, 对称的，传递的　　（B）自反的, 反对称的，传递的

（C）反自反的, 反对称的, 传递的　　（D） 自反的, 对称的, 传递的

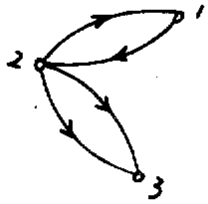
40. 设 A={1,2,3}，A 上二元关系 R 的关系图所示，那么 R 具有（　D　）

A. 自反性；

B. 对称性；

C. 传递性；

D. 反自反性.



41. 下列哪一组命题公式是等价的是（B ）

(A) $\sim P\wedge\sim Q$， $P\vee Q$　　(B) $A\rightarrow(B\rightarrow A)$， $\sim A\rightarrow(A\rightarrow\sim B)$

(C) $Q\rightarrow(P\vee Q)$， $\sim Q\wedge(P\vee Q)$　　(D) $\sim A\vee(A\wedge B)$， B

42. 设 S={0, 1}, 则 S（A ）

（A）在普通乘法下封闭，在普通加法下不封闭；

（B）在普通加法和乘法下都封闭；

（C）在普通加法下封闭，在普通乘法下不封闭；

（D）在普通加法和乘法下都不封闭；

43. 下面谓词公式是前束范式的是　（　A　）

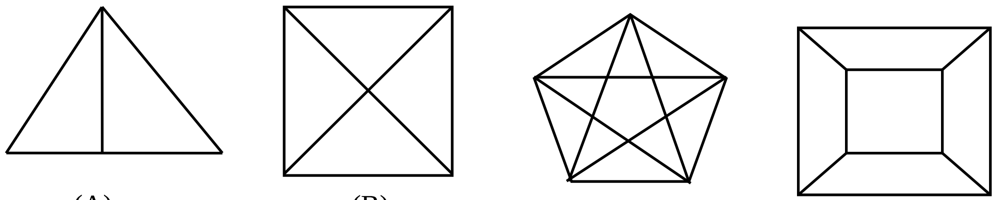
A. $\forall x\forall y\exists z(B(x,y)\rightarrow A(z))$　　B. $\neg\forall x\exists y(B(x,y)$

C. $\exists x\forall y\neg\exists z(B(x,y)\wedge A(z))$　　D. $\forall x(B(x,y)\rightarrow\exists yB(y))$

44. 整数集合 Z 上“＜”关系的自反闭包是关系（D）

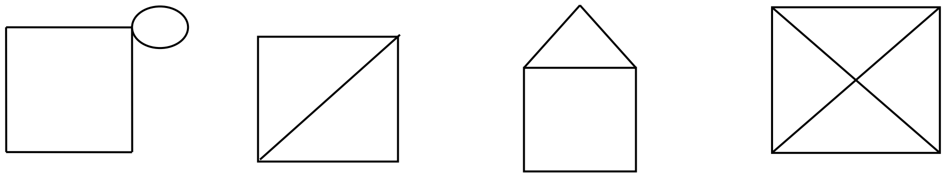
(A)＝　　(B)≠　　(C)＞　　(D)≤

45. 下列图既是欧拉图, 又是哈密顿图的是（C ）



(A)　　(B)　　(C)　　(D)

