Paper Reading——Perspective-n- Line (PnL) Problem

2020/02/10

概要

问题描述：内参已知的相机，空间中 3 条直线及其对应的 3 条图像上的直线，求得相机位姿 R_w^c, t_w^c。

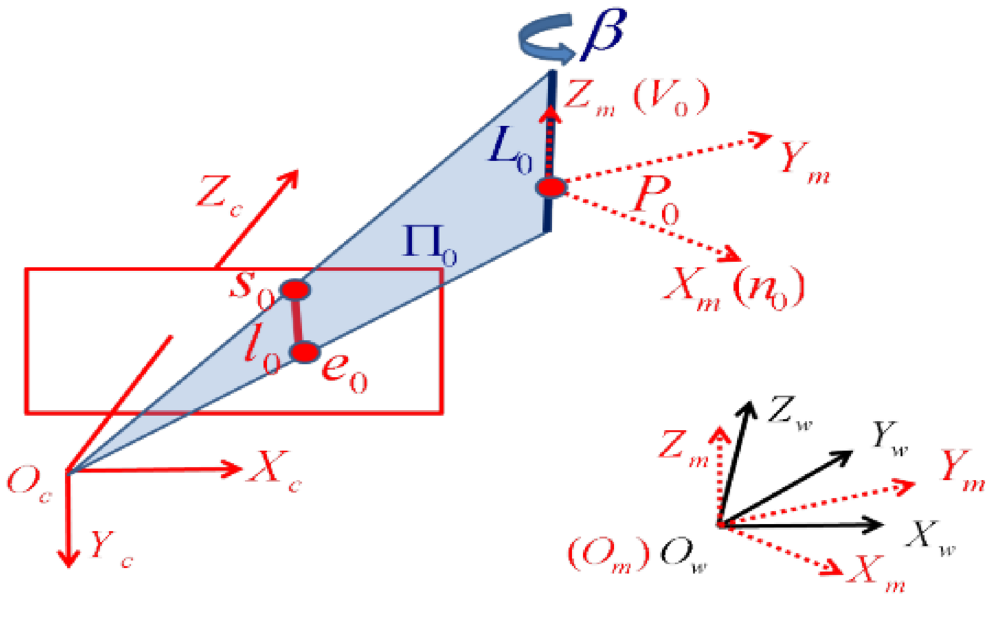
已知条件：相机内参 K，空间中的 3 条 3D 直线及其对应的 2D 图像上直线。

背景知识：P3L 八阶多项式的推导

直线参数化方式：$L_i = (V_i, P_i)$，V_i 为空间中 3D 直线的单位方向向量 P_i 为过该直线的一点，$l_i = (s_i, e_i)$ 为 L_i 在图像上的投影直线，s_i, e_i 分别为直线的起点和终点。

生成投影平面：通过 L_i, l_i 和相机坐标系原点 O_c 平面 Π_i,n_i 为平面的法向量。

生成模型坐标系：选择一条直线 L_0 的单位方向向量作为 $O_m X_m Y_m Z_m$ 的 Z 轴，$O_m X_m Y_m Z_m$ 的原点放在真实世界坐标系下的原点, 因此，$O_w X_w Y_w Z_w$ 坐标系与坐标系 $O_m X_m Y_m Z_m$ 之间只有旋转 R_w^m，且 L_0 的单位方向向量 V_0 在两个坐标系下的坐标值均已知。因此，可以得到下式。



$$[0, 0, 1]^T = V_0^m = R_w^m V_0^w \tag{1}$$

通过（1）式，可以知道：

$$R_w^m = [\Lambda_1^T, \Lambda_2^T, {V_0^w}^T] \tag{2}$$

可以作为 R_w^m, 并且由于旋转矩阵是正交矩阵。因此 Λ_1^T, Λ_2^T 与 ${V_0^w}^T$ 正交。从而 Λ_1^T, Λ_2^T 为线性方程 ${V_0^w}^T X = 0$ 的解，或者更特定的为该线性方程零空间的正交基。通过这一步，能够构建 $O_m X_m Y_m Z_m$ 坐标系，并给出其与世界坐标系的旋转矩阵 R_w^m。

由于 $R_w^c = R_m^c R_w^m$，在指定了 R_w^m 后，要求得 R_w^c 只需要解出 R_m^c 即可。而对于旋转矩阵 R_m^c，有：

$$
\begin{aligned}
{n_0}^T R_m^c V_0^m = 0 \\
{n_0}^T R_m^c [0,0,1]^T = 0 \\
{n_0}^T \begin{bmatrix} r_1 & r_4 & r_7 \\ r_2 & r_5 & r_8 \\ r_3 & r_6 & r_9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0
\end{aligned} \tag{3}
$$

这意味着（3) 式等好左边前半部分 ${n_0}^T R_m^c = [1,0,0]$, 即 R_m^c 矩阵的第一列必须等于 ${n_0}^T$，于此，可以推出满足上述条件的任意的 R_m^c。但这仅仅利用了旋转矩阵的正交性，和 L_0 相关信息，忽略了 L_1, L_2。接下来，将旋转矩阵 R_m^c 分解为三个基本的旋转，为了满足上述（3）式，可以使用下式参数化，其中 $R^{'}$ 的第一列为 ${n_0}^T$：

$$
\begin{aligned}
R_m^c = R^{'} R(X,\alpha) R(Z,\beta) \\
\begin{bmatrix} r_1 & r_4 & r_7 \\ r_2 & r_5 & r_8 \\ r_3 & r_6 & r_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1^{'} & r_4^{'} & r_7^{'} \\ r_2^{'} & r_5^{'} & r_8^{'} \\ r_3^{'} & r_6^{'} & r_9^{'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\alpha & -sin\alpha \\ 0 & sin\alpha) & cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos\alpha & -sin\alpha & 0 \\ sin\alpha & cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4}
$$

