ペンローズタイル張り上のライツアウトゲーム

片又佑美

2019年11月24日

目 次

第1章　序

第 2 章　ペンローズタイル張り

2.1　ペンローズタイルについて

ペンローズタイルとは、二種類の菱形で平面を充填したもので、イギリスの物理学者のロジャー・ペンローズが考案した。ペンローズタイルは他の平面充填とは異なり非周期的であるが、5 回対称性がある。

2.2　ペンローズタイルの構成

ペンローズタイル張りを構成するためには次のような三角形の分割、拡大操作を繰り返す。タイプ A の三角形は二辺の長さが 1 でそれに挟まれる角度が $\frac{\pi}{5}$ の三角形である。タイプ A の三角形を φ 倍に拡大し、$\varphi : 1$ に分割したものが図 2.1 である。

以下では黄金比 φ を以下のように定める。

$$\varphi^2 = \varphi + 1$$

つまり、φ は

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \tag{2.1}$$

を満たす。

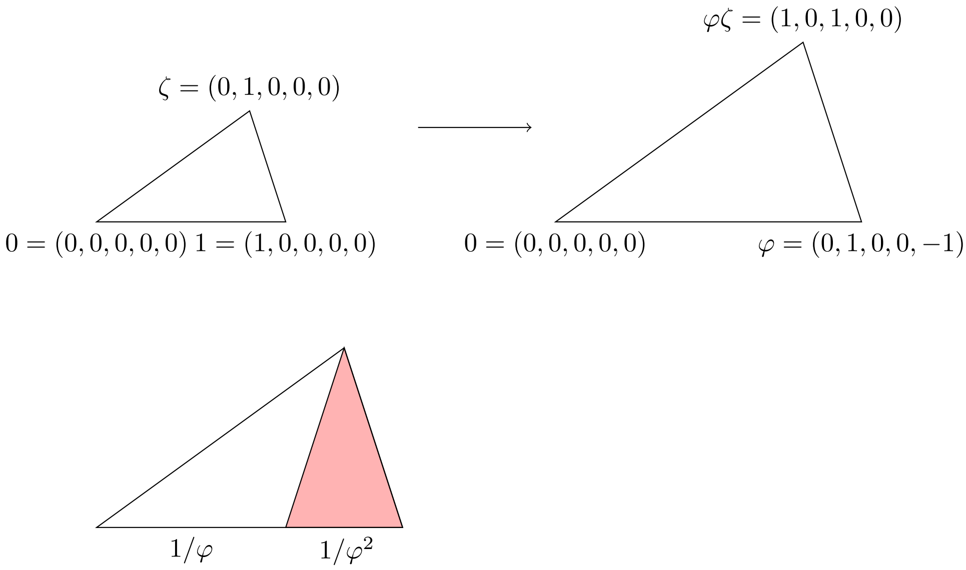

図 2.1: タイプ A の三角形の分割

そして、タイプ B の三角形は二辺の長さが 1 でそれに挟まれる角度が $\frac{3}{5}\pi$ の三角形である。タイプ B の三角形を φ 倍に拡大し、$\varphi : 1$ に分割したものが図 2.2 である。