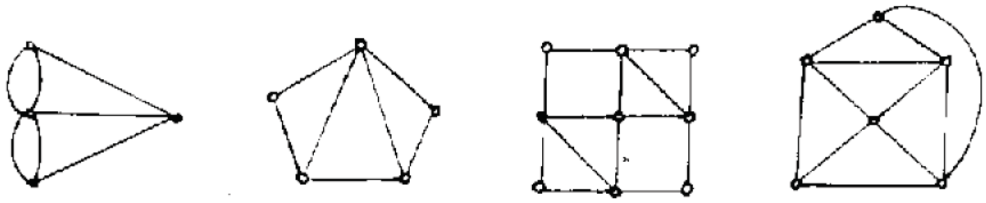
46、下列图中是欧拉图的是（ A ）。



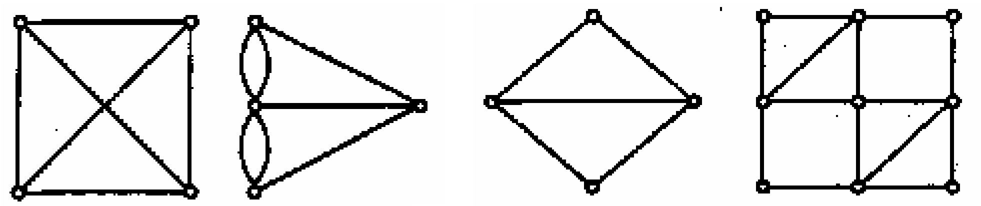
A　　B　　C　　D

47、下列图是欧拉图的是（ C ）

A.　　　　B.　　　　C.　　　　D.

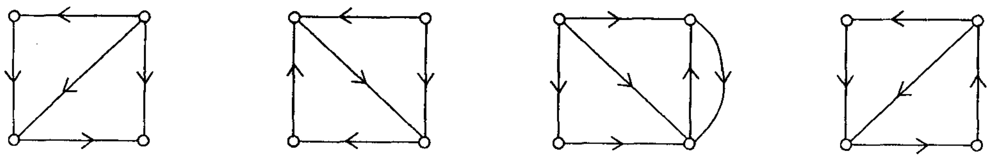


48、以下图中哪个是欧拉图（ D ）



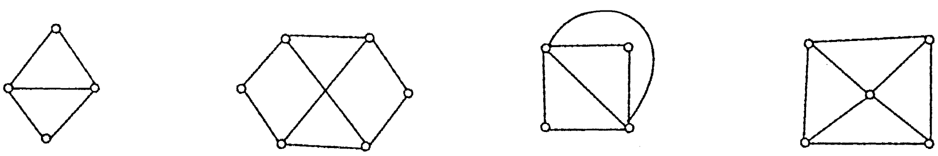
A　　　　B　　　　C　　　　D

49、下列各有向图是强连通图的是（ D ）



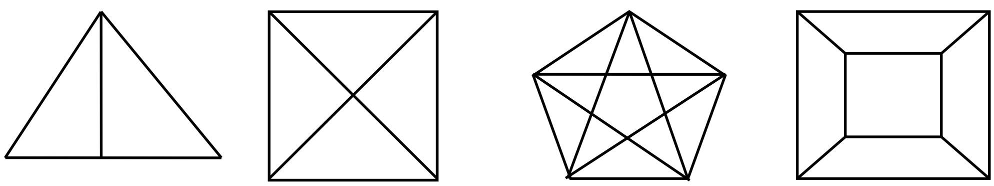
A　　　　B　　　　C　　　　D

50、下列各图中既是欧拉图，又是哈密顿图的是（ C ）



A.　　　　B.　　　　C.　　　　D.

51、下列图既是欧拉图,又是哈密顿图的是（ C ）



(A)　　　　(B)　　　　(C)　　　　(D)

52. 设 A={a, b, c}，A 上二元关系 R={〈a, a〉,〈b, b〉，〈a, c〉}，则关系 R 的对称闭包 S(R)是(　 C　)

A. R∪IA ；　　B. R ；　 C. R∪{〈c, a〉} ；　D. R∩IA。

53. 下列式子正确的是(　 B　)

A. $\varnothing\in\varnothing$；　　B. $\varnothing\subseteq\varnothing$；　　C. $\{\varnothing\}\subseteq\varnothing$　；　D. $\{\varnothing\}\in\varnothing$。

54. 函数 $f:A\to B$ 可逆的充要条件是　（　D　）

A. A=B ；　B. A 与 B 有相同的基数；　C. f 为满射；　D. f 为双射。

二、填空题

1、公式(P∧Q)→(R∨S)真值表中共有__16__种真值指派。

2、设 A(x):x 是运动员,B(x):x 是强壮的.命题“没有一个运动员不是强壮的”可符号化为______________________________。

3、___________________________是公式 $\exists xF(y,x)\to\forall yG(y)$ 的前束范式。

4、设集合 A={1,2,3}上两个二元关系为 R_1={<1,3>，<2,1>，<3,2>} 和 R_2={<1,2>，<2,3>，<3,1>}，则

$R_1 \circ R_2$= ________________， $t(R_1)=$_________________________________。

5、　集合 Z_m={[0],[1],[2]，…，[m-1]}，在 Z_m 上定义运算 $+_m$ 为：对任意的[i]，[j]∈Z_m 有：[i]$+_m$[j]=[（i+j）(modm)]，则<Z_m，$+_m$>的幺元是__[0]__，[i]∈Z_m 的逆元是__[m-i]__ 。

6、无向图 G 如图 1 所示，则 G 的边连通度为___2___。

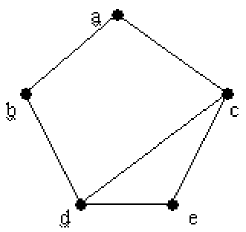


图 1

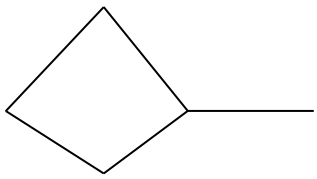


图 2

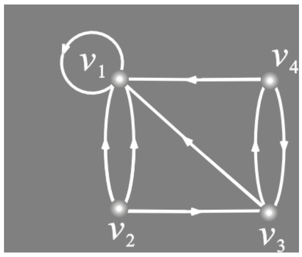


图 3

7、无向图 G 如图 2 所示，则 G 的点连通度为__1__。

8、有向图 D 如图 3 所示，则有向图 D 的邻接矩阵 A=_______________，　D 中长度为 2 的回路有__2__条。

9、设 p：1+1=5，q：明天是阴天。则命题“只要 1+1=5，那么明天是阴天”可符号化为_________________________，其真值为__1__。

10、设 $F(x):x$ 是兔子， $G(y):y$ 是乌龟， $H(x,y):x$ 比 y 跑得快，则“并不是所有的兔子都比乌龟跑得快。”可符号化为_______________________________

11、设有向图 D 的邻接矩阵 A(D)= $\begin{bmatrix}1&2&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}$, 则长度为 2 的通路有_10_条.

12、设 $Z_4=\{0,1,2,3\},x\oplus y=\{\begin{matrix}x+y & x+y<4\\ x+y-4 & x+y\geq 4\end{matrix}$， 则 $(Z_4,\oplus)$ 的生成元是__1__ 或 __3__。

13、具有 16 个结点的完全无向图其边数一定为___120___条。

14、设集合 $A=\{2,3,4,6,8,12,24\}$，R 为 A 上的整除关系，集合 A 中的极大元是_24_；极小元 2，3；

15、整数加群的幺元是___0___。

16、若 $A=\{1,2,3\}$，$\forall x,y\in A, x*y=\min\{x,y\}$，则*的运算表为________________

17. 设 $A=\{a,\{a\}\}$，A 的幂集 $P(A)$ 是____________________。

18. 设 G 是 n 阶无向完全图，则该图的边数为____________________。

19. 在一棵根树中，仅有一个结点的入度为 _0_，称为树根，其余结点的入度均为_1__。

20. 设 A、B 是两个集合，其中 $A=\{a,b,c\}$，$B=\{1,2\}$，则 $A\times B=$______________.

21. 设个体域 $A=\{a,b\}$，公式 $\forall xP(x)\wedge\exists xS(x)$ 在 A 中消去量词后应是

____

22. 设 M(x):x 是人，D(x):x 是要死的，则命题“所有的人都是要死的”可符号化为________________________________,其中量词的辖域是__________________

23. 画出完全图 K_5 ____

24. 设 A={a,b,c}，则 A×A 中的元素有 __9__个。

25. 设集合 $A=\{1,2,3,4\}$，R 为 A 上的一个二元关系，$R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,3\rangle\}$ 则 R 的关系矩阵为_______________.

