Quasi-Explicit SVI技术文档

1 SVI 模型回顾

SVI (Stochastic Volatility Inspired) 模型由 Gatheral (2004) 提出，用于描述隐含波动率的微笑形状，该模型表现形式为：

$$v(x) = \sigma_{BS}^2(x) = a + b(\rho(x-m) + \sqrt{(x-m)^2 + \sigma^2})$$

其中，K 是对数moneyness, 即 $\log(\frac{K}{F_T})$ ，K 为行权价， F_T 为到期时的期货价格。SVI模型中的参数控制隐含波动率曲线的形态和特点，具体如下：

- a 表示隐含波动率的基准水平，调整 a 的值会导致整条曲线在垂直方向上移动;
- b 表示波动率微笑的振幅，即控制曲线在左右两端渐近线之间的张开角度。b值的增加会减少这个角度，使曲线更为收敛;
- ρ 表示微笑的倾斜度，即曲线的整体倾斜，调整 ρ 的值会产生对曲线的旋转效果;
- m 定义曲线的水平中心位置，修改 m 会导致曲线在水平方向上的整体移位;
- σ 表示微笑的宽度，即决定曲线定点附近的平滑度，较大的 σ 值会使曲线在这一区域更为平缓。

这些参数共同定义了隐含波动率的微笑形态，可以准确捕捉和再现市场上观察到的隐含波动率曲线。

2 Quasi-Explicit 模型

在某些特定情况下，尤其是市场数据稀少或缺少远离moneyness的期权时，原始 SVI 模型有可能会产生无界隐含波动率或出现拟合失败的情形。为了解决这个问题，Zeliade Systems (2009) 提出 Quasi-Explicit SVI 模型。在 Quasi-Explicit 模型中，对上述 SVI 公式进行了改进，通过引入额外的到期日参数 T ，使模型更加灵活，并能够提供相对稳健的参数估计值进而适应各种市场条件。

Quasi-Explicit 是SVI的另一种形式，更适合于参数校准，对参数的定义与SVI原始公式略有不同：

$$y(x) = \frac{x-m}{\sigma}$$

Zeliade Systems (2009) 强调波动率的总方差 $\tilde{v} = Tv$ ， 因此SVI 参数形式转换为

$$v(x) = aT + b\sigma T(\rho y + \sqrt{y^2+1})$$

此表达式清晰地展示了，对于固定的 m 和 σ 值，Tv 曲线能够完全由 a， ρ 以及 乘积 $b\sigma$ 决定。因此，若重新定义参数为

$$\begin{gathered} c = b\sigma T \\ d = \rho b\sigma T \\ \tilde{a} = aT \end{gathered}$$

那么， $\tilde{v}(y)$ 呈线性依赖于 c， d ， a :

$$\tilde{v}(y) = \tilde{a} + dy + c\sqrt{y^2+1}$$

2.1 内层优化

因此，对于固定值 m 和 σ，求解问题：

$$(P_{m,\sigma}) \min_{(c,d,\tilde{a})\in D} f_{y_i,v_i}(c,d,\tilde{a})$$

其中，fy_i, v_i为成本函数

$$f_{y_i,vi}(c,d,\tilde{a}) = f(c,d,\tilde{a}) = \sum_{i=1}^{n}(\tilde{v}(y_i) - \tilde{v_i})^2$$
$$\tilde{v_i} = Tv_i$$

$(c,d,\tilde{a})$ 的定义域 D 为

$$D = \begin{cases} 0 \leq c \leq 5\sigma \\ \mid d \mid \leq c \text{ and } \mid d \mid \leq 4\sigma - c \\ 0 \leq \tilde{a} \leq \max_i(\tilde{v_i}) \end{cases}$$

2.2 外层优化

设 $(c^*, d^*, \tilde{a}^*)$ 代表 $P_{m,\sigma}$的解，并且 (a^*, b^*, ρ^*) 为对应三元组 (a, b, ρ)， 那么完整的模型校准问题可表示为

$$(P) \quad \min_{m,\sigma} \sum_{i=1} n(v_{m,\sigma,a^*,b^*,\rho^*}(x_i) - v_i^2)$$

到这一步骤之后，剩下的唯一任务即为求解二维方程 $P_{m,\sigma}$ 。

2.2.1 降维问题的闭式解

$P_{m,\sigma}$ 是一个有着线性规划的凸优化问题，在容许域 D 中定义的所有约束条件均为线性的。显而易见，该方程有一个显示解。在外层优化中，由于成本函数 f 是关于 (σ, m) 的非线性函数，f 会出现多个局部最小值。