(4) 式可以通过代入（3）式简单的验证。此时 R_m^c 中只有两个未知参数 α, β。$R^{'}$ 为满足上述条件的任意旋转矩阵。

与（3）式类似，利用 L_1, L_2 相关信息有：

$$
\begin{aligned}
{n_1}^T R_m^c V_1^m = 0 \\
{n_2}^T R_m^c V_2^m = 0
\end{aligned} \tag{5}
$$

针对（5）式未知量为 α, β，将方程展开可以得到下式：

$$
\begin{aligned}
\sigma_1 cos\beta + \sigma_2 sin\beta + \sigma_3 = 0 \\
\sigma_4 cos\beta + \sigma_5 sin\beta + \sigma_6 = 0
\end{aligned} \tag{6}
$$

上式中系数的具体含义见参考文献。

利用 $cos\beta^2 + sin\beta^2 = 1$, 最终可以得到关于 α 的 8 阶多项式：

$$
f(x) = \sum_{k=0}^{8} \delta_k (cos\alpha)^k = 0 \tag{7}
$$

方程的系数具体表达见参考文献。

由此，得到了 P3L 问题的 8 阶多项式约束，在求解 R_w^c 的过程中巧妙的将整体旋转分解为多个旋转，并利用正交约束和三角约束推导得到上述约束方程。

PnL 位姿求解

0、总体思路

将整体旋转分解为多个旋转组合而成，利用旋转矩阵的正交性和三角约束建立方程，依次求解旋转参数和平移向量，其中整体旋转可以看做以下旋转组合而成。

$$R_w^c = R_m^c R_w^m = R^{'} R(X,\alpha) R(Z,\beta) R_w^m \tag{8}$$

1、选择旋转轴建立模型坐标系

在给定的 3D-2D 直线对中，选择长度最长的直线（在图像上的长度最长——对噪声更鲁棒）作为模型坐标系的 Z 轴，模型坐标系原点定在世界坐标系的原点, 并得到 R_w^m。

2、建立旋转参数多项式并求解 X 旋转轴 α

以最长，第二长为基础直线，在 n 条直线对中，形成 n-2 对三直线集合，每个三直线集合能得到一个一绕 X 轴的旋转角度 α 为变量的 8 阶多项式 $f_i(x)$，该 8 阶多项式的具体推导和含义见附录。因此可以得到 n-2 个多项式:

$$f_1(x) = \sum_{k=0}^{8} \sigma_1 x^k = 0$$

$$\vdots$$

$$f_{n-2}(x) = \sum_{k=n-2}^{8} \sigma_{(n-2)} x^k = 0 \tag{9}$$

建立最小二乘目标函数:

$$F = \sum_{i=1}^{n-2} f_i^2(x) \tag{10}$$

显然上式为 16 阶多项式，其最小值出现在一阶导数为 0 的点:

$$F^{'} = \sum_{i=1}^{n-2} f_i(x) f_i^{'}(x) = 0 \tag{11}$$

显然上式为 15 阶多项式，求解该方程的解可以转换为求解矩阵的特征向量 (具体可以参考数值分析中多项式求解的特征向量法)。因此根据上式可以求解得到多个满足条件的 α。

3、求解 Z 旋转轴 β 和平移向量

在求得 α 后，关于相机位姿 R_w^c 的未知参数只有 β 和平移向量了。

与（3）式类似，对于直线 L_i^m 上的一点 P_i^m 相关信息有:

$$\begin{gathered} {n_i}^T R_m^c V_i^m = 0 \\ {n_i}^T R_m^c (P_i^m - T) = 0 \end{gathered} \tag{12}$$

对于每条线可以得到上述两个方程，n 条线可以得到 2n 个方程，将方程展开并写成矩阵形式，最终可以得到如下形式的线性方程组:

$$Hx = 0 \tag{13}$$

其中变量 x 为平移向量和 β 相关变量组成的列向量。利用 SVD 分解求解上述线性方程组，便能得到 β 和平移向量。

4、求解最佳位姿

在求解线性方程组中，由于噪声的影响导致上述的求解得到的旋转矩阵可能不满足正交性，通过对齐 $\{P_i^w\}$ 和 $\{\overline{P}_i^c\}$ 两个对应 3D 点集合恢复归一化的相机位姿，其中 $\{\overline{P}_i^c\}$ 通过下式得到：

$$\begin{aligned} P_i^c &= R_w^c(p_i^w - T) \\ \overline{P}_i^c &= P_i^c - (P_i^c \cdot n_i)n_i \end{aligned} \tag{14}$$

在得到归一化的相机位姿后，通过正交误差和线的重投影误差以及变换位于相机前方条件筛选出最合适的相机位姿：

$$\begin{aligned} E_{er} &= \sum_{i=1}^{n}(n_i^T R_w^c V_i)^2 \\ E_{re} &= \sum_{i=1}^{n}\int_0^{l_i} h_i^2(s)d(s) = \sum_{i=1}^{n}\frac{l_i}{3}(h_{is}^2 + h_{is}h_{ie} + h_{ie}^2) \end{aligned} \tag{15}$$

参考文献

Zhang, Lilian Xu, Chi Lee, Kok Meng Koch, Reinhard. Robust and Efficient Pose Estimation from Line Correspondences