26. 设 G 是 m 阶有向完全图，则该图的边数为_m(m-1)

27. 设 P(x)：x 非常聪明；Q(x):x 非常能干；a：小李；则命题“小李非常聪明和能干”的为谓词表达式为__________________。

28. 设 A，B 是两个集合，A={1，2，3，4}，B={2，3，5}，则 A⊕B={1.4.5}.

29. 公式 A→(∀x)B(x)的前束范式为_____________________。

30. 一个简单连通无向图有 n 个节点，它的边数至少有 _n-1_ 条。

31、R 是集合 A 上的二元关系，如果关系 R 同时具有___________性、性和___________性，则称 R 是偏序关系。

32、设 $A=\{1,2,3,4,5\}$，其中 $\oplus$ 为集合的对称差，则群方程 $\{1,3\}\oplus X=\{3,4,5\}$ 的解为___________________。

33、设 e 是群 G 上的幺元，若 $a\in G$，且 $a^2=e$，则 $a^{-1}=$ _____，$a^{-2}=$ ______。

34、一个______________且______________的无向图称为树。

35、设 p：a 能被 2 整除，q：a 能被 4 整除。则命题“除非 a 能被 2 整除，a 才能被 4 整除”可符号化为____________________________，此命题真值为_________。

36、设 $F(x):x$ 是兔子，$G(x):x$ 是乌龟，$H(x,y):x$ 比 y 跑得快，则“并不是所有的兔子都比乌龟跑得快。”可符号化为__________________________。

37、设个体域 $A=\{a,b\}$，公式 $\forall xP(x)\wedge\exists xS(x)$ 在 A 中消去量词后应是

____

38、R 集合 A={1，2，3，4}上的二元关系，其中 R={<1，1>，<2，4>，<1，3>}，则 $R^2=$ _______________________________________。

39、设群 $G=<P(\{a,b\}),\oplus>$，其中 $\oplus$ 为集合的对称差运算，那么群方程

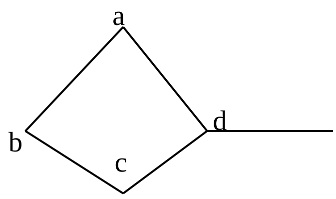
$X\oplus\{a,b\}=\{b\}$ 的解是 $X=$______________________。

40、设 $Z_4=\{0,1,2,3\},x\oplus y=(x+y)\bmod 4$，则 $(Z_4,\oplus)$ 的生成元是___ 或____。

41、设 G={e, a, b, c}是 Klein 四元群，H={e, a}是 G 的子群，那么 H 的所有不同的右陪集是：____________，___________。

42、具有 16 个结点的完全无向图有_____________条边。

43、无向图 G 如图所示，



则 G 的全部点割集为________________________，

三、计算题

1、求公式 $(\neg p\rightarrow q)\rightarrow(\neg q\vee p)$ 的主析取范式和主合取范式。

2、求公式 $(p\rightarrow q)\leftrightarrow r$ 的主析取范式和主合取范式。

解：方法一（等值演算法）

$$
\begin{aligned}
&(p\rightarrow q)\leftrightarrow r\\
\Leftrightarrow &((p\rightarrow q)\rightarrow r)\wedge(r\rightarrow(p\rightarrow q))\\
\Leftrightarrow &(\neg(\neg p\vee q)\vee r)\wedge((\neg p\vee q)\vee\neg r)\\
\Leftrightarrow &((p\wedge\neg q)\vee r)\wedge(\neg p\vee q\vee\neg r)\\
\Leftrightarrow &(p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge r)\vee(q\wedge r)\\
\Leftrightarrow &(p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge r)
\end{aligned}
$$

$\Leftrightarrow m_1\vee m_3\vee m_4\vee m_7$

方法二（真值表法）

公式 $(p\rightarrow q)\leftrightarrow r$ 真值表如下：

p	q	r	$p\rightarrow q$	$(p\rightarrow q)\rightarrow r$	$r\rightarrow(p\rightarrow q)$	$(p\rightarrow q)\leftrightarrow r$
0	0	0	1	0	1	0
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	0
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	0	0
1	1	0	1	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1

根据真值表可以得到主析取范式为：$m_1\vee m_3\vee m_4\vee m_7$

3、设集合 A=$\{1,2,3\}$，R 为 A 上的二元关系，R={＜1, 2＞＜3, 1＞, ＜2, 3＞} ，求

R^2，$r(R)$，$s(R)$，$t(R)$的集合表达式。

解：因为 R={<1,2>,<2,3>,<3,1>},所以

R^2={<1,3>,<2,1>,<3,2>}

r(R)={<1,1>,<2,2>,<3,3>,<1,2>,<2,3>,<3,1>}

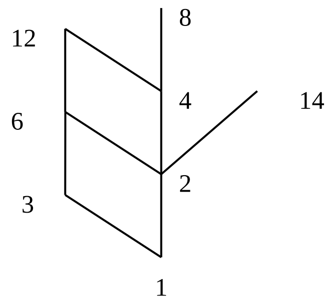
s(R)={<1,2>,<2,1>,<2,3>,<3,2>,<3,1>,<1,3>}

$t(R)=E_A$

4、在偏序集<A,≤>中，其中 A={1,2,3,4,6,8,12,14}，≤是 A 中的整除关系，求集合 D={2,3,4,6}的极大元，极小元，最大元，最小元，上界，下界,最小上界和最大下界。

解：

（1）〈A,R〉的哈斯图如下：



集合 D={2,3,4,6}的

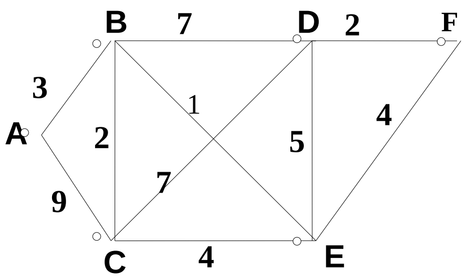
极大元为 4，6，极小元 2，3；

无最大元和最小元；

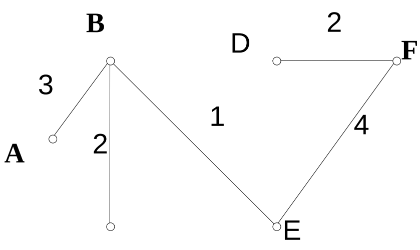
上界为 12，下界为 1，

最小上界 12;最大下界为 1

5、用 Kruskal 算法求下列权图的最小生成树,并求最小生成树的权数,要求写出解的过程.