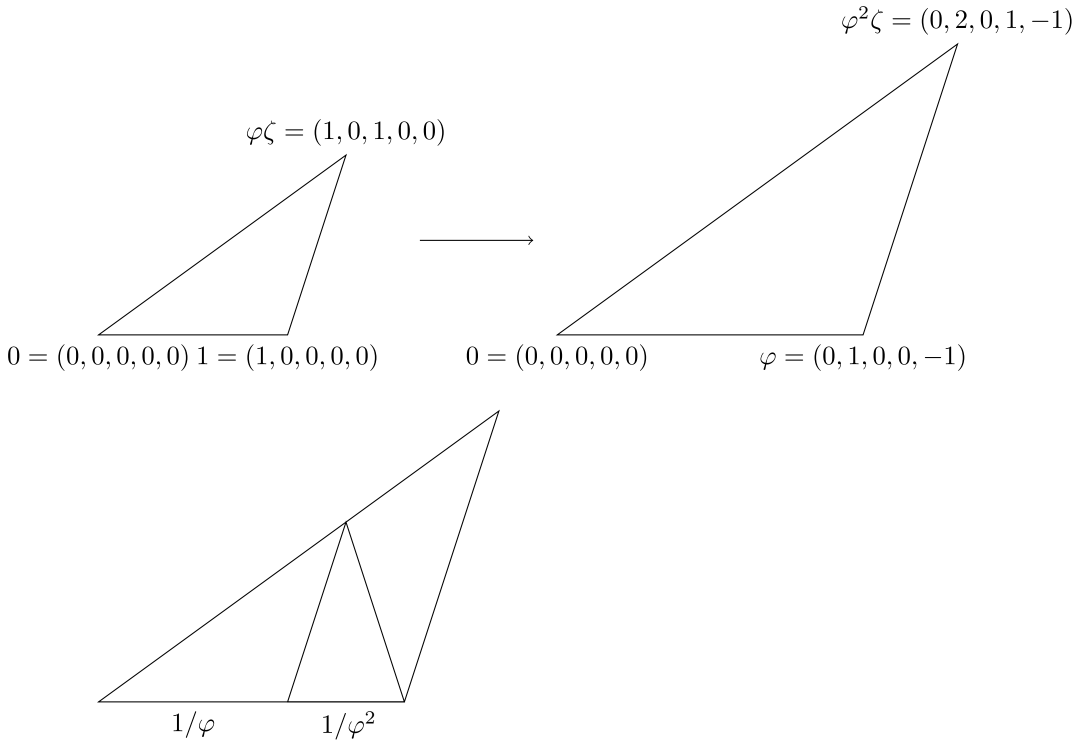

図 2.2: タイプ B の三角形の分割

平面 $\mathbb{R}^2$ を複素平面 $\mathbb{C}$ とみなすことで拡大や細分、回転といった操作を複素数同士の掛け算や足し算によって表現できる。

$$\zeta = \cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}$$

と定める。この時、関係式

$$\zeta^5 = -1, \zeta^{-1} = -\zeta^4$$

φ と ζ の関係式

$$\varphi = \zeta + \zeta^{-1}$$

が成り立つ。従って

$$\frac{1}{\varphi} = \varphi - 1 = \zeta + \zeta^{-1} - 1 \tag{2.2}$$

が成り立つ。

ペンローズタイル張りに現れるタイルの頂点の座標は整数 5 個からなるベクトル $x = (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$ を用いて

$$x_0 + x_1\zeta + x_2\zeta^2 + x_3\zeta^3 + x_4\zeta^4 \tag{2.3}$$

と表現できる。

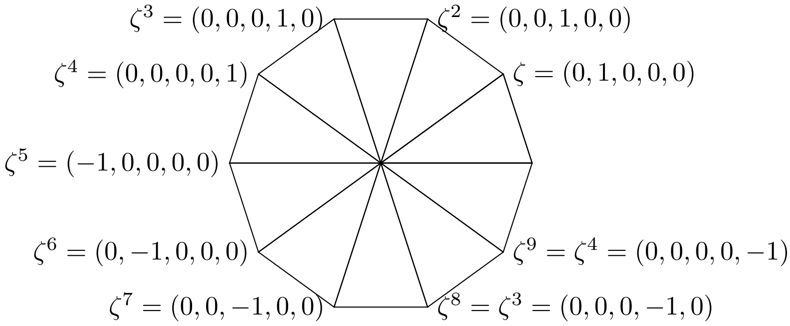

図 2.3: 各タイルの頂点座標

拡大 複素平面上の全体を φ 倍する操作である。$\varphi = \zeta + \zeta^{-1}$ なので、$x = (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$ とすると、

$$\begin{aligned}\varphi x = &= (\zeta + \zeta^{-1})x \\ &= (\zeta + \zeta^{-1})(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) \\ &= (x_1 - x_4) + (x_0 + x_2)\zeta + (x_1 + x_3)\zeta^2 + (x_2 + x_4)\zeta^3 + (x_3 - x_0)\zeta^4 \\ &\mapsto (x_1 - x_4, x_0 + x_2, x_1 + x_3, x_2 + x_4, x_3 - x_0)\end{aligned} \tag{2.4}$$

