フィナンシャルエンジニアリング特論第 2
中間レポート

内海佑麻 [*]
(学籍番号: 82018398)

澤屋敷友一 [†]
(学籍番号: 82019220)

November 27, 2020

概要

ポートフォリオ選択モデル (1 期間モデル) を構築し，それを用いて資産運用を行う金融商品を組成し，そのパフォーマンスを検証した．

目次

[*] 連絡先 Email: uchiumi@ailab.ics.keio.ac.jp
[†] 連絡先 Email: yashiki@keio.jp

1　モデルの構築方法

1.1　ポートフォリオ選択モデル

1.1.1　Markowitz の平均分散モデル

Markowitz の平均分散モデルでは,「ポートフォリオの期待収益率 (Expected return) が一定値以上となる」という制約条件の下で,「ポートフォリオの分散を最小化する」最適化問題を考える．一般に，n コの資産で構成されるポートフォリオの場合，ポートフォリオの分散は n コの資産間の共分散行列の二次形式となるので，この最適化問題は二次計画問題 (Quadratic Programming, QP) のクラスとなり，次のように定式化される．

$$\begin{aligned} \underset{\mathbf{x}\in\mathcal{X}}{\text{minimize}} \quad & \sigma_p \left(= \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\Sigma\mathbf{x}\right) & (1) \\ \text{subject to} \quad & \bar{r}_p = \bar{\mathbf{r}}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i x_i \geq r_e & (2) \\ & \|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 & (3) \\ & x_i \geq 0 \quad (i = 1, \cdots, n) & (4) \end{aligned}$$

- $\Sigma \in \mathbb{R}^{n\times n}$ - n コの資産の共分散行列
- $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ - n コの資産の投資比率ベクトル
- $\bar{\mathbf{r}} \in \mathbb{R}^n$ - n コの資産の期待収益率ベクトル
- $x_i \in \mathbb{R}$ - 資産 i の投資比率
- $\bar{r}_i \in \mathbb{R}$ - 資産 i の期待収益率
- $r_e \in \mathbb{R}$ - 投資家の要求期待収益率
- $\bar{r}_p \in \mathbb{R}$ - ポートフォリオの期待収益率
- $\sigma_p \in \mathbb{R}$ - ポートフォリオの標準偏差

1 つ目の制約式は，ポートフォリオの期待収益率が一定値 $(= r_e)$ 以上となることを要請している．2 つ目，3 つ目の制約式はポートフォリオの定義からくる自明なものである．資産の空売りを許す場合，3 つ目の制約式を除くこともある．

1.1.2　Sharpe-ratio 最大化モデル

シャープレシオ (Sharpe ratio, SR) は，最もよく使われるポートフォリオに対するリスク調整済みパフォーマンス尺度である．あるポートフォリオのシャープレシオ θ_p は，無リスク資産の収益率 r_f とポートフォリオの期待収益率 $\bar{r}_p$，ポートフォリオの標準偏差 σ_p を用いて

$$\theta_p := \frac{\bar{r}_p - r_f}{\sigma_p} \tag{5}$$

と定義される．シャープレシオ最大化問題は，目的関数に n コの資産間の共分散行列が含まれるため，二次計画問題 (Quadratic Programming, QP) のクラスとなり，次のように定式化される．

$$\underset{\mathbf{x}\in\mathcal{X}}{\text{maximize}} \quad \frac{\bar{r}_p - r_f}{\sigma_p} \left(= \frac{\bar{\mathbf{r}}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} - r_f}{\sqrt{\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\Sigma\mathbf{x}}} \right) \tag{6}$$

$$\text{subject to} \quad \|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \tag{7}$$

$$x_i \geq 0 \quad (i = 1, \cdots, n) \tag{8}$$

- $r_f \in \mathbb{R}$ - 無リスク資産の収益率

この最適化問題の目的関数を二次形式で表すため，リスクプレミアム λ と各資産の比重ベクトル $\mathbf{w} = \mathbf{x}/\lambda$ を導入して変形すると，次のように Sharpe-ratio 最大化問題のコンパクト分解表現を得る.

$$\underset{\mathbf{w}\in\mathcal{W}}{\text{minimize}} \quad \mathbf{w}^{\mathrm{T}}\Sigma\mathbf{w} \tag{9}$$

$$\text{subject to} \quad \|\hat{\mathbf{r}}^{\mathrm{T}}\mathbf{w}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} (\bar{r}_i - r_f) w_i = 1 \tag{10}$$

$$w_i \geq 0 \quad (i = 1, \cdots, n) \tag{11}$$

- $x_i \in \mathbb{R}$ - 資産 i の投資比率
- $w_i \in \mathbb{R}$ - 資産 i の投資比率と期待リスクプレミアムの比率 $(w_i = x_i/\lambda)$
- $\lambda \in \mathbb{R}$ - ポートフォリオの期待リスクプレミアム $(\lambda = \sum_{i=1}^{n} \hat{r}_i x_i = \sum_{i=1}^{n} (\bar{r}_i - r_f) x_i)$
- $\hat{r}_i \in \mathbb{R}$ - 資産 i の期待リスクプレミアム $(\hat{r}_i = \bar{r}_i - r_f)$

ここで，定義式 $x_i = \lambda w_i$ と予算制約式 $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ に注意すると，$\lambda = 1/(\sum_{i=1}^{n} w_i)$ となるから，元問題の実行可能解 $\mathbf{x}$ とコンパクト分解表現の実行可能解 $\mathbf{w}$ の間に以下の関係が成り立つ.

$$\mathbf{x} = \lambda\mathbf{w} = \frac{\mathbf{w}}{\sum_{i=1}^{n} w_i} = \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|_1} \tag{12}$$

1.2 ソフトウェアとデータ

CVXOPT の使い方

Python の凸最適化向けパッケージ CVXOPT (`https://cvxopt.org`) を使って，この二次計画問題 (QP) を解く．CVXOPT で二次計画問題を扱う場合は，解きたい最適化問題を以下の一般化されたフォーマットに整理して，

$$\underset{\mathbf{x}}{\text{minimize}} \quad \frac{1}{2}\mathbf{x}^T P\mathbf{x} + \mathbf{q}^T\mathbf{x} \tag{13}$$

$$\text{subject to} \quad G\mathbf{x} \leq \mathbf{h} \tag{14}$$

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{15}$$

パラメータ P, q, G, h, A を計算し，*cvxopt.solvers.qp*() 関数を実行することで最適解と最適値を求める．Markowitz の平均・分散モデルの場合は,

$$P = 2 \cdot \Sigma, \quad q = \mathbf{0}, \quad G = -\mathbf{I}\_n, \quad h = -r_e, \quad A = \mathbf{1}\_n^T, \quad b = 1 \tag{16}$$

となる.[*1]

1.3 パラメータの設定

リバランス，パラメータの推定期間

2 バックテストとパフォーマンス評価

3 結論と考察

[*1] 参考 URL: `https://cvxopt.org/userguide/coneprog.html#quadratic-programming`