解: 取数的由小到大的排列为 1＜2＜3＜4＜5＜7＜9

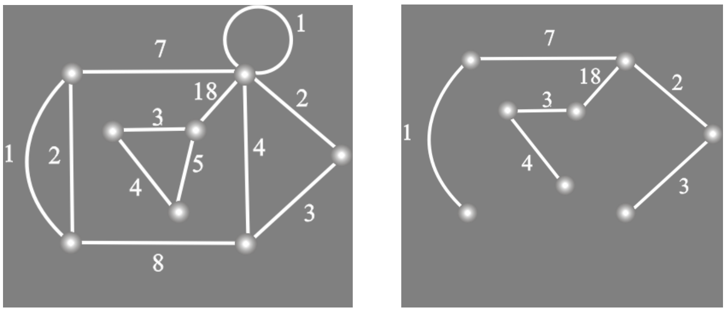


C

最小生成树如图所示：

最小生成树的权数为其权 W(T)=12

7、用 Kruskal 算法求下列左边带权图（a）的最小生成树,并求最小生成树的权数.



(a) (b)

解　最小生成树如上面右图（b）所示,最小生成树的权数为 $W(T)$=38。

8、设 A={a, b, c, d}, R={⟨a, b⟩, ⟨b, a⟩, ⟨b, c⟩, ⟨c, d⟩}。试用关系图表示 R 及 R 的传递闭包。

9、设 G=＜a＞是 10 阶循环群，求出 G 的所有子群。

解：因为 10 的正因子是 1,2,5，10 ，所以 G 的子群有 4 个， 分别是

$\langle a^{10}\rangle=\{e\}$

$\langle a^{5}\rangle=\{e,\ a^{5}\}$

$\langle a^{2}\rangle=\{e,\ a^{2},\ a^{4},\ a^{6},\ a^{8}\}$

$\langle a\rangle=G$

10、设 G=＜a＞是 12 阶循环群，求出 G 的所有子群。

解：因为 12 的正因子是 1,2,3,4,6,12,所以 G 的子群有 6 个,分别是

$\langle a^{12}\rangle=\{e\}$

$\langle a^{6}\rangle=\{e,\ a^{6}\}$

$\langle a^{4}\rangle=\{e,\ a^{4}\ a^{8}\}$

$\langle a^{3}\rangle=\{e,\ a^{3},\ a^{6},\ a^{9}\}$

$\langle a^{2}\rangle=\{e,\ a^{2},\ a^{4},\ a^{6}\ a^{8}\ a^{10}\}$

$\langle a\rangle=G$

11、画出 3 阶 2 条边的所有非同构的有向简单图。

解　由握手定理，所画的有向简单图各顶点度数之和为 4，最大出度和最大入度均小于或等于 2。度数列及入度出度列为

(a)度数列 1,2,1

入度列 0,1,1,出度列 1,1,0

入度列 0,2,0,出度列 1,0,1

入度列 1,0,1,出度列 0,2,0

(b)度数列 2,2,0, 入度列 1,1,0,出度列 1,1,0

所要求的全部非同构的有向图有 4 个，图 14.6 所示。

12、（1）在一棵有 2 个 2 度顶点，4 个 3 度顶点，其余顶点都是树叶的无向树中，应该有几片树叶？（2）画出两棵非同构的满足（1）中顶点度数的无向树 T1 和

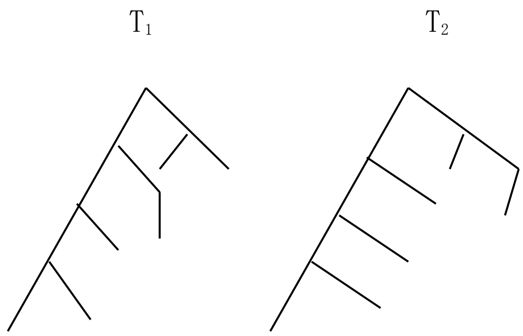
T2。

解：（1）设树有 n 个顶点，则有 n-6 片树叶，根据握手定理可知

$$2\times2+4\times3+(n-6)=2(n-1)$$

于是 n=12，因此有 6 片树叶。

(2)两棵非同构的树为



13、画出所有有 3 片树叶、1 个 3 度顶点、其余顶点度数不等于 1 和 3 的 7 阶非同构的无向树。

答案见教材例题 16.2

14、A、B、C、D 四个人中要派两个人出差，需满足如下条件：

（1）若 A 去，则 C 和 D 中要去一人；

（2）B 和 C 不能都去；

（3）C 去则 D 要留下。

问有几种派法？如何派？

解：用 A、B、C、D 分别表示 A 去，B 去，C 去，D 去出差，则命题符号化如下：

（1）A→（C⊙D）（⊙表示异或，可用其它符号）

（2）（B∧┐C）∨（┐B∧C）

（3）C→┐D

出差的派法要同时满足上述三个条件，故

G= （A→（C⊙D）∧（(B∧┐C）∨（┐B∧C)）∧（C→┐D）

列该公式的真值表如下：（可以去掉所有不满足条件的，只剩 6 种情况如下：）

A	B	C	D	（1）	（2）	（3）	G
0	0	1	1	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	1	0
1	0	0	1	0	1	1	0
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	1	0