と表せる。

細分 複素数 x と y が与えられた時、それに対応する 5 次元座標を $x = (x_0, x_1, ..., x_4)$, $y = (y_0, y_1, ..., y_4)$ とすると、線分 $x - y$ を $\varphi : 1$ に内分する点は

$$\frac{x + \varphi y}{\varphi + 1} \tag{2.5}$$

と表せる。

拡大後の細分 x と y を φ 倍した点 φx と φy を $\varphi : 1$ に内分する。

$$\frac{(\varphi x) + \varphi(\varphi y)}{\varphi + 1}$$

である。$\varphi^2 = \varphi + 1$ を用いると

$$\frac{(\varphi x) + \varphi(\varphi y)}{\varphi^2} = \frac{1}{\varphi}x + y$$

と変形できる。式 (2.2) より

$$\frac{1}{\varphi}x + y = (\varphi - 1)x + y = \varphi x - x + y$$

式 (2.4) を代入すると

$$(x_1 - x_4, x_0 + x_2, x_1 + x_3, x_2 + x_4, x_3 - x_0) - x + y$$

と表せる。

タイプ A のタイルに拡大細分を 2 度施すと以下のようになる。

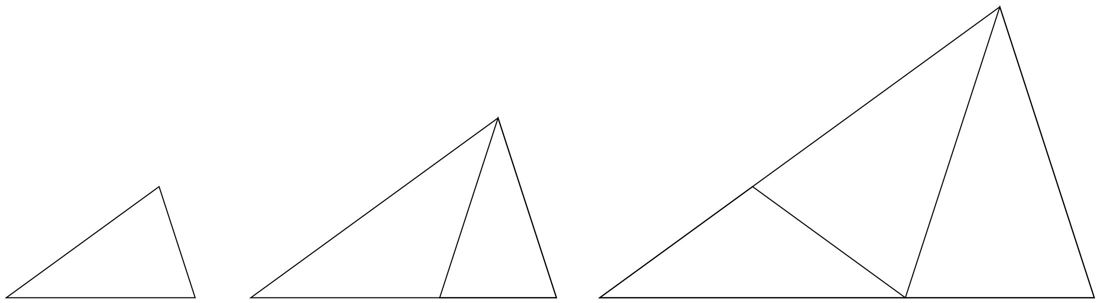

図 2.4: タイプ A のタイルに 2 度拡大細分を施した状態

そして、初期配置はタイプ A のタイルを 10 枚円形になるように並べる。ここでは、1 枚おきに向きが反転するようにタイルを配置する。つまり、タイプ A のタイルを表向き、裏向きの交互に配置する。

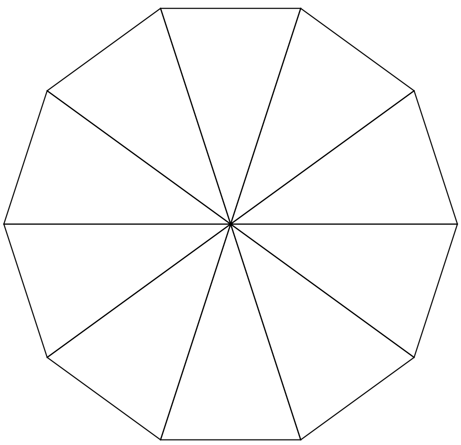

図 2.5: 初期状態

これに拡大細分を 1 回適用すると次のようになる。

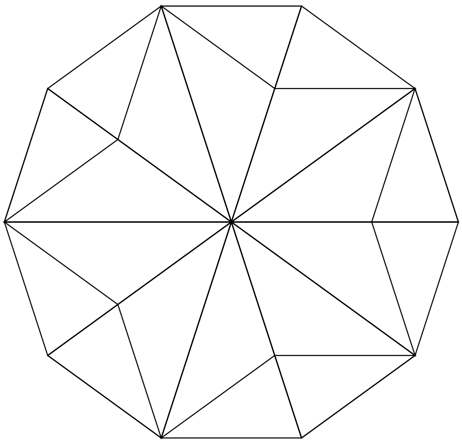

図 2.6: 初期状態に拡大細分を 1 度施した状態

第3章　ライツアウト

3.1　構成法