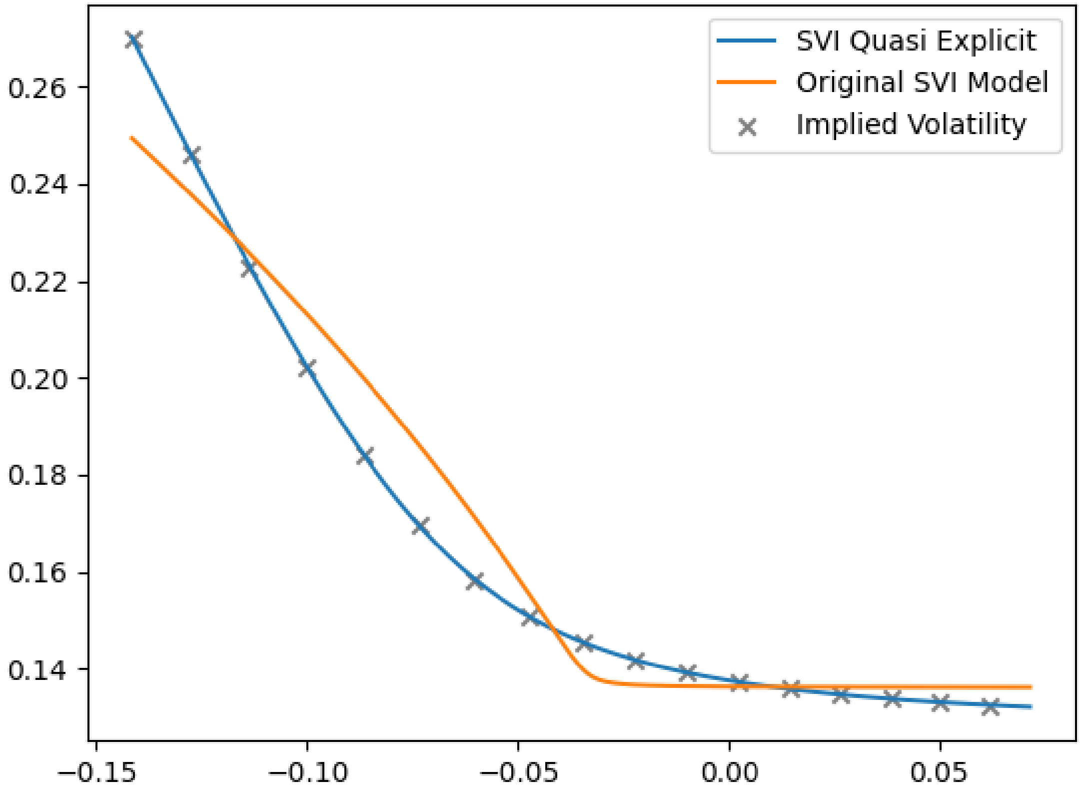
针对外层优化，Zeliade Systems (2009) 推荐 Nelder-Mead Simplex (1965) 算法。在外层优化中，采用Nelder-Mead Simplex算法具有明显优势。该算法是一个无约束优化算法，能够处理非线性、非平滑的目标函数。其次，该方法不需要目标函数的导数信息，特别适用于导数难以计算或不存在的情形。另外，通过使用单纯形法的迭代搜索策略，它能够有效地搜索和收敛到函数的局部最小值。而且，Nelder-Mead 方法在多维度参数空间中表现稳健，尤其是在初值选择不是非常接近最优解的情况下，在实际外层优化问题中应用广泛 (Gao and Han, 2010)。