由真值表知有两种派法 A，C 去或 B，D 去。

15、一棵树有 2 个 4 度结点，3 个 3 度结点，其余结点是叶子，求该树的叶子数。

解：设树的叶子数为 x,于是 T 中有 x+2+3 个顶点,有(x+2+3)-1 条边，

由握手定理知 T 中所有顶点的度数之和 $\sum_{i=1}^{x+y} d(v_i)$=2[(x+2+3)-1]

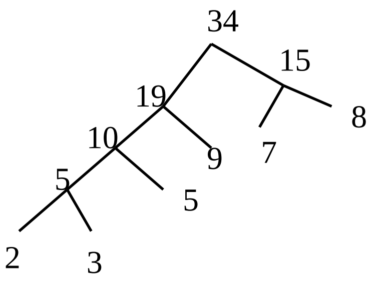
2*4+3*3+x*1=2*[(2+3+x)-1]

X=9

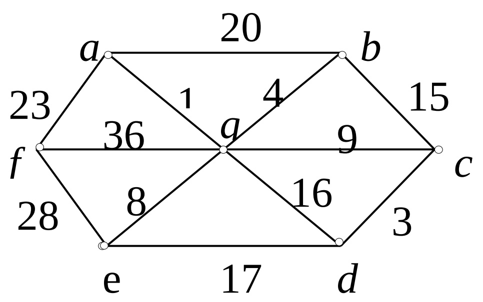
16、求带权为 2, 3, 5, 7,8,9 的最优二叉树,并编一个最佳 2 元前缀码.

解：最优二叉树如下图所示：

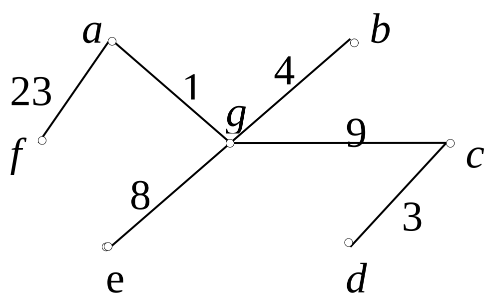
编码： 2：0000； 3：0001 5：001 7：10 8：11 9：01



17、带权无向图 G 如下，求 G 的最小生成树 T 及 T 的权总和，要求写出解的过程。



解：取数的由小到大的排列为 1＜3＜4＜8＜9＜15＜16<17<20<23<28<36



最小生成树如图所示：

最小生成树的权数为其权 W(T)=48

18、 求$\neg(P\to Q)\leftrightarrow(P\to\neg Q)$的主合取范式并给出所有使命题为真的赋值。

解：原式$\Leftrightarrow(\neg(P\to Q)\to(P\to\neg Q))\wedge((P\to\neg Q)\to\neg(P\to Q))$

$\Leftrightarrow ((P\to Q)\vee(P\to\neg Q))\wedge(\neg(P\to\neg Q)\vee\neg(P\to Q))$

$\Leftrightarrow (\neg P\vee Q\vee\neg P\vee\neg Q)\wedge(\neg(\neg P\vee\neg Q)\vee(P\wedge\neg Q))$

$\Leftrightarrow (\neg(P\wedge\neg Q)\vee(P\wedge\neg Q))$

$\Leftrightarrow (P\wedge Q)\vee(P\wedge\neg Q)$

$\Leftrightarrow P\wedge(Q\vee\neg Q)$

$\Leftrightarrow P\vee(Q\wedge\neg Q)$

$\Leftrightarrow (P\vee Q)\wedge(P\vee\neg Q)$

命题为真的赋值是 P=1,Q=0 和 P=1,Q=1

19、某班有学生 60 人，其中有 38 人选修 Visual C++课程，有 16 人选修 Visual Basic 课程。有 21 人选修 Java 课程；有 3 人这三门课程都选修，有 2 人这三门课程都不选修，问仅选修两门课程的学生人数是多少？

解　设选修 Visual C++课程的学生为集合 A；选修 Visual Basic 课程的学生为集合 B；选修 Java 课程的学生为集合 C。

由题意可知：

$|A|=38$　　$|B|=16$　　$|C|=21$

$|A\cap B\cap C|=3$　　$60-|A\cup B\cup C|=2$

因为$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$

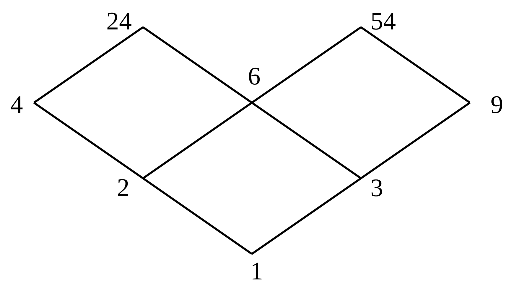
所以有：$|A\cap B|+|A\cap C|+|B\cap C|=20$。

所以仅选修两门课程的学生数是

$|A\cap B|+|A\cap C|+|B\cap C|-3|A\cap B\cap C|=11$。

20、设〈A,R〉为一个偏序集，其中 A={1，2，3，4，6，9，24，54}，R 是 A 上的整除关系。（1）画出〈A,R〉的哈斯图；（2）求 R 关于 A 的极大元；（3）求 B={4,6,9}的最小上界和最大下界。

解：解（1）〈A,R〉的哈斯图如下：



（2）R 关于 A 的极大元为 24，54；

（3）集合 B={4,6,9}的无最小上界，最大下界是 1。

四、证明题

1、设 R_1，R_2为 A 上的关系，证明：$(R_1\cup R_2)^{-1}=R_1^{-1}\cup R_2^{-1}$。

证明：对任意的$x,y\in A$，有

$$<x,y>\in(R_1\cup R_2)^{-1}$$
$$\Leftrightarrow<y,x>\in R_1\cup R_2$$
$$\Leftrightarrow(<y,x>\in R_1)\vee(<y,x>\in\cap R_2)$$
$$\Leftrightarrow(<x,y>\in R_1^{-1})\vee(<x,y>\in\cap R_2^{-1})$$
$$\Leftrightarrow<x,y>\in R_1^{-1}\vee R_2^{-1}$$

故$(R_1\cup R_2)^{-1}=R_1^{-1}\cup R_2^{-1}$

2、设 R_1，R_2为 A 上的关系，证明：$(R_1\cap R_2)^{-1}=R_1^{-1}\cap R_2^{-1}$。

证明：对任意的$x,y\in A$，有

$$<x,y>\in(R_1\cap R_2)^{-1}$$
$$\Leftrightarrow<y,x>\in R_1\cap R_2$$
$$\Leftrightarrow(<y,x>\in R_1)\wedge(<y,x>\in\cap R_2)$$

$$\Leftrightarrow (<x,y>\in R_1^{-1}) \wedge (<x,y>\in \cap R_2^{-1})$$
$$\Leftrightarrow <x,y>\in R_1^{-1} \cap R_2^{-1}$$

故 $(R_1 \cap R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cap R_2^{-1}$

3、在自然推理系统 P 中，构造下面推理的证明：

只要 A 曾到过受害者房间并且 11 点以前没离开，A 就犯了谋杀罪。A 曾到过受害者房间。如果 A 在 11 点以前离开，看门人会看见他。看门人没有看见他，所以 A 犯了谋杀罪。

证明： 命题符号化：

p：A 曾到过受害者房间

q：A11 点以前离开

r ：A 犯了谋杀罪

s：看门人会看见他

前提：(p∧┐q)→r，p，q→s，┐s

结论：r

证明： ① ┐s

② q→s

③ ┐q

④p

⑤ (p∧┐q)

⑥ (p∧┐q)→r

⑦ r

4、设 C*={a+bi ｜ a,b 为实数，且 a≠0}。其中 i 是虚数单位。在 C*上定义：

R={<a+bi，c+di>| a+bi∈C*∧c+di∈C*∧ac＞0}

（1）证明：R 是 C*上的等价关系；

（2）给出 R 产生的等价类。

证明：（1）对任意的 a+bi∈C^*，

a≠0⇔aa＞0⇔（a+bi）R（a+bi）

所以 R 是自反的。

（2）对任意的 a+bi，c+di∈C^*，

（a+bi）R（c+di）⇔ac＞0 ⇔ ca＞0 ⇔（c+di）R（a+bi）

所以 R 是对称的。

（3）对任意的 a+bi，c+di， e+fi∈C^*，

（a+bi）R（c+di），（c+di）R（e+fi）⇔ ac＞0，ce＞0⇔ae＞0

⇔（a+bi）R（e+fi）

所以 R 是传递的。

综上 R 是一个等价关系。

R 有两个不同的等价类。设为 K_1，K_2

K_1={（a+bi）∧a＞0}，K_2={（a+bi）∧a＜0}

5、证明：6 阶群中必含 3 阶元。

证明：设 G 是 6 阶群，由 L—定理的推论 1 知 G 中元素的阶只可能是 1，2，3，6。

若 G 中含有 6 阶元，设该元素为 a，则 a^2 为 3 阶元。

若 G 中不含有 6 阶元，下面证明 G 中必含有 3 阶元。若不然 G 中只含有 1

阶和 2 阶元，即对任意 a∈G，有 a^2=e，则 G 是 Abel 群，取 G 中两个不同的 2 阶元 a,b，令 H={e,a,b,ab}，则 H 是 G 的子群，但|H|=4，|G|=6，4 不整除 6，矛盾。故 G 中必含有 3 阶元。

6、构造下面推理的证明:

前提: $\neg\exists x(F(x)\wedge H(x)),\forall x(G(x)\to H(x)).$

结论: $\forall x(G(x)\to\neg F(x)).$

证明:

(1) $\neg\exists x(F(x)\wedge H(x))$ 前提引入

(2) $\forall x(\neg F(x)\vee\neg H(x))$ (1)置换

(3) $\forall x(H(x)\to\neg F(x))$ (2)置换

(4) $H(y)\to\neg F(y))$ (3)UI

(5) $\forall x(G(x)\to H(x))$ 前提引入

(6) $G(y)\to H(y))$ (5)UI

(7) $G(y)\to\neg F(y))$ (6)(4)假言三段论

(8) $\forall x(G(x)\to\neg F(x)).$ (7)UG

7、构造下列推理的证明.

前提: $p\vee q, p\to\neg r, s\to t, \neg s\to r, \neg t$

结论: q

证明:

(1) $s\to t$ 前提引入

(2) $\neg t$ 前提引入

(3) $\neg s$ (1)(2)拒取式

(4) $\neg s\to r$ 前提引入

(5) r (3)(4)假言推理

(6) $p\to\neg r$ 前提引入

(7) $\neg p$ (5)(6)拒取式

(8) $p\vee q$ 前提引入

(9) q (7)(8)析取三段论

8、试证：任一棵非平凡树 G 至少有两片树叶。

证明:设 T 中有 x 片树叶，y 个分支点。于是 T 中有 x+y 个顶点，有 x+y-1 条边，由握手定理知 T 中所有顶点的度数之和 $\sum_{i=1}^{x+y}d(v_i)$=2(x+y-1)。

又树叶的度为 1，任一分支点的度大于等于 2 于是

$$\sum_{i=1}^{x+y}d(v_i)\geqslant x\cdot 1+2y$$

从而

$$2(x+y-1)\geqslant x+2y$$

$$x\geqslant 2$$

证毕。

9、设 Q为有理数集合, 在 $Q-\{1\}$上定义二元运算*, $\forall x,y\in Q-\{1\}$有

$$x*y=x+y-xy$$

证明：<Q-{1},∗>是群。

证明:(1) 封闭性：$\forall x,y\in Q-\{1\}$，有 $(1-x)(y-1)\neq 0$，从而 $x+y-xy\neq 1$，

故 $x*y\in Q-\{1\}$

(2) 可结合性：$\forall x,y,z\in Q-\{1\}$，有

$$(x*y)*z=(x+y-xy)*z=x+y-xy+z-(x+y-xy)z$$

$$x*(y*z)=x*(y+z-yz)=x+y+z-yz-x(y+z-yz)$$

故 $(x*y)*z=x*(y*z)$

(3)幺元为 0 ：$\forall x\in Q-\{1\}$，有 $x*0=x=0*x$

(4) $\forall x\in Q-\{1\}$，有 $\frac{x}{x-1}\in Q-\{1\}$，且 $x*\frac{x}{x-1}=0=\frac{x}{x-1}*x$

故 x 的逆元为 $x^{-1}=\frac{x}{x-1}$

综上可知，<Q-{1},∗>是群。

10、有代数系统 V1 =<R,＋ >,V2=< R^+，•>,其中＋，•为普通加法和乘法,令 φ :R→ R^+　φ (x)= e^x，试证 φ 映射为同构映射。

证明：(1)∀ x,y∈R,φ(x＋y)= e^{x+y}= e^x • e^y =φ(x)•φ(y),所以，φ 是 V1 到 V2 的同态.