2.3 实证分析

2.3.1 2D波动率曲线

测试数据为2023年7月26日l2309期权的隐含波动率为例，日历日到期时长为 `43.0` ， 无风险利率为 `0.02`。

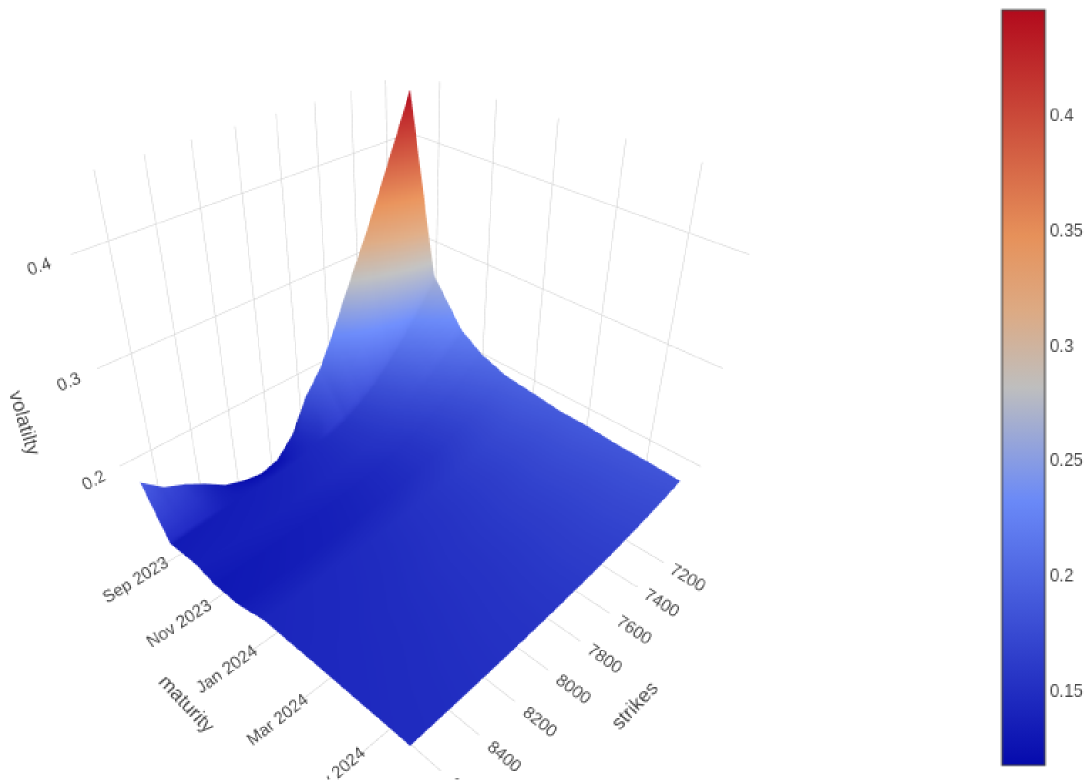
Quasi-SVI、SVI以及隐含波动率的对比结果如下：



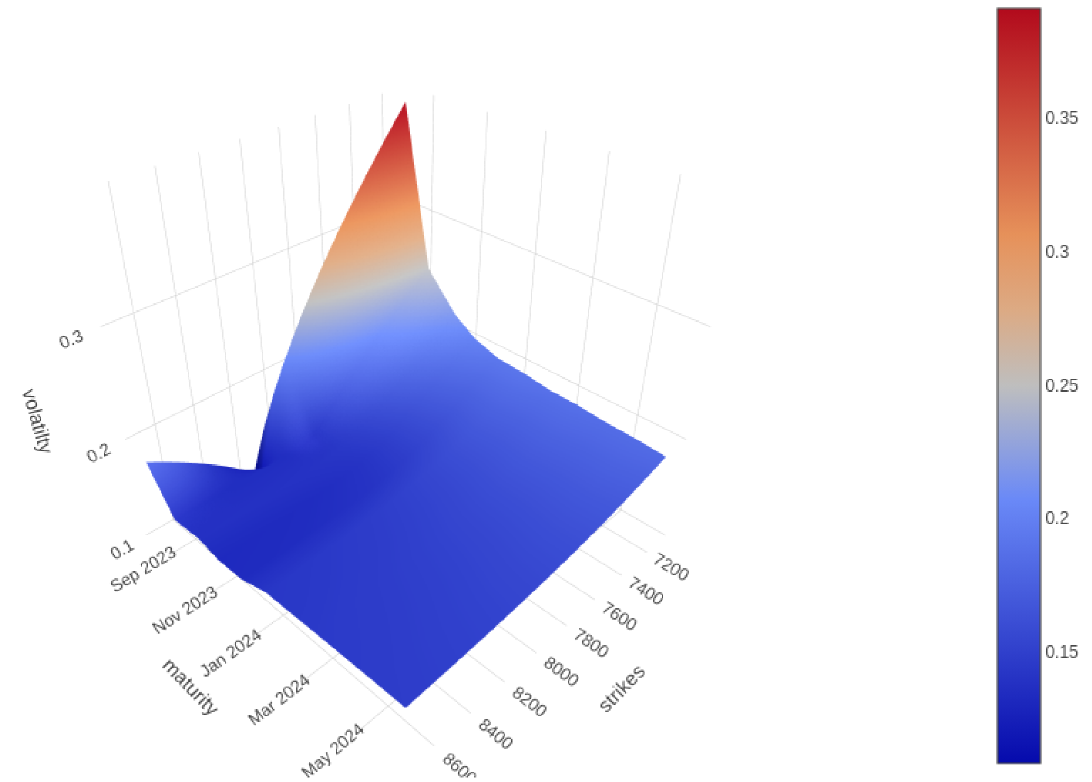
2.3.2 3D波动率曲面

测试数据为2023年7月26日聚乙烯期权的隐含波动率为例，日历日到期时长为 `43.0` ，无风险利率为 `0.02`。

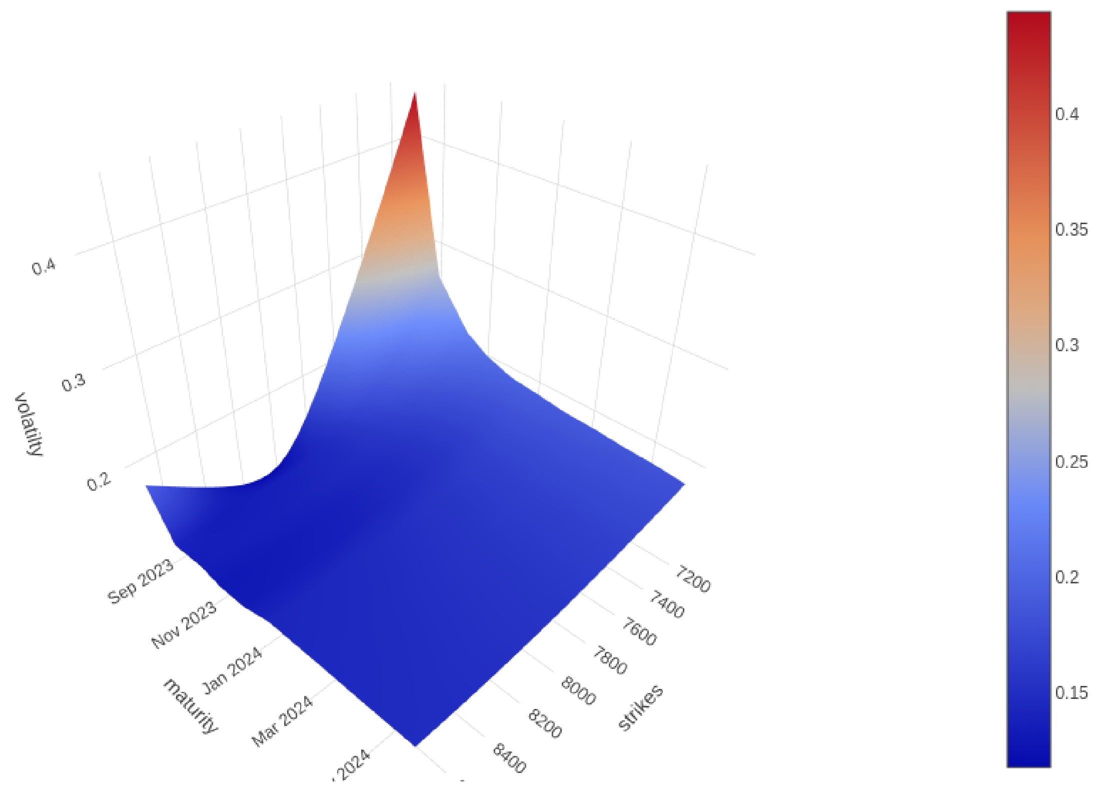
隐含波动率曲面如下：



原始SVI波动率曲面如下：



Quasi-explicit波动率曲面如下：



3 总结

Quasi-Explicit SVI 在原始SVI的基础上，引入对到期日 T 的考虑，使得模型更加稳健并能够适应市场变化。其模型校准过程中同时考虑了全局和局部优化，确保能够更准确地捕捉市场上的隐含波动率曲线。

4 参考文献

1. Gao, F. and Han, L. (2010) 'Implementing the Nelder-Mead simplex algorithm with adaptive parameters', *Computational Optimization and Applications*, 51(1), pp. 259-277.

2. Gatheral, J. (2004) 'A parsimonious arbitrage-free implied volatility parameterization with application to the valuation of volatility derivatives', Presentation at Global Derivatives & Risk Management, Madrid.

3. Nelder, J.A. and Mead, R. (1965) 'A simplex method for function minimization', *The Computer Journal*, 7(4), pp. 308-313.

4. Zeliade Systems (2009) *Quasi-explicit calibration of Gatheral's SVI model*, Zeliade White Papers.