(2) ∀ x,y∈R，　x≠y 则有 $e^x\neq e^y$，即 φ(x) ≠φ(y)，所以，φ 是 V1 到 V2 的单射

（3）∀ y∈ R^+，有 x=lny∈R ，所以，φ 是 V1 到 V2 的满射

综上三点，所以 φ 是 V1 到 V2 的同构映射

11、在一阶逻辑自然推理系统中，构造下面推理的证明：

乌鸦都不是白色的．北京鸭是白色的．因此，北京鸭不是乌鸦．

（令　$F(x)$：x 是乌鸦，$G(x)$：x 是北京鸭，$H(x)$：x 是白色的）

前提：$\forall x(F(x)\to\neg H(x))$，　$\forall x(G(x)\to H(x))$

结论：$\forall x(G(x)\to\neg F(x))$

证明： ① $\forall x(F(x)\to\neg H(x))$　前提引入

② $F(y)\to\neg H(y)$　①∀-

③ $\forall x(G(x)\to H(x))$　前提引入

④ $G(y)\to H(y)$　③∀-

⑤ $\neg H(y)\to\neg G(y)$　④置换

⑥ $F(y)\to\neg G(y)$　②⑤假言三段论

⑦ $G(y)\to\neg F(y)$　⑥置换

⑧ $\forall x(G(x)\to\neg F(x))$　⑦∀+

12、在自然推理系统 F 中，构造下面推理的证明：

任何人如果喜欢音乐就不喜欢体育。每个人或者喜欢体育或者喜欢美术。有的人不喜欢美术，因而有的人不喜欢音乐。(个体域为人类集合)

命题符号化：$F(x)$：x 喜欢音乐

$G(x)$：x 喜欢体育

$H(x)$：x 喜欢美术

前提：$\forall x(F(x)\to\neg G(x))$，$\forall x(G(x)\vee H(x))$

结论：$\exists x \neg H(x) \to \exists x \neg F(x)$

证明：附加前提证明法

①$\exists x \neg H(x)$　　附加前提引入

②$\neg H(c)$　　EI 规则

③$\forall x(G(x) \vee H(x))$　　前提引入

④$G(c) \vee H(c)$　　UI 规则

⑤$G(c)$　　②④析取三段论

⑥$\forall x(F(x) \to \neg G(x))$　　前提引入

⑦$F(c) \to \neg G(c)$　　UI 规则

⑧$\neg F(c)$　　⑤⑦拒取

⑨$\exists x \neg F(x)$　　EG 规则

13、设 R 是 A 上的二元关系，　设 S = {<a, b>|∃c(<a, c>∈R∧<c, b>∈R)}.
证明如果 R 是等价关系，则 S 也是等价关系。

证明：因为 R 是等价关系,所以 R 具有自反性、对称性和传递性。

（1）对任意的$x \in A$，$<x,x> \in R$，故

$$\exists x(<x,x> \in R \wedge <x,x> \in R) \Leftrightarrow <x,x> \in S$$

所以S具有自反性。

（2）对任意的$<x,y> \in S$，由S的定义及 R 对称性知

$\exists z(<x,z> \in R \wedge <z,y> \in R)$

$\exists z(<y,z> \in R \wedge <z,x> \in R)$

于是$<y,x> \in S$

S具对称性。

（3）利用 R 具有传递性，对任意的$<x,y>,<y,z>$

$<x,y> \in S \wedge <y,z> \in S$

$\Leftrightarrow \exists s(<x,s> \in R \wedge <s,y> \in R) \wedge \exists t(<y,t> \in R \wedge <t,z> \in R)$

$\Leftrightarrow <x,y> \in R \wedge <y,z> \in R)$

$\Leftrightarrow <x,z> \in S$

所以 T 具有传递性；

因为 T 具有自反性、对称性和传递性，所以 R 是一个等价关系。

14、设 R 是 A 上的自反的和传递的，如下定义 A 上的关系 T，使得

$$\forall x,y \in A \text{ ， } <x,y> \in T \Leftrightarrow <x,y> \in R \wedge <y,x> \in R$$

证明：T 是 A 上的等价关系。

证明：因为 R 具有自反性,所以对任意的$x \in A$，$<x,x> \in R$故

$$<x,x> \in R \wedge <x,x> \in R \Leftrightarrow <x,x> \in T$$

所以 T 具有自反性。

对任意的$<x,y> \in T$，有

$<x,y> \in T$

$\Leftrightarrow <x,y> \in R \wedge <y,x> \in R$

$\Leftrightarrow <y,x> \in R \wedge <x,y> \in R$

$\Leftrightarrow <y,x> \in T$

所以 T 具有对称性；

利用 R 具有传递性，若$<x,y>,<y,z>\in T$，则

$<x,y>\in T\wedge <y,z>\in T$

$\Leftrightarrow (<x,y>\in R\wedge <y,x>\in R)\wedge(<y,z>\in R\wedge <z,y>\in R)$

$\Leftrightarrow (<x,y>\in R\wedge <y,z>\in R)\wedge(<z,y>\in R\wedge <y,x>\in R)$

$\Leftrightarrow <x,z>\in R\wedge <z,x>\in R$

$\Leftrightarrow <x,z>\in T$

所以 T 具有传递性；

因为 T 具有自反性、对称性和传递性，所以 R 是一个等价关系。

15、设 Z 为整数集合，在 Z 上定义二元运算$\circ$如下：$\forall x,y\in Z, x\circ y=x+y-2$

证明：Z 关于$\circ$运算构成群。

证明：(1) 封闭性：因为对任意的$x,y\in Z$，有$x+y-2\in Z$，所以整数集合 Z 关于运算$\circ$封闭。

(2) 运算$\circ$满足结合律：对$\forall x,y,z\in Z$有

$(x\circ y)\circ z=(x+y-2)\circ z=x+y+z-4$

$x\circ(y\circ z)=x\circ(y+z-2)=x+y+z-4$

故$(x\circ y)\circ z=(x\circ y)\circ z$，即运算$\circ$满足结合律。

3) 2 是单位元：$2\in Z$，且对任意的$x\in Z$有$x\circ 2=2\circ x=x$，所以 2 是$<Z,\circ>$的单位元。

(4) x 的逆元为$x^{-1}=4-x$：事实上对任意的$x\in Z$有$4-x\in Z$，且

$x\circ(4-x)=(4-x)\circ x=2$，即$x^{-1}=4-x$

综合上述可知 Z 关于$\circ$运算构成群。

16、设Z为整数集合, 在Z上定义二元运算$*$, $\forall x,y\in Z$有$x*y=x+y-1$

证明: $\langle Z,*\rangle$是群.

证明：(1) 封闭性：因为对任意的$x,y\in Z$，有$x+y-1\in Z$，所以整数集合 Z 关于运算$*$封闭。

(2) 运算$*$满足结合律：：对$\forall x,y,z\in Z$有

$(x\circ y)\circ z=(x+y-1)\circ z=x+y+z-2$

$x\circ(y\circ z)=x\circ(y+z-1)=x+y+z-2$

故$(x\circ y)\circ z=(x\circ y)\circ z$，即运算$\circ$满足结合律。

(3) 单位元为 1 ：$1\in Z$，且对任意的$x\in Z$有$x\circ 1=x=1\circ x$，所以 1 是$<Z,\circ>$的单位元。

(4) x 的逆元为$X^{-1}=2-x$：事实上，对任意的$x\in Z$有$2-x\in Z$，且

$x\circ(2-x)=1=(2-x)\circ x$，即$x^{-1}=2-x$

综合上述可知 Z 关于$*$运算构成群。

17、设R是实数集合，令$G=\{(a,b),a,b\in R,a\neq 0\}$，定义$G$ 上的运算如下:

对于任意$(a,b),(c,d)\in G$，$(a,b)\bullet(c,d)=(ac,ad+b)$，证明$(G,\bullet)$是非 Abel 群.

证明： 易见G 上的运算$\bullet$是封闭的。

对于任意 $(a,b),(c,d),(e,f)\in G$，有

$$((a,b)\bullet(c,d))\bullet(e,f)=(ac,ad+b)\bullet(e,f)=(ace,acf+ad+b)$$

$$(a,b)\bullet((c,d)\bullet(e,f))=(a,b)\bullet(ce,cf+d)=(ace,acf+ad+b)$$

故

$$((a,b)\bullet(c,d))\bullet(e,f)=(a,b)\bullet((c,d)\bullet(e,f))$$

即运算 $\bullet$ 满足结合律，从而 $(G,\bullet)$ 是半群；

$(1,0)\in G$，且对任意 $(a,b)\in G$，有 $(a,b)\bullet(1,0)=(a,b)=(1,0)\bullet(a,b)$，故 $(1,0)$ 是单位元，从而半群 $(G,\bullet)$ 是独异点；

对任意 $(a,b)\in G$，有 $(\frac{1}{a},-\frac{b}{a})\in G$，且 $(a,b)\bullet(\frac{1}{a},-\frac{b}{a})=(1,0)=(\frac{1}{a},-\frac{b}{a})\bullet(a,b)$

故 $(a,b)^{-1}=(\frac{1}{a},-\frac{b}{a})$，从而独异点 $(G,\bullet)$ 是群；

由于 $(1,,2),(2,1)\in G$，但

$$(1,2)\bullet(2,1)=(2,3)\neq(2,5)=(2,1)\bullet(1,2)$$

故运算 $\bullet$ 不满足交换律，

因此群 $(G,\bullet)$ 不是交换群，即 $(G,\bullet)$ 是非 Abel 群。

18、9 阶无向图 G 中，每个顶点的度数不是 5 就是 6. 证明 G 中至少有 5 个 6 度顶点或至少有 6 个 5 度顶点.

证 设 G 中有 x 个 5 度顶点，则必有 $(9-x)$ 个 6 度顶点，由于图中奇度顶点个数为偶数，故 $(x, 9-x)$ 只有 5 种可能：

(0,9)，(2,7)，(4,5)，(6,3)，(8,1)

它们都满足要求，因此结论正确。

19、设 A,B 为任意集合，证明 $(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)-(A\cap B)$

证明：对任意集合 A,B 有

左端 $=(A-B)\cup(B-A)$

$=(A\cap\sim B)\cup(B\cap\sim A)$

$=((A\cap\sim B)\cup B)\cap((A\cap\sim B)\cup\sim A)$

$=(A\cup B)\cap(\sim B\cup B)\cap((A\cup\sim A)\cap(\sim B\cup\sim A)$

$=(A\cup B)\cap(\sim B\cup\sim A)$

$=(A\cup B)-(A\cap B)$

=右端

因此等式成立。

20、设 A,B,C 是任意集合，证明：$(A-B)-C=(A-C)-(B-C)$

证明：对任意集合 A,B,C 有

右端 $=(A\cap\sim C)\cap\sim(B\cap\sim C)$

$=(A\cap\sim B)\cap\sim C)$

$=(A-B)-C$

=左端

因此等式成立。